TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ

1. Họ và tên học viên: **Kiều Trung Thủy** 2. Giới tính: *Nam*

3. Ngày sinh: *28/09/1988* 4. Nơi sinh: *Hà Nội*

5. Tên đề tài luận văn:

Tính ổn định của phương trình động học ngẫu nhiên trên thang thời gian

6. Chuyên ngành : *Lí thuyết xác suất và thống kê toán học*

7. Mã số: *60 46 15*

8. Cán bộ hướng dẫn khoa học: **GS.TS Nguyễn Hữu Dư,** Giám đốc Điều hành Viện Nghiên cứu cao cấp Toán, Chủ tịch hội Toán học Việt Nam.

9. Tóm tắt các kết quả của luận văn:

Nội dung chính của luận văn trình bày về sự tồn tại của các nghiệm, các điều kiện cần và đủ của tính p-ổn định mũ của ∇-phương trình động lực học ngẫu nhiên trên thang thời gian qua các hàm Lyapunov. Luận văn được chia làm ba chương trong đó

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

Chương này được chia làm hai mục. Mục 1.1 trình bày các khái niệm cơ bản về giải tích tất định trên thang thời gian bao gồm: thang thời gian, toán tử nhảy tiến, toán tử nhảy lùi, các loại điểm trên thang thời gian, hàm hạt tiến, hàm hạt lùi, các loại liên tục của hàm, ∇- đạo hàm, độ đo Lebesgue-Stieltjes, ∇- tích phân, hàm mũ và cuối cùng là phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Gronwall trên thang thời gian. Mục 1.2 trình bày các khái niệm về các quá trình ngẫu nhiên trên thang thời gian, kì vọng có điều kiện, khái niệm về martingale, martingale trên, martingale dưới, martingale bình phương khả tích, thời điểm dừng, quá trình khả đoán, phát biểu và chứng minh bất đẳng thức Doob.

Chương 2: Tích phân ngẫu nhiên trên thang thời gian

Nội dung của chương 2 được viết thành 2 mục. Mục 2.1 trình bày cách xây dựng ∇-tích phân ngẫu nhiên trên thang thời gian theo martingale bình phương khả tích. Đầu tiên, tôi định nghĩa quá trình đơn giản trên $[a,b]$ rồi định nghĩa ∇- tích phân ngẫu nhiên của quá trình đơn giản ϕ theo martingale bình phương khả tích M trên

$(a,b]$. Mệnh đề 2.2.1 chứng minh các tính chất cơ bản của tích phân này. Sau đó, bằng cách lấy giới hạn trong $\mathbb{L}_2$, ta có định nghĩa của ∇-tích phân ngẫu nhiên của quá trình ϕ theo martingale bình phương khả tích M trên $(a,b]$. Từ đó ta có các tính chất cơ bản của ∇ - tích phân ngẫu nhiên và bất đẳng thức quan trọng sau

$$\mathbb{E}\left[\sup_{a\le t\le b}\left|\int_a^t \phi_\tau \nabla M_\tau\right|^2\right] \le 4\mathbb{E}\int_a^b |\phi_\tau|^2 \nabla\langle M\rangle_\tau .$$

Mục 2.2 trình bày công thức Itô đối với bộ d-semimartingale trên thang thời gian. Trước hết tôi định nghĩa biến phân hỗn hợp của hai quá trình ngẫu nhiên. Từ đó trình bày các tính chất của biến phân hỗn hợp của semimartingale. Dựa vào Mệnh đề 2.3.1 và các Bổ đề 2.3.1, 2.3.2, tôi phát biểu và chứng minh công thức Itô. Kết quả là sự tổng quát hóa cho công thức Itô đối với thời gian liên tục và rời rạc. Sau đó là các hệ quả của công thức trong các trường hợp thang thời gian $\mathbb{T}$ là $\mathbb{N}$ hoặc $\mathbb{R}$. Cuối cùng, Mục 2.3 trình bày độ đo đếm sinh bởi martingale bình phương khả tích và ứng dụng của công thức Itô để phát biểu bài toán martingale.

Chương 3: Tính ổn định của phương trình động lực ngẫu nhiên trên thang thời gian

Nội dung chính của luận văn được trình bày ở chương này, bao gồm 3 mục. Mục 3.1 trình bày phương trình động lực ngẫu nhiên với nhiễu là martingale bình phương khả tích trên thang thời gian. Cụ thể là: định nghĩa nghiệm của phương trình; phát biểu và chứng minh định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm bằng phương pháp lặp Picard; ước lượng tốc độ hội tụ của dãy $(X_n(t))$ về nghiệm $X(t)$ của phương trình. Điều kiện Lipschitz toàn cục và điều kiện tăng tuyến tính đảm bảo cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình. Tuy vậy, ta có thể thay điều kiện Lipschitz bởi điều kiện yếu hơn (điều kiện Lipschitz địa phương) nếu tồn tại hàm Lyapunov thỏa mãn điều kiện Hasminskii. Tiếp theo, Mục 3.2 trình bày cách xây dựng công thức ước lượng moment bậc p đối với nghiệm của phương trình động lực ngẫu nhiên. Chúng ta biết rằng trong trường hợp thời gian liên tục, nếu đặc trưng của M_t bị chặn thì nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên có moment bậc p hữu hạn. Tuy nhiên, đối với phương trình động lực ngẫu nhiên trên thang thời gian thì khẳng định trên không đúng. Định lý 3.2.1, 3.2.2 và 3.2.3 chỉ ra các điều kiện để nghiệm của phương trình động lực ngẫu nhiên có moment bậc p dựa vào bất đẳng thức Burkholder. Cuối cùng, Mục 3.3 trình bày tính p-ổn định mũ của phương trình động lực ngẫu nhiên trên thang thời gian. Mặc dù chúng ta định nghĩa một phương trình động lực ngẫu nhiên với ∇-tích phân nhưng ta thấy rằng tốc độ hội tụ của ∇-hàm mũ $\hat{e}_p$ không tốt. Hơn nữa, Δ-hàm mũ e_p cũng là một nghiệm của một ∇-phương trình động lực. Do đó, thay vì sử dụng $\hat{e}_p$, ta sẽ sử dụng e_p để định nghĩa tính ổn định mũ. Đầu tiên, tôi trình bày định nghĩa về tính p-ổn đinh mũ và tính p-ổn đinh mũ đều; đưa ra điều kiện cần để nghiệm tầm thường của phương trình là p-ổn đinh mũ bằng cách sử dụng hàm Lyapunov đã được trình bày ở Mục 3.1. Sau đó, tôi xét bài toán ngược bằng cách chỉ ra rằng nếu nghiệm tầm thường của phương trình p-ổn đinh mũ đều thì một hàm Lyapunov như vậy tồn tại. Điều này được chứng minh trong định lý 3.3.3.

Hà Nội, tháng 04 năm 2015

Học viên

Kiều Trung Thủy

INFORMATION ON MASTER' THESIS

1. Full name: **Kieu Trung Thuy** 2. Sex: *Male*

3. Date of birth: *28/09/1988* 4. Place of birth: *Ha Noi*

5. Official thesis title:

On the stability of stochastic dynamic equation on time scale

6. Major: *Theory of probability and mathematical statistics*

7. Code: *60460106*

8.Supervisors: **Prof.Doc. Nguyen Huu Du,** *Managing Director of VIASM*. *President of Vietnam Mathematical Society*.

9. Summary of the finding of the thesis:

The main content of thesis presents the existence of solutions and gives the necessary and sufficient condition for exponential p-stability of ∇-stochastic dynamic equations on time scale via Lyapunov functions. The thesis is devided into three chapters

Chapter 1: Prepared Knowledge

This chapter is devied into two sections. Section 1.1 presents basic definitions of deterministic analysis on time scale including: time scale, forward jump operator, backward jump operator, types of point on time scale, forward graininess, backward graininess, types of continuity of function, ∇-derivative, Lebesgue-Stieltjes measure, ∇-integral , exponential function and Growall inequality on time scale. Section 1.2 presents definitions of stochastic processes on time scale, conditional expectation, definitions of martingale, supermartingale, submartingale, square-integrable martingale, stopping time, predictable process and proves Doob inequality.

Chapter 2: Stochastic integration on time scale

The content of chapter 2 is devided into two sections. Section 2.1 presents contruction of ∇- stochastic integral on time scale with respect to the square-integrable martingale. Firstly, we define the simple process on $(a,b]$, then we define ∇- stochastic integral of the simple process ϕ with respect to the square-integrable martingale M on $(a,b]$. Proposition 2.2.1 proves basic properties of this integral. Later, by letting limit on $\mathbb{L}_2$, we have definition of ∇- stochastic integral of any process ϕ with respect to the square-integrable martingale M on $(a,b]$. Consequence, we have basic properties of ∇- stochastic integral and an important inequality

$$\mathbb{E}\left[\sup_{a\le t\le b}\left|\int_a^t \phi_\tau \nabla M_\tau\right|^2\right] \le 4\mathbb{E}\int_a^b |\phi_\tau|^2 \nabla\langle M\rangle_\tau .$$

Section 2.2 presents Ito's Formula for a set of d-semimartingale on time scale. Firstly, we define quadratic co-variation of two stochastic processes. Then, we present properties of quadratic co-variation of a semimartingale. By using Proposition 2.3.1 and Lemma 2.3.1, 2.3.2, we state and prove Ito's Formula. This result is generalization for Ito's Formula with repect to continuity and discrete cases. Later, we present corollaries of Ito's Formula in cases: time scale $\mathbb{T}$ is $\mathbb{N}$ or $\mathbb{R}$. Finally, Section 2.3 presents the countable measure generated by square-integrable martingale and the application of Ito's Formula to state the martingale problem.

Chapter 3: On the stability of stochastic dynamic equation on time scale

The main content of thesis is presented in this chapter and devided into three sections. Section 3.1 presents the stochastic dynamic equation driving by a square-integrable martingale on time scale. Namely: define the solution of this equation; state and prove existence and uniqueness of solution theorem by the Picard iterative method; estimate rapidity of convergence of the Picard iterative sequence $(X_n(t))$ to the unique solution $X(t)$ of the equation. The global Lipschitz condition and the linear growth condition ensure for existence and uniqueness of solution of the equation. However, we can replace the Lipschitz condition with a weak condition (the local Lipschitz condition) if exist a Lyapunov function satisfying Hasminskii condition. Later, section 3.2 presents how to contruct the moment estimation formula for the solution of the stochastic dynamic equation. We know that on the continuous case, if characteristic of M_t is bounded, the solution of stochastic differential equation has finite p^{th}- moment. Nevertheless, this claim is not true for the stochastic dynamic equation on time scale. Theorem 3.2.1, 3.2.2 and 3.2.3 give conditions to the solution of stochastic dynamic equation having p^{th}-moment by using Burkholder inequality. Finally, section 3.3 presents the exponential p-stability of the stochastic dynamic equation on time scale. Although we define a stochastic dynamic equation with ∇-integral, we see that the convergent rate of the ∇-exponential function $\hat{e}_p$ is not very good. Further, Δ-exponential function e_p is also a solution of a ∇-dynamic equation. Therefore, instead of using $\hat{e}_p$, we use e_p to define the exponential stability. Firstly, we present definition of the exponential p-stability and the uniformly exponential p-stability; give the necessary and sufficient condition for the trivial solution of ∇-dynamic equation be uniformly exponentially p-stable by using Lyapunov function which is presented in section 3.1 Later, we consider the invese problem by showing that if the trivial solution of ∇-dynamic equation is uniformly exponentially p-stable the such a Lyapunov function exist. This claim is proved in Theorem 3.3.3.

Ha Noi, January, 2015

Author

Kieu Trung Thuy