THÔNG TIN VỀ LUẬN VĂN THẠC SĨ

1. Họ và tên học viên: Nguyễn Thu Quyên 2. Giới tính: Nữ

3. Ngày sinh: 17/12/1984

4. Nơi sinh: Nghĩa Tân – Nghĩa Hưng – Nam Định

5. Quyết định công nhận học viên số: , ngày tháng năm

6. Các thay đổi trong quá trình đào tạo: không

7. Tên đề tài luận văn: ***"Phương trình liên hợp và ứng dụng"***

8. Chuyên ngành: Toán học tính toán 9. Mã số: 60 46 30

10. Cán bộ hướng dẫn khoa học: ***GS. TS. Đặng Quang Á***

Viện công nghệ thông tin – Viện khoa học công nghệ Việt Nam.

11. Tóm tắt các kết quả của luận văn:

Phương trình liên hợp ngày càng được sử dụng rộng rãi trong nghiên cứu toán học cũng như trong thực tiễn. Những ứng dụng của phương trình liên hợp đang dần trở thành một phần trong đời sống ngày này. Phương trình liên hợp có thể giúp các nhà khoa học đưa ra nhiều ý tưởng mới trong việc áp dụng công nghệ vào giải các bài toán cả tuyến tính và phi tuyến. Phương pháp này có thể coi là phương pháp vàng trong các ngành khoa học như cơ học lượng tử, lý thuyết hạt nhân, điều kiển tối ưu, và có thể hỗ trợ đắc lực trong giải nhiều bài toán dựa trên cơ sở phương pháp nhiễu và lý thyết độ nhạy.

Luận văn này có tên: **"Phương trình liên hợp và ứng dụng"**

Trong luận văn này tác giả đưa ra một số khái niệm cơ bản về phương trình liên hợp và ứng dụng phương trình liên hợp vào giải bài toán tràn dầu với thuật giải và sơ đồ tính toán cụ thể.

Luận văn bao gồm ba chương trình bày về một số nội dung như sau:

Chương 1: Kiến thức cơ bản về phương trình liên hợp.

Trong chương này, tác giả trình bày những kiến thức cơ bản nhất về phương trình liên hợp như khái niệm phương trình liên hợp, cách xây dựng bài toán liên hợp cho bài toán dừng và bài toán khuếch tán để làm cơ sở cho các chương sau. Trong chương này ta cũng đề cập đến hàm độ nhạy và một ví dụ thể hiện tính ưu việt của việc giải bài toán nhờ vào phương trình liên hợp.

Chương 2: Sự tồn tại, tính duy nhất và ổn định nghiệm của bài toán tràn dầu trong không gian hai chiều

Chương này trình bày về bài toán tràn dầu trong không gian hai chiều theo mô hình của Skiba trong [2] và quá trình xây dựng bài toán liên hợp cho bài toán này. Đồng thời trong chương này cũng đưa ra chứng minh rằng bài toán khuếch tán truyền tải này luôn có nghiệm, hơn nữa nghiệm này là ổn định và duy nhất.

Cho $D \subset R^2$ là miền mở có biên S. Thời điểm ban đầu $t = 0$ là lúc xảy ra sự cố tràn dầu tại vị trí ban đầu $r_0 = (x_0, y_0)$. Giả thiết lượng dầu tràn ra biển tại thời điểm t là $F(t)$, và nồng độ dầu trên mặt biển vào thời điểm t ở vị trí $r(x, y)$ là $\phi(r,t)$. Khi đó, ta có phương trình thể hiện sự lan truyền dầu trong miền D trong khoảng thời gian $(0,T)$ như sau:

$$L\phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + div(U\phi) + \sigma\phi - \nabla.\mu\nabla\phi = f(r,t), \;\; r \in D, t \in (0,T)$$
$$f(r,t) = F(t)\delta(r - r_0)$$

trong đó: μ là hệ số khuếch tán

$\delta(r - r_0)$ là độ đo Dirac tại điểm r_0

σ là hệ số phân rã của dầu do sự bốc hơi

$U(r,t) = (u(r,t), v(r,t))$ là tốc độ dòng chảy, giả sử đã biết vận tốc này dựa vào các thông tin khí tượng thuỷ văn.

Nếu như vận tốc $U(r,t)$ thoả mãn phương trình liên tục $\nabla U = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ thì phương trình $(2.1.1)$ có thể viết lại như sau:

$$L\phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + U\nabla\phi + \sigma\phi - \nabla.\mu\nabla\phi = F(t)\delta(r - r_0), \;\; r \in D, t \in (0,T).$$

Điều kiện ban đầu chọn $t = 0$ là lúc chưa có dầu tràn ra biển:

$$\phi(r,0) = 0, \; r \in D.$$

Điều kiện biên: Gọi U_n là hình chiếu của vận tốc U theo hướng pháp tuyến ngoài n tới biên S. Giả thiết biên S được chia làm hai phần S^-, S^+: $S = S^+ \cup S^-$, trong đó S^+ là phần biên ở đó dầu chảy ra khỏi D tức là có $U_n \geq 0$, và S^- là phần biên ở đó dầu chảy vào D tức là có $U_n \leq 0$. Khi đó, ta có thể thiết lập điều kiện biên như sau:

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial n} - U_n \phi = 0 \text{ trên } S^-$$

$$\mu \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ trên } S^+$$

Sử dụng đẳng thức Lagrange, ta có bài toán liên hợp như sau:

$$\begin{cases} L^* \phi^* \equiv -\dfrac{\partial \phi^*}{\partial t} - U\nabla \phi^* + \sigma \phi^* - \nabla.\mu \nabla \phi^* = p(r,t), \;\; r \in D, t \in (0,T] \\ \phi^*(r,T) = 0, \; r \in D \\ \mu \dfrac{\partial \phi^*}{\partial n} + U_n \phi^* = 0 \text{ trên } S^+ \\ \mu \dfrac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0 \; trên \;\; S^- \end{cases}$$

Nếu đặt $\tau = T - t$ ta được bài toán:

$$\begin{cases} L^*{}_{-}\phi^* \equiv \dfrac{\partial \phi^*}{\partial \tau} - U\nabla \phi^* + \sigma \phi^* - \nabla.\mu \nabla \phi^* = p(r,\tau), \;\; r \in D, t \in (0,T) \\ \phi^*(r,0) = 0, \; r \in D \\ \mu \dfrac{\partial \phi^*}{\partial n} - (-U_n)\phi^* = 0 \; on \;\; S^+ \\ \mu \dfrac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0 \; on \;\; S^-. \end{cases}$$

Định nghĩa 1: Hàm $\phi(r,t) \in H(Q)$ được gọi là nghiệm suy rộng của bài toán ban đầu nếu thoả mãn đẳng thức sau:

$$(\phi_t, g_t e^{-\delta t}) + (\mu\phi_x, g_{tx} e^{-\delta t}) + (\mu\phi_y, g_{ty} e^{-\delta t}) + (\sigma\phi_x, g_t e^{-\delta t}) +$$
$$\int_0^T \int_{S^+} U_n \phi g_t e^{-\delta t} dS dt + (u\phi_x, g_t e^{-\delta t}) + (v\phi_y, g_t e^{-\delta t}) = (f, g_t e^{-\delta t})$$

với mọi $g(r,t) \in V,\ \delta > 0$.

Định lí 1: Giả thiết $F(t) \in L_2(0,T)$, vận tốc lan truyền dầu thoả mãn phương trình liên tục: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ và có:

$$\max_{\bar{Q}} \{\mu, |\mu_t|, \sigma, |\sigma_t|, |U|, |(U_n)_t|\} = \beta < +\infty, \qquad \min_{\bar{Q}} \{\mu, \sigma\} = \alpha > 0$$

Khi đó, bài toán ban đầu có nghiệm suy rộng duy nhất $\phi(r,t) \in H(Q)$ ổn định với các biến và với điều kiện đầu.

Hệ quả 1 Cho $p(r,t) \in L_2(Q)$, các hệ số của phương trình liên hợp $(2.1.9)$ thoả mãn định lý $(2.3.1)$. Khi đó trong không gian $H(Q)$ phương trình liên hợp $(2.1.9)$ cũng có nghiệm suy rộng duy nhất ổn định với sự biến đổi của hàm vế phải và điều kiện ban đầu.

Chương 3: Giải số bài toán tràn dầu

Chương này đề cập đến phương pháp giải số để giải hai bài toán ngược và bài toán thuận cả trong không gian một và hai chiều. Bài toán thuận là ta giải bài toán ban đầu để tìm nồng độ dầu trên biển theo vị trí và thời gian. Bài toán ngược là sử dụng bài toán liên hợp để xác định vị trí và thời gian xảy ra sự cố tràn dầu khi phát hiện ra một vệt dầu trên biển. Trước khi đi vào xây dựng lược đồ giải số trong hai trường hợp không gian một và hai chiều, ta trình bày phương pháp xác định vị trí và thời gian tràn dầu để làm cơ sở giải bài toán ngược.

Mệnh đề 1: Lời giải của bài toán gốc và bài toán liên hợp thoả mãn quan hệ sau:

$$\phi^*(r_0, T-\tau_0) = \phi(r_1, T_d)$$

Mệnh đề 2 Tất cả các đường đồng mức $\phi^*_{r_i}(r,\tau_0) = c_i, i = 1,...,k$ đều cắt nhau tại điểm r_0.

Thật vậy, ta có $\phi^*_{r_i}(r_0,\tau_0) = \phi(r_i, T_d)$ và $\phi(r_i, T_d) = c_i,\ i = 1,...,k$ nên suy ra $\phi^*_{r_i}(r_0,\tau_0) = c_i$ với $i = 1,...,k$ hay mọi đường đồng mức $\phi^*_{r_i}(r,\tau_0) = c_i, i = 1,...,k$ đều đi qua điểm r_0.

Mệnh đề 3 Gọi r_{max} là vị trí có mật độ ô nhiễm cao nhất, tức là:

$$\phi(r_{\max}, T_d) = \max_{r\in\Omega} \phi(r, T_d).$$

Khi đó đường đồng mức $\phi^*_{r_{\max}}(r,\tau_0) = \phi(r_{\max}, T_d)$ co lại điểm r_0.

Mệnh đề 4

Để giải bài toán liên hợp với vế phải $p(r,t) = \delta(T_d - t)1_\Omega(r)$, ta có thể sử dụng đẳng thức $\phi^*(r_0, t_0) = 1$.

Từ các mệnh đề trên ta ta suy ra cách giải bài toán tràn dầu.

Ngày 17 tháng 12 năm 2013

Học viên

(Kí và ghi rõ họ tên)

Nguyễn Thu Quyên

INFORMATION ON MASTER'THESIS

1. Full name: **Nguyễn Thu Quyên** 2. Sex: female

3. Date of birth:17/12/1984

4. Place of birth: Nghia Tan – Nghia Hung – Nam Dinh

5. Admission decision number: Dated

6. Changes in academic process: no

7. Official thesis title: ***"Adjoint equations and applications of adjoint equations"***

8. Major: Applied Mathematics 9. Code: 60 46 30

10. Supervisors: ***Prof*. *Dr. Dang Quang A***

11. Summary of the finding of the thesis:

Adjoint equations are increasingly widespread throughout mather and its applications. The statements of problems using adjoint equations which gradually became part of out life. Adjoint equations are capable to bring fresh ideas to various problems of new technology based on linear and nonlinear process. They became part of golden fund of science through quantum machanics, theory of nuclear reactors, optimal control, and helped in solving many problems on the basic of pertubation method and sensitivity theory.

My research is about ***"Adjoint equations and application of adjoint equations"***

My thesis introduces some of basic concepts about adjoint equations, and their application of oil spills problem includes algorithms and coputing to solving.

Chapter 1: Some basic concepts about adjoint equations.

This chapter covers simple problems of mathematical physics and adjoint problems theory as applied differential equations, and fomulates the basic principles of pertubation theory. Lagrange's identity constitutes the principal mathematic tool to construction of adjoint equations.

Chapter 2: Mathematics of oil spills: existence, uniqueness and stability of solution.

In this chapter, The thesis mentions main problem obtained in Skiba [2]. Let $r_0(x_0, y_0)$ be the site of an accident with an oil tanker in a two – dimentional open sea domain D with a smooth boundary S, and let $t=0$ be the time of accident. Let $F(t)$ be the rate of oil spilling in unit time from the damaged tanker, and $\phi(r,t)$ the oil slick thickness on the sea surface at a point $r(x,y)$ at time $t>0$. The oil slick propagation in D and time interval $(0,T)$ is described by the transport equation:

$$L\phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} + div(U\phi) + \sigma\phi - \nabla.\mu\nabla\phi = f(r,t), \quad r \in D, t \in (0,T)$$
$$f(r,t) = F(t)\delta(r-r_0)$$

Where $\mu(r,t)$ is the diffusion coefficient, ∇ is the two-dimensional gradient, and δ(r − r0) is the Dirac mass at the accident point r0. The parameter σ ≥ 0 characterizes the decay of ϕ(r, t) due to evaporation which is the most dominant weathering process during the first several days.

The velocity U(r, t) = (u(r, t), v(r, t)) of the oil propagation is assumed to be known. This velocity field can be calculated by using the climatic (seasonal or monthly) sea surface currents and winds, or the real currents and winds from dynamic models.

In case the velocity field satisfies the continuity equation

$$\nabla.U = \frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 0$$

the advection–diffusion is often written in the form :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U\nabla\phi + \sigma\phi - \nabla.\mu\nabla\phi = f(r,t), \qquad r \in D, t \in (0,T)$$

The initial condition at t = 0 is simply the absence of oil on the sea surface:

$$\phi(r,0) = 0, \quad r \in D$$

To obtain a well-posed problem according to Hadamard, care is required in setting conditions at the boundaries. Let Un be the projection of the velocity U on the outward normal n to the boundary S. We divide S into the outflow part S+,where $U_n \geq 0$(oil flows out of the domain D) and the inflow part S^- where $U_n > 0$ (oil flows into D). The boundary conditions are:

$\mu \frac{\partial \phi}{\partial n} - U_n\phi = 0$ at inflow boundary/coastline S−,

$\mu \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ at outflow boundary S+.

Using the Lagrange identity, the adjoint problem for the main problems in the domain D and the time interval (0, T) can be written as

$$\begin{cases} L^* \phi^* \equiv -\frac{\partial \phi^*}{\partial t} - U\nabla\phi^* + \sigma\phi^* - \nabla.\mu\nabla\phi^* = p(r,t), \;\; r \in D, t \in (0,T] \\ \phi^*(r,T) = 0, \; r \in D \\ \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial n} + U_n \phi^* = 0 \; on \;\; S^+ \\ \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0 \; on \;\; S^- \end{cases}$$

Now, we introduce τ = T − t as the reversed time then the adjoint problem becomes

$$\begin{cases} L^*_{-} \phi^* \equiv \frac{\partial \phi^*}{\partial \tau} - U\nabla\phi^* + \sigma\phi^* - \nabla.\mu\nabla\phi^* = p(r,\tau), \;\; r \in D, t \in (0,T) \\ \phi^*(r,0) = 0, \; r \in D \\ \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial n} - (-U_n)\phi^* = 0 \; on \;\; S^+ \\ \mu \frac{\partial \phi^*}{\partial n} = 0 \; on \;\; S^-. \end{cases}$$

Theorem 1: Let $F(t) \in L_2(0,T)$. Let the oil velocity U satisfy continuity equation and let:

$$\max_{\bar{Q}} \{\mu, |\mu_t|, \sigma, |\sigma_t|, |U|, |(U_n)_t|\} = \beta < +\infty, \qquad \min_{\bar{Q}} \{\mu, \sigma\} = \alpha > 0$$

Then the oil transport problem has a unique generalized solution $\phi(r,t)$ in the space $H(Q)$, that is stable to variation in the forcing and initial conditions.

Corollary: Let $p(r,t) \in L_2(Q)$ and the coefficients of the adjoint problem satisfy all the requirements of the Theorem 1. Then in the space $H(Q)$, the adjoint problem has the only generalized solution stable to variations (errors) in the forcing and the initial conditions.

Chapter 3: Numerical Algorithms for Simulation of oil pollution

Proposition 1 For the solution of the main problem and the adjoint problem, there holds the relation $\phi^*(r_0, T-\tau_0) = \phi(r_1, T_d)$

Proposition 2 All iso-contours $\phi^*_{r_i}(r, \tau_0) = c_i, i = 1,...,k$ intersect at the point r_0.

Proposition 3 Let $r_{\max}$ be the point in the pollution plume with maximal concentration, i.e.,

$$\phi(r_{\max}, T_d) = \max_{r \in \Omega} \phi(r, T_d).$$

Then, the iso-contour $\phi^*_{r_{\max}}(r, \tau_0) = \phi(r_{\max}, T_d)$ shrinks to a point r_0.

Proposition 4 For the solution of the adjoint problem with the above right-hand side, there holds the equality $\phi^*(r_0, t_0) = 1$

Date:01/12/2012

Signature:

Full name: Nguyen Thu Quyen