THÔNG TIN VỀ LUẬN VĂN THẠC SĨ

1. Họ và tên học viên:Trần Thị Thúy Quỳnh 2. Giới tính: Nữ
3. Ngày sinh: 16/09/1987 4. Nơi sinh: Hà Nam
5. Quyết định công nhận học viên số:
6. Các thay đổi trong quá trình đào tạo: Điều chỉnh tên đề tài ngày 25 tháng 04 năm 2014.
7. Tên đề tài luận văn: **Tập ngẫu nhiên và các vấn đề liên quan**
8. Chuyên ngành : Lý thuyết xác suất và thống kê Toán học
9. Mã số: 60 46 01 06
10. Cán bộ hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Thịnh – Trường Đại học Khoa học Tự nhiên- Đại học Quốc Gia Hà Nội
11. Tóm tắt các kết quả của luận văn:

Luận văn trình bày về tập ngẫu nhiên và hàm công suất. Luận văn được hoàn thành với các kết quả của kỳ vọng lựa chọn, luật mạnh số lớn, định lý giới hạn trung tâm đối với các tập ngẫu nhiên.

Luận văn **" Tập ngẫu nhiên và các vấn đề liên quan"**
gồm năm chương :

Chương 1: Tập đóng ngẫu nhiên và hàm công suất

Trong chương này, chúng tôi trình bày khái niệm cơ bản về lý thuyết tập ngẫu nhiên, hàm công suất và các định lý quan trọng. Kí hiệu $\mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{G}$ lần lượt là họ các tập con đóng, họ các tập con compact, họ các tập mở của không gian $\mathbb{E}$. Cố định không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathfrak{F}, \boldsymbol{P})$.

1. Định nghĩa*(Tập đóng ngẫu nhiên).* Một ánh xạ $X : \Omega \mapsto \mathcal{F}$ được gọi là một tập đóng ngẫu nhiên nếu với mọi tập compact K trong $\mathbb{E}$ ta có

$$\{w : X \cap K \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F}$$

2. Định nghĩa *(Hàm công suất).* Hàm $T_X : \mathcal{K} \mapsto [0, 1]$ được cho bởi

$$T_X(K) = \boldsymbol{P}\{X \cap K \neq \emptyset\}, \quad K \in \mathcal{K}$$

được gọi là hàm công suất của X. Chúng ta viết $T(K)$ thay cho $T_X(K)$.

3. Định lý *(Định lý Choquet):* Cho $\mathbb{E}$ là không gian LCHS. Một hàm $T : \mathcal{K} \mapsto [0, 1]$ sao cho $T(\emptyset) = 0$ là hàm công suất của một tập đóng ngẫu nhiên (cần thiết là duy nhất) trên $\mathbb{E}$ nếu và chỉ nếu T là nửa liên tục trên và đan dấu đầy đủ.

4. Định nghĩa *(Lựa chọn đo được):* Một yếu tố ngẫu nhiên ξ với giá trị trong $\mathbb{E}$ được gọi là một lựa chọn (đo được) của X nếu $\xi(w) \in X(w)$ với hầu hết tất cả $w \in \Omega$. Họ tất cả sự lựa chọn của X được kí hiệu bởi $\mathcal{S}(X)$.

5. Định lý *(Định lý đo được cơ bản cho hàm đa trị):* Cho $\mathbb{E}$ là không gian metric tách được. Xét các phát biểu sau:

(1) $X^{-}(B) \in \mathfrak{F}$ với mọi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{E})$.

(2) $X^{-}(F) \in \mathfrak{F}$ với mọi $F \in \mathcal{F}$.

(3) $X^{-}(G) \in \mathfrak{F}$ với mọi $G \in \mathcal{G}$, tức là X là đo được Effros.

(4) Hàm khoảng cách $\rho(y, X) = \inf\{\rho(y, x) : x \in X\}$ là một biến ngẫu nhiên với mỗi $y \in \mathbb{E}$.

(5) Tồn tại một dãy $\{\xi_n\}$ của sự lựa chọn đo được của X sao cho

$$X = cl\{\xi_n, n \geq 1\}$$

(6) Đồ thị của X

$$Graph(X) = \{(w, x) \in \Omega \times \mathbb{E} : x \in X(w)\}$$

thuộc $\mathfrak{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{E})$ ($\sigma-$ đại số tích của $\mathcal{F}$ và $\mathcal{B}(\mathbb{E})$).

Khi đó ta có các kết quả sau:

(i) (1) => (2) => (3) <=> (4) => (6).

(ii) Nếu $\mathbb{E}$ là không gian Polish (tức là $\mathbb{E}$ là đầy đủ) thì (3) <=> (5).

(iii) Nếu $\mathbb{E}$ là không gian Polish và không gian xác suất $(\Omega, \mathfrak{F}, \boldsymbol{P})$ là đầy đủ thì (1)-(6) là tương đương.

Chương 2: Kỳ vọng lựa chọn

Trong chương này chúng tôi trình bày về kỳ vọng lựa chọn, tính chất của lựa chọn, sự hội tụ đơn điệu và hội tụ yếu

1. Định nghĩa*(Kỳ vọng lựa chọn).* Kỳ vọng lựa chọn của X là bao đóng của tập tất cả các kỳ vọng của lựa chọn khả tích, tức là

$$\boldsymbol{E}X = cl\{\boldsymbol{E}\xi : \xi \in \mathcal{S}^1(X)\}$$

2. Định lý*(Phân phối của tập ngẫu nhiên theo nghĩa kỳ vọng lựa chọn của chúng).* Cho X và Y là các tập đóng ngẫu nhiên lồi khả tích bị chặn xấp xỉ Hausdoff.

(i) Một yếu tố ngẫu nhiên ξ là một lựa chọn khả tích của X nếu và chỉ nếu $\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A\xi) \in \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A X)$ với mọi $A \in \mathfrak{F}$. Nếu không gian đối ngẫu $\mathbb{E}^*$ là tách được thì phát biểu xảy ra với mỗi tập đóng ngẫu nhiên khả tích bị chặn mà không giả sử rằng X là xấp xỉ Hausdoff.

(ii) X=Y h.c.c nếu và chỉ nếu $\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A X) = \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A Y)$ với mọi $A \in \mathfrak{F}$.

3. Định lý*(Kỳ vọng của dãy hội tụ yếu).* Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ và X là các tập compact lồi ngẫu nhiên trong $\mathbb{R}^d$ sao cho $\alpha = \sup_{n\geq 1} ||X_n||$ là khả tích. Nếu X_n là hội tụ yếu tới X khi $n \to \infty$ thì $\boldsymbol{E}X_n$ hội tụ tới $\boldsymbol{E}X$ trong metric Hausdoff và độ đo Lebesgue của $\boldsymbol{E}X_n$ hội tụ tới độ đo Lebesgue của $\boldsymbol{E}X$ khi $n \to \infty$. Phát biểu xảy ra nếu X_n và X không nhất thiết là lồi và không gian xác suất là phi nguyên tử.

Chương 3: Luật mạnh số lớn đối với tập ngẫu nhiên

Trong chương này chúng tôi giới thiệu về luật mạnh số lớn đối với tập ngẫu nhiên trong không gian Euclidean và trong không gian Banach.

1. Định lý *(Luật mạnh số lớn đối với tập ngẫu nhiên trong $\mathbb{R}^d$).* Cho $X, X_1, X_2, \cdots$ là các tập compact ngẫu nhiên bị chặn khả tích trong $\mathbb{R}^d$ và cho $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$. Khi đó

$$\rho_H(n^{-1}S_n, \boldsymbol{E}X) \to 0 h.c.c \quad \text{khi} \quad n \to \infty \qquad (3.4)$$

2. Định lý *(Luật mạnh số lớn đối với tập ngẫu nhiên trong không gian Banach).* Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các tập ngẫu nhiên bị chặn khả tích xấp xỉ Hausdoff độc lập có cùng phân phối trong không gian Banach $\mathbb{E}$. Khi đó, $n^{-1}(X_1 + \cdots + X_2)$ hội tụ h.c.c trong metric Hausdoff tới một tập lồi compact mà là kỳ vọng lựa chọn của $co(X_1)$.

Chương 4: Định lý giới hạn trung tâm cho trung bình Minkowski

Trong chương này chúng tôi trình bày về định lý giới hạn trung tâm đối với tập ngẫu nhiên trong không gian Euclidean và trong không gian Banach.

1. Định lý *(Định lý giới hạn trung tâm cho các tập ngẫu nhiên trong $\mathbb{R}^d$).* Cho $X, X_1, X_2, \cdots$ là các tập ngẫu nhiên bình phương khả tích độc lập có cùng phân phối. Khi đó

$$\sqrt{n}\rho_H(n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n), \boldsymbol{E}X) \to \sup_{u \in B_1} ||\zeta(u)||, \qquad (4.2)$$

trong đó $\{\zeta(u), u \in B_1\}$ là hàm ngẫu nhiên có tâm Gaussian trong $C(B_1)$ với covariance $\boldsymbol{E}[\zeta(u)\zeta(v)] = \Gamma_X(u, v)$.

2. Định lý *(Định lý giới hạn trung tâm cho các tập ngẫu nhiên trong không gian Banach).* Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các tập compact lồi ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối trong không gian Banach tách được $\mathbb{E}$ sao cho $\boldsymbol{E}||X||^2_{g.L} < \infty$ và

$$\int_0^1 H^{1/2}(B_1^*, \rho_{g,L}, \varepsilon) d\varepsilon < \infty$$

Khi đó $\sqrt{n}\rho_H(\overline{X}_n, \boldsymbol{E}X_1)$ hội tụ theo phân phối tới $||\zeta||_\infty$, trong đó ζ là yếu tố ngẫu nhiên Gaussian có tâm trong $C(B_1^*)$ với covariance được cho bởi

$$\Gamma_X(u, v) = \boldsymbol{E}[h(X, u)h(X, v)] - \boldsymbol{E}h(X, u)\boldsymbol{E}h(X, v)$$

với $u, v \in B_1^*$.

Chương 5: Một số kết quả xa hơn liên quan tới tổng Minkowski

Trong chương này chúng tôi giới thiệu về luật loga lặp, định lý ba chuỗi, định lý ergodic.

1. Định lý(*Luật loga lặp*).Luật loga lặp cho tập compact ngẫu nhiên bình phương khả tích X trong $\mathbb{R}^d$ phát biểu như sau

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2loglogn}} \rho_H(\overline{X}_n, \boldsymbol{E}co(X)) \leq \sqrt{\boldsymbol{E}||X||^2}$$

trong đó, $\overline{X}_n$ là kí hiệu trung bình Minkowski của các tập ngẫu nhiên độc lập $X_1, \cdots, X_n$ mà có cùng phân phối với X.

2.Định lý*(Định lý ba chuỗi).* Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các tập ngẫu nhiên compact độc lập. Khi đó, $\sum X_n$ hội tụ h.c.c khi và chỉ khi ba chuỗi sau

$$\sum \boldsymbol{P}\{||X_n|| > c\}$$

$$\sum \boldsymbol{E}X_n(c)$$

$$\sum Var_A X_n(c)$$

hội tụ với $c > 0$ nào đó.

3.Định lý*(Định lý ergodic).* Cho $\boldsymbol{X}$ là một họ cộng tính dưới, dừng trên của các tập compact lồi ngẫu nhiên sao cho $\boldsymbol{E}||X_{0,1}|| < \infty$. Khi đó tồn tại một tập compact lồi ngẫu nhiên X_∞ sao cho $\rho_H(n^{-1}X_{0,n}, X_\infty) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Hà Nội, 08 tháng 10 năm 2014

Học viên

Trần Thị Thúy Quỳnh

INFORMATION ON MASTER'THESIS

1. Full name: Tran Thi Thuy Quynh 2. Sex: female
3. Date of birth: 16/09/1987 4. Place of birth: Ha Nam
5. Admission decision number: Dated
6. Changes in academic process: Adjusted subject name on april 25, 2014
7. Official thesis title: **"Random sets and related problems"**
8. Major: Probability and statistic 9. Code: 60 460 106
10. Supervisors: Pr. Dr Nguyen Thinh
11. Summary of the finding of the thesis:

Thesis present random sets and capacity functionals. The course finishes with results of the selection expectation, strong law of large number, the central limit theorem for random sets.

My research is about **"Random sets and related problems"**
consist of five chapters

Chapter 1: Random closed sets and capacity functionals

In this chapter, we present the basic concepts of random sets, capacity functionals and the important theorem. $\mathcal{F}, \mathcal{K}, \mathcal{G}$ denote respectively the family of closed subsets, all compact and open subsets of space $\mathbb{E}$. Let us fix a complete probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \boldsymbol{P})$.

1. Definition *(Random closed set).* A map $X : \Omega \mapsto \mathcal{F}$ is called a random closed set if, for every compact set K in $\mathbb{E}$,

$$\{w : X \cap K \neq \emptyset\} \in \mathfrak{F}$$

2. Definition*(Capacity functionals).* A functionals $T_X : \mathcal{K} \mapsto [0, 1]$ given by

$$T_X(K) = \boldsymbol{P}\{X \cap K \neq \emptyset\}, \quad K \in \mathcal{K}$$

is said to be the capacity functionals of X. We write $T(K)$ instead of $T_X(K)$.

3. Theorem*(Choquet theorem).* Cho $\mathbb{E}$ là không gian LCHS. A functionals $T : \mathcal{K} \mapsto [0, 1]$ such that $T(\emptyset) = 0$ is the capacity functionals of a (necessarily unique) random closed set in $\mathbb{E}$ if and only if T is upper semicontinous and completely alternating.

4. Definition*(Measurable selection).* A random element ξ with values in $\mathbb{E}$ is called a (measurable) selection of X if $\xi(w) \in X(w)$ for almost all $w \in \Omega$. The family of all selection of X is denoted by $\mathcal{S}(X)$.

5. Theorem*(Fundamental measurability theorem for multifunctions).* Let $\mathbb{E}$ be a separable metric space. Consider the following statement.

indent (1) $X^-(B) \in \mathfrak{F}$ for every $B \in \mathcal{B}(\mathbb{E})$.

(2) $X^-(F) \in \mathfrak{F}$ for every $F \in \mathcal{F}$.

(3) $X^-(G) \in \mathfrak{F}$ for every $G \in \mathcal{G}$, i.e. X is Effros measurable.

(4) The distance function $\rho(y, X) = \inf\{\rho(y, x) : x \in X\}$ is a random variable for each $y \in \mathbb{E}$.

(5) There exists a sequence $\{\xi_n\}$ of measurable selections of X such that

$$X = cl\{\xi_n, n \geq 1\}.$$

(6) The graph of X

$$Graph(X) = \{(w, x) \in \Omega \times \mathbb{E} : x \in X(w)\}$$

belong to $\mathfrak{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{E})$ (the product $\sigma-$ of $\mathcal{F}$ and $\mathcal{B}(\mathbb{E})$).
Then the following results hold.

(i) (1) => (2) => (3) <=> (4) => (6).

(ii) If $\mathbb{E}$ is Polish space (i.e. $\mathbb{E}$ is also complete) then (3) $<=>$ (5).

(iii) If $\mathbb{E}$ is Polish space and the probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \boldsymbol{P})$ is complete, then (1)-(6) are equivalent.

Chapter 2: The selection expectation

In this chapter, we present the selection expectation, properties of selections, monotone and weak convergence.

1. Definition*(Selection expectation).* The selection expectation of X is the closure of the set of all expectation of integrable selection, i.e.

$$\boldsymbol{E}X = cl\{\boldsymbol{E}\xi : \xi \in \mathcal{S}^1(X)\}$$

2. Theorem*(Distributions of random sets in terms of their selection expectations).* Let X and Y be Hausdoff approximable integrable bounded random convex closed sets.

(i) A random element ξ is an integrable selection of X if and only if $\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A\xi) \in \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A X)$ forr all $A \in \mathfrak{F}$. If the dual space $\mathbb{E}^*$ is separable, then the statement holds for each integrably bounded random closed set X without assuming that X is Hausdoff approximable.

(ii) $X = Y$ a.s if and only if $\boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A X) = \boldsymbol{E}(\mathbf{1}_A Y)$ for all $A \in \mathfrak{F}$.

3. Theorem*(Expectations of weakly convergent sequence).* Let $\{X_n, n \geq 1\}$ and X be random convex compact sets in $\mathbb{R}^d$ such that $\alpha = \sup\limits_{n \geq 1} ||X_n||$ is integrable. If X_n weakly converges to X as $n \to \infty$, then $\boldsymbol{E}X_n$ converges to $\boldsymbol{E}X$ in the Hausdoff metric and the Lebesgue measure of $\boldsymbol{E}X_n$ converges to the Lebesgue measure of $\boldsymbol{E}X$ as $n \to \infty$. The statement holds if X_n and X are not necessarily convex and probability space is non-atomic.

Chapter 3: Strong law of large number for random sets

In this chapter, we present strong law of large number for random sets in Euclidean space and Banach space.

1. Theorem*(SLLN for random sets in $\mathbb{R}^d$).* Let $X, X_1, X_2, \cdots$ be i.i.d integrably bounded random compact sets in $\mathbb{R}^d$ and let $S_n = X_1 + \cdots + X_n, n \geq 1$. Then

$$\rho_H(n^{-1}S_n, \boldsymbol{E}X) \to 0 h.c.c \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

2. Theorem*(SLLN for random sets in Banach space).*Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of i.i.d. Hausdoff approximable integrably bounded random sets in a Banach space $\mathbb{E}$. Then $n^{-1}(X_1 + \cdots + X_2)$ converges almost surely in the Hausdoff metric to a compact convex set being the selection expectation of $co(X_1)$.

Chapter 4: The central limit theorem for Minkowski averages

In this chapter, we present the central limit theorem for random sets in Euclidean space and Banach space.

1. Theorem*(CLT for random sets in $\mathbb{R}^d$).* Let $X, X_1, X_2, \cdots$ be i.i.d. square integrable random sets. Then

$$\sqrt{n}\rho_H(n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n), \boldsymbol{E}X) \to \sup_{u \in B_1} ||\zeta(u)||, \quad (4.2)$$

where $\{\zeta(u), u \in B_1\}$ is a centred Gaussian random function in $C(B_1)$ with covariance $\boldsymbol{E}[\zeta(u)\zeta(v)] = \Gamma_X(u, v)$.

2. Theorem*(CLT for random sets in Banach space).* Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of i.i.d. random convex compact sets in a separable Banach space $\mathbb{E}$ such that $\boldsymbol{E}||X||^2_{g.L} < \infty$ and

$$\int_0^1 H^{1/2}(B_1^*, \rho_{g,L}, \varepsilon) d\varepsilon < \infty$$

Then $\sqrt{n}\rho_H(\overline{X}_n, \boldsymbol{E}X_1)$ converges in distribution to $||\zeta||_\infty$, where ζ is a centred Gaussian random element in $C(B_1^*)$ with the covariance given by

$$\Gamma_X(u, v) = \boldsymbol{E}[h(X, u)h(X, v)] - \boldsymbol{E}h(X, u)\boldsymbol{E}h(X, v)$$

for $u, v \in B_1^*$.

Chapter 5: Further results related to Minkowski sums

In this chapter, we present law of iterated logarithm, three series theorem, ergodic theorem.

1. Theorem*(Law of iterated logarithm).* The law of iterated logarithm for a square integrable random compact set X in $\mathbb{R}^d$ states

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2loglogn}} \rho_H(\overline{X}_n, \boldsymbol{E}co(X)) \leq \sqrt{\boldsymbol{E}||X||^2}$$

where $\overline{X}_n$ denotes the Minkowski averages of i.i.d. random sets $X_1, \cdots, X_n$ having the same distribution as X.

2. Theorem*(Three series theorem).* Let $\{X_n, n \geq 1\}$ be a sequence of independent random compact sets. Then $\sum X_n$ converges almost surely if only if the following three series

$$\sum \boldsymbol{P}\{||X_n|| > c\}$$

$$\sum \boldsymbol{E}X_n(c)$$

$$\sum Var_A X_n(c)$$

converge for some $c > 0$.

3. Theorem*(Ergodic theorem).* Let $\boldsymbol{X}$ be a subadditive, superstationary family of random convex compact sets such that $\boldsymbol{E}||X_{0,1}|| < \infty$. Then there exists a random convex compact set X_∞ such that $\rho_H(n^{-1}X_{0,n}, X_\infty) \to 0$ as $n \to \infty$.

Date : 08/ 10/ 2014

Signature

Tran Thi Thuy Quynh