ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
- -

ĐINH THỊ BÍCH NGỌC

ĐỀ TÀI

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TOÁN KHÔNG MẪU MỰC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS Đặng Huy Ruận

HÀ NỘI - 2015

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Các bài toán không mẫu mực là các bài toán mà việc giải chúng đòi hỏi suy luận, tư duy độc đáo. Việc giải các bài toán không mẫu mực giúp người thực hiện nâng cao nhanh chóng khả năng tư duy, suy luận và nhiều khi phát hiện ra những phương pháp giải toán độc đáo không ngờ. Bởi vậy rất nhiều em học sinh, đặc biệt là học sinh trường chuyên, lớp chọn thích làm quen với các bài toán này.

Luận văn "Một số phương pháp giải bài toán không mẫu mực" trình bày sáu phương pháp chủ yếu để giải các bài toán không mẫu mực. Nhưng do một bài toán không mẫu mực có thể giải đồng thời bằng nhiều phương pháp khác nhau và một vài phương pháp có phần "tương tự" nên việc phân loại phương pháp, ví dụ và bài tập chỉ là tương đối.

Các bài toán không mẫu mực là mảng khá lý thú trong toán học nói chung cũng như toán phổ thông nói riêng. Vì vậy, tác giả hi vọng luận văn sẽ trở thành tài liệu có ích cho các em học sinh phổ thông, đặc biệt các em học sinh trường chuyên, lớp chọn, các thầy cô giáo dạy ở cuối cấp tiểu học, các thầy cô giáo dạy toán ở trường phổ thông, các bạn sinh viên và những ai quan tâm đến mảng toán lý thú này.

Luận văn được chia làm sáu chương:
Chương 1 trình bày về phương pháp quy nạp toán học.
Chương 2 trình bày về phương pháp phản chứng.
Chương 3 trình bày về phương pháp suy luận trực tiếp.
Chương 4 trình bày về phương pháp bảng.
Chương 5 trình bày về phương pháp sơ đồ.
Chương 6 trình bày về phương pháp đồ thị.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn, giúp đỡ tận tình của GS.TS Đặng Huy Ruận, em xin gửi tới thầy lòng biết ơn sâu sắc. Em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban chủ nhiệm khoa cùng các thầy cô giáo khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên - Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã tạo điều kiện, dạy bảo và dìu dắt em trong những năm học vừa qua. Xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân trong thời gian học tập và làm luận văn.

Do khả năng nhận thức của bản thân tác giả, luận văn còn nhiều hạn chế, thiếu sót. Kính mong nhận được các ý kiến đóng góp của thầy cô cùng các bạn đọc.

Xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, tháng 7 năm 2015

Chương 1

Phương pháp quy nạp toán học

Phương pháp quy nạp toán học là một công cụ rất có hiệu lực trong việc chứng minh nhiều bài toán thuộc các lĩnh vực khác nhau của toán học như: số học, đại số, hình học... và đặc biệt là các bài toán không mẫu mực. Đây là một phương pháp chứng minh toán học đặc biệt cho phép ta rút ra những quy luật tổng quát dựa trên cơ sở những trường hợp riêng. Quá trình quy nạp ngược với quá trình suy diễn. Từ "tính chất" của một số cá thể suy ra "tính chất" của tập thể, nên không phải lúc nào cũng đúng. Nó chỉ đúng khi thỏa mãn nguyên lý quy nạp.

1.1 Nguyên lý quy nạp

Cho n_0 là một số nguyên dương và $P(n)$ là một mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Nếu

1.$P(n_0)$ đúng và

2. Nếu $P(k)$ đúng từ đó suy ra được $P(k+1)$ cũng đúng với mọi số tự nhiên $k \geq n_0$ thì $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

1.2 Phương pháp chứng minh bằng quy nạp

Giả sử khẳng định $P(n)$ xác định $\forall n \geq n_0$. Để chứng minh $P(n)$ đúng $\forall n \geq n_0$ bằng quy nạp, ta cần thực hiện 2 bước

1.2.1 Cơ sở quy nạp

Kiểm tra sự đúng đắn của $P(n)$ với $n = n_0$, nghĩa là xét $P(n_0)$ có đúng không.

1.2.2 Quy nạp

Chứng minh rằng: Nếu với mỗi $k \geq n_0$, $P(k)$ là mệnh đề đúng, thì suy ra $P(k+1)$ cũng đúng.
Nếu cả 2 bước trên đều thỏa mãn, thì theo nguyên lý quy nạp $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Chú ý
Trong quá trình quy nạp, nếu không thực hiện đầy đủ cả 2 bước: Cơ sở quy nạp và quy nạp thì có thể dẫn đến kết luận sai lầm. Một số ví dụ sau sẽ chứng tỏ điều này.
- Do bỏ qua bước cơ sở quy nạp, ta đưa ra kết luận không đúng: *Mọi số tự nhiên đều bằng nhau!* Bằng cách quy nạp như sau: Giả sử các số tự nhiên không vượt quá $k+1$ đã bằng nhau. Khi đó ta có:

$$k = k + 1$$

Thêm vào mỗi vế của đẳng thức trên 1 đơn vị sẽ có:

$$k + 1 = k + 1 + 1 = k + 2$$

Cứ như vậy suy ra mọi số tự nhiên không nhỏ hơn k đều bằng nhau. Kết hợp với giả thiết quy nạp: Mọi số tự nhiên không vượt quá k đều bằng nhau, đi đến kết luận sai lầm: Tất cả các số tự nhiên đều bằng nhau!

- Do bỏ qua bước quy nạp nên nhà toán học Pháp P.Fermat (1601 - 1665) đã cho rằng số dạng $2^{2^n} + 1$ đều là số nguyên tố.

P.Fermat xét 5 số đầu tiên:
Với $n = 0$ cho $2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ là số nguyên tố.
Với $n = 1$ cho $2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ là số nguyên tố.
Với $n = 2$ cho $2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ là số nguyên tố.
Với $n = 3$ cho $2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ là số nguyên tố.
Với $n = 4$ cho $2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$ là số nguyên tố.

Nhưng vào thế kỷ XVIII, L.Euler (1707 - 1783) đã phát hiện với $n = 5$ khẳng định trên không đúng, bởi vì:

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641.6700417$$

là hợp số.

1.3 Vận dụng phương pháp quy nạp để giải bài toán không mẫu mực

Phương pháp quy nạp được sử dụng trong tính toán, trong chứng minh và suy luận dưới nhiều dạng khác nhau, nhưng trong phần này chỉ trình bày việc vận dụng phương pháp quy nạp để giải bài toán không mẫu mực.

Bài toán 1.3.1. *(IMO 1998) Với mọi số nguyên dương n, ta kí hiệu $d(n)$ là số tất cả các ước dương của n (kể cả 1 và n). Hãy xác định tất cả các số nguyên dương k, sao cho $d(n^2) = kd(n)$, với n là số nguyên dương nào đó.*

Chứng minh.

Giả sử khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số n có dạng:

$$n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$$

Ta có:

$$d(n) = (a_1+1)(a_2+1)...(a_r+1)$$
$$d(n^2) = (2a_1+1)(2a_2+1)...(2a_r+1)$$

Để $d(n^2) = kd(n)$ thì ta phải chọn các số a_i sao cho:

$$(2a_1+1)(2a_2+1)...(2a_r+1) = k(a_1+1)(a_2+1)...(a_r+1) \qquad (*)$$

Do $(2a_i+1)(1 \leq i \leq r)$ đều là các số lẻ nên k phải là các số lẻ. Ta sẽ chứng minh mệnh đề đảo lại rằng: "Với số lẻ k bất kỳ, ta có thể tìm được các số a_i thỏa mãn (*) (tức là tìm được n)".

Dùng phương pháp quy nạp theo k.

1. Với $k = 1$, mệnh đề đúng $(n = 1, a_i = 0)$

2. Giả sử mệnh đề đúng với số k nào đó, ta chứng minh nó cũng đúng cho $(2^m.k - 1)(m \geq 1)$. Lúc đó mệnh đề đúng cho mọi số lẻ vì mọi số lẻ l đều viết được dưới dạng: $(2^m.l' - 1)$ (với l' là số nhỏ hơn l).

Đặt $a_i = 2^{i-1}[(2^m-1).k-1]$, với $i = 1, 2, ..., m$.

Khi đó: $2a_i + 1 = 2^i(2^m-1)k - (2^i - 1)$

$$a_i + 1 = 2^{i-1}(2^m-1)k - (2^{i-1}-1) = 2a_{i-1} + 1$$

Do vậy, tích của các số $(2a_i+1)$ chia hết cho tích các số (a_i+1) với $i = \overline{1,m}$ khi $(2a_m+1)$ chia hết cho (a_1+1) hay:

$$[2^m(2^m-1)k - (2^m-1)] = (2^m-1).(2^m.k-1)$$

chia hết cho $(2^m - 1)k$ có nghĩa là: $(2^m.k - 1)$ chia hết cho k. Vậy nếu ta chọn các a_i như trên với k đã cho, thì mệnh đề trên đúng cho $(2^m.k - 1)$. Ta có điều phải chứng minh! $\square$

Bài toán 1.3.2. *(USAMTS, 2000 - 2001, Cuộc thi tài năng toán học Mỹ) Hãy tìm số dư khi chia số* $1776^{1492!}$ *cho 2000.*

Chứng minh.

Trước hết ta chứng minh bổ đề: "Với mọi số nguyên dương n, ta có: $1376^n \equiv 1376 (\text{mod } 2000)$"

Dùng phương pháp quy nạp:

1. Với $n = 1$, hiển nhiên có: $1376^1 \equiv 1376 (\text{mod } 2000)$

Với $n = 2$, ta có: $1376^2 = 1893376 \equiv 1376 (\text{mod } 2000)$

2. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k (k \in \mathbb{N}, k \geq 1)$,
tức là: $1376^k \equiv 1376 (\text{mod } 2000)$.
Ta chứng minh bổ đề đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có:

$1376^{k+1} \equiv 1376^2 (\text{mod } 2000)$, mà $1376^2 \equiv 1376 (\text{mod } 2000)$, nên

$$1376^{k+1} \equiv 1376 (\text{mod } 2000)$$

Bổ đề được chứng minh!

Quay lại bài toán, ta có: $1776^5 = 1376 (\text{mod } 2000)$, nên

$$1776^{1492!} = (1776^5)^{\frac{1492!}{5}}$$

Vậy khi chia số $1776^{1492!}$ cho 2000 được số dư là 1376. $\square$

1.4 Bài tập tự giải

Bài toán 1.4.1. *Tính số tam giác* $(T(n))$ *của một đa giác n đỉnh được chia bởi các đường chéo không cắt nhau.*

Hướng dẫn.

$T(n) = n - 2$. Tính bằng quy nạp theo số đỉnh của đa giác.

Bài toán 1.4.2. *Cho* $n + 1 (n \geq 1)$ *số nguyên dương* $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$. *Biết rằng* $a_1 \geq a_0, a_2 = 3a_1 - 2a_0, a_3 = 3a_2 - 2a_1, ..., a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$. *Chứng minh rằng:* $a_n > 2^{n-1}$.

Hướng dẫn.

Theo giả thiết có $a_1 - a_0 \geq 1, a_i = 2(a_{i-1} - a_{i-2}) + a_{i-1}(2 \leq i \leq k)$
Nhân vế với vế $k + 1$ đẳng thức trên ta suy ra $a_k \geq 2^{k-1}$.
Nhờ bất đẳng thức vừa nhận được và quy nạp theo k chứng minh được $a_k \geq 2^{k-1}$. Từ đây có $a_n \geq 2^{n-1}$.

Chương 2

Phương pháp phản chứng

2.1 Phép suy luận phản chứng

Phép suy luận phản chứng là quá trình ta đưa ra một giả thiết (giả thiết này đối lập với điều cần tìm) rồi đi tìm đến sự vô lý để loại trừ giả thiết ta vừa đặt ra.

2.2 Phương pháp chứng minh bằng phản chứng

Phương pháp chứng minh bằng phản chứng là phương pháp sử dụng phép suy luận phản chứng để chứng minh, diễn giải những khẳng định toán học.

Trong lịch sử toán học, phương pháp chứng minh bằng phản chứng đã được sử dụng từ rất sớm. Người ta sử dụng nó trong chứng minh nguyên lý Dirichlet.

Bài toán 2.2.1. *(Nguyên lý Dirichlet) Người ta nhốt m con thỏ vào n cái lồng, $(m > n)$. Chứng minh rằng có ít nhất 2 con thỏ được nhốt trong cùng một lồng nào đó.*

Chứng minh. Giả sử m_i là số con thỏ được nhốt vào lồng thứ i, $(i = \overline{1, n})$. Khi đó ta có

$$m_1 + m_2 + ... + m_n = m.$$

Giả sử ngược lại, mỗi lồng chỉ nhốt nhiều nhất một con thỏ, tức là

$$0 \geq m_i \geq 1, (i = \overline{1, n}).$$

Khi đó $m = m_1 + m_2 + ... + m_n \leq \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\text{n số 1}} = n$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $m > n$.

Vậy điều ta giả sử là sai, nghĩa là phải có ít nhất 2 con thỏ được nhốt trong một lồng nào đó. □

2.3 Các bước suy luận trong chứng minh phản chứng

Trong toán học, phương pháp phản chứng rất thường xuyên được sử dụng, nó là công cụ đắc lực trong chứng minh một số bài toán khó. Vậy câu hỏi đặt ra là: Phương pháp chứng minh phản chứng sử dụng khi nào? Cách chứng minh phản chứng như thế nào?

Phương pháp chứng minh phản chứng sử dụng khi nào?

Khi gặp những bài toán khẳng định một hệ thức đúng, khẳng định nghiệm của phương trình, hệ phương trình hoặc bất đẳng thức ... trong đại số, hình học, số học, giải tích hay các bài toán không mẫu mực. Đặc biệt khi cần chứng minh tính tồn tại duy nhất của một đối tượng người ta hay dùng phản chứng để chứng minh.

Nhận xét trên đây chỉ là kinh nghiệm của tác giả trong quá trình giải một số bài toán. Tùy vào từng bài toán, tình huống cụ thể khác mà người giải toán vận dụng phương pháp này một cách linh hoạt.

Các bước trong chứng minh phản chứng:

Ta chứng minh mệnh đề P là đúng.

Bước 1. Giả sử mệnh đề P là sai (tức là chúng ta đi phủ định mệnh đề cần chứng minh).

Bước 2. Từ điều giả sử ta suy ra một số tính chất hoặc quan hệ mới mà những tính chất này dẫn tới điều vô lý.

Bước 3. Ta kết luận điều giả sử ban đầu là sai. Vậy mệnh đề P là mệnh đề đúng.

Chú ý: Trong ba bước suy luận phản chứng nêu trên, bước 1 rất quan trọng vì chúng ta cần tạo ra mệnh đề phủ định điều cần chứng minh phải chính xác.

Ở bước 2 điều vô lý có thể thuộc một trong các dạng sau:
Điều trái với giả thiết đã cho
Điều trái với một trong các kiến thức đã biết.
Điều trái với giả thiết phản chứng đặt ra.

2.4 Vận dụng phương pháp phản chứng để giải các bài toán không mẫu mực

Bài toán 2.4.1. *(Olympic Châu Á Thái Bình Dương 1998) Chứng minh rằng với mọi số a, b nguyên dương, số (36a + b)(a + 36b) không thể là một lũy thừa của 2.*

Chứng minh.
Phản chứng. Giả sử ngược lai, tồn tại cặp số nguyên dương (a, b), sao cho $(36a + b)(a + 36b)$ là một lũy thừa của 2.
Trong số những cặp (a, b) như vậy, ta xét (m, n) là cặp có tổng $m + n$ bé nhất. Vì $(36m+n)(m+36n)$ là một lũy thừa của 2 nên suy ra $(36m+n)$ và $(m+36n)$ cũng là các lũy thừa của 2. Lúc đó m, n đều là các số chẵn. Ta cũng thấy rằng

$$(36m + n) \geq 37, (m + 36n) \geq 37$$

Bây giờ, ta đặt

$$36m + n = 2^r, m + 36n = 2^s, m = 2p \text{ và } n = 2q.$$

trong đó r, s, p, q là các số nguyên dương.
Ta có $r, s > 5$. Khi đó

$$(36p + q)(p + 36q) = \frac{36m + n}{2} \text{x} \frac{m + 36n}{2} = 2^{r+s-2}$$

cũng là một lũy thừa của 2.
Nhưng ta lại có

$$p + q = \frac{m + n}{2} < m + n$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết về việc chọn cặp số (m, n) có tổng bé nhất như trên. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng trong các cặp (a, b) mà $(36a + b)(a + 36b)$ là một lũy thừa của 2, ta không thể chọn được cặp số có tổng bé nhất: vô lý!

Vậy số $(36a + b)(a + 36b)$ không thể là một lũy thừa của 2. □

Bài toán 2.4.2. *(Tuyển tập 5 năm Tạp chí Toán học & Tuổi trẻ 1991 - 1995) Trong một hình vuông cạnh bằng 1 cm, lấy 51 điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn luôn có 3 điểm đã lấy ra nằm trong một hình tròn bán kính bằng* $\frac{1}{7}$.

Chứng minh. Bài toán được giải theo 2 bước.

1) Chia mỗi cạnh hình vuông thành 5 phần bằng nhau, rồi nối các điểm chia tương ứng đối diện bằng các đoạn thẳng song song với cạnh hình vuông. Khi đó hình vuông được chia thành 25 hình vuông nhỏ bằng nhau và có cạnh bằng $\frac{1}{5}$ cm.

Giả sử mỗi hình vuông nhỏ chứa không quá 2 điểm đã được lấy. Khi đó số điểm đã được lấy sẽ không vượt quá 50, nên nhỏ hơn 51 điểm. Ta đã đi tới mâu thuẫn với giả thiết: Các điểm đã được lấy bằng 51. Bởi vậy phải có ít nhất một hình vuông con chứa không ít hơn 3 điểm đã lấy.

Giả sử hình vuông con ở góc trên tận cùng bên phải chứa 3 điểm đã chọn ra. Ta ký hiệu hình vuông này bằng ABCD.

2) Bao hình vuông ABCD bằng hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$ cm.

Hình vuông ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại điểm giữa của mỗi đường và vuông góc với nhau. Dùng O để ký hiệu giao điểm hai đường chéo và x là độ dài nửa đường chéo.

Tam giác AOB vuông tại O có cạnh huyền AB dài $\frac{1}{5}$. Khi đó ta có

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2x^2 = \overline{AB}^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

nên $x^2 = \frac{1}{50} < \frac{1}{49} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$

Do đó $x < \frac{1}{7}$ cm.

Bởi vậy, ta có thể bao hình vuông ABCD bằng hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$ cm, nên ba điểm đã chọn ra thuộc hình vuông ABCD nằm trong hình tròn bán kính $\frac{1}{7}$ cm. □

2.5 Bài tập tự giải

Bài toán 2.5.1. *Chứng minh rằng từ 8 số tự nhiên tùy ý luôn luôn chọn ra được 2 số, mà hiệu của chúng chia hết cho 7.*

Hướng dẫn. Chia 8 số tự nhiên tùy ý đã chọn ra cho 7 được 8 số dư tương ứng, nhưng chỉ thuộc 7 loại: 0, 1, 2, 4, 5, 6 nên phải có ít nhất 2 số dư bằng nhau. Khi đó hiệu của 2 số tương ứng chia hết cho 7.

Bài toán 2.5.2. *Chứng minh với mọi số nguyên a, b, c luôn tìm được số nguyên dương n, sao cho số $f(n) = n^3 + an^2 + bn + c$ không phải là số chính phương.*

Hướng dẫn. Nhận xét rằng khi chia cho 4, số chính phương chỉ có thể dư 0 hoặc dư 1.
Phản chứng. Giả sử $f(n)$ là số chính phương.
Khi đó

$$f(4) - f(2) \equiv 2b (\text{mod } 4)$$

Mà $2b$ là số chẵn, theo nhận xét thì $f(4) - f(2)$ chỉ có thể đồng dư với $0, 1, -1$ theo modun 4, nên suy ra $2b \equiv 0 (\text{mod } 4)$

$$f(3) - f(3) \equiv (2b + 2)(\text{mod } 4)$$

Tương tự trên ta cũng có $2b + 2 \equiv 0(\text{mod } 4)$ nên suy ra $2 \equiv 0(\text{mod } 4)$ (vô lý). Vậy điều giả sử là sai.

Chương 3

Phương pháp suy luận

3.1 Vài nét về phương pháp suy luận

Các bài toán không mẫu mực (không có cách giải nhất định), thường có nhiều cách giải khác nhau, trong đó có phương pháp suy luận trực tiếp.

Phương pháp suy luận trực tiếp đã có từ xa xưa và để giải các bài toán logic người ta chỉ có duy nhất phương pháp này (sau này mới có thêm các phương pháp khác). Các bài toán logic đa dạng về đề tài, phong phú về chủng loại đòi hỏi chúng ta phải biết suy luận đúng đắn, chặt chẽ trên cơ sở vận dụng những kiến thức cơ bản và kinh nghiệm sống của mình. Vì vậy, cần phải luyện tập óc quan sát, cách lập luận, cách xem xét các khả năng có thể xảy ra của một sự kiện và vận dụng những kiến thức đã học vào các tình huống muôn hình muôn vẻ trong cuộc sống hàng ngày.

Đôi khi để giải những bài toán loại này, chỉ cần những kiến thức toán học đơn giản nhưng lại đòi hỏi khả năng chọn lọc trường hợp, suy luận chặt chẽ, rõ ràng. Sự phát triển của toán học, chẳng hạn giải tích tổ hợp, phương pháp quy nạp, phản chứng góp phần phong phú thêm phương pháp suy luận logic trực tiếp. Và nhờ những kiến thức toán học này người ta có thể giải các bài toán logic (kể cả các bài toán logic phức tạp) một cách nhanh hơn, tốt hơn và chặt chẽ hơn.

Điều cơ bản của phương pháp này là thông qua việc phân tích các điều kiện của bài toán cần tìm ra mối quan hệ logic giữa các mệnh đề.Sau đây là một vài ví dụ về vận dụng phương pháp suy luận trực tiếp.

3.2 Các ví dụ về vận dụng phương pháp suy luận.

Bài toán 3.2.1. *(Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 379, tháng 1 - 2009) Hãy tưởng tượng bạn đang tham gia trò chơi "Chiếc nón kỳ diệu" trên truyền hình và bạn đang có cơ hội nhận được một phần quà có giá trị. Phần quà này nằm ở 1 trong 3 chiếc hộp (hai chiếc hộp còn lại rỗng).*
Giả sử bạn đã chọn chiếc hộp nào đó nhưng chưa mở ra, lúc này người dẫn chương trình (là người biết rõ hộp nào chứa phần quà) sẽ mở 1 chiếc hộp rỗng trong hai chiếc còn lại ra (nếu 2 hộp đều rỗng thì chọn hộp bất kỳ). Sau đó anh ta hỏi bạn có đổi chiếc hộp vừa chọn lấy chiếc hộp còn lại chưa mở không?
Hỏi rằng nếu bạn đồng ý thì xác suất chọn đúng chiếc hộp có quà là bao nhiêu? Theo tôi nghĩ khi người dẫn chương trình bỏ đi một chiếc hộp rỗng thì sẽ còn lại 2 chiếc hộp. Nên nếu đồng ý đổi thì xác suất chọn đúng hộp có quà tặng là $\frac{1}{2}$*. Bạn có nghĩ như tôi không?*

Chứng minh. Rõ ràng xác suất chọn đúng hộp có quà tặng bằng $\frac{1}{2}$ là không đúng.
Có thể thấy rằng xác suất để chiếc hộp chứa quà mà người chơi chọn ban đầu (khi có 3 hộp) là $\frac{1}{3}$. Xác suất để một trong hai chiếc hộp còn lại có quà là $\frac{2}{3}$. Khi người dẫn chương trình loại đi một chiếc hộp rỗng thì chiếc hộp còn lại (mà người chơi không chọn) có xác suất chứa quà là $\frac{2}{3}$.
Do đó xác suất có chứa quà trong hai chiếc hộp còn lại là khác nhau. Vì vậy nếu người chơi đồng ý đổi chiếc hộp đã chọn với chiếc hộp còn lại thì xác suất chọn đúng hộp quà của người chơi sẽ tăng lên $(= \frac{2}{3})$. Như vậy nếu người dẫn chương trình tạo một cơ hội như trên thì người chơi không nên bỏ lỡ. □

Bài toán 3.2.2. *(Tạp chí Toán Học & Tuổi Trẻ số 388, tháng 10 năm 2009) Trong một cuộc họp gồm 56 đại biểu. Biết rằng mỗi đại biểu đều quen biết với không ít hơn 8 đại biểu khác (quy ước rằng A quen B thì B quen A). Chứng minh rằng ban tổ chức có thể sắp xếp ít nhất một bàn gồm 4 đại biểu cùng bàn với nhau sao cho mỗi đại biểu quen ít nhất 2 trong số 3 đại biểu còn lại.*

Chứng minh. Xét 1 đại biểu A bất kỳ. Kí hiệu $A_1, A_2, ..., A_n$ là tất cả các đại biểu quen với A. Theo giả thiết $n \geq 8$ và mỗi $A_i(i = \overline{1, n})$ ngoài A ra đều quen ít nhất 7 đại biểu khác. Do đó nếu với mỗi $i = \overline{1, n}$ ta liệt kê tất cả các đại biểu khác A và quen với A_1 thì tổng số đại biểu liệt kê ra được kể cả lặp không ít hơn $7n \geq 56$. Mà ngoài A chỉ còn 55 đại biểu khác nhau nên suy ra có ít nhất một đại biểu được liệt kê ít nhất hai lần. Nghĩa là phải có hai đại biểu $A_i, A_j (i \neq j, j \in \{1, 2, ..., n\})$ cũng quen với đại biểu B, khác A (có thể $B \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$). Hiển nhiên khi xếp A_1, A_i, A_j, B cùng bàn ta sẽ được chiếc bàn thỏa mãn đề bài. $\square$

Chương 4

Phương pháp bảng

4.1 Vài nét về phương pháp bảng

Nhiều bài toán logic có thể giải bằng cách lập bảng mô tả mối quan hệ giữa các đối tượng được cho trong bài toán.

Đối với một số bài toán logic trong đó xuất hiện 2 hay nhiều tệp và các cặp phần tử nói lên mối quan hệ giữa các tệp, người ta có thể thiết lập một hay nhiều bảng, để mô tả mối quan hệ giữa các tệp.

Mỗi bảng này có hàng trên cùng ghi các phần tử của một tệp, còn cột tận cùng bên trái ghi các phần tử thuộc tập kia và các vị trí trong bảng ghi mã số quan hệ giữa các phần tử thuộc các tệp.

Căn cứ vào các điều kiện đã cho trong bài toán gạch bỏ đi những cặp phần tử không thích hợp, từ đó đi đến lời giải của bài toán.

Giải bài toán logic bằng phương pháp bảng đôi khi vấp phải bảng cần lập có chiều khá lớn hoặc phải kết hợp nhiều bảng mới đi đến kết quả.

Sau đây là một vài ví dụ vận dụng phương pháp bảng để giải bài toán không mẫu mực.

4.2 Vận dụng phương pháp bảng để giải bài toán không mẫu mực

Bài toán 4.2.1. *Trong buổi học nữ công, ba bạn Cúc, Đào, Hồng làm ba bông hoa: cúc, đào, hồng. Bạn làm hoa hồng nói với bạn Cúc:"Thế là trong chúng ta không có ai làm loại hoa trùng với tên mình". Hãy xác định tên hoa mà mỗi bạn đã làm.*

Chứng minh.
Bài toán này có hai tệp đối tượng. Tệp thứ nhất gồm các bạn làm hoa,

tệp thứ 2 gồm các bông hoa được làm. Nó có thể giải bằng phương pháp bảng.
1) Lập bảng.
Bảng cần lập gồm 4 hàng và 4 cột. Hàng đầu, từ cột thứ 2 ghi lần lượt tên các bông hoa được làm, còn trên cột tận cùng bên trái từ hàng hai ghi lần lượt các bạn tham gia làm hoa.
2) Điền mã số quan hệ vào các vị trí của bảng.
a. Căn cứ vào giả thiết: Mỗi bạn đều không làm hoa trùng với tên mình, mà điền mã "không" vào các ô nằm trên đường chéo chính.

Hoa / Người	cúc	đào	hồng
Cúc	không		không
Đào		không	
Hồng			không

Bảng 4.2.1

b. Căn cứ vào câu "Bạn làm hoa hồng nói với bạn Cúc" suy ra bạn Cúc không phải làm hoa hồng, mà ghi mã "không" vào ô nằm ở hàng Cúc, cột hồng.
3) Loại bỏ vị trí không thỏa mãn quan hệ để nhận được lời giải. Trong bảng trên cột cuối vị trí 1 và 3 bị gạch bỏ nên vị trí duy nhất còn lại là vị trí 2 phải thỏa mãn quan hệ giữa người làm hoa và hoa được làm. Do đó bạn Đào làm hoa hồng.
Vì trên hàng 2 (Đào) đã có vị trí thỏa mãn quan hệ thì toàn bộ hàng này phải loại bỏ ra ngoài diện xét. Bởi vậy cột Cúc chỉ còn vị trí cuối cùng trong diện xét. Bởi vậy nó phải thỏa mãn quan hệ giữa người làm hoa và hoa được làm, nên bạn Hồng làm hoa Cúc.
Từ đó suy ra người còn lại là bạn Cúc phải làm hoa đào.
Vậy bạn Cúc làm hoa đào, bạn Đào làm hoa hồng và bạn Hồng làm hoa cúc. □

Bài toán 4.2.2. *Trên bàn là 3 cuốn sách giáo khoa: Văn, Toán và Địa Lí được bọc 3 màu khác nhau: xanh, đỏ, vàng. Cho biết cuốn bọc bìa màu đỏ nằm giữa cuốn Văn và Địa Lí, cuốn Địa Lí và cuốn màu xanh mua* *cùng một ngày. Bạn hãy xác định mỗi cuốn sách bọc bìa màu gì?*

Chứng minh. Ta có bảng sau

Màu bìa \ Tên sách	Văn	Toán	Địa Lí
Xanh	x 1	2	0 3
Đỏ	0 4	x 5	0 6
Vàng	7	8	x 9

Bảng 4.2.2

Theo đề bài "Cuốn màu đỏ đặt giữa 2 cuốn Văn và Địa Lý". Vậy cuốn Văn và Địa Lý đều không bọc màu đỏ nên cuốn Toán sẽ bọc màu đỏ. Ta ghi số 0 vào ô 4 và 6, đánh dấu "x" vào ô 5
Mặt khác "cuốn Địa Lí và cuốn màu xanh mua cùng ngày". Điều đó có nghĩa là cuốn Địa Lí không bọc màu xanh. Ta ghi số 0 vào ô 3.
Nhìn vào cột 4 ta thấy cuốn Địa Lí không bọc màu xanh, cũng không bọc màu đỏ. Vậy cuốn Địa Lí bọc màu vàng. Ta đánh dấu "x" vào ô số 9.
Nhìn vào cột 2 ta và ô 9 ta thấy cuốn Văn không bọc màu đỏ cũng không bọc màu vàng. Vậy cuốn Văn bọc màu xanh, ta đánh dấu "x" vào ô 1.
Kết luận: Cuốn Văn bọc màu xanh, cuốn Toán bọc màu đỏ, cuốn Địa Lí bọc màu vàng. □

4.3 Bài tập tự giải

Bài toán 4.3.1. *Điều mâu thuẫn ở đâu?*
Trong một tòa nhà chỉ có những cặp vợ chồng và những con nhỏ chưa lập gia đình. Ban điều tra dân số yêu cầu báo cáo về số người sống trong tòa nhà, đại diện là một anh thợ thích đùa báo cáo như sau:
Sống trong tòa nhà bố mẹ nhiều hơn con cái. Mỗi con trai đều có 1 chị hay em gái. Số con trai nhiều hơn số con gái. Mỗi cặp vợ chồng đều có con.
Người ta không thể chấp nhận được báo cáo đó dù là đùa vui vì trong đó

xảy ra mâu thuẫn.
Bạn hãy chỉ ra điều mâu thuẫn trong báo cáo trên.

Hướng dẫn.
Vì mỗi gia đình đều có con, mỗi con trai đều có một chị hoặc em gái. Suy ra số con gái ít nhất bằng số gia đình.
Mặt khác số con trai nhiều hơn số con gái nên tổng số con nhiều hơn hai lần số gia đình, hay nhiều hơn số bố mẹ, điều này cho ta thấy mâu thuẫn trong báo cáo của anh thợ thích đùa ở câu đầu tiên:"bố mẹ nhiều hơn con cái" với các câu tiếp theo.

Bài toán 4.3.2. *Có xếp được không?*
Một bàn cờ đô - mi - nô có 64 ô vuông (bàn cờ vuông, mỗi cạnh 8 ô vuông). Các quân đô - mi - nô hình chữ nhật, có kích thước sao cho có thể chồng vừa khít lên hai ô vuông liền nhau. Như vậy có thể dễ dàng xếp được 32 quân cho vừa khít cả bàn cờ. Có thể xếp được 31 quân sao cho vừa khít 62 ô còn lại không? Nếu được thì xếp như thế nào? Nếu không, hãy chứng minh là không xếp được.

Hướng dẫn.
Trả lời: Không.
Với bất kỳ cách xếp đặt nào, mỗi quân cờ sẽ phủ kín hai ô khác màu, vì vậy 30 quân cờ sẽ phủ kín 30 ô đen và 30 ô trắng. Còn lại 2 ô cùng một màu, do đó hai ô xa nhau sẽ hoặc đen hoặc trắng.

Chương 5

Phương pháp sơ đồ

5.1 Giới thiệu về phương pháp sơ đồ

Đây là phương pháp gần tương tự như phương pháp bảng, song phương pháp này có lợi thế hơn khi giải quyết các bài toán mà ở đó số tệp đối tượng lớn hơn 2.

Phương pháp sơ đồ gồm 2 bước:

1. Thiết lập sơ đồ.

Lấy các nhóm điểm trên mặt phẳng hay trong không gian tương ứng với các tệp. Dùng ngay ký hiệu các đối tượng để ghi tên các điểm tương ứng.

Mỗi cặp điểm tương ứng với hai đối tượng có một quan hệ nào đó đã cho trong bài toán được nối với nhau bằng một đoạn thẳng hoặc một đoạn cong đặc trưng cho quan hệ mà nó biểu thị và không đi qua các điểm tương ứng trung gian khác. Ta gọi sơ đồ nhận được là sơ đồ mô tả quan hệ.

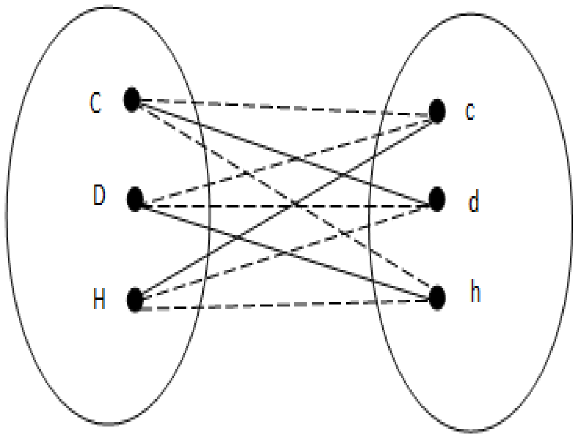
2. Dựa vào cấu trúc của sơ đồ mô tả quan hệ và điều kiện đã cho trong bài toán mà suy ra đáp án.

5.2 Vận dụng phương pháp sơ đồ để giải các bài toán không mẫu mực.

Bài toán 5.2.1. *Trong buổi học nữ công, ba bạn Cúc, Đào, Hồng làm ba bông hoa: cúc, đào, hồng. Bạn làm hoa hồng nói với bạn Cúc:"Thế là trong chúng ta không có ai làm loại hoa trùng với tên mình". Hãy xác định tên hoa mà mỗi bạn đã làm.*

Bài toán này đã được trình bày bằng phương pháp bảng. Dưới đây trình *bày quá trình giải bài toán trên bằng phương pháp sơ đồ.*

Chứng minh.
Trong bài toán có hai nhóm đối tượng.
Nhóm 1 gồm ba bạn Cúc, Đào, Hồng ký hiệu bằng ba điểm C, D, H.
Nhóm 2 gồm ba bông hoa: cúc, đào, hồng ký hiệu bằng ba điểm c, d, h.
Mối quan hệ của hai nhóm đối tượng này được ký hiệu bằng:
- Nét đứt nếu quan hệ giữa chúng là sai.
- Nét liền nếu quan hệ giữa chúng là đúng.



Hình 5.2.1

Theo giả thiết bạn làm hoa hồng nói với bạn Cúc ⇒ Cúc không làm hoa hồng nên C - h được nối nét đứt.
Theo giả thiết, "chẳng có ai làm loại hoa trùng tên với mình" ⇒ C - c, D - d, H - h được nối bằng nét đứt.
Ta thấy C - c, C - h nối nét đứt ⇒ C - d nối nét liền.
C - h, H - h nối nét đứt do đó D - h, H - c nối nét liền.
Kết luận: Bạn Cúc làm hoa đào, bạn Đào làm hoa hồng, bạn Hồng làm hoa cúc. □

5.3 Bài tập tự giải

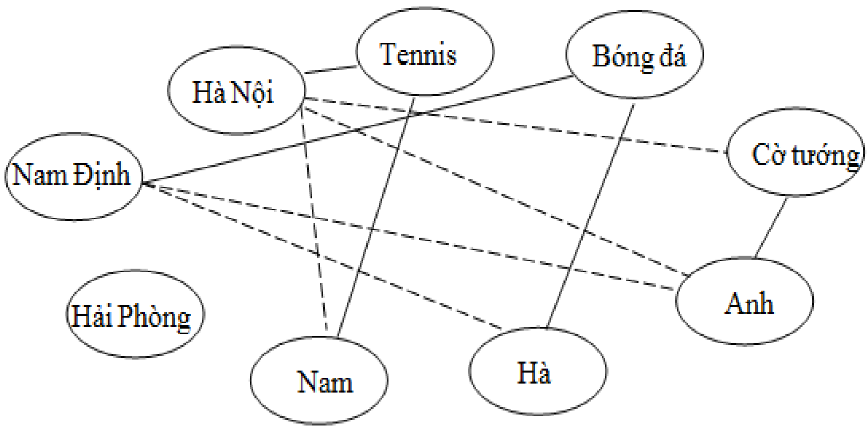
Bài toán 5.3.1. *Ba em Bình, Tuấn, Nga đi trại hè và thích ba môn thể thao: tennis, bơi và bóng chuyền.*
Ngày đầu, Nga cùng bạn thích chơi bóng chuyền đi chơi thác, Tuấn lớn hơn em thích tennis, còn em thích chơi bóng chuyền cùng tuổi với một trong hai em kia. Hỏi ai thích môn thể thao nào?

Hướng dẫn.
Lập sơ đồ: Lấy hai nhóm điểm tương ứng với hai bộ ba (Bình, Tuấn, Nga) và (Tennis, bơi, bóng chuyền).
Từ điều kiện em Nga và bạn thích chơi bóng chuyền đi chơi thác, suy ra em Nga không chơi bóng chuyền và thích bơi. Do đó cặp điểm Nga - Bóng chuyền được nối bằng đoạn nét đứt, Nga - Bơi được nối bằng đoạn nét liền.
Từ đó suy ra Bình thích bóng chuyền và Tuấn thích tennis.

Bài toán 5.3.2. *Ba cậu bé đến từ Hà Nội, Nam Định, Hải Phòng. Các em khác tuổi nhau và đều thích chơi thể thao. Chỉ có Nam và cậu bé từ Hà Nội chơi tennis, Hà và cậu bé từ Nam Định chơi bóng đá. Anh chơi cờ tướng và lớn hơn cậu bé từ Nam Định. Các cậu bé chơi tennis không chơi cờ. Cậu bé chơi cờ lớn nhất. Bạn hãy xác định xem Hà, Nam, Anh từ đâu tới và thích chơi môn thể thao nào?*

Hướng dẫn.
Lập sơ đồ: Lấy ba bộ điểm tương ứng với ba nhóm đối tượng (Hà Nội, Nam Định, Hải Phòng), (Nam, Hà, Anh), (tennis, bóng đá, cờ).

Hai đối tượng có quan hệ, thì hai điểm tương ứng được nối bằng đoạn nét liền, trường hợp ngược lại nối bằng đoạn nét đứt. Từ các điều kiện đã cho trong bài toán ta có hình 5.3.2.



Hình 5.3.2

Từ hình trên suy ra Anh quê ở Hải Phòng và thích đánh cờ, Nam quê ở Nam Định và thích tennis, Hà quê ở Hà Nội và thích bóng đá.

Chương 6

Phương pháp đồ thị

6.1 Một số khái niệm và kết quả cơ bản của lý thuyết đồ thị

Trên mặt phẳng hay không gian lấy n điểm. Giữa một số cặp điểm được nối bằng những đoạn thẳng hay đoạn cong được định hướng hoặc không. Người ta gọi hình nhận được là dạng biểu diễn hình học của một đồ thị hay một đồ thị. Các điểm đã chọn được gọi là đỉnh của đồ thị. Các đoạn thẳng hay đoạn cong đã nối được gọi là cạnh của đồ thị.

Nếu cạnh a nối giữa hai điểm A, B thì A, B được gọi là các đỉnh của cạnh a.

Cặp đỉnh x, y được gọi là hai đỉnh kề nhau, nếu chúng khác nhau và là hai đầu của cùng một cạnh.

Dãy α các đỉnh:

$$x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, x_m$$

được gọi là một đường nếu với mọi chỉ số $i(1 \leq i \leq m-1)$ đều có x_i và x_{i+1} là hai đỉnh kề nhau. Các đỉnh x_1, x_m được gọi là các đỉnh đầu của đường α . Người ta còn nói rằng đường α nối giữa đỉnh x_1 và đỉnh x_m.

Chu trình là một đường có hai đầu trùng nhau.

Chu trình mà nó đi qua mỗi đỉnh không quá một lần được gọi là chu trình sơ cấp.

Chu trình α được gọi là chu trình Hamilton, nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị và qua mỗi đỉnh đúng một lần.

Đồ thị G được gọi là đồ thị liên thông, nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều có đường nối với nhau.

Đồ thị G được gọi là đồ thị đầy đủ nếu mỗi cặp đỉnh của nó đều được nối với nhau bằng đúng một cạnh.

Số cạnh xuất phát từ đỉnh x được gọi là bậc của đỉnh x.

Cây là một đồ thị liên thông và không có chu trình.

Trong cây T tách ra một đỉnh gọi là đỉnh gốc, còn các đỉnh có bậc bằng 1 và không phải là gốc được gọi là lá hay đỉnh ngọn.

Định lý 6.1.1. *Đồ thị mà trong đó tổng bậc của hai đỉnh tùy ý đều không nhỏ hơn só đỉnh của đồ thị, liên thông.*

Định lý 6.1.2. *Đồ thị mà trong đó bậc của mỗi đỉnh đều không nhỏ hơn 2, luôn luôn có chu trình sơ cấp.*

Hệ quả 6.1.3. *Nếu trong đồ thị có đúng 2 đỉnh bậc 1, các đỉnh khác có bậc không nhỏ hơn 2, thì trong G có đường nối giữa hai đỉnh bậc 1.*

Định lý 6.1.4. *Đồ thị, mà trong đó tổng bậc của hai đỉnh tùy ý không nhỏ hơn số đỉnh của đồ thị, luôn luôn có chu trình Hamilton.*

Định lý 6.1.5. *Trong một đồ thị tùy ý số đỉnh, mà mỗi đỉnh có bậc lẻ, luôn luôn là một số chẵn.*

Định lý 6.1.6. *Cho dãy số nguyên dương $a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$. Khi đó đồ thị đầy đủ $a_n + 1$ đỉnh với các cạnh được tô bằng n màu luôn luôn có tam giác cùng màu (chu trình gồm 3 cạnh cùng màu).*

Định lý 6.1.7. *Cho dãy số nguyên $b_2 = 3, b_3 = 6, b_{n+1} = (b_n - 1)n + 2$. Đồ thị đầy đủ G với $b_{n+1} - 1$ đỉnh ($n \geq 2$) và cách cạnh được tô bằng n màu, sao cho không có tam giác cùng màu, thì trong đồ thị G có hình 5 cạnh với các cạnh cùng màu và các đường chéo được tô các màu khác.*

6.2 Phương pháp đồ thị

Để giải bài toán T bằng cách thông qua đồ thị cần thực hiện lần lượt hai bước sau

1. Xây dựng đồ thị G mô tả các quan hệ.
   Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các đối tượng đã cho trong bài toán. Dùng ngay các ký hiệu đối tượng để ghi trên điểm tương ứng...
   Cặp điểm x, y được nối với nhau bằng một cạnh với "đặc điểm t", khi và chỉ khi các đối tương x, y có quan hệ (t) với nhau. Khi đó bài toán T đã được chuyển về bài toán D trên đồ thị.

2. Dựa vào các kết quả của lý thuyết đồ thị hoặc lý luận trực tiếp suy ra đáp án của bài toán D.
   Nếu đáp án của bài toán D còn dưới dạng "ngôn ngữ đồ thị", thì căn cứ vào phép đặt tương ứng khi xây dựng đồ thị mà diễn đạt thành đáp án bằng ngôn ngữ thông thường (tức đáp án của bài toán T).

6.3 Vận dụng phương pháp đồ thị để giải bài toán không mẫu mực

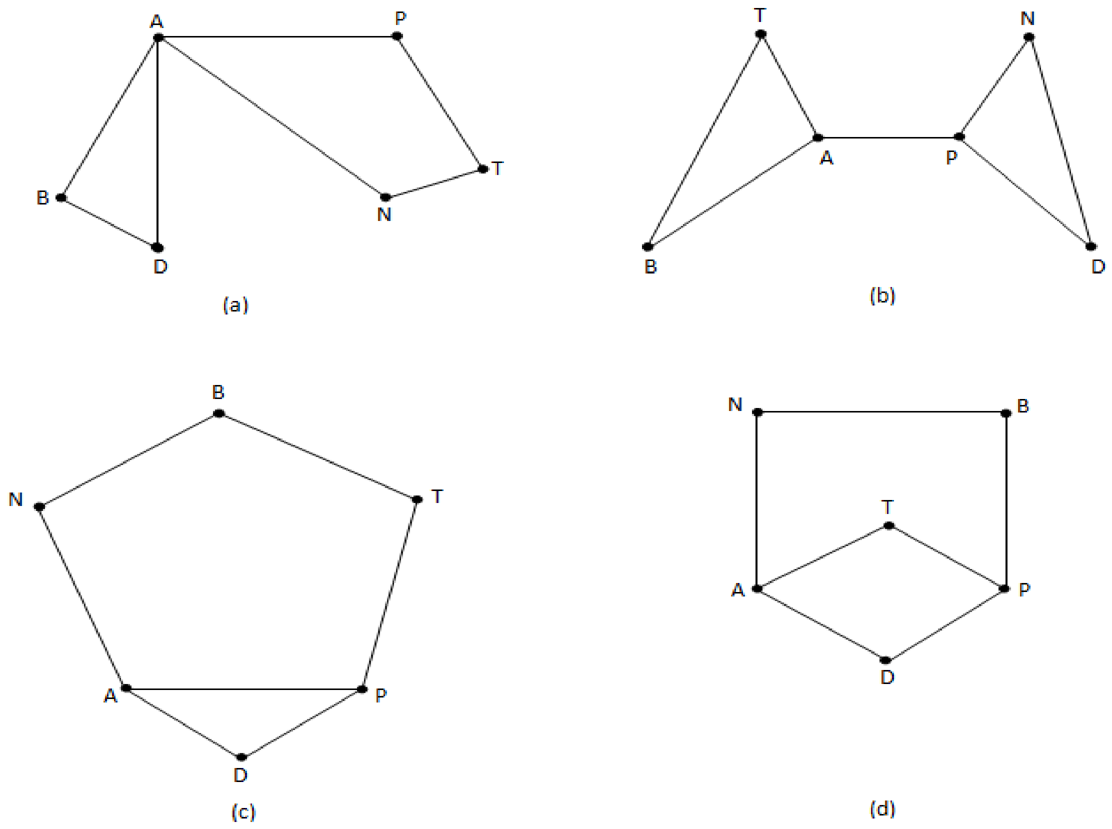
Bài toán 6.3.1. *(Đề thi học sinh giỏi toán 11 Hà Nội, 1987 - 1988) Một cơ quan cần tuyển 3 người để lập thành nhóm có đủ năng lực biên dịch tài liệu từ 6 thứ tiếng Anh, Pháp, Nga, Đức, Trung Quốc và Bồ Đào Nha sang tiếng Việt. Có 7 người đến dự tuyển, trong đó mỗi người đều biết 2 và chỉ 2 trong 6 thứ tiếng đó và bất cứ người nào cũng biết nhiều nhất 1 thứ tiếng chung trong 6 thứ tiếng đó. Biết rằng thứ tiếng nào cũng có ít nhất 2 người biết. Hỏi có thể xảy ra trường hợp không thể tuyển chọn được như yêu cầu đã nêu không? Tại sao?*

Chứng minh.
Ta cho tương ứng mỗi ngoại ngữ là một đỉnh: A, P, N, D, T, B và một người biết hai ngoại ngữ biểu diễn bằng một cạnh nối hai đỉnh tương ứng với hai ngoại ngữ đó. Do mỗi người đều biết 2 ngoại ngữ nên ứng với 7 người, đồ thị có 7 cạnh. Mặt khác vì bất cứ người nào cũng biết nhiều nhất một thứ tiếng chung, tức là không có hai cạnh khác nhau cùng nối với 1 cặp đỉnh. Ngoài ra thứ tiếng nào cũng có ít nhất 2 người biết, thành thử mỗi bậc có ít nhất là 2.
Như vậy bài toán có thể phát triển như sau:
Cho đơn đồ thị 6 đỉnh và 7 cạnh, bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn 2. Liệu có thể xảy ra trường hợp không có 3 cạnh nào đôi một không kề nhau hay không? Tại sao?
Trước hết, ta thấy G liên thông vì G có 6 đỉnh và bậc của mỗi đỉnh ≥ 2, nếu không liên thông thì 6 đỉnh đó cô lập thành 2 tam giác rời nhau và G chỉ có 6 cạnh suy ra G có chu trình (nếu không thì G là 1 cây và có cạnh treo, điều này trái với giả thiết). Mặt khác
$7 \times 2 = 14 = 6 \times 2 + 2$, nên G có 2 đỉnh bậc 3 (hoặc 1 đỉnh bậc 4) và các đỉnh còn lại phải là bậc 2. Đến đây ta xét các trường hợp sau:

1. Trường hợp G có đỉnh A bậc 4 (hình a) với 4 cạnh AB, AD, AN, AP. Khi đó đỉnh T không thể kề với A mà kề hai đỉnh khác, P và N chẳng hạn và 2 đỉnh còn lại là B và D phải kề nhau.
   Đến đây ta có thể chọn các cạnh BD, NT, PA là không kề nhau.

2. Trường hợp G có 2 đỉnh bậc 3, giả sử là A và P. Do G liên thông nên có ít nhất một đường đi từ A tới P. Ta tạm bỏ đường đi đó (vẫn giữ các đỉnh A và P). Có thể xảy ra:

   - G không còn liên thông. Như vậy ta còn 2 chu trình cơ bản (còn gọi là sơ cấp) phân biệt, mỗi chu trình gồm 3 cạnh. Ta chọn cạnh AP và hai cạnh không kề với nó là TB và ND (hình b).
   - G vẫn liên thông. Khi đó ta còn một chu trình sơ cấp (vì mỗi đỉnh đều có bậc 2). Ta có 3 đường đi từ A đến P (một đường đã tạm bỏ, hai đường theo chu trình), trong đó đường ngắn có độ dài 1 (hình c) hoặc độ dài 2 (hình d: APT hoặc ADB).

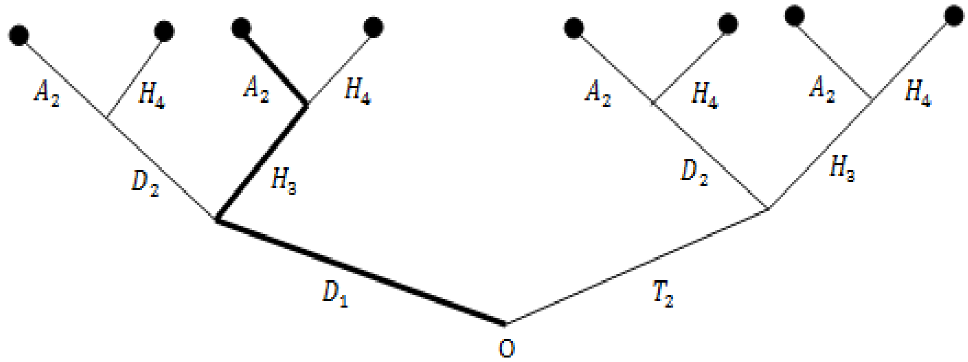


Hình 6.3.1

Trên hình c, trên chu trình cơ bản độ dài 6 luôn luôn chọn 3 cạnh kề nhau, chẳng hạn AD, PT, BN.
Trên hình d chỉ việc chọn một cạnh thuộc đường đi ngắn nhất từ A đên P và hai cạnh không kề với nó trên chu trình sơ cấp còn lại AD, TP, NB hoặc DP, AT, NB.
Vậy trong mọi trường hợp ta đều tìm được 3 cạnh đôi một kề nhau hay trong mọi trường hợp cơ quan trên đều có thể tuyển chọn người theo đúng yêu cầu. □

Bài toán 6.3.2. *Tại một giải bóng đá có 4 đội Anh, Đan Mạch, Hà Lan, Thụy Điển vào bán kết. Có mấy dự đoán xếp hạng như sau:*
1. Đan Mạch vô địch, Thụy Điển nhì.
2. Đan Mạch nhì, Hà Lan ba.
3. Anh nhì, Hà Lan tư.
Kết quả là mỗi dự đoán đúng được một đội. Hãy cho biết kết quả xếp hạng của các đội?

Chứng minh. Dùng x_i để ký hiệu đội x được xếp hạng $i (1 \le i \le 4)$.
Ta vẽ cây, hai nhánh đầu tiên ứng với dự đoán thứ nhất là D_1, T_2. Từ mỗi nhánh này lại có hai nhánh ứng với dự đoán thứ 2. Tiếp tục rẽ nhánh ứng với dự đoán thứ 3.
Ta chọn đường đi từ gốc O tới các điểm thỏa mãn điều kiện:
- Một đội không thể xếp hai hạng khác nhau.
- Hai đội không thể xếp cùng một hạng.
Suy ra chỉ có đường đi $D_1H_3A_2$ thỏa mãn.



Hình 6.3.2

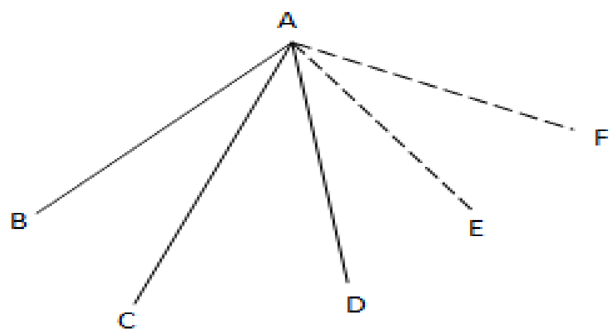
Đường tô đậm $D_1H_3A_2$ thỏa mãn điều kiện mỗi dự đoán đúng được một đội mà thứ tự ghi trên đường.

Vậy kết quả xếp hạng như sau: Đan Mạch vô địch, Anh nhì, Hà Lan ba, còn lại Thụy Điển thứ tư. □

6.4 Bài tập tự giải

Bài toán 6.4.1. *(Đề thi học sinh giỏi Ba Lan 1966 - 1967)*
Trên mặt phẳng lấy 6 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khoảng cách giữa các cặp điểm khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một cặp điểm, mà đoạn thẳng nối giữa chúng là cạnh ngắn nhất thuộc tam giác nào đó đồng thời là cạnh dài nhất của tam giác khác trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho.

Hướng dẫn. Dùng màu xanh để tô mỗi đoạn thẳng là cạnh ngắn nhất của tam giác nào đó trong các tam giác có đỉnh là các điểm đã cho. Phần còn lại được tô màu đỏ. Khi đó đồ thị G gồm 6 đỉnh, các cạnh được tô bằng hai màu.



Hình 6.4.1

Xét đỉnh A, từ A xuất phát 5 đoạn thẳng nên ít nhất có ba đoạn thẳng cùng màu. Giả sử 3 đoạn thẳng đó là AB, AC, AD được tô màu xanh (nét liền). Nếu một trong ba đoạn BC, CD, BD được tô màu xanh thì ta được tam giác có ba cạnh được tô màu xanh.
Lúc đó cạnh dài nhất của tam giác này là cạnh cần tìm, điều ngược lại không xảy ra, tức là ba cạnh của tam giác BCD không thể tô màu đỏ vì tam giác nào cũng có cạnh ngắn nhất và được tô màu xanh trước.
Xét tương tự cho trường hợp các cạnh AB, AC, AD được tô màu đỏ.

Bài toán 6.4.2. *Trong phòng có 100 người, mà mỗi người quen ít nhất 66 người trong 99 người còn lại. Hỏi có thể xảy ra hay không trường hợp bất kỳ 4 người nào đó trong phòng cũng có 2 người không quen nhau?*

Chứng minh. Câu trả lời là "Có thể"
Ta có thể xếp họ vào ngồi 3 bàn: bàn thứ nhất xếp 33 người, bàn thứ 2 xếp 33 người, bàn thứ 3 xếp 34 người.
Có thể xảy ra trường hợp: Những người ngồi cùng bàn không hề quen nhau và người ngồi bàn này quen tất cả những người ngồi ở bàn kia.
Như vậy mỗi người quen 66 hoặc 67 người khác, đồng thời bất kỳ 4 người nào trong phòng cũng có 2 người không quen nhau. □

KẾT LUẬN

Như vậy, luận văn được hoàn thành với nội dung 6 chương:
Chương 1. Phương pháp quy nạp toán học.
Chương 2. Phương pháp phản chứng.
Chương 3. Phương pháp suy luận.
Chương 4. Phương pháp bảng.
Chương 5. Phương pháp sơ đồ.
Chương 6. Phương pháp đồ thị.
Thông qua việc tham khảo sách báo, các tài liệu liên quan và đặc biệt là sự hướng dẫn tận tình của GS TS Đặng Huy Ruận, luận văn đã nghiên cứu về sáu phương pháp phổ biến nhất để giải các bài toán không mẫu mực. Mỗi phương pháp đều trình bày tóm tắt cơ sở lý thuyết và vận dụng các phương pháp đó vào giải một số bài toán không mẫu mực.
Khi biên soạn luận văn, tác giả đã cố gắng bám sát vào những dạng đề thi học sinh giỏi. Hi vọng luận văn có thể là tập tài liệu tham khảo có ích cho học sinh và giáo viên các trường trung học phổ thông.

Tài liệu tham khảo

[1] Bộ Giáo Dục và Đào Tạo - Hội Toán học Việt Nam (1997), *Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và tuổi trẻ*, NXB Giáo Dục.

[2] Nguyễn Đề, Nguyễn Khánh Nguyên (1996) (Dịch),*Các đề thi vô địch toán các nước tập I, II (Tiếng Nga).*

[3] Nguyễn Văn Nho (1989 - 2002), *Olympic toán học Châu Á Thái Bình Dương*, NXB Giáo Dục.

[4] Phạm Minh Phương và nhóm giáo viên chuyên toán Đại học sư phạm Hà Nội (2006), *Các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi trung học cơ sở*, NXB Giáo Dục.

[5] Đặng Huy Ruận (2002), *Bảy phương pháp giải các bài toán logic*, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật.