Mục lục

MỞ ĐẦU

Xuất phát từ ý tưởng của Brendle và Nagel khi nghiên cứu về phương trình vi phân có trễ với nhiễu dạng

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,0) = Bu(t,0) + \Phi u(t,.), \quad t \geqslant 0 \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,s) = \frac{\partial}{\partial s}u(t,s) + A(s)u(t,s), \quad t \geqslant 0 \geqslant s \tag{0.2}$$

$$u(0,s) = u_0(s) \quad s \leqslant 0; \quad u_0(s) \quad \text{là hàm cho trước.}$$

Trong đó, hàm $u(.,.)$ lấy giá trị trong không gian Banach X, B là một toán tử tuyến tính trên X, và Φ gọi là toán tử trễ, là một toán tử tuyến tính từ một không gian các hàm lấy giá trị trên X trên $\mathbb{R}_-$ vào X. Cuối cùng, $A(s)$ là một toán tử (không bị chặn) trên X mà đối với nó bài toán Cauchy không ôtônôm

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -A(t)x(t), \quad t \leqslant s \leqslant 0 \\ x(s) = x_s \in X \end{cases} \tag{0.3}$$

là đặt chỉnh với cận mũ. Cụ thể là tồn tại một họ tiến hóa lùi bị chặn mũ $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ giải (0.3), tức là nghiệm của (0.3) được cho bởi $x(t) = U(t,s)x(s)$ với $t \leqslant s \leqslant 0$.

Những phương trình này mô tả hệ với trễ (0.1) tác động lên một quá khứ không otonom (0.2) và được giải bằng việc sử dụng phương pháp nửa nhóm trong không gian $C_0(\mathbb{R}_-, X)$ trong [1] hoặc trong không gian $L^p(\mathbb{R}_-, X)$ trong [4]

Trong luận văn này, ta nghiên cứu phương trình vi phân riêng có trễ (DPDE's) với quá khứ không ôtônôm (phương trình (0.1) và (0.2) ở trên) và phương trình vi phân riêng có trễ không ôtônôm (xem phương trình (3.1) ở dưới).

Cấu trúc luận văn được chia làm 3 chương cùng với phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Các kết quả trong chương 1 và chương 2 được lấy từ [22]. Trong đó, ta sử dụng lý thuyết nửa nhóm tiến hóa được phát triển bởi Chicone và Latushkin [2], Schnaubelt [3,chap VI.9] và những người khác (xem [11,13]) để xác định một toán tử vi phân trừu tượng G trên $C_0(\mathbb{R}_-, X)$ (xem định nghĩa 2.4). Sau đó ta sử dụng toán tử trễ Φ (và toán tử B) để định nghĩa một thu hẹp $G_{B,\Phi}$ của G. Với thu hẹp này ta tính toán một cách chi tiết giải thức của nó và chỉ ra đánh giá Hille - Yosida. Theo cách này ta thu được một nửa nhóm $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ mà giải (0.1) và (0.2) một cách dễ dàng

(xem [1, mục 1 và 2]). Ưu điểm của phương pháp này là sử dụng mô tả trực tiếp của các giải thức của các toán tử sinh nghĩa là thu được các đánh giá ổn định rõ ràng. Cụ thể là, ta có thể chỉ ra rằng ổn định mũ và nhị phân mũ của nửa nhóm này, do vậy các nghiệm của (0.1) và (0.2) là ổn định dưới các sự nhiễu loạn nhỏ của toán tử trễ Φ.
Các kết quả trong chương 3 được tác giả luận văn mở rộng các phương pháp trên để nghiên cứu phương trình có trễ không ôtônôm tổng quát.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Nguyễn Thiệu Huy thuộc khoa: Toán trường Đại học Bách Khoa Hà Nội. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến thầy về sự giúp đỡ khoa học mà thầy đã dành cho tôi và đã tạo những điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành luận văn.

Nhân dịp này, tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thầy phản biện, những người đã đọc và đóng góp ý kiến cho tôi để luận văn được hoàn thiện hơn. Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thành viên lớp cao học giải tích trường Đại học Khoa học Tự nhiên ĐHQGHN khóa 2008 – 2010 đã phân tích, đóng góp rất nhiều ý kiến quý báu giúp tôi hoàn thành luận văn tốt hơn.

Hà Nội, tháng 7 năm 2011

Chương 1

Bài toán đặt chỉnh đối với phương trình vi phân hàm với quá khứ không ôtônôm

1.1 Họ tiến hóa và toán tử liên quan

Trong mục này, ta bắt đầu từ một họ tiến hóa $\mathcal{U}$ trên $\mathbb{R}_-$ và mở rộng nó ra toàn $\mathbb{R}$ để định nghĩa nửa nhóm tiến hóa tương ứng trên $C_0(\mathbb{R}, X)$. Với hầu hết các định nghĩa này ta tham khảo từ tài liệu bởi Chicone và Latushkin [2] hoặc bài báo nghiên cứu bởi Schnaubelt ([18] hoặc [3, chap.VI.9]).

Định nghĩa 1.1. *Một họ các toán tử $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ trên một không gian Banach X được gọi là một họ tiến hóa lùi (liên tục mạnh, bị chặn mũ) trên $\mathbb{R}_-$ nếu*

(i) $U(t,t) = I_d$ và $U(t,r)U(r,s) = U(t,s)$ với $t \leqslant r \leqslant\leqslant s \leqslant 0$.

(ii) Ánh xạ $(t,s) \mapsto U(t,s)x$ là liên tục với mọi x thuộc X.

(iii) Tồn tại các hằng số $N \geqslant 1$ và $\omega_1 \in \mathbb{R}$ sao cho

$$||U(t,s)|| \leqslant Ne^{\omega_1(s-t)} \quad \text{với} \quad t \leqslant s \leqslant 0.$$

Hằng số

$$\omega(\mathcal{U}) := \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \exists H \geqslant 1 \quad \text{sao cho} \quad ||U(t,s)|| \leqslant He^{\alpha(s-t)} \quad \forall t \leqslant s \leqslant 0\}$$

được gọi là cận tăng trưởng của $\mathcal{U}$.

Để định nghĩa một nửa nhóm tiến hóa tương ứng (ví dụ xem [2,11] hoặc [3, chap.VI.9]) đầu tiên ta mở rộng $(U(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ thành họ tiến hóa lùi $(\tilde{U}(t,s))_{t\leqslant s}$ trên $\mathbb{R}$. Điều này có thể được làm bằng cách đặt

$$\tilde{U}(t,s) := \begin{cases} U(t,s) & \text{với} \quad t \leqslant s \leqslant 0, \\ U(t,0) & \text{với} \quad t \leqslant 0 \leqslant s, \\ U(0,0) = I_d & \text{với} \quad 0 \leqslant t \leqslant s. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.2. *Trên $\tilde{E} := C_0(\mathbb{R}, X)$, nửa nhóm tiến hóa $(\tilde{T}(t))_{t\geqslant 0}$ tương ứng với $(\tilde{U}(t,s))_{t\leqslant s}$ được cho bởi*

$$(\tilde{T}(t)\tilde{f})(s) := \tilde{U}(s,s+t)\tilde{f}(s+t) = \begin{cases} U(s,s+t)\tilde{f}(s+t) & \textit{với} \quad s \leqslant s+t \leqslant 0, \\ U(s,0)\tilde{f}(s+t) & \textit{với} \quad s \leqslant 0 \leqslant s+t, \\ \tilde{f}(s+t) & \textit{với} \quad 0 \leqslant s \leqslant s+t. \end{cases}$$

với mọi $\tilde{f} \in \tilde{E}, s \in \mathbb{R}, t \geqslant 0$.

Nửa nhóm này đã được chứng minh là liên tục mạnh trên $\tilde{E}$ (xem [3, Lemma.VI.9.10]). Ta ký hiệu toán tử sinh của nó là $(\tilde{G}, D(\tilde{G}))$. Các tính chất sau của toán tử này đã được chỉ ra trong trong [10, Lemma. 1] và [15, Theorem. 2.4]

Bổ đề 1.3. *Với $\tilde{u}, \tilde{f}$ trong $\tilde{E}$ và $\lambda \in \mathbb{C}$ các khẳng định sau đúng:*

(i) $\tilde{u} \in D(\tilde{G})$ và $(\lambda - \tilde{G})\tilde{u} = \tilde{f}$ nếu và chỉ nếu $\tilde{u}$ và $\tilde{f}$ thỏa mãn phương trình tích phân

$$\tilde{u}(t) = e^{\lambda(t-s)}\tilde{U}(t,s)\tilde{u}(s) + \int_t^s e^{\lambda(t-\xi)}\tilde{U}(t,\xi)\tilde{f}(\xi)d\xi \quad \textit{với} \quad t \leqslant s. \quad (1.1)$$

(ii) Toán tử $(\tilde{G}, D(\tilde{G}))$ là một toán tử địa phương theo nghĩa với $\tilde{u} \in D(\tilde{G})$ và $\tilde{u}(s) = 0$ với $\forall a < s < b$ ta có $[\tilde{G}\tilde{u}](s) = 0$ với $\forall a < s < b$.

Lân cận của $\tilde{G}$ cho phép ta định nghĩa toán tử G trên $E := C_0(\mathbb{R}_-, X)$.

Định nghĩa 1.4. *Đặt $D(G) = \left\{ \tilde{f}|_{\mathbb{R}_-} : \tilde{f} \in D(\tilde{G}) \right\}$ và định nghĩa*

$$[Gf](t) = [\tilde{G}\tilde{f}](t) \quad \textit{với} \quad t \leqslant 0 \quad \textit{và} \quad f = \tilde{f}|_{\mathbb{R}_-}$$

Tương tự với bổ đề (1.3) ta có mô tả sau của G.

Bổ đề 1.5. *Cho $u, f \in E$ và $\lambda \in \mathbb{C}$. Khi đó $u \in D(G)$ và $(\lambda - G)u = f$ khi và chỉ khi u, f thỏa mãn*

$$u(t) = e^{\lambda(t-s)}U(t,s)u(s) + \int_t^s e^{\lambda(t-\xi)}U(t,\xi)f(\xi)d\xi \quad \text{với} \quad t \leqslant s \leqslant 0. \quad (1.2)$$

Chứng minh. Nếu $u, f \in E$ thỏa mãn phương trình(1.2), thì ta mở rộng u, f trên toàn đường thẳng bởi

$$\tilde{u}(t) := \begin{cases} u(t) & \text{với} \quad t \leqslant 0 \\ e^{\lambda t}g(t) & \text{với} \quad t > 0. \end{cases}$$

$$\tilde{f}(t) := \begin{cases} f(t) & \text{với} \quad t \leqslant 0 \\ e^{-\lambda t}g'(t) & \text{với} \quad t > 0. \end{cases}$$

Ở đây, $g : \mathbb{R}_+ \to X$ là khả vi liên tục với giá compact sao cho $g(0) = u(0), g'(0) = -f(0)$. Khi đó $\tilde{u}, \tilde{f}$ thuộc $\tilde{E} = C_0(\mathbb{R}, X)$. Tính toán cụ thể thu được $\tilde{u}$ và $\tilde{f}$ thỏa mãn phương trình (1.1). Do vậy, theo bổ đề (1.3), ta thu được đẳng thức $(\lambda - \tilde{G})\tilde{u} = \tilde{f}$ là đúng. Từ định nghĩa của G ta có $u \in D(G)$ và $(\lambda - G)u = f$.

Ngược lại, nếu $u \in D(G)$ và $(\lambda - G)u = f$, theo định nghĩa của G, tồn tại $\tilde{u}, \tilde{f} \in C_0(\mathbb{R}, X)$ sao cho $\tilde{u}|_{\mathbb{R}_-} = u$, $\tilde{f}|_{\mathbb{R}_-} = f$ và $(\lambda - \tilde{G})\tilde{u} = \tilde{f}$. Theo bổ đề (1.3), $\tilde{u}$ và $\tilde{f}$ thỏa mãn phương trình (1.1). Giới hạn phương trình này trên $\mathbb{R}_-$ ta có u, f thỏa mãn (1.2). □

Ta chú ý rằng toán tử G như thế được sử dụng để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của họ tiến hóa trên nửa đường thẳng (xem [7,11,12]). Toán tử G trở thành một toán tử sinh chỉ khi thu hẹp của nó trên một tập xác định nhỏ hơn, chẳng hạn trên $D := \{u \in D(G) : [D(G)](0) = 0\}$ (xem [11, bổ đề 1.1]). Tuy nhiên, với các ứng dụng sau ta xem xét trường hợp tổng quát hơn với giả thiết sau

Giả thiết 1.6. *Cho $(B, D(B))$ là toán tử sinh của một nửa nhóm liên tục mạnh $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$ trên không gian Banach X thỏa mãn $||e^{tB}|| \leqslant Me^{\omega_2}t$ với các hằng số $M \geqslant 1$ và $\omega_2 \in \mathbb{R}$ nào đó.*

Định nghĩa 1.7. *Trên không gian E ta định nghĩa nửa nhóm tiến hóa $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ như sau*

$$[T_{B,0}(t)f](s) = \begin{cases} U(s, s+t)f(s+t) & \text{với} \quad s+t \leqslant 0, \\ U(s,0)e^{(t+s)B}f(0) & \text{với} \quad s+t \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{với} \quad \forall f \in E.$$

Ta có thể kiểm tra được rằng $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ là liên tục mạnh, và ký hiệu toán tử sinh của nó là $G_{B,0}$.

Khi đó ta có các tính chất sau của $G_{B,0}$ và $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$.

Mệnh đề 1.8. *Các khẳng định sau đây là đúng:*

(i) Toán tử sinh của $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ được cho bởi

$$D(G_{B,0}) := \{f \in D(G) : f(0) \in D(B) \quad \text{và} \quad (G(f))(0) = Bf(0)\}$$

$$G_{B,0}f := Gf \quad \text{với} \quad f \in D(G_{B,0}).$$

(ii) Tập hợp $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > \omega(\mathcal{U}) \quad \text{và} \quad \lambda \in \rho(B)\}$ được chứa trong $\rho(G_{B,0})$. Ngoài ra, với λ trong tập này, giải thức được cho bởi

$$[R(\lambda, G_{B,0})f](t) = e^{\lambda t}U(t,0)R(\lambda,B)f(0) + \int_t^0 e^{\lambda(t-\xi)}U(t,\xi)f(\xi)d\xi \quad \text{với} \quad f \in E, t \leqslant 0.$$

(iii) Nửa nhóm $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ thỏa mãn $||T_{B,0}(t)|| \leqslant Ke^{\omega t}$ với $K := MN$ và $\omega := \max\{\omega_1, \omega_2\}$ với các hằng số M, N, ω_1 và ω_2 xác định trong định nghĩa (1.1) và giả thiết (1.6).

Chứng minh. (i). Điều này có thể được tìm trong [1. Proposition 2.8].
(ii). Quan sát thấy với $f \in E, \lambda \in \rho(B)$ và $\mathrm{Re}\lambda > \omega(\mathcal{U})$ hàm số

$$u(t) := e^{\lambda t}U(t,0)R(\lambda,B)f(0) + \int_t^0 e^{\lambda(t-\xi)}U(t,\xi)f(\xi)d\xi, \quad t \leqslant 0$$

thuộc vào E và là nghiệm duy nhất của phương trình (1.2) với điều kiện ban đầu $u(0) = R(\lambda, B)f(0)$. Điều kiện này là tương đương với $(\lambda - B)u(0) = f(0) = [(\lambda - G)u](0)$ hoặc $[Gu](0) = Bu(0)$, nghĩa là $u \in D(G_{B,0})$ và $u = R(\lambda, G_{B,0})f$.
(iii) Điều này được suy ra một cách dễ dàng từ định nghĩa của $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$. □

1.2 Toán tử sinh và tính đặt chỉnh

Trong mục này, ta xét một toán tử tuyến tính bị chặn $\Phi : E \to X$ gọi là toán tử trễ, và sử dụng nó để định nghĩa thu hẹp sau của toán tử G từ định nghĩa (1.4).

Định nghĩa 1.9. *Toán tử* $(G_{B,\Phi}, D(G_{B,\Phi})$ *trên* E *được cho bởi*

$$D(G_{B,\Phi}) := \{f \in D(G) : f(0) \in D(B), (Gf)(0) = Bf(0) + \Phi f\}$$

$G_{B,\Phi}f := Gf$ *với* $f \in D(G_{B,\Phi})$.

Chúng ta nhắc lại rằng trong [1] các tác giả sử dụng các phương pháp ngoại suy từ [16], đã chứng minh rằng toán tử $G_{B,\Phi}$ sinh ra một nửa nhóm liên tục mạnh $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$. Trong mục này ta tính giải thức của $G_{B,\Phi}$ và chỉ ra rằng nó thỏa mãn các điều kiện của định lý Hille - Yosida. Cách tiếp cận này cho phép ta thu được thông tin về tính ổn định của hệ dưới các nhiễu loạn nhỏ của toán tử trễ Φ. Với các ví dụ cụ thể về các toán tử trễ ta tham khảo [6].

Định lý 1.10. *Cho* $e_\lambda : X \to E$ *là một hàm được định nghĩa bởi* $[e_\lambda x](t) := e^{\lambda t}U(t,0)x$ *với* $t \leqslant 0, x \in X$ *và* $Re\lambda > \omega(\mathfrak{U})$. *Cho các hằng số* K *và* ω *được định nghĩa như trong mệnh đề (1.8). Khi đó các khẳng định sau là đúng:*

(i) Tập $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\lambda > K||\Phi|| + \omega\} \subset \rho(G_{B,\Phi})$ *và với* $Re\lambda > K||\Phi|| + \omega$ *giải thức của* $G_{B,\Phi}$ *thỏa mãn*

$$R(\lambda, G_{B,\Phi})(f) = e_\lambda R(\lambda, B)\Phi R(\lambda, G_{B,\Phi})f + R(\lambda, G_{B,0})f, \quad f \in E \tag{1.3}$$

(ii) $||R(\lambda, G_{B,\Phi})|| \leqslant \dfrac{K}{(Re\lambda - K||\Phi|| - \omega)}$ *với* $Re\lambda > K||\Phi|| + \omega$.

(iii) Với $Re\lambda > K^2||\Phi|| + \omega$ *ta có*

$$||R(\lambda, G_{B,\Phi})^n|| \leqslant \frac{K}{(Re\lambda - K^2||\Phi|| - \omega)^n} \quad \text{với} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Chứng minh. (i). Chú ý rằng, với $\lambda > K||\Phi|| + \omega$, phương trình

$$u(t) = e^{\lambda t}U(t,0)R(\lambda, B)(f(0) + \Phi u) + \int_t^0 e^{\lambda(t-\xi)}U(t,\xi)f(\xi)d\xi \quad \text{với} \quad t \leqslant 0 \tag{1.5}$$

tương đương với

$$u = e_\lambda R(\lambda, B)\Phi u + R(\lambda, G_{B,0})f. \tag{1.6}$$

Nếu với mỗi $f \in E$ và $\mathrm{Re}\lambda > K||\Phi|| + \omega$ phương trình này có một nghiệm duy nhất $u \in E$, khi đó $u(0) = R(\lambda, B)(f(0) + \Phi u)$. Điều này tương đương với $(\lambda - B)u(0) = [(\lambda - G)u](0) + \Phi u$ hoặc $[Gu](0) = Bu(0) + \Phi u$. Vậy, theo bổ đề (1.5), $u \in D(G_{B,\Phi})$ và $u = R(\lambda, G_{B,\Phi})f$. Do vậy, để chứng minh (i) ta phải chỉ ra rằng, với mỗi $f \in E$ và $\mathrm{Re}\lambda > K||\Phi|| + \omega$, phương trình (1.6) có một nghiệm duy nhất $u \in E$. Cho $M_\lambda : E \to E$ là toán tử tuyến tính được định nghĩa bởi: $M_\lambda := e_\lambda R(\lambda, B)\Phi$.

Vì λ thỏa mãn $\mathrm{Re}\lambda > K||\Phi|| + \omega$, ta có M_λ bị chặn với

$$||M_\lambda|| \leqslant \frac{K||\Phi||}{\mathrm{Re}\lambda - \omega} < 1$$

Do đó, toán tử $I - M_\lambda$ là khả nghịch, và phương trình (1.6) có một nghiệm duy nhất $u = (I - M_\lambda)^{-1} R(\lambda, G_{B,0})f$. Do vậy

$$R(\lambda, G_{B,\Phi})f = M_\lambda R(\lambda, G_{B,\Phi})f + R(\lambda, G_{B,0})f$$

(ii). Từ chuỗi Neumann $(I - M_\lambda)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} M_\lambda^n$ ta có với $\mathrm{Re}\lambda > K||\Phi|| + \omega$ thì

$$\begin{aligned} ||R(\lambda, G_{B,\Phi})|| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} M_\lambda^n R(\lambda, G_{B,0}) \right\| \leqslant \frac{K}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)} \sum_{n=0}^{\infty} ||M_\lambda^n|| \\ &\leqslant \frac{K}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{K||\Phi||}{\mathrm{Re}\lambda - \omega} \right)^n = \frac{K}{(\mathrm{Re}\lambda - K||\Phi|| - \omega)} \end{aligned}$$

(iii). Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp. Từ (1.3) ta thu được

$$\begin{aligned} R(\lambda, G_{B,\Phi})^n &= e_\lambda R(\lambda, B)\Phi R(\lambda, G_{B,\Phi})^n + R(\lambda, G_{B,0}) R(\lambda, G_{B,\Phi})^{n-1} \\ &= e_\lambda R(\lambda, B)\Phi R(\lambda, G_{B,\Phi})^n \\ &+ R(\lambda, G_{B,0}) e_\lambda R(\lambda, B)\Phi R(\lambda, G_{B,\Phi})^{n-1} \\ &+ R(\lambda, G_{B,0})^2 R(\lambda, G_{B,\Phi})^{n-2} \\ &= ..... \\ &= e_\lambda R(\lambda, B)\Phi R(\lambda, G_{B,\Phi})^n \\ &+ R(\lambda, G_{B,0}) e_\lambda R(\lambda, B)\Phi R(\lambda, G_{B,\Phi})^{n-1} \\ &+ R(\lambda, G_{B,0})^2 e_\lambda R(\lambda, B)\Phi R(\lambda, G_{B,\Phi})^{n-2} + ... \\ &+ R(\lambda, G_{B,0})^n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Rõ ràng, (1.4) đúng với $n = 1$. Nếu (1.4) đúng với $n - 1$, ta chứng minh nó đúng với n.

Thật vậy, với $\mathrm{Re}\lambda > K^2||\Phi|| + \omega$, từ (1.7) và giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned}
||R(\lambda, G_{B,\Phi})^n|| \leqslant & \frac{K^2||\Phi||}{\mathrm{Re}\lambda - \omega}||R(\lambda, G_{B,\Phi})^n|| \\
& + \frac{K^3||\Phi||}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^2(\mathrm{Re}\lambda - \omega - K^2||\Phi||)^{n-1}} \\
& + \frac{K^3||\Phi||}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^3(\mathrm{Re}\lambda - \omega - K^2||\Phi||)^{n-2}} + \dots \\
& + \frac{K^3||\Phi||}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n(\mathrm{Re}\lambda - \omega - K^2||\Phi||)} + \frac{K}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n}
\end{aligned}$$

Đặt $a := \mathrm{Re}\lambda - \omega, b := \mathrm{Re}\lambda - \omega - K^2||\Phi||$, điều này cho kết quả

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a}||R(\lambda, G_{B,\Phi})^n|| &\leqslant K\left[\frac{K^2||\Phi||}{a^2b}\left(\frac{1}{b^{n-1}} + \frac{1}{ab^{n-3}} + \dots + \frac{1}{a^{n-2}}\right) + \frac{1}{a^n}\right] \\
&= K\left[\frac{K^2||\Phi||}{a^2b}\left(\frac{\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}\right) + \frac{1}{a^n}\right] \\
&= \frac{K}{ab^{n-1}} \quad (\text{chú ý rằng} \quad a - b = K^2||\Phi||).
\end{aligned}$$

Vì vậy

$$||R(\lambda, G_{B,\Phi})^n|| \leqslant \frac{K}{b^n} = \frac{K}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega - K^2||\Phi||)^n}.$$

□

Vì $G_{B,\Phi}$ được định nghĩa một cách chặt chẽ, ta thu được những kết quả sau.

Hệ quả 1.11. *Toán tử $G_{B,\Phi}$ sinh ra một nửa nhóm liên tục mạnh $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ thỏa mãn*

$$||T_{B,\Phi}(t)|| \leqslant Ke^{(K^2||\Phi||+\omega)t}$$

với các hằng số K và ω được định nghĩa như trong mệnh đề (1.8).

Hệ quả 1.12. *Nếu họ tiến hóa lùi $\mathcal{U}$ và nửa nhóm $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$ là ổn định mũ và $||\Phi||$ là đủ nhỏ, thì nửa nhóm $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ cũng ổn định mũ.*

Chứng minh. Giả sử rằng $\mathcal{U}$ và $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$ là ổn định mũ nghĩa là $\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\} < 0$. Do đó, nếu $||\Phi|| < -\dfrac{\omega}{K^2}$, thì nửa nhóm $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ cũng ổn định mũ. □

Trong ví dụ sau ta sẽ xác định "sự đủ nhỏ" của $||\Phi||$ rõ hơn.

Ví dụ 1.13. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ với biên trơn. Toán tử Dirichlet và Laplace sinh ra một nửa nhóm giải tích $(e^{t\Delta})_{t\geqslant 0}$ trên $X := L^2(\Omega)$. Khi đó ta đặt toán tử $A(s)$ là $A(s) := a(s)\Delta$, với hàm $a(.) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_-)$ thỏa mãn $a(.) \geqslant \gamma > 0$ với hằng số γ nào đó. Những toán tử này sinh ra một họ tiến hóa lùi $(U(r,s))_{r\leqslant s\leqslant 0}$ được cho bởi*

$$U(r,s) = e^{(\int\limits_r^s a(\tau)d\tau)\Delta} \quad \text{với} \quad r \leqslant s \leqslant 0.$$

Khi đó ta có

$$||U(r,s)|| = e^{(\int\limits_r^s a(\tau)d\tau)\lambda_0} \leqslant e^{\gamma\lambda_0(s-t)} \quad \text{với} \quad r \leqslant s \leqslant 0$$

$\lambda_0 < 0$ là giá trị riêng lớn nhất của Δ. Do đó, ta có thể chọn trong định nghĩa (1.1) các hằng số $N = 1$ và $\omega_1 = \gamma\lambda_0 < 0$. Bây giờ ta định nghĩa toán tử trễ Φ bởi

$$\Phi f := \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi(s)f(s)ds \quad \text{với} \quad f \in E, \varphi(.) \in L^1(\mathbb{R})$$

Khi đó ta có $||\Phi|| \leqslant ||\varphi(.)||_{L^1}$.

Bây giờ cho B sinh ra một nửa nhóm $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$ thỏa mãn $||e^{tB}|| \leqslant Me^{\omega_2 t}$ với $\omega_2 < 0$. Từ định nghĩa của $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ ta thu được

$$||T_{B,0}(t)|| \leqslant Me^{\max\{\gamma\lambda_0,\omega_2\}t}, \quad t \geqslant 0.$$

Do vậy, trong hệ quả (1.11) ta có thể chọn $K = M$. Do đó, nếu

$$||\varphi(.)||_{L^1} < -\frac{\max\{\gamma\lambda_0, \omega_2\}}{M^2},$$

thì nửa nhóm $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ là ổn định mũ.

Chương 2

Phổ và tính hyperbolic của phương trình vi phân riêng với quá khứ không ôtônôm

Trong chương này lần đầu tiên ta tính toán phổ của nửa nhóm tiến hóa $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ và toán tử sinh của nó. Điều này sẽ được sử dụng để chứng minh sự ổn định của tính hyperbolic của nửa nhóm $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ dưới những nhiễu nhỏ bởi toán tử trễ Φ. Đầu tiên ta so sánh $T_{B,0}(t)$ với thu hẹp của nó trên không gian con $C_{00} := \{f \in E : f(0) = 0\}$. Thu hẹp này đã được nghiên cứu trong [11,18].

2.1 Phổ của toán tử không nhiễu

Bổ đề 2.1. *Ký hiệu $(T_0(t))_{t\geqslant 0}$ là thu hẹp của $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ trên không gian C_{00} và cho G_0 là toán tử sinh của nó. Khi đó các khẳng định sau đúng:*

(i)

$$\sigma(T_{B,0}(t)) \subseteq \sigma(T_0(t)) \cup \sigma(e^{tB}) \quad \text{với} \quad t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

(ii)

$$\sigma(G_{B,0}) \cup \sigma(B) = \sigma(G_0) \cup \sigma(B). \tag{2.2}$$

Chứng minh. (i). Trang bị $X \oplus C_{00}$ với chuẩn

$$||(x, f)|| := ||f|| + ||x|| \quad \text{với} \quad (x, f) \in X \oplus C_{00}.$$

Với một hàm giá trị thực liên tục cố định φ với giá compact thỏa mãn $\varphi(0) = 1$, ta xét toán tử tuyến tính

$$\mathcal{J} : E \to X \oplus C_{00}, f \mapsto (f(0), f - \varphi(.)f(0))$$

Khi đó $\mathcal{J}$ là một phép đẳng cấu và nghịch đảo của nó được cho bởi

$$\mathcal{J}^{-1} : X \oplus C_{00} \to E, (x, f) \mapsto f + \varphi(.)x$$

Do đó, họ toán tử

$$\widehat{T}(t) := \mathcal{J} T_{B,0}(t) \mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} e^{tB} & 0 \\ (T_{B,0}(t) - e^{tB})\varphi(.) & T_0(t) \end{pmatrix}$$

lập thành một nửa nhóm thỏa mãn $\sigma(\widehat{T}(t)) = \sigma(T_{B,0}(t))$.

Ta lấy $\lambda \in \rho(T_0(t)) \cap \rho(e^{tB})$. Toán tử

$$\begin{pmatrix} \lambda - e^{tB} & 0 \\ (T_{B,0}(t) - e^{tB})\varphi(.) & \lambda - T_0(t) \end{pmatrix}$$

là khả nghịch với nghịch đảo

$$\begin{pmatrix} (\lambda - e^{tB})^{-1} & 0 \\ -(\lambda - T_0(t))^{-1}[(T_{B,0}(t) - e^{tB})\varphi(.)](\lambda - e^{tB})^{-1} & (\lambda - T_0(t))^{-1} \end{pmatrix}$$

Bởi vậy $\lambda \in \rho(\widehat{T}(t)) = \rho(T_{B,0}(t))$, nghĩa là

$$\rho(T_0(t)) \cap \rho(e^{tB}) \subseteq \rho(T_{B,0}(t))$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.
(ii). Theo mệnh đề (1.8) ta có $\rho(G_0) \cup \rho(B) \subseteq \rho(G_{B,0})$. Do vậy

$$\sigma(G_{B,0}) \subseteq \sigma(G_0) \cup \sigma(B) \tag{2.3}$$

Ta còn cần chứng minh

$$\sigma(G_0) \subseteq \sigma(G_{B,0}) \cup \sigma(B) \tag{2.4}$$

Thật vậy, nếu $\lambda - G_{B,0}$ là đơn ánh, kéo theo$\lambda - G_0$ cũng là đơn ánh vì G_0 là thu hẹp của $G_{B,0}$ trên C_{00}.

Bây giờ cho $\lambda \in \rho(B)$ và $\lambda - G_{B,0}$ là toàn ánh. Ta sẽ chỉ ra rằng $\lambda - G_0$ cũng là toàn ánh. Thật vậy, cho $f \in C_{00}$ bất kỳ. Khi đó, từ tính toàn ánh của $\lambda - G_{B,0}$, tồn tại một hàm $u \in D(G_{B,0})$ sao cho $(\lambda - G_{B,0})u = f$. Từ định nghĩa của $G_{B,0}$ ta có

$$0 = f(0) = \lambda u(0) - [G_{B,0}u](0) = (\lambda - B)u(0).$$

Do đó, $u(0) = 0$ và $u \in C_{00}$. Suy ra, $(\lambda - G_0)u = (\lambda - G_{B,0})u = f$. Vì thế, $\lambda - G_0$ là toàn ánh. Từ đó ta có

$$\rho(G_{B,0}) \cap \rho(B) \subseteq \rho(G_0)$$

và thu được kết luận (2.4). □

Trong [11. Corollary. 2.4] định lý ánh xạ phổ được chứng minh là đúng với nửa nhóm $(T_0(t))_{t\geqslant 0}$. Cụ thể hơn, ta có

$$\sigma(G_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\lambda \leqslant \omega(\mathcal{U})\}$$

và

$$\sigma(T_0(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(G_0)}, \quad t > 0 \tag{2.5}$$

Từ điều này và bổ đề (2.1) ta thu được kết quả sau:

Định lý 2.2. *Đẳng thức phổ*

$$[\sigma(T_{B,0}(t)) \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\} = [e^{t\sigma(G_0)} \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\}, \quad t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

đúng với toán tử G_0 như trong bổ đề (2.1).

Chứng minh. Từ bổ đề (2.1) và (2.5) ta có

$$\begin{aligned}
[\sigma(T_{B,0}(t)) \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\} &\subseteq [\sigma(T_0(t)) \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\} \\
&= [e^{t\sigma(G_0)} \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\} \\
&= [e^{t\sigma(G_0)} \cup e^{t\sigma(B)} \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\} \\
&= [e^{t(\sigma(G_0) \cup \sigma(B))} \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\} \\
&= [e^{t(\sigma(G_{B,0}) \cup \sigma(B))} \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\} \\
&= [e^{t\sigma(G_{B,0})} \cup e^{t\sigma(B)} \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\} \\
&\subseteq [\sigma(T_{B,0}(t)) \cup \sigma(e^{tB})] \setminus \{0\}.
\end{aligned}$$

Vậy ta suy ra (2.6). □

Sử dụng đặc trưng phổ của nửa nhóm hyperbolic (xem [3. Định lý V.1.15]) từ định lý trên ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.3. *Nếu toán tử $(B, D(B))$ sinh ra một nửa nhóm hyperbolic $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$ và nếu họ tiến hóa lùi $\mathcal{U}$ là ổn định mũ, thì nửa nhóm $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ là hyperbolic.*

Chứng minh. Từ giả thiết $\mathcal{U}$ là nửa nhóm ổn định mũ ta có $\omega(\mathcal{U}) < 0$, kéo theo $s(G_0) < 0$ do (2.5). Từ đó, $\sigma(G_0) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Từ tính hyperbolic của $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$ ta có $((e^{t\sigma(G_0)}) \cup \sigma(e^{tB})) \cap e^{i\mathbb{R}} = \emptyset$. Vậy từ (2.6) và [3. Theorem V.1.15] ta thu được tính hyperbolic của $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$. □

2.2 Phổ của toán tử nhiễu

Mục đích chính của mục này là chứng minh tính ổn định của tính hyperbolic của nửa nhóm $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ dưới các nhiễu nhỏ của toán tử trễ Φ. Để làm được điều này, ta cần đặc trưng sau của tính hyperbolic của nửa nhóm. (xem [14. Theorem. 2.6.2])

Định lý 2.4. *Cho $(T(t))_{t\geqslant 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh trên không gian Banach X và A là toán tử sinh của nó. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) $(T(t))_{t\geqslant 0}$ là hyperbolic.

(ii) $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ và

$$(C,1)\sum_{k\in\mathbb{Z}} R(i\omega + ik, A)x := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^{n} R(i\omega + ik, A)x$$

hội tụ với mọi $\omega \in \mathbb{R}, x \in X$.

Ta chú ý rằng định lý trên được lấy từ [14. Theorem 2.6.2], trong khi chứng minh của nó là quan trọng theo Greiner và Schwarz [5. Theorem 1.1 và Corollary 1.2]. Một phiên bản liên tục của định lý trên được chứng minh bởi Kaashock và Verduyn Lunel trong [8. Corollary 4.1].

Để áp dụng định lý này ta phải tính giải thức $R(\lambda, G_{B,\Phi})$ từ giải thức $R(\lambda, G_{B,0})$. Điều này có thể được làm như sau:

Bổ đề 2.5. *Cho họ tiến hóa lùi $\mathcal{U}$ ổn định mũ và toán tử $(B, D(B))$ là toán tử sinh của một nửa nhóm hyperbolic $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$. Khi đó với $||\Phi||$ đủ nhỏ tồn tại một dải mở $\sum$ chứa trục ảo và một hàm H_λ giải tích và bị chặn đều trên $\sum$ sao cho*

$$R(\lambda, G_{B,\Phi}) = H_\lambda R(\lambda, G_{B,0}) \quad \text{với} \quad \lambda \in \sum \tag{2.7}$$

Chứng minh. Từ [8. Theorem 4.1] và tính hyperbolic của $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$, ta thu được rằng tồn tại các hằng số $P_1, \nu > 0$ sao cho

$$||R(\lambda, B)|| \leqslant P_1 \quad \text{với mọi} \quad \mathrm{Re}|\lambda| < \nu.$$

Từ tính ổn định mũ của $\mathcal{U}$, tồn tại các hằng số $\omega_1 > 0$ và K_1 sao cho

$$||U(t,s)|| < K_1 e^{-\omega_1(s-t)} \quad \text{với} \quad \forall t \leqslant s \leqslant 0 \tag{2.8}$$

Bây giờ lấy ω là số thực sao cho $0 < \omega < \min\{\omega_1, \nu\}$. Khi đó, ta đặt $\sum := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\lambda| < \omega\}$ và

$$P := \sup_{\lambda \in \sum} ||R(\lambda, B)||. \tag{2.9}$$

Như trong chứng minh của định lý (1.10), lần đầu tiên ta chỉ ra rằng với mỗi $f \in E$ và $\lambda \in \sum$ phương trình (1.6) có duy nhất nghiệm $u \in E$.

Cho $M_\lambda : E \to E$ là toán tử tuyến tính xác định như sau $M_\lambda := e_\lambda R(\lambda, B)\Phi$ với e_λ như trong định lý (1.10). Với $\lambda \in \sum$, toán tử này bị chặn và thỏa mãn

$$||M_\lambda|| \leqslant K_1 P ||\Phi|| < 1 \quad \text{nếu} \quad ||\Phi|| < \frac{1}{K_1 P}.$$

Do vậy, toán tử $I - M_\lambda$ là khả nghịch, và phương trình (1.6) có nghiệm duy nhất $u = (I - M_\lambda)^{-1} R(\lambda, G_{B,0}) f$. Đặt $H_\lambda := (I - M_\lambda)^{-1}$ ta thu được $R(\lambda, G_{B,\Phi}) = H_\lambda R(\lambda, G_{B,0})$.

Ngoài ra, chuỗi Neumann cho kết quả

$$H_\lambda = (I - M_\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} M_\lambda^n, \tag{2.10}$$

do vậy

$$||H_\lambda|| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} ||M_\lambda||^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (K_1 P ||\Phi||)^n = \frac{1}{1 - K_1 P ||\Phi||}$$

với mọi $\lambda \in \sum$ và $||\Phi|| < \dfrac{1}{K_1 P}$. Tính giải tích của H_λ suy ra từ tính giải tích của M_λ và sự hội tụ đều của chuỗi Neumann (2.10) với mọi $\lambda \in \sum$ □

Bây giờ ta đi đến kết quả chính của chúng ta về nhị phân mũ của các nghiệm của phương trình (0.1) và (0.2).

Định lý 2.6. *Cho họ tiến hóa lùi $\mathfrak{U}$ là ổn định mũ và toán tử $(B, D(B))$ là toán tử sinh của một nửa nhóm hyperbolic $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$. Khi đó, với $||\Phi||$ đủ nhỏ, nửa nhóm $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ là hyperbolic.*

Chứng minh. Từ hệ quả (2.3), nửa nhóm tiến hóa $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ là hyperbolic. Đầu tiên ta chứng minh rằng, với $||\Phi||$ đủ nhỏ, tổng $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{k=-n}^{n} R(i\omega +$

$ik, G_{B,\Phi})$ là bị chặn trong $\mathcal{L}(E)$. Thực tế, từ bổ đề (2.5), ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n}[R(i\omega+ik,G_{B,\Phi})f](s)\\
&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n}[(1+M_{i\omega+ik}+M_{i\omega+ik}^2+...)R(i\omega+ik,G_{B,0})f](s)\\
&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n}[R(i\omega+ik,G_{B,0})f](s)+\\
&+\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n}e^{(i\omega+ik)s}U(s,0)R(i\omega+ik,B)\Phi R(i\omega+ik,G_{B,0})f\\
&+...
\end{aligned}\tag{2.11}$$

với $s \in \mathbb{R}_-$.

Chú ý rằng nửa nhóm $(T_{B,0}(t))_{t\geqslant 0}$ là hyperbolic, do vậy $e^{-2\pi i\omega} \in \rho(T_{B,0}(2\pi))$ với mọi $\omega \in \mathbb{R}$. Sử dụng công thức (xem [3.Lemma. II.1.9])

$$R(\lambda, G_{B,0})(1-e^{-\lambda t}T_{B,0}(t)) = \int_0^t e^{-\lambda t}T_{B,0}(s)ds \quad \text{với} \quad \lambda \in \rho(G_{B,0})$$

ta thu được

$$R(i\omega+ik, G_{B,0}) = \int_0^{2\pi} e^{-(i\omega+ik)t}T_{B,0}(t)(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,0}(2\pi))^{-1}dt$$

Số hạng đầu tiên của (2.11) bây giờ có thể được tính như sau

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n}R(i\omega+ik,G_{B,0})f\\
&=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi}e^{-(i\omega+ik)t}T_{B,0}(t)(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,0}(2\pi))^{-1}fdt\\
&=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n}e^{-ikt}\right]e^{-i\omega t}T_{B,0}(t)(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,0}(2\pi))^{-1}fdt\\
&=\int_0^{2\pi}\sigma_N(t)e^{-i\omega t}T_{B,0}(t)(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,0}(2\pi))^{-1}fdt
\end{aligned}$$

Ở đây,

$$\sigma_N(t) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}$$

Vì

$$\sigma_N(t) = \frac{1-\cos(Nt)}{N(1-\cos t)} \geqslant 0 \quad \text{và} \quad \int_0^{2\pi} \sigma_N(t)dt = 2\pi \tag{2.12}$$

(xem [5. Theorem. 1.1]), chuẩn của số hạng thứ nhất trong (2.11) có thể được ước lượng bởi

$$\left\| \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} R(i\omega+ik, G_{B,0})f \right\| \leqslant C_1||f|| \tag{2.13}$$

với

$$C_1 := 2\pi \sup_{0\leqslant\omega\leqslant 1}\left\{||(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,0}(2\pi))^{-1}||\right\} \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}\{||T_{B,0}(t)||\}$$

Bây giờ ta tính số hạng thứ hai của (2.11). Với $s \in \mathbb{R}_-$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} M_{i\omega+ik}R(i\omega+ik, G_{B,0})f(s)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} e^{(i\omega+ik)s}U(s,0)R(i\omega+ik,B)\Phi R(i\omega+ik,G_{B,0})f\\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} e^{(i\omega+ik)s}U(s,0)\int_0^{2\pi} e^{-(i\omega+ik)\tau}e^{\tau B}(1-e^{2\pi B})^{-1}d\tau\\
&\quad\times \Phi\int_0^{2\pi} e^{-(i\omega+ik)t}T_{B,0}(t)(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,0}(2\pi))^{-1}f dt\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ik(t+\tau-s)}\right] e^{-i\omega(t+\tau-s)}U(s,0)e^{\tau B}(1-e^{2\pi B})^{-1}\\
&\quad\times \Phi T_{B,0}(t)(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,0}(2\pi))^{-1}f d\tau dt\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma_N(t+\tau-s)e^{-i\omega(t+\tau-s)}U(s,0)e^{\tau B}(1-e^{2\pi B})^{-1}\\
&\quad\times \Phi T_{B,0}(t)(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,0}(2\pi))^{-1}f d\tau dt.
\end{aligned}$$

Do vậy, sử dụng (2.8) và (2.12), chuẩn của số hạng thứ hai của (2.11) có thể được ước lượng bởi

$$C_1K_1C_2||\Phi||||f|| \quad \text{với} \quad C_2 := 2\pi||(1-e^{2\pi B})^{-1}|| \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}\{||e^{tB}||\} \tag{2.14}$$

và K_1, C_1 tương ứng như trong (2.8) và (2.13) tương ứng.

Bằng quy nạp, chuẩn của số hạng thứ n của (2.11) được ước lượng bởi $C_1(K_1C_2||\Phi||)^n||f||$. Ngoài ra các chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_1(K_1C_2||\Phi||)^n$ hội tụ nếu $||\Phi|| < \dfrac{1}{K_1C_2}$. Do vậy, với các $||\Phi||$ này tổng $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}\sum\limits_{k=-n}^{n} R(i\omega+ik, G_{B,\Phi})$ bị chặn trong $\mathcal{L}(E)$.

Bây giờ ta chứng minh sự hội tụ của $(c,1)\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} R(i\omega+ik, G_{B,\Phi})f$ với $\omega\in\mathbb{R}$ và $f\in E$. Điều này có thể làm được bằng cách sử dụng ý tưởng từ [5. Theorem. 1.1]. Từ [17. III.4.5], ta có điều kiện đủ để chỉ ra sự hội tụ trên một tập con trù mật. Từ $i\mathbb{R}\subset\rho(G_{B,\Phi})$ và định lý ánh xạ phổ cho phổ phần dư (xem [3. Theorem. IV.3.7]) ta thu được rằng $e^{-2\pi i\omega}$ không phụ thuộc vào phổ phần dư $R\sigma(T_{B,\Phi}(2\pi))$. Điều này suy ra rằng $(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,\Phi}(2\pi))E$ là một tập con trù mật của E. Cho $f := (1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,\Phi}(2\pi))g$. Khi đó

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} R(i\omega+ik, G_{B,\Phi})(1-e^{-2\pi i\omega}T_{B,\Phi}(2\pi))g\\ &=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} e^{-(i\omega+ik)s}T_{B,\Phi}(s)g\,ds.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Bây giờ $e^{-i\omega}T_{B,\Phi}(.)g$ là một hàm số liên tục với các hệ số Fourier

$$Q_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-(i\omega+ik)s}T_{B,\Phi}(s)g\,ds.$$

Do đó, từ định lý Fejer, tổng trong (2.15) hội tụ khi $N\to\infty$. Do vậy khẳng định của định lý được suy ra từ định lý (2.4). □

Sự "đủ nhỏ" của Φ được tính toán trong ví dụ sau:

Ví dụ 2.7. *Ta xét trở lại ví dụ (1.13) với cùng họ tiến hóa lùi* $U(r,s) := e^{(\int_r^s a(\tau)d\tau)\Delta}$ *và cùng toán tử trễ* $\Phi f := \int_{-\infty}^{0}\varphi(s)f(s)ds$. *Tuy nhiên, bây giờ* *cho B sinh ra một nửa nhóm hyperbolic $(e^{tB})_{t\geqslant 0}$ thỏa mãn $||R(\lambda, B)|| \leqslant P_1$ với $|Re\lambda| < \omega_2$. (ví dụ ta có thể lấy B là một toán tử sectorial thỏa mãn $\sigma(B) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ như trong [9. Example. 2.1.4] hoặc [19. Example. 4.2]). Lấy $0 < \omega < \min\{-\gamma\lambda_0, \omega_2\}$ và đặt $\sum := \{\lambda \in \mathbb{C} : |Re\lambda| < \omega\}$,*

$$P := \max\left\{\sup_{\lambda\in\sum}\{||R(\lambda, B)||\}, 2\pi||(1 - e^{2\pi B})^{-1}|| \sup_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}\{||e^{tB}||\}\right\}$$

Ta thu được rằng nửa nhóm $(T_{B,\Phi}(t))_{t\geqslant 0}$ là hyperbolic nếu $||\varphi(.)||_{L^1} < \dfrac{1}{P}$.

Chương 3

Các phương trình vi phân đạo hàm riêng có trễ không ôtônôm

3.1 Tính đặt chỉnh và ổn định

Bây giờ ta xét các phương trình vi phân đạo hàm riêng có trễ không ôtônôm với các toán tử trễ tác động trên một khoảng hữu hạn $[-r, 0]$. Cụ thể hơn là ta nghiên cứu các phương trình vi phân đạo hàm riêng có trễ không ôtônôm nửa tuyến tính có dạng:

$$(DPDE) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_t = B(t)u(t) + \Phi(t, u_t) \quad \text{với} \quad t \geqslant a, \\ u_a = \phi \in C := C([-r, 0], X) \end{cases} \tag{3.1}$$

Ta giả sử rằng $B(t)$ là các toán tử tuyến tính (không bị chặn) sao cho bài toán Cauchy tương ứng

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = B(t)u(t) \quad \text{với} \quad t \leqslant s \leqslant 0, \\ u(s) = x_s \in X \end{cases} \tag{3.2}$$

là đặt chỉnh với cận mũ. Điều này nghĩa là tồn tại một họ tiến hóa lùi bị chặn mũ $\mathcal{U} = (U(t, s))_{t \leqslant s \leqslant 0}$ giải (3.2), tức là các nghiệm của (3.2) được cho bởi $x(t) = U(t, s)x(s)$ với $t \leqslant s \leqslant 0$. Ta sẽ sử dụng thuật ngữ "Các toán tử $B(t)$ sinh ra họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \leqslant s \leqslant 0}$ " để chỉ ra tính đặt chỉnh trên.

Ta có thể tham khảo các ví dụ cụ thể và các trường hợp đặc biệt của phương trình trên trong [21], chẳng hạn, khi $B(t) := B$ là độc lập với t. Thực tế là các toán tử $B(t)$ sinh ra họ tiến hóa lùi $(U(t, s))_{t \leqslant s \leqslant 0}$ cho phép ta giải phương trình (3.1) theo một cách tự nhiên. Nói chung là ta sẽ chứng minh nghiệm đủ tốt của DPDE (3.1) tồn tại duy nhất trên khoảng $[a-r,b]$ của đường thẳng thực nếu toán tử trễ $\Phi(t,\phi)$ là liên tục Lipschitz theo $\phi \in C$ đều với mọi $t \in [a,b]$. Ngoài ra, các đánh giá của chúng ta cho phép ta thu được tính ổn định của ổn định mũ và của nhị phân mũ của hệ dưới các nhiễu nhỏ của toán tử trễ Φ. Ta bắt đầu với mệnh đề về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm đủ tốt của phương trình (3.1). Chứng minh mệnh đề này có thể được làm bằng cách sử dụng cùng ý tưởng như trong [21. Định lý 2.1.1]. Tuy nhiên ta sẽ trình bày chứng minh này một cách đầy đủ.

Mệnh đề 3.1. *Giả sử các toán tử $B(t)$ sinh ra họ tiến hóa lùi $(U(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ và toán tử trễ $\Phi : [a,b]\times C \to X$ là liên tục và thỏa mãn điều kiện Lipschitz*

$$||\Phi(t,\phi) - \Phi(t,\psi)|| \leqslant L||\phi - \psi|| \quad \forall t \in [a,b], \phi,\psi \in C := C([-r,0],X). \tag{3.3}$$

với L là một hằng số dương. Khi đó, với Φ cho trước thuộc C tồn tại duy nhất hàm số liên tục $u : [a-r,b] \to X$ giải bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} u(t) = U(t,a)\Phi(0) + \int_a^t U(t,s)\Phi(s,u_s)ds \quad a \leqslant t \leqslant b \\ u_a = \phi \end{cases} \tag{3.4}$$

Ngoài ra các nghiệm phụ thuộc liên tục vào các điều kiện ban đầu.

Chứng minh. Với ϕ cho trước thuộc C, ta định nghĩa ánh xạ

$$\mathcal{H}_\phi : C([a-r,b],X) \to C([a-r,b],X)$$

bởi

$$(\mathcal{H}_\phi u)(t) = \begin{cases} U(t,a)\phi(0) + \int_a^t U(t,s)\Phi(s,u_s)ds & \text{với} \quad a \leqslant t \leqslant b \\ \phi(t-a) & \text{với} \quad a-r \leqslant t \leqslant a \end{cases}$$

Do vậy, ký hiệu $||.||_\infty$ là chuẩn trong $C([a-r,b],X)$ ta thu được

$$||(\mathcal{H}_\phi u)(t) - (\mathcal{H}_\phi v)(t)|| \leqslant PL(t-a)||u-v||_\infty \quad \text{với} \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{3.5}$$

và

$$(\mathcal{H}_\phi u)(t) - (\mathcal{H}_\phi v)(t) = 0 \quad \text{với} \quad a-r \leqslant t \leqslant a$$

trong đó

$$P := \sup_{a\leqslant t\leqslant s\leqslant b} ||U(t,s)||$$

Bằng quy nạp ta thu được

$$||(\mathcal{H}_\phi^n u)(t) - (\mathcal{H}_\phi^n v)(t)|| \leqslant \frac{(PL(t-a))^n}{n!}||u-v||_\infty \quad \text{với} \quad a \leqslant t \leqslant b \quad (3.6)$$

và

$$(\mathcal{H}_\phi^n u)(t) - (\mathcal{H}_\phi^n v)(t) = 0 \quad \text{với} \quad a - r \leqslant t \leqslant a$$

Do vậy

$$||\mathcal{H}_\phi^n u - \mathcal{H}_\phi^n||_\infty \leqslant \frac{(PL(b-a))^n}{n!}||u-v||_\infty$$

Với n đủ lớn ta có $\dfrac{(PL(b-a))^n}{n!} < 1$. Do vậy, theo nguyên lý co, $\mathcal{H}_\Phi$ có một điểm cố định duy nhất u trong $C([a-r,b],X)$. Theo định nghĩa của $\mathcal{H}_\phi$, ta có u là một nghiệm của bài toán (3.4).

Tính duy nhất của u và sự phụ thuộc liên tục của u trên các giá trị ban đầu có thể được chứng minh như sau. Cho v là nghiệm của phương trình (3.1) trên $[a-r,b]$ với giá trị ban đầu ψ. Khi đó

$$u(t) - v(t) = (\mathcal{H}_\phi u)(t) - (\mathcal{H}_\psi v)(t)$$

đúng với $a - r \leqslant t \leqslant b$. Theo định nghĩa của $\mathcal{H}_\phi$, ta có

$$||(\mathcal{H}_\phi u)(t) - (\mathcal{H}_\psi v)(t)|| \leqslant Ke^{\alpha(t-a)}||\phi - \psi|| + \int_a^t KLe^{\alpha(t-s)}||u_s - v_s||ds$$

với $a \leqslant t \leqslant b$ và

$$||(\mathcal{H}_\phi u)(t) - (\mathcal{H}_\psi v)(t)|| \leqslant K||\phi - \psi|| \quad \text{với} \quad a - r \leqslant t \leqslant a. \quad (3.7)$$

với các hằng số K và α xác định như trong định nghĩa (1.1). Do vậy

$$||u(t) - v(t)|| \leqslant Ke^{\alpha(t-a)}||\phi - \psi|| + \int_a^t KLe^{\alpha(t-s)}||u_s - v_s||ds$$

với $a \leqslant t \leqslant b$ và

$$||u(t) - v(t)|| \leqslant K||\phi - \psi|| \quad \text{với} \quad a - r \leqslant t \leqslant a. \quad (3.8)$$

Do vậy, nếu $\alpha \geqslant 0$ thì

$$||u_t - v_t|| \leqslant Ke^{\alpha(t-a)}||\phi - \psi|| + \int_a^t KLe^{\alpha(t-s)}||u_s - v_s||ds \quad \forall a \leqslant t \leqslant b \quad (3.9)$$

và nếu $\alpha < 0$ thì

$$||u_t - v_t|| \leqslant Ke^{-\alpha r}e^{\alpha(t-a)}||\phi - \psi|| + \int_a^t KLe^{-\alpha r}e^{\alpha(t-s)}||u_s - v_s||ds \quad \forall a \leqslant t \leqslant b \tag{3.10}$$

Bây giờ từ các bất đẳng thức (3.9), (3.10) và bất đẳng thức Gronwall ta có

$$||u_t - v_t|| \leqslant \begin{cases} Ke^{(\alpha+KL)(t-a)}||\phi - \psi|| & \text{nếu} \quad \alpha \geqslant 0 \\ Ke^{-\alpha r}e^{(\alpha+KLe^{-\alpha r})(t-a)}||\phi - \psi|| & \text{nếu} \quad \alpha < 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Do vậy, ta suy ra được tính duy nhất và phụ thuộc liên tục vào giá trị ban đầu của u. □

Chú ý 3.2. *Giả sử rằng toán tử trễ $\Phi : [0, \infty) \times C \to X$ là liên tục và thỏa mãn bất đẳng thức (3.3) đều với mọi $t \geqslant 0$ và $\phi, \psi \in C$. Khi đó nghiệm duy nhất $u(t)$ của (3.1) được xác định trên $[-r, \infty)$. Nếu bổ sung $\Phi(t, 0) = 0$ với $t \geqslant 0$, thì $u = 0$ là nghiệm của (3.1) với điều kiện ban đầu $\phi = 0$. Ta nói rằng nghiệm u với điều kiện ban đầu $u_0 = \phi$ là ổn định mũ nếu tồn tại các hằng số dương K và ω sao cho*

$$||u_t|| \leqslant Ke^{-t\omega}||\phi|| \quad \forall t \geqslant 0.$$

Khi đó bất đẳng thức (3.11) cho ra một điều kiện đủ với nghiệm u là ổn định mũ. Nghĩa là, nếu các toán tử $B(t)$ sinh ra một họ tiến hóa lùi ổn định mũ (tức là $\alpha < 0$) và hằng số Lipschitz L là đủ nhỏ (tức là $L < -\dfrac{\alpha}{Ke^{-\alpha r}}$), khi đó nghiệm u là ổn định mũ.

Ta chú ý rằng nếu ta đặt các điều kiện xấp xỉ trên $B(.), \Phi$ và điều kiện ban đầu Φ, thì ta có thể suy ra rằng một nghiệm được định nghĩa như trong (3.4) là khả vi và thỏa mãn phương trình (3.1) (xem [82, chương 2]).

3.2 Tính nhị phân mũ

Bây giờ ta xét tính ổn định của nhị phân mũ của hệ dưới các nhiễu nhỏ. Để thực hiện mục đích đó, ta giới hạn chỉ xét trường hợp các toán tử trễ tuyến tính. Nghĩa là, Φ bây giờ là một hàm bị chặn đều và liên tục mạnh từ $\mathbb{R}^+$ vào không gian $\mathcal{L}(C([-r, 0], X), X)$ và do vậy ta sẽ viết $\Phi(t)(u_t)$ thay vì $\Phi(t, u_t)$. Cụ thể hơn là ta xét phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u_t = B(t)u(t) + \Phi(t)(u_t) \quad \text{với} \quad t \leqslant s \leqslant 0 \\ u_s = \phi \in C := C([-r, 0], X), \end{cases} \tag{3.12}$$

hoặc trong dạng đơn giản

$$\begin{cases} u(t) = U(t,a)\phi(0) + \int\limits_a^t U(t,s)\Phi(s)(u_s)ds, \quad a \leqslant t \leqslant b \\ u_a = \phi, \end{cases} \tag{3.13}$$

trong đó họ tiến hóa lùi $(U(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ được sinh bởi $B(t)$.

Rõ ràng, Φ thỏa mãn bất đẳng thức (3.3) đều với mọi $t \geqslant 0, \phi, \psi \in C$ (với hằng số Lipschitz $L = \sup\limits_{t\geqslant 0} ||\Phi(t)||$). Do đó, theo chú ý 2.14 ta thu được rằng, với $\phi \in C([-r,0],X)$, phương trình (3.13) có nghiệm duy nhất $u(.)$. Nghiệm này được định nghĩa trên $[-r,\infty)$ và phụ thuộc liên tục vào điều kiện ban đầu. Thực tế này cho phép ta xác định một họ tiến hóa lùi liên tục mạnh $\mathcal{V} = (V(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ trên không gian Banach $C([-r,0],X)$ như sau

$$V(t,s)\phi := u_t(.,\phi) \tag{3.14}$$

với hàm $u_t(.,\phi)$ là nghiệm của phương trình (3.13) thỏa mãn $u_s(.,\phi) = \phi$. Do đó, từ (3.13), ta có quan hệ sau giữa họ tiến hóa lùi $(V(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ và họ tiến hóa lùi $(U(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ sinh ra bởi $B(.)$:

$$V(t,s)\phi(\theta) = \begin{cases} U(t+\theta,s)\phi(0) & + \int\limits_s^{t+\theta} U(t+\theta,\xi)\Phi(\xi)(V(\xi,s)\Phi)d\xi \\ & \text{với} \quad t \leqslant t+\theta \leqslant s \\ \phi(t+\theta-s) & \text{với} \quad t-r \leqslant s \leqslant t+r \end{cases} \tag{3.15}$$

Bây giờ, ta đi đến kết quả cuối cùng của chúng ta của chương này về tính ổn định của nhị phân mũ của các nghiệm của phương trình (3.13).

Định lý 3.3. *Giả sử rằng các toán tử $B(t)$ sinh ra họ tiến hóa lùi $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ có một nhị phân mũ. Cho Φ là một hàm bị chặn đều và liên tục mạnh từ $\mathbb{R}_+$ vào không gian $\mathcal{L}(C([-r,0],X),X)$. Khi đó, nếu chuẩn $||\Phi(.)|| := \sup\limits_{t\geqslant 0} ||\Phi(t)||$ là đủ nhỏ thì họ tiến hóa lùi $\mathcal{V} = (V(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ được định nghĩa như trong (3.14) có nhị phân mũ tốt.*

Để chứng minh định lý này ta cần hai bổ đề và một định lý sau:

Bổ đề 3.4. *(a) Giả sử $u, f \in C_{00}$. Thế thì $u \in D(G_0)$ và $G_0 u = -f$ khi và chỉ khi*

$$u(t) = \int_0^t U(t,\xi)f(\xi)d\xi, \ \text{với mọi } t \leqslant 0. \tag{3.16}$$

(b) Giả sử $u \in C_0$ và $f \in C_{00}$. Thế thì $u \in D(G_X)$ và $G_X u = -f$ khi và chỉ khi

$$u(t) = U(t,s)u(s) + \int_s^t U(t,\xi)f(\xi)d\xi, \text{ với mọi } t \leqslant s \leqslant 0. \qquad (3.17)$$

(c) Toán tử G_0 là một đơn ánh và phần $-I_Z$ trong C_{00} nghĩa là $D(G_0) = \{u \in D(I_Z) \cap C_{00} : I_Z u \in C_{00}\}$ và $G_0 u = -I_Z u$ với $u \in D(G_0)$.

(d) Toán tử $(I_X, D(I_X))$ là một mở rộng của $(-G_X, D(G_X))$ và

$$kerI_X = kerG_X = \{u \in C_0 : u(t) := U(t,0)u(0), t \leqslant 0\}.$$

Bổ đề 3.5. *Giả sử $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t \leqslant s \leqslant 0}$ là một họ tiến hóa lùi có nhị phân mũ trên $[0, +\infty]$ với phép chiếu nhị phân tương ứng $(P(t))_{t \leqslant 0}$ và hằng số $N > 0, \nu > 0$. Thế thì các khẳng định sau đây là đúng:*

(a) $M := sup_{t \leqslant 0}||P(t)|| < \infty$.

(b) $[t, 0] \ni s \mapsto U_Q(s,t) \in \mathcal{L}(Q(t)X, X)$ là liên tục mạnh với mọi $t \leqslant 0$.

(c) $t \mapsto P(t)$ là liên tục mạnh.

(d) $U_Q(t,s)x = U_Q(t,r)U_Q(r,s)x$ với $x \in Q(s)X$ và $t, r, s \leqslant 0$.

(e) $||U(t,s)P(s)|| \leqslant MNe^{-\nu(t-s)}$ với $t \leqslant s \leqslant 0$.

(f) $||U_Q(t,s)Q(t)|| \leqslant MNe^{-\nu(t-s)}$ với $t \leqslant s \leqslant 0$.

Định lý 3.6. *Giả sử $\mathcal{U} = (U(t,s))_{t \leqslant s \leqslant 0}$ là một họ tiến hóa lùi trên không gian Banach X và Z là một không gian tuyến tính con đóng của X. Ta kí hiệu $X_0(t_0)$ là không gian con của X và được xác định bởi*

$$X_0(t_0) := \{x \in X : \lim_{t \to \infty}(U(t,t_0)x = 0\} \text{ với } t_0 \leqslant 0. \qquad (3.18)$$

Thế thì các khẳng định sau đây là đúng:

(i) $\mathcal{U}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân tương ứng $(P(t))_{t \leqslant 0}$ thỏa mãn $kerP(0) = Z$.

(ii) $I_Z : D(I_Z) \subseteq C_Z \to C_0$ là khả nghịch.

(iii) I_Z là toàn ánh và không gian $X_0(0)$ xác định ở trên là bù được với phần bù là Z.

Bây giờ ta đi chứng minh định lý 3.3.

Chứng minh. Vì $\mathcal{V}$ có một nhị phân mũ nên từ định lý 3.6, ta có với $f \in C_0$ thì phương trình 3.17 có ít nhất một nghiệm $u(.)$ (xem [56, (4.1)]) là

$$u(t) = \int_0^t U(t+\theta,\xi)f(\xi)f\xi - \int_t^\infty U_Q(t,\xi)Q(\xi)f(\xi)d\xi, \quad t \leqslant 0. \qquad (3.19)$$

Bây giờ ta định nghĩa hàm Green

$$G(t,\tau) := \begin{cases} P(t)U(t+\theta,\tau) & \text{với} \quad t \leqslant \tau \leqslant 0 \\ -U_Q(t+\theta,\tau)Q(\tau) & \text{với} \quad 0 \geqslant t \geqslant \tau \end{cases}$$

Khi đó công thức (3.19) có thể được viết lại là

$$u(t) = \int_0^\infty G(t,\xi)f(\xi)d\xi, \quad t \leqslant 0 \tag{3.20}$$

Do vậy ta thu được dạng tổng quát của các nghiệm thuộc C_0 của phương trình 3.17 bằng cách thêm vào nghiệm thu được một số hạng bất kỳ dạng $U(t+\theta,0)y$ với y bất kỳ thuộc không gian con $X_0(0)$ được định nghĩa trong 3.18.

Do đó, tất cả các nghiệm thuộc vào C_0 của phương trình 3.17 được biểu diễn bởi công thức

$$u(t) = U(t+\theta,0)y + \int_0^\infty G(t,\xi)f(\xi)d\xi,, \quad t \leqslant 0 \tag{3.21}$$

với $y = P(0)u(0)$ là một phần tử bất kỳ của không gian con $X_0(0)$.

Trong phương trình (3.15), bây giờ ta đặt $\phi(t) := V(t,0)\phi$. Khi đó, điều này có thể được viết là

$$\phi(t) = U(t+\theta,0)\phi + \int_0^{t+\theta} U(t+\theta,\xi)f(\xi)d\xi, \quad t \leqslant 0 \tag{3.22}$$

tương ứng với hàm $f(t) = \Phi(t)\phi(t)$. Công thức (3.21) cho phép ta biểu diễn nghiệm thuộc C_0 dưới dạng

$$\phi(t) = U(t+\theta,0)y + \int_0^\infty G(t,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi, \quad t \geqslant 0 \tag{3.23}$$

với y nào đó thuộc $X_0(0)$. Ở đây, ta nhắc lại từ định lý 3.6 rằng $X_0(0) = P(0)X$.

Bây giờ ta chứng minh rằng, nếu $||\Phi(.)||$ là đủ nhỏ, thì ta có thể biểu diễn nghiệm này trong một dạng tốt hơn. Cụ thể hơn, ta có thể viết

$$\phi(t) = \Gamma(t)y, \quad y \in X_0(0) \tag{3.24}$$

với toán tử bị chặn nào đó $\Gamma(t)$ trên $\mathbb{R}_+$. Để có được điều này, ta xét toán tử $S : C_0 \to C_0$ được định nghĩa là

$$[Su](t) := \int_0^\infty G(t,\xi)\Phi(\xi)u(\xi)d\xi, \quad t \leqslant 0.$$

Sử dụng nhị phân mũ của $\mathcal{V}$, ta đánh giá chuẩn của S trong $\mathcal{L}(X)$ bởi

$$\begin{aligned}||Su|| &\leqslant N||\Phi(.)|| \sup_{t\leqslant 0} \int_0^\infty e^{-\nu|t-\xi|} d\xi ||u|| \\ &\leqslant \frac{2}{\nu} N||\Phi(.)||\ ||u|| \quad \text{với} \quad u \in C_0.\end{aligned}$$

Vì vậy, $||S|| \leqslant \dfrac{2}{\nu}N||\Phi(.)||$. Ta chú ý rằng phương trình (3.23) có thể được viết là

$$(I - S)\phi(.) = U(.,0)y \text{ với } y \in X_0(0). \tag{3.25}$$

Do đó nếu $||\Phi(.)|| < \dfrac{\nu}{2N}$, thì $||S|| < 1$ và do vậy toán tử $I - S$ là khả nghịch. Vì thế, biểu diễn (3.24) suy ra rằng $\Gamma(.)y := (I-S)^{-1}(U(.,0)y)$ với $y \in X_0(0)$. Hơn nữa, áp dụng chuỗi Neumann cho $(I - S)^{-1}$, ta thu được

$$||\Gamma(t)|| \leqslant \frac{N}{1 - \dfrac{2N||\Phi(.)||}{\nu}} \quad \text{với mọi} \quad t \geqslant 0 \tag{3.26}$$

Bây giờ ta định nghĩa các không gian con ổn định của X tương ứng với họ tiến hóa lùi bị nhiễu $\mathcal{V}$

$$\tilde{X_0}(t_0) : \left\{\phi \in C : \lim_{t\to\infty} V(t,t_0)\phi = 0\right\} \quad \text{với} \quad t_0 \leqslant 0 \tag{3.27}$$

Tiếp theo ta chứng minh rằng $\tilde{X}_0(0)$ là bị đóng và được bù. Thật vậy, với $\phi \in \tilde{X}_0(0)$ bất kỳ thì hàm $V(.,0)\phi$ là một nghiệm thuộc vào C_0 của phương trình (3.22). Do vậy, từ (3.23) và (3.24) ta có

$$\begin{aligned}\phi = V(0,0)\phi &= y + \int_0^\infty G(0,\xi)\Phi(\xi)\Gamma(\xi)y d\xi \\ &= (I - Q(0)RP(0))y, \quad \text{với} \quad y \in X_0(0),\end{aligned}$$

và

$$R = \int_0^\infty Q(0)U_Q(0,\xi)Q(\xi)\Phi(\xi)\Gamma(\xi)P(0)d\xi$$

là một toán tử bị chặn. Sử dụng bổ đề 3.5 và ước lượng (3.26) ta có

$$||R|| \leqslant \frac{M^2N^2||\Phi(.)||}{\nu - 2N||\Phi(.)||} \tag{3.28}$$

Do vậy, toán tử bị chặn $I - Q(0)RP(0)$ đi từ không gian con $X_0(0)$ lên $\tilde{X}_0(0)$.

Toán tử này khả nghịch và bị chặn

$$(I - Q(0)RP(0))^{-1} = I + Q(0)RP(0),$$

và do vậy không gian con $\tilde{X}_0(0)$ là bị đóng. Toán tử

$$\begin{aligned}\tilde{P}(0) &= (I - Q(0)RP(0))P(0)(I - Q(0)RP(0))^{-1}\\ &= (I - Q(0)RP(0))P(0)(I + Q(0)RP(0))\\ &= P(0) - Q(0)RP(0).\end{aligned}$$

là một phép chiếu mà tập giá trị trùng với $\tilde{X}_0(0)$. Phép chiếu bù có dạng

$$\tilde{Q}(0) = I - \tilde{P}(0) = Q(0) + Q(0)RP(0) = Q(0)(I + RP(0)),$$

điều này chỉ ra rằng $\tilde{X}_1(0) := \tilde{Q}(0)X = Q(0)X =: X_1(0)$.

Tiếp theo ta ước lượng các quỹ đạo $V(t,0)\phi$ với giá trị ban đầu ϕ tương ứng thuộc vào các không gian con $\tilde{X}_0(0)$ và $\tilde{X}_1(0)$.

Đầu tiên ta xét các quỹ đạo $V(t,0)x$ với $\phi \in \tilde{X}_0(0)$.
Ta lại đặt $\phi(t) := V(t,0)\phi$, từ (3.23) ta có, với $t \leqslant s \leqslant 0$, $y \in X_0(0)$ nào

đó thì

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= U(t+\theta,0)y + \int\limits_0^\infty G(t,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= P(t)U(t+\theta,0)y + \int\limits_0^\infty G(t,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= P(t)U(t+\theta,s)\left(U(s,0)y + \int\limits_0^\infty G(s,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi\right) \\
&- \int\limits_0^\infty P(t)U(t+\theta,s)G(s,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi + \int\limits_0^\infty G(t,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= P(t)U(t+\theta,s)x(s) - \int\limits_0^s P(t)U(t+\theta,s)P(s)U(s,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&+ \int\limits_s^\infty P(t)U(t+\theta,s)U_Q(s,\xi)Q(\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi + \int\limits_0^\infty G(t,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= P(t)U(t+\theta,s)x(s) + \int\limits_s^\infty G(t,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi.
\end{aligned}
$$

Do vậy, từ tính nhị phân mũ của $\mathcal{V}$ ta thu được

$$||\phi(t)|| \leqslant Ne^{-\nu(t-s)}||\phi(s)|| + N||\Phi(.)|| \int\limits_s^\infty e^{-\nu|t-\xi|}||\phi(\xi)||d\xi$$

với $||\Phi(.)|| < \dfrac{\nu}{2N}$ và $t \leqslant s \leqslant 0$.

Bây giờ áp dụng bổ đề Gronwall và từ [20, bổ đề III.2.2] ta có, nếu $||\Phi(.)|| < \dfrac{\nu}{2N}$ thì tồn tại các hằng số dương N_1 và μ sao cho

$$||V(t,0)\phi|| \leqslant N_1 e^{-\mu(t-s)}||V(s,0)x|| \quad \text{với} \quad \phi \in \tilde{X}_0(0), t \leqslant s \leqslant 0 \tag{3.29}$$

Tương tự, nếu ta xét các quỹ đạo $V(t,t_0)\phi$ với $\phi \in \tilde{X}_0(0)$ và $t_0 \leqslant 0$, thì ta thu được rằng tồn tại các hằng số dương N_1 và μ sao cho

$$||V(t,t_0)\phi|| \leqslant N_1 e^{-\mu(t-s)}||V(s,t_0)\phi|| \quad \text{với} \quad \phi \in \tilde{X}_0(t_0), t \leqslant s \leqslant t_0 \leqslant 0 \tag{3.30}$$

Tiếp theo ta ước lượng các quỹ đạo $V(t,0)x$ với $\phi \in \tilde{X}_1(0) = X_1(0)$.

Đặt $\phi(t) := V(t,0)x$, từ (**??**) ta có, với $0 \geqslant t \geqslant s$,

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= U(t+\theta,0)x + \int_0^t U(t+\theta,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= Q(t)U(t+\theta,0)\phi + \int_0^t U(t+\theta,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= Q(t)U_Q(t,s)Q(s)\left(U(s,0)\phi + \int_0^s U(s,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi\right) \\
&- Q(t)U_Q(t,s)Q(s)\int_0^s U(s,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi + \int_0^t U(t,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi) \\
&= Q(t)U_Q(t,s)Q(s)x(s) - \int_0^s U_Q(t,s)Q_sU(s,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&+ \int_0^t (P(t)+Q(t))U(t+\theta,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= Q(t)U_Q(t,s)Q(s)x(s) - \int_0^t Q(t)U(t+\theta,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&- \int_t^s U_Q(t,\xi)Q(\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi + \int_0^t (P(t)+Q(t))U(t+\theta,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&= U_Q(t,s)Q(s)x(s) + \int_0^t P(t)U(t+\theta,\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi \\
&- \int_t^s U_Q(t,\xi)Q(\xi)\Phi(\xi)\phi(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Ở đây, ta chú ý rằng

$$U_Q(t,s)Q(s)U(s,\xi) = \begin{cases} U_Q(t,\xi)Q(\xi) & \text{với} \quad 0 \geqslant t \geqslant \xi \geqslant s \\ Q(t)U(t+\theta,\xi) & \text{với} \quad 0 \geqslant \xi \geqslant t \geqslant s. \end{cases}$$

Do đó, từ tính nhị phân mũ của $\mathcal{V}$, ta thu được rằng

$$||\phi(t)|| \geqslant Ne^{-\nu(s-t)}||\phi(s)|| + N||\Phi(.)|| \int_0^s e^{-\nu|t-\xi|}||\phi(\xi)||d\xi \quad \text{với} \quad 0 \geqslant t \geqslant s.$$

Từ bất đẳng thức này, và từ [20.Hệ quả III.2.3] suy ra tồn tại các hằng số dương N_1 và μ sao cho

$$||V(t,0)\phi|| \leqslant N_1 e^{-\mu(s-t)}||V(s,0)\phi|| \quad \text{với} \quad \phi \in X_1(0), s \leqslant t \leqslant 0. \quad (3.31)$$

Cuối cùng, ta đặt $\tilde{X}_1(t) := V(t,0)\tilde{X}_1(0)$ với $t \leqslant 0$. Khi đó, dễ dàng thấy rằng $X = \tilde{X}_0(t) \oplus \tilde{X}_1(t)$. Bây giờ đặt $\tilde{P}(t)$ là phép chiếu từ C lên $\tilde{X}_0(t)$ với hạt nhân $\tilde{X}_1(t)$. Khi đó, từ (3.30), (3.31) và từ các định nghĩa của $\tilde{X}_0(t)$ và $\tilde{X}_1(t)$, ta có họ tiến hóa lùi $\mathcal{V} = V(t,s))_{t\leqslant s\leqslant 0}$ có nhị phân mũ với các phép chiếu $(\tilde{P}(t))_{t\leqslant 0}$. $\square$

KẾT LUẬN

Luận văn nghiên cứu sự ổn định nghiệm của phương trình vi phân hàm riêng có trễ (DPDE's) với quá khứ không ôtônôm và phương trình vi phân riêng có trễ không ôtônôm. Cụ thể là, ta sử dụng lý thuyết nửa nhóm tiến hóa để thu được các kết quả trên tính đặt chỉnh cho phương trình DPDE's tuyến tính và nửa tuyến tính với quá khứ không ôtônôm cũng như tính ổn định mũ và nhị phân mũ của các nghiệm.
Một số đóng góp mới của tác giả trong luận văn:
Nghiên cứu tính đặt chỉnh và ổn định của ổn định mũ, nhị phân mũ dưới các nhiễu nhỏ của phương trình vi phân đạo hàm riêng có trễ không ôtônôm.

1. Chỉ ra sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm đủ tốt của phương trình DPDE's không ôtônôm nửa tuyến tính (phương trình (3.1)).

2. Xét tính ổn định của nhị phân mũ của phương trình DPDE's không ôtônôm nửa tuyến tính trong trường hợp các toán tử trễ tuyến tính (phương trình 3.12).

Các kết quả này có thể dùng để nghiên cứu các phương trình phi tuyến, chứng minh sự tồn tại các đa tạp bất biến, đa tạp tâm và đa tạp quán tính, đó là những công việc trong tương lai.

Tài liệu tham khảo

[1] S.Brendle, R. Nagel, Partial functional equations with non-autonomous past, Dist. Contin. Dynam. Systers 8 (2002) 953-966.

[2] C.Chicone, Y. Latushkin, Evonlution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations, America Mathematical Society, 1999.

[3] K.J. Engel, R. Nagel, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, in: Graduate Texts in math., Vol. 1994, Springer-Verlag, Betlin, 2000.

[4] G. Fragnelli, G. Nickel, Partial functional equations with non-autonomous past in L^p- phase spaces, Tubinger Ber. Funktionalanal. 10 (2001) 59-75.

[5] G. Greiner, M. Schwarz, Weak spectral mapping theorems for functional differential equations, J . Differential Equations 94 (1991) 205-256.

[6] J. Hale, S. M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag, Betlin, 1993.

[7] N. T. Huy, Exponentially dichotomous operators and exponentially dichotomy of evolution equations on the half-line, Integral Equations Operator Theory 48 (2004), 497-510.

[8] M. A. Kaashock, S. M Verduyn Lunel, An integrability condition on the resolvent for hyperbolicity of the semigroup, J. Differential Equations 112 (1994) 374-406.

[9] A. Lunardi, Analytic Semigroup and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhauser, 1955.

[10] N. V. Minh, On the proof of characterization of the exponential dichotomy, Proc. Amer. Math. Soc. 1257(1999) 779-782.

[11] N. V. Minh, F. Rabiger, R. Schnaubelt, Exponential stability, exponential expansiveness and exponential dichotomy of evolution equations on the half-line, Integral Equations Operator Theorem 32(1998) 332-353.

[12] N. V. Minh, N. T. Huy, Characterizations of dichotomies of evolution equations on the half-line, J. Math. Anal. Appl. 261 (2001) 38-44.

[13] S. Murakami, T. Naito, N. V. Minh, Evonlution semigroups and sums of commuting operators: a new approach to the admissibility of function spaces, J. Differential Equations 164 (2000) 240-285.

[14] J. Van Neerven, The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators, in: Oper. Theory Adv. Appl., Vol.88, Birkhauser, 1996.

[15] Frabiger, A. Rhandi, R. Schnaubelt, J. Voigt, Non-autonomous Miyadera perturbations, Differential Intergral Equations. 13 (2000) 341-368.

[16] A. Rhandi, Extrapolation methods to solve non-autonomous retarded partial differential equations, Studia Math. 126 (1997) 219-233.

[17] H.H. Schaefer, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, New York, 1980.

[18] R. Schnaubelt, Well-posedness and asymptotic behaviour of non-autonomous linear evolution equations, Tubinger Ber. Funktionalanal. 10 (2001) 195-218.

[19] R. Schnaubelt. Asymptotically autonomous parabolic evolution equations, J. Evol. Equations 1 (2001) 19-37.

[20] Ju.L.Daleckii, M.G.Krein, Stability of solutions of Differential Equations in Banach Spaces.Transl.Amer.Math.Soc.Provindence RI, 1974.

[21] J.Wu, Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations. Springer - Verlag, New York - Berlin - Heidelberg 1996.

[22] Nguyen Thieu Huy, Resolvents of operators and partial functional differential equations with non-autonomous past, Journal of Mathematical Analysis and Applications 289 (2004), 301-316.