ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
\- -

NGÔ THỊ THÚY

ĐỀ TÀI
CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Lê Đình Định

HÀ NỘI - 2015

Chương 1

CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1.1 Các phương trình lượng giác cơ bản

1.1.1 Dạng phương trình

Về nguyên tắc, nếu phương trình lượng giác giải được thì phải dẫn được một trong ba dạng phương trình lượng giác cơ bản sau:

$$\sin x = m; \cos x = m; \tan x = m.$$

Phương trình $\cot x = m \leftrightarrow \tan x = \frac{1}{m}(m \neq 0)$. Nhưng vì phương trình hay gặp nên ta viết luôn nghiệm của nó để tiện sử dụng.

1.1.2 Cách giải và biện luận

1. Phương trình $\sin x = m$

Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm là:

$$\left[\begin{array}{ccc} x & = & \arcsin m + 2k\pi \\ y & = & (\pi - \arcsin m) + 2k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Hay gộp nghiệm ta được $x = (-1)^k \arcsin m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Trong đó $\arcsin m$ là cung $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ mà $\sin \alpha = m$.

Đặc biệt:

- Nếu $m = 0$ thì $x = k\pi$
- Nếu $m = 1$ thì $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\qquad (k \in \mathbb{Z})$
- Nếu $m = -1$ thì $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

2. Phương trình $\cos x = m$

- Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm là $x = \pm \arccos m + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Trong đó $\arccos m$ là cung $\alpha \in [0; \pi]$ mà $\cos \alpha = m$.

Đặc biệt:

- Nếu $m = 0$ thì $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- Nếu $m = 1$ thì $x = 2k\pi$ $\qquad (k \in \mathbb{Z})$
- Nếu $m = -1$ thì $x = \pi + 2k\pi$

3. Phương trình $\tan x = m$ ($\cos x \neq 0$)

Phương trình có nghiệm $x = \arctan m + k\pi$. Trong đó $\arctan m$ là cung $\alpha \in (-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$ mà $\tan \alpha = m$.

4. Phương trình $\cot x = m$ ($\sin x \neq 0$)

Phương trình có nghiệm $x = \text{arccot}\, m + k\pi$. Trong đó $\text{arccot}\, m$ là cung $\alpha \in (0; \pi)$ mà $\cot \alpha = m$.
Chú ý:

- Nếu $\sin x = \sin a$ thì nghiệm là $x = a + k2\pi$ hoặc $x = (\pi - a) + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- Nếu $\cos x = \cos a$ thì nghiệm là $x = \pm a + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- Nếu $\tan x = \tan a$ thì nghiệm là $x = a + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- Nếu $\cot x = \cot a$ thì nghiệm là $x = a + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

1.1.3 Các công thức lượng giác

Giải phương trình lượng giác là dùng các công thức lượng giác để biến đổi tương đương phương trình về dạng các phương trình cơ bản.

Chú ý là trong lượng giác có 3 công thức cơ bản sau:

(1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \forall x$.

(2) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$ và $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$.

(3) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $(\cos x \neq 0)$.

Các công thức khác đều suy được từ 3 công thức trên. Chẳng hạn nên lưu ý các công thức sau:

(4) Công thức góc nhân đôi.

Trong (2) cho $a = b = x$ ta được:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x\cos x\\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

Lại lưu ý (1) và (3) ta được:

$$\begin{aligned}&\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x\\ &\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

(chia cả tử số và mẫu số cho $\cos^2 x$).

(5) Công thức chia đôi.

Trong (4) thay $x = \dfrac{x}{2}$ ta được:

$$\begin{aligned}&\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\\ &\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \text{ trong đó } t = \tan\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

(6) Công thức hạ bậc.

Trong (4) giải $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ theo $\cos x$ ta được:

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}\\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}\end{aligned}$$

(7) Công thức nhân ba.

Trong (2), cho $a = 2x, b = x$ và dùng công thức (4) ta được:

$$\begin{aligned}\sin 3x &= -4\sin^3 x + 3\sin x\\ \cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

(8) Biến đổi tổng thành tích.

Trong (2) đặt $a+b=x; a-b=y$, khi đó $a=\dfrac{x+y}{2}; b=\dfrac{x-y}{2}$ và ta được:

$$\begin{aligned}
\sin x+\sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin x-\sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\
\cos x+\cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\cos x-\cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.
\end{aligned}$$

(9) Biến đổi tích thành tổng.
Từ công thức (2) suy ra được:

$$\begin{aligned}
\sin a\sin b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]\\
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]\\
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)].
\end{aligned}$$

(10) Từ công thức (2) có thể suy ra các công thức lệch pha sau:

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{\pi}{2}-x) &= \cos x\\
\cos(\frac{\pi}{2}-x) &= \sin x\\
\tan(\frac{\pi}{2}-x) &= \cot x\\
\cot(\frac{\pi}{2}-x) &= \tan x\\
\sin(\frac{\pi}{2}+x) &= \cos x\\
\cos(\frac{\pi}{2}+x) &= -\sin x\\
\tan(\frac{\pi}{2}+x) &= -\cot x\\
\cot(\frac{\pi}{2}+x) &= -\tan x\\
\sin(x+2\pi) &= \sin x\\
\cos(x+2\pi) &= \cos x\\
\tan(x+\pi) &= \tan x\\
\cot(x+\pi) &= \cot x\\
\sin[x+(2k+1)\pi] &= -\sin x\\
\cos[x+(2k+1)\pi] &= -\cos x\\
\tan[x+(2k+1)\pi] &= \tan x\\
\cot[x+(2k+1)\pi] &= \cot x.
\end{aligned}$$

1.2 Phương trình hạ bậc bậc 2

1.2.1 Dạng phương trình

$$\sin^2 = a \text{ hoặc } \cos^2 = a.$$

1.2.2 Cách giải và biện luận

Dùng công thức hạ bậc ta đưa về các dạng phương trình cơ bản:

- $\sin^2 x = a \Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = a \Leftrightarrow \cos 2x = 1 - 2a.$
- $\cos^2 x = a \Leftrightarrow \dfrac{1 + \cos 2x}{2} = a \Leftrightarrow \cos 2x = 2a - 1.$

1.3 Phương trình bậc nhất dạng $a \cos x + b \sin x = c$

1.3.1 Dạng phương trình

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

1.3.2 Cách giải và biện luận

1) Nếu $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$, phương trình trở thành:

$$0 \cos(x) + 0 \sin(x) = c \Rightarrow c \neq 0, \text{ vô nghiệm hoặc } c = 0, \text{ nghiệm là } \forall x.$$

2) Nếu $a^2 + b^2 > 0$, chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Do $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ nên ta đặt:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos t; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin t; \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = m$$

Ta được: $\cos x \cos t + \sin x \sin t = m$ hay phương trình cơ bản $\cos(x - t) = m$.
Chú ý: Nếu đặt $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$, ta sẽ dẫn về phương trình cơ bản: $\sin(x + \alpha) = m$.

1.4 Phương trình bậc hai dạng $a(f(x))^2 + bf(x) + c = 0$

1.4.1 Dạng phương trình

Xét phương trình bậc 2 có dạng: $a[f(x)]^2 + bf(x) + c = 0$, trong đó $f(x)$ là một hàm lượng giác hoặc là một biểu thức của hàm lượng giác.

1.4.2 Cách giải

Giải phương trình bậc hai theo đối số $t = f(x)$, rồi dẫn về phương trình bậc hai của t, sau đó giải phương trình bậc hai để tìm t rồi tìm x.

1.5 Phương trình đẳng cấp theo $\sin x$ và $\cos x$

1.5.1 Dạng phương trình

1, Phương trình đẳng cấp bậc 2 theo $\sin x$, $\cos x$ là phương trình có dạng:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x + d = 0.$$

2, Phương trình đẳng cấp bậc 3 theo $\sin x$, $\cos x$ là phương trình dạng:

$$a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0.$$

3, Phương trình đẳng cấp bậc n theo $\sin x$, $\cos x$ là phương trình dạng:

$$a_n\sin^n x + a_{n-1}\sin^{n-1} x\cos x + ... + a_1\sin x\cos^{n-1} x + a_0\cos^n x = 0.$$

1.5.2 Cách giải

Chia cả hai vế của phương trình cho $\sin^n x$ (hoặc $\cos^n x$) là lũy thừa bậc cao nhất sau khi đã lý luận nó khác 0.
Riêng phương trình đẳng cấp bậc 2, có thể dùng công thức hạ bậc đưa về phương trình bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$.

1.6 Phương trình đối xứng theo $\sin x$ và $\cos x$

1.6.1 Cách giải

Phương pháp chung là hạ bậc, dùng hằng đẳng thức đáng nhớ để dẫn về phương trình quen thuộc.

1.6.2 Các kiến thức cần nhớ

Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

Các hằng đẳng thức:

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a+b)$
$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (a-b)^2]ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$.

1.7 Một số mẹo lượng giác

Nên chú ý một số phép biến đổi lượng giác sau (gọi là mẹo lượng giác).

1.7.1 Đổi biến $\cos 2x = t$ hoặc $\sin 2x = t$

Vì $\cos x^2 = \frac{1 + \cos 2x}{t}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ nên:

- Nếu trong bài toán lượng giác chỉ có $\sin^2 x, \cos^2 x$ và $\cos 2x$ thì đổi biến $\cos 2x = t$ $(-1 \leq t \leq 1)$.
- Nếu trong bài toán lượng giác chỉ có $\sin^2 x, \cos^2 x$ và $\sin 2x$ thì đổi biến $\sin 2x = t$ $(-1 \leq t \leq 1)$.

1.7.2 Đổi biến $t = \tan \frac{x}{2}$

Vì mọi hàm lượng giác đều biến đổi được theo $\tan \frac{x}{2} = t$, nên có thể dẫn phương trình lượng giác về phương trình đại số theo t và sau đó giải phương trình lượng giác cơ bản $\tan \frac{x}{2} = t$.

Tuy nhiên cần thận trọng không sẽ mất nghiệm. Chẳng hạn, khi giải phương trình $\sin x + \cos x = 1$, mà đặt ngay $\tan \frac{x}{2} = t$ thường bị mất nghiệm $x = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, vì phương trình khi xuất phát không có điều kiện, còn khi đổi biến $\tan\dfrac{x}{2} = t$ lại đòi hỏi $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$ $(x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Vì vậy, cần xét xem $\cos\dfrac{x}{2} = 0$ có là nghiệm của phương trình xuất phát hay không?

1.7.3 Đổi biến $t = af(x) \pm \dfrac{b}{f(x)}$ với $ab > 0$, trong đó $f(x)$ là hàm lượng giác hoặc biểu thức lượng giác

Vì $t^2 = a^2f^2(x) + \dfrac{b^2}{f^2(x)} \pm 2ab$, nên nếu trong bài toán lượng giác có $a^2f^2(x) + \dfrac{b^2}{f^2(x)}$ và $af(x) \pm \dfrac{b}{f(x)}$ thì ta đặt $t = af(x) \pm \dfrac{b}{f(x)}$.

1.8 Phương trình lượng giác bậc cao

1.8.1 Dạng phương trình

Phương trình lượng giác bậc cao là các phương trình mà bậc của các hàm số lượng giác lớn hơn hoặc bằng 3.

1.8.2 Cách giải

Phương pháp giải loại phương trình này là biến đổi dẫn về phương trình đại số bậc cao. Giải phương trình đại số bậc cao sẽ được phương trình cơ bản.

1.9 Phương trình tích

1.9.1 Dạng phương trình

Phương trình tích là phương trình biến đổi được vế trái của phương trình $f(x) = 0$ thành tích các nhân tử.

1.9.2 Cách giải

Nếu $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x)f_2(x)...f_n(x) = 0$ thì nghiệm của $f(x) = 0$ là hợp các nghiệm của phương trình $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, ..., f_n(x) = 0$.

1.10 Các dạng phương trình không chính tắc

Phương pháp này giải gọn nhưng phải nhận quen dạng.

1.10.1 Phương pháp ước lượng 2 vế

- Nếu 1 vế $\leq M$, vế còn lại $\geq M$ suy ra 2 vế bằng nhau tại cùng 1 điểm thì điểm đó là nghiệm.

- Nếu không tồn tại điểm như vậy thì phương trình vô nghiệm.

1.10.1.1 Ví dụ

Ví dụ 1. *Giải phương trình:*

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 2 - \sin^4 x$$

Giải

Nhận thấy $VT = \sin^3 x + \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, dấu bằng đạt được khi:

$$\begin{cases} \sin^3 x = \sin^2 x \\ \cos^3 x = \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \sin x = 1 \\ \cos x = 1, \sin x = 0 \end{array}\right.$$

$VP = 2 - \sin^4 x \geq 1$, dấu bằng đạt được khi $\sin^4 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1$
Vậy phương trình đã cho tương đương với: $\sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 2. *Giải phương trình:*

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = 1$$

Giải

Vì $|\sin x| \leq 1$; $|\sin 2x| \leq 1$; $|\sin 3x| \leq 1$ nên vế trái ≤ 1
Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |\sin x| = 1 \\ |\sin 2x| = 1 \\ |\sin 3x| = 1 \end{cases}$$

Nếu $|\sin x| = 1$ thì $\cos x = 0$ và $|\sin 2x| = |2 \sin x \cos x| = 0 \neq 1$
Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3. *Giải phương trình:*

$$6 \sin \pi x - x^2 + 5x - 12,25 = 0$$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$6\sin \pi x = x^2 - 5x + 12,25 \Leftrightarrow 6\sin \pi x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 6$
Nhận thấy rằng vế trái $= 6\sin \pi x \leq 6$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:
$\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
Vế phải $= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 6 \geq 6$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:
$x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ ứng với $k = 1$
Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{5}{2}$ là duy nhất.

Ví dụ 4. *Tìm các cặp số (a, b) để với mọi x ta đều có:*

$$a(\cos x - 1) + b^2 + 1 - \cos(ax + b^2) = 0$$

Giải

Điều kiện cần:
Vì phương trình đúng với mọi x, nên với $x = \pi$ và $x = 2\pi$ thì ta có:

$$\begin{cases} 1 - 2a + b^2 & = & \cos(a\pi + b^2)\ (1) \\ b^2 & = & \cos(2\pi a + b^2) - 1\ (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $b^2 \leq 0 \Rightarrow b = 0$. Cũng từ (2) lại có $\cos(\pi a) = 1 \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$
Mặt khác, từ (1) suy ra:
$\cos(\pi a) = 1 - 2a \Rightarrow -1 \leq 1 - 2a \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a = 0$ hoặc $a = 1$
Điều kiện đủ:
Với $a = 0, b = 0$ và mọi x ta đều có: $1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$ (đúng)
Với $a = 1, b = 0$ và mọi x ta đều có: $\cos x - \cos x = 0$ (đúng)
Vậy có 2 cặp (a, b) là $(0; 0)$ và $(1; 0)$

Ví dụ 5. *Với giá trị nào của a thì phương trình:*

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

có nghiệm duy nhất.

Giải

Vì phương trình đối xứng theo x, nên nếu có nghiệm thì x cũng có nghiệm $-x$. Vậy muốn có nghiệm duy nhất thì $x = -x \Rightarrow x = 0$.
Do $\sin x$ và $\cos x$ là các hàm tuần hoàn, nên nếu a hữu tỷ thì $\sin ax$ tuần hoàn và do đó phương trình có nghiệm khác 0.
Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì a vô tỷ.

1.10.1.2 Bài tập

Bài 1. *Giải các phương trình sau:*

1) $\sin^{14} x + \cos^{13} x = 1$

2) $\cos x \sin 2x \cos 5x = 1$

3) $3 \sin \pi x + x^2 - 3x + 5,25 = 0$

Bài 2. *Tìm mọi cặp số* (x, y) *thỏa mãn phương trình:*

a) $\left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2 + \left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2} \sin y$

b) $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$

c) $\left(\sin^3 \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\sin^3 \dfrac{x}{2}}\right) + \left(\cos^3 \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\cos^3 \dfrac{x}{2}}\right) = \dfrac{81}{4} \cos^2 4x$

Bài 3. *Chứng minh rằng: Với* $a > 1$ *thì phương trình* $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ *vô nghiệm.*

Bài 4. *Tìm tất cả các cặp số* (a, b) *để với mọi* x *ta đều có:*

1) $a \sin x + b = \sin(ax + b)$

2) $ae^x + b = e^{ax+b}$, biết $e = 2,71828...$ và $(e^x)' = e^x$

3) $a \ln x + b = \ln(ax + b)$, biết $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ đúng với $\forall x > 0$

Bài 5. *Giải phương trình:*

$\ln |\cos x| + \sin^5 x - 1 = 0$

1.10.2 Biến đổi vế trái của phương trình $f(x) = 0$ về tổng các hạng tử cùng dấu

Nếu $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) = 0$
Với $f_i(x) \geq 0$ hoặc $f_i(x) \leq 0$ với $\forall i = \overline{1, n}$ thì:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \quad ... \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

1.10.3 Dùng bất đẳng thức để giải phương trình lượng giác

Ta thường dùng các bất đẳng thức cơ bản là Côsi và Bunhiakopsky.

1.10.3.1 Ví dụ

Ví dụ 6. *Giải phương trình sau:*

$$\cos x\sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 2x\sqrt{\frac{1}{\cos 2x} - 1} = 1$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < \cos x \leq 1 \\ 0 < \cos 2x \leq 1 \end{cases}$
Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{\cos x(1 - \cos x)} + \sqrt{\cos 2x(1 - \cos 2x)} = 1$$

Theo điều kiện và bất đẳng thức cosin ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{\cos x(1 - \cos x)} \leq \dfrac{\cos x + 1 - \cos x}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{\cos 2x(1 - \cos 2x)} \leq \dfrac{\cos 2x + 1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\cos x(1 - \cos x)} + \sqrt{\cos 2x(1 - \cos 2x)} \leq 1$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \cos x \\ \cos 2x = 1 - \cos 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ 2\cos^2 x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm, vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

1.10.4 Dùng hàm số để giải phương trình lượng giác

1.10.4.1 Ví dụ

Ví dụ 7. *Giải phương trình sau:*

$$2\log_3 \tan x = \log_2 \sin x \ (1)$$

Giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \tan x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_3 \tan^2 x = \log_2 \sin x$$
$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} = \log_2 \sin x$$

Đặt $t = \log_2 \sin x \Rightarrow \sin x = 2^t$. Thay vào phương trình ta được:

$$\log_3 \frac{4^t}{1-4^t} = t$$
$$\Leftrightarrow \frac{4^t}{1-4^t} = 3^t$$
$$\Leftrightarrow 4^t + 12^t = 3^t$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t = 1 \ (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t + 4^t$. Có $f'(t) = \left(\frac{4}{3}\right)^t \ln\frac{4}{3} + 4^t \ln 4 > 0 \ \forall t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $f(t)$ cắt đồ thị hàm $g(t)$ tại một điểm duy nhất.

Mà $f(-1) = 1$ nên $t = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2).

Với $t = -1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Đối chiếu điều kiện xác định thì nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ là thỏa mãn. Còn nghiệm $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ loại vì $\tan\left(\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right) < 0$.

Chương 2

ỨNG DỤNG

2.1 Ứng dụng lượng giác để chứng minh các đẳng thức, bất đẳng thức

Khi giải các bài toán về chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức, trong một số trường hợp ta có thể chuyển chúng thành các bài toán lượng giác để giải, công việc này được gọi là phương pháp lượng giác hóa. Việc lựa chọn phương pháp lượng giác hóa được xác định thông qua các dấu hiệu đặc biệt của các biến có mặt trong bài toán và các dấu hiệu đó lại được xác định thông qua miền giá trị của chúng cùng với các công thức lượng giác thông thường. Chẳng hạn, nếu khoảng xác định là $|x| \leq 1$, thông thường đổi biến $x = \cos t$ $(0 \leq t \leq \pi)$ hoặc nếu điều kiện ràng buộc giữa các ẩn được quy về dạng $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ thì ta có thể đặt $x = a\sin\alpha$, $y = a\cos\alpha$ hoặc nếu có $x + y + z = xyz$, thì ta có thể đặt $x = \tan\alpha, y\tan\beta, z = \tan\gamma$ và $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$... Sau khi đặt ẩn phụ, ta quy bài toán ban đầu về bài toán lượng giác. Giải bài toán lượng giác, từ đó ta có kết quả của bài toán đại số.

2.1.1 Ví dụ

Ví dụ 8. *Cho $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$xy + yz + zx = 1 \ (1)$$

Chứng minh rằng

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = 2$$

Giải

Đặt $x = \tan\alpha, y = \tan\beta, z = \tan\gamma$ với $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2)$

Khi đó (1) có dạng

$$\begin{aligned}
&\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1\\
&\Leftrightarrow \tan\alpha(\tan\beta+\tan\gamma)=1-\tan\beta\tan\gamma\\
&\Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{1-\tan\beta\tan\gamma}{\tan\beta+\tan\gamma}=\cot(\beta+\gamma)\\
&\Leftrightarrow \alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi
\end{aligned}$$

Do $\alpha+\beta+\gamma\in\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ nên $0\le\dfrac{\pi}{2}+k\pi<\dfrac{3\pi}{2}$ hay $-\dfrac{1}{2}\le k<1$

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên $k=0$. Vậy $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=\tan\alpha\sqrt{\frac{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)}{1+\tan^2\alpha}}\\
&=\tan\alpha\frac{\cos\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta\cos\gamma}\\
&=\frac{\cos(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}\\
&=1-\tan\beta\tan\gamma=1-yz
\end{aligned}$$

Vậy $x\sqrt{\dfrac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}=1-yz$

Tương tự:

$$y\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+z^2}}=1-xz$$
$$z\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{1+z^2}}=1-xy$$

Từ đó suy ra

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}}+z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}=3-(xy+yz+zx)=2$$

Điều phải chứng minh.

2.2 Ứng dụng lượng giác để giải phương trình đại số, bất phương trình đại số.

Để lượng giác hóa các phương trình và bất phương trình đại số ta sử dụng các nhận xét sau:

1) Nếu $-1 \leq x \leq 1$ thì tồn tại α và β với $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$; $0 \leq \beta \leq \pi$ sao cho $\sin\alpha = x$ và $\cos\beta = x$

2) Nếu $0 \leq x \leq 1$ thì tồn tại các số α, β với $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$ và $0 \leq \beta \leq \dfrac{\pi}{2}$ sao cho: $x = \sin\pi$ và $x = \cos\beta$

3) Với mỗi số thực x, tồn tại số α với $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ sao cho $x = \tan\alpha$

4) Nếu các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$ thì tồn tại số α với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ sao cho $x = \cos\alpha$ và $y = \sin\alpha$

Ngoài ra, còn một số dấu hiệu cơ bản nhằm giúp phát hiện được phương pháp lượng giác hóa nhanh hơn.

- Nếu biến x thỏa mãn điều kiện $|x| \leq a$ $(a > 0)$ thì khi đó lượng giác hóa bằng cách đặt $x = a\sin\alpha$ với $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = a\cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$

- Nếu 2 biến x, y tham gia bài toán thỏa mãn: $a^2x^2 + b^2y^2 = c^2$ với $a, b, c > 0$. Khi đó ta có thể lượng giác hóa bằng cách đặt $x = \dfrac{c}{a}\sin\alpha; y = \dfrac{c}{b}\cos\alpha$ với $\alpha \in [0; 2\pi]$

- Nếu trong bài toán xuất hiện biểu thức $\sqrt{x^2+1}$ hoặc $x^2 + 1$ thì có thể lượng giác hóa bằng cách đặt $x = \tan\alpha$ với số $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ và $x^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

- Nếu trong bài toán xuất hiện biểu thức $\sqrt{1-x^2}$ thì có thể lượng giác hóa bằng cách đặt $x = \sin\alpha$ với $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, khi đó $\sqrt{1-x^2} = \cos\alpha$. Hoặc đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0; \pi]$ khi đó $\sqrt{1-x^2} = \sin\alpha$

- Nếu trong bài toán xuất hiện biểu thức $\sqrt{x^2-1}$ thì lượng giác hóa bằng cách đặt $x = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, khi đó $\sqrt{x^2-1} = \tan\alpha$

Ngoài ra, còn một số dấu hiệu thông qua các công thức về hàm số tan , chẳng hạn.

- Nếu có biểu thức $A = \dfrac{a+b}{1-ab}$ thì lượng giác hóa bằng cách đặt: $a = \tan\alpha, b = \tan\beta$. Khi đó $A = \tan(\alpha+\beta)$

- Nếu có 3 số a, b, c mà $a+b+c=abc$ thì ta có thể đặt: $a=\tan\alpha, b=\tan\beta, c=\tan\alpha$ với $\alpha+\beta+\alpha=k\pi$

2.3 Ứng dụng lượng giác để giải hệ phương trình

Trong hệ phương trình lượng giác, các dấu hiệu nhằm phát hiện được phương pháp lượng giác hóa cơ bản giống trong phần phương trình và bất phương trình đại số.

2.3.1 Ví dụ

Ví dụ 9. *Với a, b là 2 số cho trước, giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^2+a^2=y^2+b^2 \\ y^2+b^2=(x-b)^2+(y-a)^2 \end{cases}$$

Giải

Đặt $R^2=x^2+a^2 \Rightarrow x=R\cos\alpha; a=R\sin\alpha$
Từ $R^2=y^2+b \Rightarrow y=R\cos t; b=R\sin t$
Hệ thức $R^2=(x-b)^2+(y-a)^2$ có dạng:

$$\begin{aligned} R^2 &= (R\cos\alpha-R\sin t)^2+(R\cos t-R\sin\alpha)^2 \\ &= R^2(\cos^2\alpha-2\cos\alpha\sin t+\sin^2 t)+R^2(\cos^2\alpha 2\cos t\sin\alpha+\sin^2\alpha) \\ &= R^2[2-2(\sin\alpha\cos t+\cos\alpha\sin t)] \\ &= 2R^2[1-\sin(\alpha+t)] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \sin(\alpha+t)=\dfrac{1}{2}=\sin 30^\circ$

- Nếu $\alpha+t=30^\circ$ thì $t=30^\circ-\alpha$, ta được:
  $y=R\cos t=R\cos 30^\circ\cos\alpha+R\sin 30^\circ\sin\alpha=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}+\dfrac{9}{2}$

  $b=R\sin t=R\cos\alpha\sin 30^\circ-R\sin\alpha\cos 30^\circ=\dfrac{x}{2}-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
  từ đó suy ra nghiệm $x=2b+a\sqrt{3}, y=2a+b\sqrt{3}$

- Nếu $\alpha+t=150^\circ$ thì $t=150^\circ-\alpha$, ta được:
  $y=R\cos t=R\cos 150^\circ\cos\alpha+R\sin 150^\circ\sin\alpha=-\dfrac{x\sqrt{3}}{2}+\dfrac{9}{2}$

  $b=R\sin t=R\cos\alpha\sin 150^\circ-R\sin\alpha\cos 150^\circ=\dfrac{x}{2}+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

  từ đó suy ra nghiệm $x=2b-a\sqrt{3}, y=2a-b\sqrt{3}$

2.4 Ứng dụng lượng giác trong bài toán cực trị

Phương pháp lượng giác hóa để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số với mục đích thay đổi hình thức của bài toán dẫn tới việc tìm GTNN, GTLN của hàm số lượng giác.

Phương pháp này đặc biệt tỏ ra hiệu quả đối với các hàm đại số nhiều ẩn với dạng thường gặp nhất là:
"Tìm GTLN và GTNN của hàm số $u = f(x; y)$, biết $x^2 + y^2 = 1$

Khi đó ta lựa chọn việc đặt $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \ t \in [0; 2\pi] \end{cases}$

Tóm lại, để sử dụng phương pháp lượng giác hóa tìm GTNN, GTLN của hàm số ta thự hiện các bước như sau:

- Bước 1: lượng giác hóa hàm số

- Bước 2: thực hiện tìm GTLN và GTNN của hàm số lượng giác

- Bước 3: kết luận

2.5 Nhận dạng tam giác

Muốn biết một tam giác có tính chất gì (đều, vuông, cân, ...) ta thường sử dụng các phép biến đổi lượng giác để tính các góc hoặc cạnh. Ngoài ra ta còn sử dụng các phương pháp khác như: sử dụng phương pháp đánh giá dựa trên các tính chất của tam giác và hàm số, so sánh các cạnh, ... Để rõ hơn về các phương pháp này ta xét một vài ví dụ sau.

2.5.1 Ví dụ

Ví dụ 10. *Chứng minh rằng tam giác ABC cân khi và chỉ khi nó thỏa mãn hệ thức:*

a) $ptan\dfrac{B}{2}tan\dfrac{C}{2} = p - c \quad (1)$
b) $\dfrac{r}{R} = 2sin^2\dfrac{C}{2} + \dfrac{1}{4} \quad (2)$

Giải

a) Áp dụng định lý hàm số cosin và sin ta có:
$\cos^2\dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \dfrac{p(p-c)}{ab}$
$\Rightarrow \cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}}$ và $\sin\dfrac{C}{2} = \sqrt{1 - \cos^2\dfrac{C}{2}} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$

Do đó $\tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$, tương tự $\tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$.
Khi đó đẳng thức (1) trở thành

$$p\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=p-c$$
$$\Leftrightarrow a=b$$

Vậy tam giác ABC cân tại B.

b) Ta có: $\dfrac{r}{R}=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}(3)$
và $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}(4)$
Nên từ (3) và (4) ta có $1+\dfrac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C$, đẳng thức này tương đương với $\dfrac{r}{R}=-2\sin^2\dfrac{C}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$ (5)
Thế đẳng thức (5) vào đẳng thức (2) ta được: $4\sin^2\dfrac{C}{2}-2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}+\dfrac{1}{4}=0$
hay $\dfrac{1}{4}\sin^2\dfrac{B-C}{2}+\left(2\sin\dfrac{C}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\right)^2=0$
Tức là $\begin{cases}\sin\dfrac{B-C}{2}=0\\ 2\sin\dfrac{C}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=C\\ \sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$
Vậy tam giác ABC cân tại C.

2.6 Cực trị tam giác

Bài toán tìm GTLN, GTNN của các biểu thức liên quan đến các cạnh, các góc và các đường trong tam giác là bài toán khó. Đòi hỏi người làm phải vận dụng thành thạo các công thức lượng giác, đẳng thức và bất đẳng thức lượng giác quen thuộc. Đồng thời biết kết hợp khéo léo với các bất đẳng thức thường dùng như bất đẳng thức Côsi, bất đẳng thức Jensen...

2.6.1 Ví dụ

Ví dụ 11. *Cho $\triangle ABC$ có các cạnh a,b,c và l_a,l_b,l_c là độ dài các đường phân giác trong tương ứng với các đỉnh A,B,C. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:*

$$P=\frac{1}{c}(l_a+l_b)+\frac{1}{b}(l_a+l_c)+\frac{1}{a}(l_b+l_c)$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
&S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC}\\
&\Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}\\
&\Leftrightarrow 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = l_a\sin\frac{A}{2}(b+c)\\
&\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2} = l_a\left(\frac{b+c}{bc}\right)\\
&\Leftrightarrow 2\cos\frac{A}{2} = l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ (1)
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\begin{aligned}
2\cos\frac{B}{2} &= l_b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\ (2)\\
2\cos\frac{C}{2} &= l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ (3)
\end{aligned}$$

Cộng (1), (2) và (3) ta được:

$$\begin{aligned}
2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right) &= l_a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+l_b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+l_c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\
&= \frac{1}{c}(l_a+l_b)+\frac{1}{b}(l_a+l_c)+\frac{1}{a}(l_b+l_c)\ (4)
\end{aligned}$$

Đặt $T = \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$, ta có:

$$\begin{aligned}
&T+\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{\pi}{6} \le 2\left[\cos\frac{A+B}{4}+\cos\left(\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right]\\
&= 2.2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}+\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}-\frac{C}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}\right)\\
&\le 2.2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{4}+\frac{C}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Suy ra:

$$T+\frac{\pi}{6} \le 4\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow T \le 3\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow T \le \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2T \le 3\sqrt{3}$$

Vậy $2\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right) \le 3\sqrt{3}$

Theo (4) ta có: $\frac{1}{c}(l_a+l_b)+\frac{1}{b}(l_a+l_c)+\frac{1}{a}(l_b+l_c) \le 3\sqrt{3} \Leftrightarrow P \le 3\sqrt{3}$

Vậy P đạt GTLN là $3\sqrt{3}$, xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ là tam giác đều.