ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ DIỆP

PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM VÀ CÁC BÀI TOÁN VỀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Chuyên ngành : Phương pháp toán sơ cấp

Mã số: 60 46 01 13

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. NGUYỄN MINH TUẤN

Hà Nội- 2015

Lời cám ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn chân thành tới PGS.TS. Nguyễn Minh Tuấn, người thầy đã trực tiếp hướng dẫn, chỉ bảo tận tình và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của các thầy giáo, cô giáo trong khoa Toán Cơ Tin học, Trương Đại học Khoa học Tự Nhiên-Đại học Quốc gia Hà Nội và Khoa sau đại học, đã nhiệt tình giúp đỡ tôi hoàn thành khóa Cao học.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè đã luôn động viên và khuyến khích tôi rất nhiều trong thời gian nghiên cứu và học tập.

Do mới làm quen với công tác nghiên cứu khoa học nên luận văn còn nhiều thiếu sót. Tác giả kính mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn để luận văn hoàn thiện hơn.

Hà Nội, năm 2015

Nguyễn Thị Diệp

Mục lục

Lời mở đầu

Trong những năm gần đây, các kỳ khảo sát chất lượng, thi học sinh giỏi bậc trung học phổ thông thường gặp những bài toán yêu cầu tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của một đại lượng nào đó. Các bài toán cực trị rất phong phú và đa dạng mang nội dung vô cùng sâu sắc, có ý nghĩa rất quan trọng đối với các em học sinh. Các bài toán về cực trị góp phần không nhỏ vào việc rèn luyện tư duy cho học sinh. Bài toán đi tìm cái tốt nhất, rẻ nhất, ngắn nhất, dài nhất... trong một bài toán. Để dần dần hình thành cho học sinh thói quen đi tìm giải pháp tối ưu cho một công việc nào đó trong cuộc sống sau này.

Luận văn trình bày một số ứng dụng của đạo hàm để giải các bài toán cực trị. Luận văn chỉ đề cập tới một số phương pháp giải một số loại toán cực trị đại số thường gặp trong chương trình toán học trung học phổ thông. Luận văn hệ thống hóa, phân loại toán và trình bày theo từng ý tưởng cũng như các kỹ năng vận dụng đạo hàm vào việc giải một lớp các bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Luận văn gồm có 3 chương với các nội dung sau:
Chương 1: Luận văn trình bày các kiến thức khái niệm cần thiết như đạo hàm, tính đơn điệu và hàm lồi và được tham khảo trong [3].
Chương 2: Luận văn trình bày phương pháp sử dụng đạo hàm vào giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Chương 2 luận văn trình bày phương pháp khảo sát trực tiếp hàm số trên tập xác định của hàm số, khảo sát theo hàm số từng biến, đặt biến phụ chuyển về đánh giá hàm một biến, đánh giá thông qua biểu thức bậc nhất, hay phương pháp sử dụng tính chất hàm lồi, hàm lõm... được tham khảo trong [1, 5, 6, 2, 7, 4].

Chương 3. Luận văn trình bày phương pháp để tìm cực trị tự do và cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến số. Từ đó tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số và được tham khảo trong [3].

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Định nghĩa 1.1. *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Nếu giới hạn sau tồn tại và hữu hạn*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0 và được ký hiệu là $f^{'}(x_0)$. Khi đó ta nói rằng f khả vi tại x_0.

Ý nghĩa hình học. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Khi đó, $f^{'}(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0, y_0) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$ là

$$y = f^{'}(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

1.2 Cực trị của hàm số

Định nghĩa 1.2. *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $D \subset \mathbb{R}$ và $x_0 \in D$. Điểm x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng (a, b) chứa điểm x_0 sao cho $f(x) \leq f(x_0)$ với $\forall x \in (a, b) \cap D$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực*

đại của $f(x)$ và điểm $(x_0, f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
Điểm x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ nếu tồn tại một khoảng (a, b) chứa điểm x_0 sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với $\forall x \in (a, b) \cap D$.
Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu của $f(x)$ và điểm $(x_0, f(x_0))$ được gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
Điểm cực đại, cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại, giá trị cực tiểu được gọi chung là cực trị.

Ta có kết quả sau về điều kiện cần của cực trị.

Định lý 1.3. *(Định lý Fermat) Cho hàm f xác định trên (a, b) và $x_0 \in (a, b)$. Nếu hàm số f có cực trị tại x_0 và hàm f có đạo hàm tại x_0 thì*

$$f^{'}(x_0) = 0.$$

1.3 Các định lí cơ bản về hàm khả vi

Trong phần này, luận văn trình bày hai định lý quan trọng về đạo hàm. Đó là định lí Lagrange, định lí Rolle (xem [3]).

Định lý 1.4. *(Định lý Rolle) Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, có đạo hàm trên khoảng (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f^{'}(c) = 0$.*

Chứng minh. Vì $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nên theo định lí Weierstrass $f(x)$ nhận giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên $[a, b]$.
- Khi $M = m$ ta có $f(x)$ là hàm hằng trên $[a, b]$, do đó với mọi $c \in (a, b)$ luôn có $f^{'}(c) = 0$.
- Khi $M > m$, vì $f(a) = f(b)$ nên tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = m$ hoặc $f(c) = M$, theo Định lý Fermat suy ra $f^{'}(c) = 0$. Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 1.5. *Nếu $f(x)$ có đạo hàm trên (a, b) và $f^{'}(x)$ có nhiều nhất n nghiệm (n là số nguyên dương) trên (a, b) thì $f(x)$ có nhiều nhất $n + 1$ nghiệm trên (a, b).*

Định lý 1.6. *(Định lí Lagrange) Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho*

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Chứng minh. Xét hàm số

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x, \quad x \in [a, b].$$

Khi đó $F(x)$ là hàm liên tục trên đoạn$[a, b]$, có đạo hàm trên khoảng (a, b) và $F(a) = F(b)$. Theo định lí Rolle tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $F^{'}(c) = 0$. Mà

$$F^{'}(x) = f^{'}(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

suy ra

$$f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý được chứng minh. □

1.4 Hàm lồi và hàm lõm

Ta ký hiệu $I(a, b)$ là một tập hợp có một trong bốn dạng tập hợp sau $(a, b), [a, b), (a, b]$ và $[a, b]$.

Định nghĩa 1.7. *Hàm số $f(x)$ được gọi là lồi trên tập $I(a, b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có*

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{1.1}$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.1) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $I(a, b)$.

Định nghĩa 1.8. *Hàm số $f(x)$ được gọi là lõm trên tập $I(a, b)$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in I(a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$, ta đều có*

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \tag{1.2}$$

Nếu dấu đẳng thức trong (1.2) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lõm thực sự (chặt) trên $I(a, b)$.

Định lý 1.9. *Nếu* $f(x)$ *khả vi bậc hai trên* $I(a,b)$ *thì* $f(x)$ *lồi (lõm) trên* $I(a,b)$ *khi và chỉ khi* $f^{''}(x) \geq 0 (f^{''}(x) \leq 0)$ *trên* $I(a,b)$.

Chương 2

Ứng dụng đạo hàm giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

2.1 Khảo sát trực tiếp hàm số trên miền xác định

Bài toán 1. *(Thi HSG Quốc gia, 1992) Cho số tự nhiên $n > 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = \sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x}$$

với x thuộc $[0, 1]$.

Bài toán 2. *a. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \quad \text{với } x \in \mathbb{R}.$$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} + \sqrt{z^2 - z + 1}$$

trong đó các số x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Bài toán 3. *Giả sử A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\tan A + \tan B + \tan C + 6(\sin A + \sin B + \sin C).$$

Bài toán 4. *Giả sử $x > 0, y > 0$ và $x + y = 1$. Chứng minh rằng giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$$

là $\sqrt{2}$.

Bài toán 5. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Bài toán 6. *Giả sử $a, b \in \mathbb{R}_+$ và $a \neq b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$(\frac{a+x}{b+x})^{b+x} \quad \text{với } x \in [0, +\infty).$$

Bài toán 7. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$2^{\sin x} + 2^{\tan x} - 2^{x+1} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

2.2 Khảo sát hàm số theo từng biến

Đối với các BĐT nhiều biến, ta có thể chọn một biến là biến số biến thiên và cố định các biến còn lại, bài toán lúc này trở thành BĐT một biến.

Bài toán 8. *Giả sử A, B, C là ba góc của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$Q = 2\Big(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\Big) - (\cot A + \cot B + \cot C).$$

Bài toán 9. *Giả sử các số thực $a, b, c > 0$, thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2}.$$

Bài toán 10. *Chứng minh rằng giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x) \qquad \text{với } x,y,z\in[0,1]$$

là 3.

Bài toán 11. *Giả sử* $a,b,c\in[\frac{1}{3},3]$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$S(a,b,c)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}.$$

Bài toán 12. *Giả sử* $a,b,c\in[0,1]$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$S=\frac{a}{b^3+c^3+6}+\frac{b}{c^3+a^3+6}+\frac{c}{a^3+b^3+6}.$$

Bài toán 13. *Xét hàm số*

$$f(x,y)=(1-x)(2-y)(4x-2y)$$

trên miền $D=\{(x,y):\quad 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm* f *trên miền* D.

Bài toán 14. *(Đề thi HSG THPT toàn quốc bảng A, 1999) Xét các số thực dương* a,b,c *thỏa mãn* $abc+a+c=b$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}.$$

Bài toán 15. *(VMO, 2001) Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện*

$$\begin{cases}\frac{2}{5}\le z\le \min\{x,y\}\\ xz\ge \frac{4}{15}\\ yz\ge \frac{1}{5}.\end{cases} \tag{2.1}$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(x,y,z)=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}.$$

Bài toán 16. *(Đề thi chọn ĐTQG, 2001) Xét các số thực dương* a,b,c *thỏa mãn* $21ab+2bc+8ac\le 12$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P(a,b,c)=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}.$$

Bài toán 17. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$Q = -2xy^2 + x^2y$$

trên miền $E = \{(x, y) : \quad 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

Bài toán 18. *Xét các số thực dương* x, y, z *thỏa mãn điều kiện* $12xyz \ge 2x + 8y + 21z$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $Q = x + 2y + 3z$.

2.3 Đặt biến phụ chuyển về đánh giá hàm số một biến

Bài toán 19. *Giả sử* x, y *là hai số thực không âm thỏa mãn* $x + y = 4$. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = (x^3 - 1)(y^3 - 1).$$

Bài toán 20. *Giả sử* x, y, z *là hai số thực không âm thỏa mãn* $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = xy + yz + zx + \frac{5}{x + y + z}.$$

Bài toán 21. *Giả sử* $x, y \ge 0$ *là hai số thực thỏa mãn* $x + y = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = (x^2 - 1)(y^2 - 1) - \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

Bài toán 22. *Giả sử hai số* x, y *khác* 0 *thay đổi thỏa mãn*

$$(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy. \tag{2.2}$$

Chứng minh rằng giá trị lớn nhất của

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$$

là 16.

Bài toán 23. *Giả sử* x, y *là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện* $x^2 + y^2 + xy = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$S = x^2y - xy^2.$$

Bài toán 24. *Giả sử* $x, y \in \mathbb{R}$ *và* $x, y > 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}.$$

Bài toán 25. *(Trích đề thi Đại học khối A năm 2006) Giả sử hai số thực* $x, y \neq 0$ *thay đổi thỏa mãn* $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

Bài toán 26. *Giả sử các số thực dương* x, y, z *thỏa mãn*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 1. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = x^4 + y^4 + z^4.$$

Bài toán 27. *Giả sử các số thực* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn*

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 8 \\ xyz = 4. \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = x^4 + y^4 + z^4$.

Bài toán 28. *Giả sử các số thực* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn* $x + y + z \leq 2$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$Q = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{4z^2 + \frac{1}{z^2}}.$$

Bài toán 29. *(Trích đề thi Đại học khối A năm 2003) Giả sử* $x, y, z > 0, x + y + z \leq 1$. *Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của*

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}}$$

là $\sqrt{82}$.

Bài toán 30. *Giả sử ba số thực* $a, b, c > 0$ *thỏa mãn* $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{b^2c} + \frac{1}{c^2a}.$$

Bài toán 31. *(Thi thử đại 2012-2013. Trường THPT Kon Tum) Giả sử* x, y, z *là các số thực không âm thỏa* $x + y + z = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức* $P = xy + yz + zx - 2xyz$.

Bài toán 32. *Giả sử* x, y, z *là các số thực không âm thỏa mãn* $x + y + z = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz.$$

Bài toán 33. *(Trích đề thi thử đại học năm 2012-2013, trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Kon Tum) Giả sử* x, y *là các số thực không âm thay đổi và thỏa mãn điều kiện* $4(x^2 + y^2 + xy) \leq 1 + 2(x + y)$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = xy + \sqrt{x + y} - x^2 - y^2.$$

Bài toán 34. *(Trích đề thi học sinh giỏi Toán 12, bảng A, tỉnh Nghệ An, năm 2012-2013) Giả sử* a, b, c *là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a + b + c}}.$$

Bài toán 35. *Giả sử* $x, y, z \in [1, 2]$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = (x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}).$$

Bài toán 36. *Giả sử* $1 \leq x, y, z \leq 3$ *và* $x + y + z = 6$. *Tìm giá trị lớn nhất của*

$$P = x^2 + y^2 + z^2.$$

2.4 Đánh giá gián tiếp thông qua biểu thức bậc nhất

Nếu bài toán có dạng sau cho $n \in \mathbb{N}$ và các số $a_1, a_2, \ldots a_n \in D$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n\alpha$, với $\alpha \in D$. Hàm số $y = f(x)$ trên khoảng D không lồi và cũng không lõm trên D nhưng đồ thị vẫn "nằm trên" tiếp tuyến của nó tại D. Trong bài này không thể áp dụng được BĐT hàm lồi được nhưng vẫn có thể dùng phương pháp "tiếp tuyến" để giải quyết bài toán. Sau đây xin được trình bày một số bài toán minh họa cho phương pháp trên được trích dẫn từ một số đề thi Olympic của nước ta và các nước trên thế giới. Trong một số bài toán có thể chúng ta phải sử dụng linh hoạt các giả thiết và tính chất của các biểu thức trong bài toán để vận dụng phương pháp một cách hiệu quả nhất.

Bài toán 37. *(Olimpic 30/4- 2006). Giả sử a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$Q = \frac{a(b+c)}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2 + c^2}.$$

Bài toán 38. *(Hồng Kong, 2005). Giả sử a, b, c, d là các số dương thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của*

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

là $\frac{1}{8}$.

Bài toán 39. *(Mở rộng bài toán thi Olimpic Ba Lan, 1996 và Olimpic 30-4, 1999) Giả sử các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{a}{1 + a^2} + \frac{b}{1 + b^2} + \frac{c}{1 + c^2}.$$

Bài toán 40. *(Rumania, 2005). Giả sử các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - (a^2 + b^2 + c^2)$$

là 0.

Bài toán 41. *(Trung Quốc, 2005). Giả sử các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 1$. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của*

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \tag{2.3}$$

là 1.

Bài toán 42. *(Moldova,2005) . Giả sử các số dương a, b, c thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca}.$$

2.5 Phương pháp sử dụng tính chất của hàm lồi, hàm lõm

Bài toán 43. *(Bất đẳng thức Karamata). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a,b), k = 1, 2, \dots, n\}$ thỏa mãn các điều kiện*

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$$

và

$$\begin{cases} x_1 \geq y_1 \\ x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \\ \dots\dots \\ x_1 + x_2 + \dots x_{n-1} \geq y_1 + y_2 + \dots y_{n-1} \\ x_1 + x_2 + \dots x_n = y_1 + y_2 + \dots y_n \end{cases} \tag{2.4}$$

Khi đó, ứng với mọi hàm lồi $f(x)$ $\quad (f''(x) \geq 0)$ trên $I(a,b)$, ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n). \tag{2.5}$$

Ta cũng có phát biểu tương tự đối với hàm lõm bằng cách đổi chiều dấu bất đẳng thức.

Hệ quả 2.1 (Bất đẳng thức Jensen). Với mọi hàm lồi $f(x)$ trên $I(a,b)$ và với mọi $x_i \in I(a,b)$ $\quad (i = 1, 2, \dots, n)$, ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}).$$

Ở phần tiếp theo, luận văn trình bày một số áp dụng của bất đẳng thức Karamata và các hệ quả của nó.

Bài toán 44. *Cho* $2n$ *số thực dương* $a_i, b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ *thỏa mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \\ a_1 \geq b_1, a_1a_2 \geq b_1b_2, \dots, a_1a_2\dots a_n = b_1b_2\dots b_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Bài toán 45. *Giả sử các số thực* a, b, c *thỏa mãn*

$$\begin{cases} 0 \leq c \leq b \leq a \leq 8 \\ a + b \leq 13 \\ a + b + c = 15. \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$M = a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài toán 46. *Giả sử* A, B, C *là 3 góc của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng giá trị lớn nhất của*

$$\cos A + \cos B + \cos C$$

là $\frac{3}{2}$.

Bài toán 47. *Giả sử tam giác* ABC *không nhọn. Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của*

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}$$

là $2\sqrt{2} - 1$.

Bài toán 48. *(IMO 2000). Giả sử các số dương* a, b, c *thỏa mãn điều kiện* $abc = 1$. *Chứng minh rằng*

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1.$$

Chương 3

Cực trị hàm nhiều biến

3.1 Cực trị tự do

Sau đây, luận văn xin trình bày về cực trị tự do của hàm nhiều biến được tham khảo trong [3]. Giả sử $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ là một hàm xác định và liên tục ở trong miền D mở, $M(a_1, \ldots, a_n) \in D$. Ta nói rằng hàm $f(x_1, \ldots, x_n)$ đạt được giá trị cực đại (cực tiểu) tại M nếu tại mọi điểm $(x_1, \ldots, x_n)$ thuộc một lân cận nào đó của $M(a_1, \ldots, a_n)$ thì

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(a_1, \ldots, a_n)$$

$$(\text{ tương ứng } f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(a_1, \ldots, a_n)).$$

Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm $f(x_1, \ldots, x_n)$ được gọi là cực trị của hàm số. Tại $M(a_1, \ldots, a_n)$ mà hàm đạt được cực trị gọi là điểm cực trị của hàm số.

Định lý 3.1. *(Điều kiện cần của cực trị [3]) Nếu hàm $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ đạt được cực trị tại $M(a_1, \ldots, a_n)$ và tại đây hàm số có các đạo hàm riêng hữu hạn, $f'_{x_j}(a_1, \ldots, a_n), j = 1, 2, \ldots, n$ thì các đạo hàm riêng đó phải triệt tiêu*

$$f'_{x_j}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ với mọi } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Định lý 3.2. *(xem [3]). Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm thỏa mãn $z'_x(x_0, y_0) = 0, z'_y(x_0, y_0) = 0$ của hàm $z = f(x, y)$ và tại đây hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục* *và ta gọi*

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0, y_0), B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

1. Nếu $B^2 - AC < 0$ thì $z = f(x, y)$ có cực trị tại $M(x_0, y_0)$. Hơn nữa hàm $z = f(x, y)$ đạt cực đại tại $M(x_0, y_0)$ nếu $A < 0$, $z = f(x, y)$ đạt cực tiểu tại $M(x_0, y_0)$ nếu $A > 0$.

2. Nếu $B^2 - AC > 0$ thì $z = f(x, y)$ không có cực trị tại $M(x_0, y_0)$.

3. Nếu $B^2 - AC = 0$: chưa kết luận được cực trị của hàm $z = f(x, y)$ tại $M(x_0, y_0)$.

Bài toán 49. *Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau*

$$z = x^3 + y^3 - 3xy \text{ trong đó } 0 \leq x, y \leq 2.$$

Bài toán 50. *Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số sau*

$$z = x^3 + 2y^3 - 3x - 6y \text{ trong đó } -2 \leq x, y \leq 2.$$

Bài toán 51. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$z = 8x^2 + 3y^2 + 1 - (2x^2 + y^2 + 1)^2$$

trong miền tròn đóng D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 1$.

3.2 Cực trị có điều kiện

Xét bài toán: Tìm cực trị của hàm số $f(x_1, \ldots, x_n)$ với điều kiện $\phi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, j = 1, \ldots, m$. Phương pháp làm như sau (xem [3]): Xét hàm Lagrange

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \phi_j(x_1, \ldots, x_n).$$

Giải hệ

$$\begin{cases} L'_{x_j}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n \\ \phi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

để tìm các điểm dừng. Sau đó xét dấu của dạng vi phân cấp 2 là d^2L để tìm cực trị của hàm số ban đầu.

Bài toán 52. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số* $u = x - 2y + 2z$ *với điều kiện*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Bài toán 53. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $u = x^2 + y^2$ *với điều kiện*

$$x + y = 1.$$

Bài toán 54. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số* $u = \sin x \sin y \sin z$ *với điều kiện* $x + y + z = \frac{\pi}{2}, x, y, z \geq 0.$

Bài toán 55. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số* $u = xyz$ *với điều kiện* $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$

Bài toán 56. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số* $u = xy + yz$ *với điều kiện* $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2, x, y, z \geq 0.$

Kết luận

Luận văn đề cập tới nghiên cứu một số phương pháp đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số với ứng dụng vào giải quyết những bài toán khác nhau. Luận văn đã trình bày các vấn đề sau:

- Phương pháp khảo sát trực tiếp hàm số trên miền xác định
- Phương pháp khảo sát hàm số theo từng biến
- Phương pháp đặt biến phụ
- Phương pháp đánh giá thông qua biểu thức bậc nhất
- Phương pháp sử dụng tính chất của hàm lồi, hàm lõm
- Cực trị tự do của hàm nhiều biến, và cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến.

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Văn Dũng, Phương pháp sử dụng đạo hàm chứng minh bất đẳng thức.

[2] Phạm Kim Hùng, Sáng tạo bất đẳng thức, NXB tri thức, 2006.

[3] Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn, Giáo trình giải tích 1, NXB ĐHQG Hà Nội, 2004.

[4] Nguyễn Văn Mậu, Bất đẳng thức: Định lý và áp dụng, NXB Giáo dục, 2006.

[5] Trần Phương, Vẻ đẹp Bất đẳng thức trong các kì thi Olympic Toán học, NXB ĐHQG Hà Nội, 2010.

[6] Trần Phương, Những viên kim cương trong bất đẳng thức Toán học, 2009.

[7] Nguyễn Minh Tuấn, Lý thuyết cơ sở của hàm lồi và các bất đẳng thức cổ điển, NXB ĐHQG Hà Nội, 2013.