ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ MINH THƯƠNG

# LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ VỚI CÁC BÀI TOÁN PHỔ THÔNG

## TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

HÀ NỘI - 2015

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN THỊ MINH THƯƠNG

# LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ VỚI CÁC BÀI TOÁN PHỔ THÔNG

**Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp**

**Mã số: 60.46.01.13**

## LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

**Người hướng dẫn khoa học:**

**GS.TS Đặng Huy Ruận**

HÀ NỘI - 2015

# Mục lục

# LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết đồ thị là một trong những ngành khoa học ra đời khá sớm. Lý thuyết đồ thị giúp mô tả hình học và giải quyết nhiều bài toán thực tế phức tạp.

Khái niệm lý thuyết đồ thị được nhiều nhà khoa học độc lập nghiên cứu và có nhiều đóng góp trong lĩnh vực toán học ứng dụng.

Năm 2001, Bộ Giáo Dục và Đào Tạo có quy định các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi thống nhất trên toàn quốc, trong đó có chuyên đề lý thuyết đồ thị. Như vậy, việc học chuyên đề Lý Thuyết Đồ Thị đối với học sinh khá và giỏi đang là nhu cầu thực tế trong dạy học toán ở phổ thông. Tuy nhiên, việc dạy học chuyên đề này còn tồn tại một số khó khăn vì những lý do khác nhau. Một trong các lý do đó là sự mới mẻ, độc đáo và khó của chủ đề kiến thức này.

Luận văn "Lý thuyết đồ thị với các bài toán phổ thông" đưa đến sự sáng tạo trong cách nhìn nhận bài toán và lập luận cách giải dưới con mắt của lý thuyết đồ thị.

Ngoài phần mở đầu và kết luận luận văn gồm 3 chương:
Chương 1 Đại cương về đồ thị.
Chương 2 Một số bài toán đồ thị cơ bản.
Chương 3 Ứng dụng lý thuyết đồ thị vào giải toán phổ thông.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn, giúp đỡ tận tình của GS.TS Đặng Huy Ruận, tác giả xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.
Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu cùng các thầy cô giáo khoa Toán - Cơ - Tin, Trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên - Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã tạo điều kiện, dạy bảo và dìu dắt tác giả trong những năm học vừa qua.
Xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của bạn bè, người thân trong thời gian học tập và làm luận văn.

Do khả năng nhận thức của bản thân tác giả, luận văn còn nhiều hạn chế, thiếu sót. Tác giả kính mong các ý kiến chỉ bảo của quý thầy cô cùng sự đóng góp của các bạn đọc.

**Tác giả xin chân thành cảm ơn!**

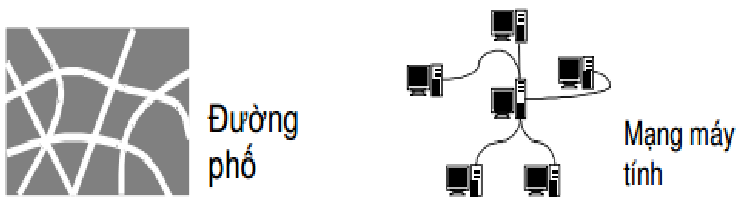
*Hà Nội, tháng 6 năm 2015*

# Chương 1

# Đại cương về đồ thị

## 1.1 Định nghĩa đồ thị

Tập hợp $X \neq \emptyset$ các đối tượng và bộ $E$ các cặp sắp thứ tự và không sắp thứ tự các phần tử của $X$ được gọi là một đồ thị, đồng thời được ký hiệu bằng $G(X, E)$ (hoặc $G = (X, E)$ hoặc $G(X)$).




***Hình 1.1: Ví dụ về mô hình đồ thị***

## 1.2 Một số dạng đồ thị đặc biệt

Trong những trường hợp không cần phân biệt giữa cạnh và cung ta quy ước dùng cạnh thay cho cả cung.

Đồ thị $G = (X, E)$ không có khuyên và mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bằng không quá một cạnh, được gọi là đồ thị đơn hay đơn đồ thị và thông thường được gọi là đồ thị.

Đồ thị $G = (X, E)$ không có khuyên và có ít nhất một cặp đỉnh được nối với nhau bằng từ hai cạnh trở lên được gọi là đa đồ thị.

Đồ thị $G = (X, E)$ được gọi là vô hướng nếu các cạnh trong E là không định hướng.

Đồ thị $G = (X, E)$ được gọi là có hướng nếu các cạnh trong E là có định hướng.

Đồ thị vô hướng (có hướng) $G = (X, E)$ được gọi là đồ thị đầy đủ nếu mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bằng đúng một cạnh (một cung với chiều tùy ý).

Đa đồ thị vô hướng (có hướng) $G = (X, E)$ được gọi là đồ thị k-đầy đủ nếu mỗi cặp đỉnh được nối với nhau bằng đúng k cạnh (k cung với chiều tùy ý).

Đồ thị (đa đồ thị) $G = (X, E)$ được gọi là đồ thị (đa đồ thị) hai mảng nếu tập đỉnh $X$ của nó được phân thành hai tập con rời nhau $X_1, X_2$ ($X_1 \bigcup X_2 = X$ và $X_1 \bigcap X_2 = \emptyset$) và mỗi cạnh đều có một đầu thuộc $X_1$ còn đầu kia thuộc $X_2$.Khi đó $G = (X, E)$ còn được ký hiệu bằng $G = (X_1, X_2, E)$.

## 1.3 Bậc của đỉnh đồ thị

### 1.3.1 Bậc của đỉnh

Giả sử $G = (X, E)$ là một đồ thị hay đa đồ thị có hướng hoặc không có hướng. Số cạnh và cung thuộc đỉnh x được gọi là bậc của đỉnh x và ký hiệu bằng $m(x)$.

### 1.3.2 Nửa bậc

Giả sử $G = (X, E)$ là một đồ thị hay đa đồ thị có hướng. Số cung đi vào đỉnh $x$ được gọi là nửa bậc vào của đỉnh $x$ và ký hiệu bằng $m'(x)$ hoặc $m^-(x)$. Số cung đi ra khỏi đỉnh $x$ được gọi là nửa bậc ra của đỉnh $x$ và ký hiệu bằng $m''(x)$ hoặc $m^+(x)$.

Ký hiệu tập cung đi vào đỉnh $x$ bằng $E^-(x)$, còn tập cung ra khỏi đỉnh $x$ bằng $E^+(x)$.

### 1.3.3 Một số tính chất

**Định lí 1.3.1.** *Trong đồ thị hay đa đồ thị tùy ý, tổng số bậc của tất cả các đỉnh bao giờ cũng gấp đôi số cạnh.*

**Định lí 1.3.2.** *Trong đồ thị hay đa đồ thị tùy ý, số đỉnh bậc lẻ luôn luôn là số chẵn.*

**Định lí 1.3.3.** *Trong một đồ thị với n đỉnh* $(n \geq 2)$ *có ít nhất hai đỉnh cùng bậc.*

**Định lí 1.3.4.** *Nếu đồ thị với n đỉnh* $(n \geq 2)$ *có đúng hai đỉnh cùng bậc, thì hai đỉnh này không thể đồng thời có bậc 0 hoặc bậc* $n-1$.

**Định lí 1.3.5.** *Số đỉnh bậc* $n-1$ *trong đồ thị G với n đỉnh* $(n \geq 4)$, *mà bốn đỉnh tùy ý có ít nhất một đỉnh kề với ba đỉnh còn lại, không nhỏ hơn* $n-3$.

**Định lí 1.3.6.** *Với mọi số tự nhiên n* $(n > 2)$ *luôn luôn tồn tại đồ thị n đỉnh, mà ba đỉnh tùy ý của đồ thị đều không cùng bậc.*

**Định lí 1.3.7.** *Trong đồ thị* $G = (X, E)$ *với ít nhất* $kn + 1$ *đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn* $(k-1)n + 1$ *luôn tồn tại đồ thị con đầy đủ gồm* $k + 1$ *đỉnh.*

## 1.4 Xích, chu trình, đường, vòng

### 1.4.1 Xích, chu trình

Giả sử $G(X, E)$ là một đồ thị hay đa đồ thị vô hướng:
Dãy $\alpha$ các đỉnh của $G(X, E)$:

$$\alpha = [x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, x_n]$$

được gọi là một xích hay một dây chuyền, nếu $\forall i (1 \leq i \leq n-1)$ cặp đỉnh $x_i, x_{i+1}$ kề nhau.

### 1.4.2 Đường, vòng

Giả sử $G(X, E)$ là một đồ thị hay đa đồ thị có hướng. Dãy đỉnh $\beta$ của $G(X, E)$ :

$$\beta = [x_1, x_2, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, x_m]$$

được gọi là một đường hay một đường đi nếu $\forall i (1 \leq i \leq m-1)$, đỉnh $x_i$ là đỉnh đầu, còn đỉnh $x_{i+1}$ là đỉnh cuối của một cung nào đó.

Một đường có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau được gọi là một vòng.

### 1.4.3 Một số tính chất

**Định lí 1.4.1.** *Trong một đồ thị vô hướng với n đỉnh* $(n \geq 3)$ *và các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 2 luôn tồn tại chu trình sơ cấp.*

**Định lí 1.4.2.** *Trong một đồ thị vô hướng với n đỉnh* ($n \geq 4$) *và các đỉnh đều có bậc không nhỏ hơn 3 luôn tồn tại chu trình sơ cấp độ dài chẵn.*

## 1.5 Đồ thị liên thông

### 1.5.1 Định nghĩa

Hai đỉnh x, y của đồ thị $G = (X, E)$ được gọi là cặp đỉnh liên thông nếu hoặc giữa x và y có ít nhất một xích nối với nhau , hoặc tồn tại ít nhất một đường đi từ x sang y hoặc từ y sang x.

### 1.5.2 Tính chất

**Định lí 1.5.1.** *Đồ thị vô hướng tùy ý với n đỉnh* ($n \geq 2$), *mà tổng bậc của hai đỉnh tùy ý không nhỏ hơn n là đồ thị liên thông.*

Từ định lý trên suy ra hệ quả sau:

**Hệ quả 1.5.1.** *Đồ thị, mà bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn nửa số đỉnh, là đồ thị liên thông.*

**Định lí 1.5.2.** *Nếu đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ, thì hai đỉnh này phải liên thông.*

## 1.6 Số ổn định trong, số ổn định ngoài

### 1.6.1 Số ổn định trong

**1. Tập ổn định trong**

Giả sử có đồ thị $G(X, E)$. Tập con $A \subseteq X$ các đỉnh của đồ thị G được gọi là tập ổn định trong, nếu mọi cặp đỉnh thuộc A đều không kề nhau (không có cạnh hoặc cung nối với nhau).

**2. Tính chất**

Nếu A là tập ổn định trong, thì mọi tập con của A đều phải ổn định trong.

**3. Số ổn định trong**

Số phần tử của một trong những tập ổn định trong có lực lượng lớn nhất được gọi là số ổn định trong của đồ thị G, đồng thời được ký hiệu bằng $\alpha(G)$.

### 1.6.2 Số ổn định ngoài

**1. Tập ổn định ngoài**

Giả sử có đồ thị $G(X, E)$. Tập con $B \subseteq X$ các đỉnh của đồ thị G được gọi là tập ổn định ngoài, nếu với mọi đỉnh x thuộc tập $X \backslash B$ đều tồn tại đỉnh $y \in B$, để hoặc từ x sang y có cung hoặc cặp đỉnh x, y được nối bằng một cạnh.

**2. Tính chất**

Nếu B là tập ổn định ngoài, thì mọi tập chứa B đều ổn định ngoài.

**3. Số ổn định ngoài**

Số phần tử của một trong những tập ổn định ngoài có lực lượng bé nhất được gọi là số ổn định ngoài của đồ thị G, đồng thời được ký hiệu bằng $\beta(G)$.

### 1.6.3 Các thuật toán tìm số ổn định trong, số ổn định ngoài.

#### 1.6.3.1. Thuật toán tìm số ổn định trong.

- Bước 1: Tìm các tập ổn định trong có 2 phần tử bằng cách xét tất cả tổ hợp chập 2 của n phần tử (n số các đỉnh), kiểm tra những tập nào mà phần tử tương ứng không kề nhau thì tập đó là ổn định trong;

- Bước 2: Duyệt từng tập có 2 phần tử và bổ sung thêm phần tử thứ 3 và kiểm tra từng cặp như bước 1, tập nào thỏa mãn ta được tập ổn định trong 3 phần tử.

.........

- Bước k: Giả sử ta đã tìm được m tập con ổn định trong có k+1 phần tử

+ Duyệt từng tập và bổ sung vào các tập đó thêm 1 phần tử.

+ Nếu không có tập nào bổ sung được nữa thì dừng.

#### 1.6.3.2. Thuật toán tìm số ổn định ngoài.

Xét $G(X, E)$ với $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

- Bước 1: Xác định các tập $\Delta(x_i), i = 1, 2, ..., n$
với $\Delta(x_i) = \{x_i$ và các đỉnh kề với $x_i\}$

- Bước 2: Từ các tập $\Delta(x_1), \Delta(x_2), ..., \Delta(x_n)$ ta tìm tập $B = \{x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{km}\}$ sao cho $\Delta(x_{k1}) \cup \Delta(x_{k2}) \cup ... \cup \Delta(x_{km}) = X$.

Khi đó B là tập ổn định ngoài cực tiểu.

## 1.7 Nhân của đồ thị và ứng dụng vào trò chơi

### 1.7.1 Định nghĩa

Giả sử có đồ thị $G(X, U)$. Tập đỉnh $S \subseteq X$ được gọi là nhân của đồ thị G, nếu nó vừa là tập ổn định trong lại vừa là tập ổn định ngoài.

### 1.7.2 Tính chất

**Định lí 1.7.1.** *Nếu đồ thị $G(X, U)$ có số ổn định trong nhỏ hơn số ổn định ngoài thì nó không có nhân.*

**Định lí 1.7.2.** *Nếu S là nhân của đồ thị $G(X, U)$, thì nó cũng là tập ổn định trong cực đại.*

**Định lí 1.7.3.** *Trong đồ thị vô hướng không có khuyên mọi tập ổn định trong cực đại đều là nhân.*

**Hệ quả 1.7.1.** *Mọi đồ thị vô hướng không có khuyên đều có nhân.*

### 1.7.3 Trò chơi Nim

Giữa hai đấu thủ, được ký hiệu là A và B, có một đồ thị $G(X, E)$ cho phép xác định một trò chơi nào đó. Trong trò chơi này mỗi thế là một đỉnh của đồ thị.

Đỉnh khởi đầu $x_0$ được chọn bằng cách gắp thăm và các đấu thủ lần lượt đi: Đầu tiên đấu thủ A chọn đỉnh $x_1$ trong tập $D(x_0) \cup D^+(x_0)$; sau đó đấu thủ B chọn đỉnh $x_2$ trong tập $D(x_1) \cup D^+(x_1)$; tiếp theo đấu thủ A chọn đỉnh $x_3$ trong tập $D(x_2) \cup D^+(x_2)$,...Nếu một trong hai đấu thủ chọn được đỉnh $x_k$, mà $D(x_k) \cup D^+(x_k) = \emptyset$, thì ván đó kết thúc. Đấu thủ nào chọn được đỉnh cuối cùng thì thắng cuộc và đấu thủ kia thua cuộc.

**Định lí 1.7.4.** *Nếu đồ thị $G(X, E)$ có nhân S và nếu một đấu thủ đã chọn được một đỉnh trong nhân S, thì việc chọn này bảo đảm cho đấu thủ đó thắng hoặc hòa.*

### 1.7.4 Trò chơi bốc các vật

**1. Trò chơi**

Trên bàn có một đống gồm m vật. Hai đấu thủ A, B thực hiện trò chơi bốc các vật theo nguyên tắc:

1) Người đi đầu xác định ngẫu nhiên (bằng gắp thăm hoặc gieo đòng tiền).

2) Với $k(1 \leq k < m)$ mỗi người đến lượt phải bốc ít nhất một vật và không được bốc quá k vật.

3) Người bốc được vật cuối cùng thắng(thua)cuộc.

**2. Thuật toán chơi dựa vào nhân đồ thị**

*a.Trường hợp bốc được vật cuối cùng thắng cuộc*

*1)Xây dựng đồ thị xác định trò chơi:*

Cần xác định đỉnh và cung của đồ thị tương ứng với số lượng vật có thể có là $0, 1, 2, ..., i, i+1, ..., m-1, m$. Dùng ngay số lượng vật để ghi trên các điểm tương ứng.

i) Đối với mỗi đỉnh $x \geq k$ có cung đi tới từng đỉnh thuộc tập

$$D^{+}(x) = \{x-1, x-2, ..., x-k+1, x-k\}$$

.

ii) Đối với mỗi đỉnh $y(1 \leq y < k)$ có cung đi tới từng đỉnh thuộc tập

$$D^{+}(y) = \{0, 1, 2, ..., y-1\}$$

.

*2)Xác định nhân của đồ thị:*

Vì từng cặp đỉnh thuộc tập

$$M = \{0, k+1, 2(k+1), ..., [\frac{m}{k+1}](k+1)\}$$

không kề nhau và mỗi đỉnh $i \in M$ đều có cung đi tới đỉnh

$$[\frac{i}{k+1}](k+1),$$

nên tập M là nhân của đồ thị G.

*3) Thuật toán:*

Giả sử A là người được đi đầu. Khi đó A bốc

$$m - [\frac{m}{k+1}](k+1)$$

vật, tức đi theo cung

$$\big(m, [\frac{m}{k+1}](k+1)\big)$$

để đến đỉnh

$$[\frac{m}{k+1}](k+1) \in M.$$

Đến lượt mình, giả sử B bốc $t(1 \leq t \leq k)$ vật. Tiếp theo A bốc $k+1-t$ vật, tức xuất phát từ đỉnh

$$[\frac{m}{k+1}](k+1) - t$$

đi theo cung

$$\big([\frac{m}{k+1}](k+1) - t, [\frac{m}{k+1}]k\big)$$

để đến đỉnh

$$[\frac{m}{k+1}]k \in M.$$

Cứ tiếp tục như vậy đấu thủ B chỉ có thể đạt được đỉnh ngoài nhân M, còn đấu thủ A lần lượt đạt được các đỉnh

$$[\frac{m}{k+1}](k+1), \big([\frac{m}{k+1}] - 1\big)(k+1), ...$$

Cuối cùng A đạt được đỉnh 0, tức là A bốc được vật cuối cùng nên thắng cuộc.

*b.Trường hợp bốc được vật cuối cùng thua cuộc*

*1)Xây dựng đồ thị xác định trò chơi:*

Cần xác định đỉnh và cung của đồ thị tương ứng với số lượng vật có thể có là $0, 1, 2, ..., i, i+1, ..., m-1, m$. Dùng ngay số lượng vật để ghi trên các điểm tương ứng.

i) Đối với mỗi đỉnh $x \geq k$ có cung đi tới từng đỉnh thuộc tập

$$D^+(x) = \{x-1, x-2, ..., x-k+1, x-k\}.$$

ii) Đối với mỗi đỉnh $y(1 \leq y < k)$ có cung đi tới từng đỉnh thuộc tập

$$D^+(y) = \{0, 1, 2, ..., y-1\}.$$

*2)Xác định nhân của đồ thị:*

Vì từng cặp đỉnh thuộc tập

$$N = \{1, k+2, 2(k+1)+1, ..., [\frac{m}{k+1}](k+1)+1\}$$

không kề nhau và mỗi đỉnh $i \notin N$ đều có cung đi tới đỉnh

$$[\frac{i}{k+1}](k+1)+1,$$

nên tập N là nhân của đồ thị con không chứa đỉnh 0.

*3) Thuật toán:*

Giả sử A là người được đi đầu. Khi đó A bốc

$$m - \big([\frac{m}{k+1}](k+1)-1\big)$$

vật, tức đi theo cung

$$\big(m, [\frac{m}{k+1}](k+1)+1\big)$$

để đến đỉnh

$$[\frac{m}{k+1}](k+1)+1 \in N.$$

Đến lượt mình, giả sử B bốc $t (1 \le t \le k)$ vật. Tiếp theo A bốc $k+1-t$ vật, tức xuất phát từ đỉnh

$$[\frac{m}{k+1}](k+1)+1-t$$

đi theo cung

$$\big([\frac{m}{k+1}](k+1)+1-t, \big([\frac{m}{k+1}]-1\big)(k+1)+1\big)$$

để đến đỉnh

$$\big([\frac{m}{k+1}]-1\big)(k+1)+1 \in N.$$

Cứ tiếp tục như vậy đấu thủ B chỉ có thể đạt được đỉnh ngoài nhân N, còn đấu thủ A lần lượt đạt được các đỉnh

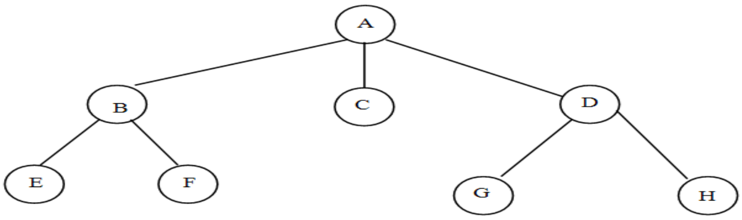
$$([\frac{m}{k+1}](k+1)+1-t, \big([\frac{m}{k+1}]-1\big)(k+1)+1, ...$$

Cuối cùng A đạt được đỉnh $1 \in N$, tức là sau khi đấu thủ A bốc lần cuối trên bàn còn đúng 1 vật. Khi đó, B phải bốc vật cuối cùng, nên thua cuộc.

## 1.8 Cây và bụi

### 1.8.1 Định nghĩa

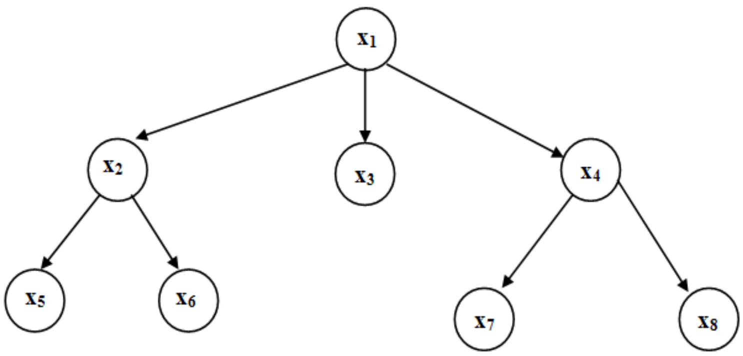
Một đồ thị vô hướng liên thông, không có chu trình và có ít nhất hai đỉnh được gọi là một cây (hình 1.16)




***Hình 1.16***

Đồ thị hữu hạn có hướng $G = (X, U)$ là một bụi gốc $x_1 \in X$, nếu nó có ít nhất hai đỉnh và thỏa mãn ba điều kiện sau:

1. Mỗi đỉnh khác $x_1$ là điểm cuối của một cung duy nhất.
2. Đỉnh $x_1$ không là điểm cuối của bất kỳ một cung nào.
3. Đồ thị $G = (X, U)$ không có vòng. (Hình 1.17)




***Hình 1.17***

### 1.8.2 Đặc điểm của cây và bụi

**Định lí 1.8.1.** *Giả sử $H$ là một đồ thị vô hướng với $n$ đỉnh $n > 1$. Để đặc trưng cho một cây thì sáu tính chất sau đây là tương đương:*

*1. $H$ liên thông và không có chu trình;*
*2. $H$ không có chu trình và có $n - 1$ cạnh;*
*3. $H$ liên thông và có $n - 1$ cạnh;*

*4. H không có chu trình và nếu thêm một cạnh nối giữa hai đỉnh bất kì không kề nhau thì đồ thị nhận được H' có một chu trình (và chỉ một mà thôi);*

*5. H liên thông và khi bớt một cạnh bất kì thì đồ thị mất tính liên thông;*

*6. Mọi cặp đỉnh của H đều được nối với nhau bằng một xích và chỉ một xích mà thôi.*

**Định lí 1.8.2.** *Một cây có ít nhất hai đỉnh treo.*

**Định lí 1.8.3.** *Mọi bụi khi bỏ định hướng các cạnh đều trở thành cây.*

# Chương 2

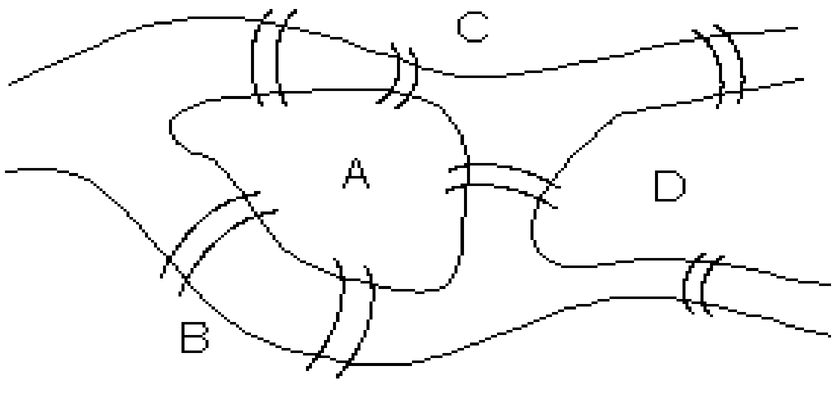
# Một số bài toán đồ thị cơ bản

## 2.1 Bài toán về đường đi

### 2.1.1 Đường đi Euler - Chu trình Euler.

**2.1.1.1. Bài toán mở đầu :**

Bài toán 7 cây cầu ở Königsberg: Thành phố Königsberg thuộc Phổ (bây giờ gọi là Kaliningrad thuộc Cộng hòa Liên bang Nga) được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel. Các vùng này gồm 2 vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa 2 nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ thứ XVIII, người ta đã xây 7 cây cầu nối các vùng lại với nhau như sơ đồ sau:




***Hình 2.1***

Vào chủ nhật, người dân ở đây thường đi bộ dọc theo các vùng trong thành phố. Họ tự hỏi "Liệu có thể xuất phát tại một địa điểm nào đó trong thành phố, đi qua tất cả 7 cây cầu, qua mỗi cây một lần, rồi trở về điểm xuất phát được không?"

#### 2.1.1.2. Định nghĩa

**1. Chu trình Euler (Đồ thị Euler)**

Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị liên thông. Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G được gọi là chu trình Euler. Đồ thị có chứa một chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler.

**2. Đường đi Euler**

Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị liên thông. Đường đi Euler trong G là đường đi đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị G.

#### 2.1.1.3. Chu trình và đường đi Euler trong đồ thị vô hướng

**1. Định lý về chu trình Euler**

Một đa đồ thị liên thông G =(V, E) có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

**2. Thuật toán Fleury tìm chu trình Euler**

Để tìm một chu trình Euler trong một đa đồ thị có tất cả các đỉnh đều bậc chẵn, ta có thể sử dụng thuật toán Fleury như sau:

Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của đồ thị G và tuân theo hai qui tắc sau:

- Qui tắc 1: Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì xóa cạnh đó đi, sau đó xóa đỉnh cô lập (nếu có).
- Qui tắc 2: Không bao giờ đi qua một cầu (cạnh duy nhất nối giữa hai thành phần liên thông), trừ khi không còn cách đi nào khác để di chuyển.

**3. Định lý về đường đi Euler**

Đa đồ thị liên thông $G = (V, E)$ có đường đi Euler, nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

**2.1.1.4. Chu trình và đường đi Euler đối với đồ thị có hướng**

**1. Định lý về chu trình Euler**

Đồ thị G = (V, E) có chứa một chu trình Euler khi và chỉ khi G là liên thông và mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

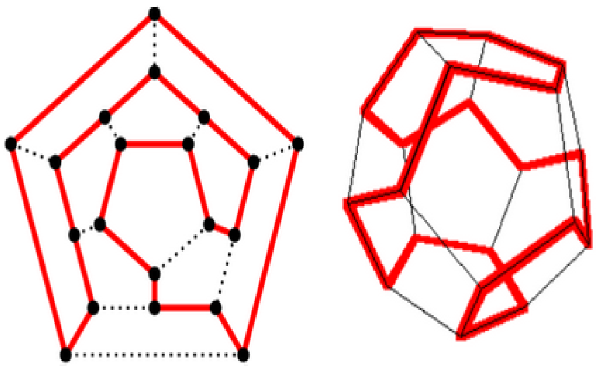
**2. Định lý về đường đi Euler**

Cho $G = (V, E)$ là một đa đồ thị. G có một đường đi Euler từ A đến B khi và chỉ khi G là liên thông và mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn, chỉ trừ A và B có bậc lẻ.

## 2.1.2 Đường đi Hamilton - Chu trình Hamilton.

**2.1.2.1. Trò chơi Hamilton.**

Năm 1857 W. R. Hamilton đưa ra trò chơi sau đây:
Trên mỗi đỉnh trong số 20 đỉnh của khối đa diện ngũ giác đều 12 mặt ghi tên một thành phố trên thế giới Hãy tìm cách đi bằng các cạnh của khối đa diện để qua tất cả các thành phố, mỗi thành phố đúng một lần.



***Hình 2.8***

Để có được đáp án cho trò chơi như hình 2.8 ta cần nghiên cứu lý thuyết về chu trình Hamilton.

**2.1.2.2. Định nghĩa.**

Đường đi trong đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là đường đi Hamilton nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của G và qua mỗi đỉnh đúng một lần.

Một chu trình sơ cấp đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị $G = (V, E)$ (đi qua mỗi đỉnh đúng một lần) được gọi là chu trình Hamilton. Đồ thị $G = (V, E)$ có chứa chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton.

#### 2.1.2.3. Điều kiện tồn tại chu trình Hamilton.

**1. Bổ đề 2.1.2.1.**

Đồ thị vô hướng n đỉnh liên thông ($n \geq 3$), thuần nhất bậc 2 có chu trình Hamilton.

**2. Bổ đề 2.1.2.2.**

Đồ thị vô hướng $G = (X, E)$ có chu trình Hamilton khi và chỉ khi nó có một đồ thị bộ phận liên thông và thuần nhất bậc 2.

**3. Định lý Rédei**

Trong đồ thị có hướng đầy đủ luôn luôn tồn tại đường Hamilton.

## 2.2 Bài toán tô màu đồ thị

### 2.2.1 Định nghĩa

Tô màu đỉnh của một đồ thị là phép gán các màu cho các đỉnh, sao cho hai đỉnh kề nhau bất kỳ có màu khác nhau.

Sắc số của đồ thị là số màu ít nhất cần dùng để tô trên các đỉnh của đồ thị, sao cho hai đỉnh kề nhau tùy ý được tô bằng hai màu khác nhau.

Sắc lớp là số màu ít nhất cần dùng để tô trên các cạnh của đồ thị, sao cho hai cạnh kề nhau (có đỉnh chung) tùy ý đều có màu khác nhau.

### 2.2.2 Một số tính chất

**Định lí 2.2.1.** *Một chu trình độ dài lẻ luôn có sắc số bằng 3.*

***Lớp đồ thị có chu trình tam giác cùng màu***

Để phục vụ cho việc giải quyết một số bài toán nào đó ta cần xét những dãy số đặc biệt và đưa ra các khẳng định thích hợp, chẳng hạn, để xây dựng những lớp đồ thị có chu trình tam giác cùng màu người ta đưa ra các dãy số nguyên dương:

$a_1 = 2, a_2 = 5, ..., a_{n+1} = (n + 1)a_n + 1$

$u_2 = 3, u_3 = 6, ..., u_{n+1} = (u_n - 1)n + 2$
và có định lý sau:

**Định lí 2.2.2.** *a. Một đồ thị đầy đủ và vô hướng với $a_n + 1$ đỉnh, các cạnh được tô bằng n màu luôn có chu trình tam giác cùng màu.*

*b. Một đồ thị đầy đủ vô hướng $u_{n+1}$ đỉnh, các cạnh được tô bằng n màu luôn có chu trình tam giác cùng màu.*

**Định lí 2.2.3.** *Đồ thị đầy đủ có $u_{n+1} - 1$ đỉnh $(n \geq 2)$ với n màu cạnh (các cạnh được tô bằng n màu), sao cho không có tam giác cùng màu nào, luôn luôn có 5 hình cạnh với các cạnh cùng màu và các đường chéo được tô bằng màu khác.*

**Định lí 2.2.4.** *Đồ thị đầy đủ gồm 6 đỉnh và được tô bằng không quá hai màu cạnh thì luôn có 2 chu trình tam giác cùng màu.*

**Định lí 2.2.5.** *Đồ thị đầy đủ G gồm n đỉnh $(n \geq 6)$ và được tô bằng không quá hai màu cạnh luôn có ít nhất $(n - 4)$ tam giác cùng màu.*

**Định lí 2.2.6.** *Đồ thị đầy đủ G gồm 9 đỉnh được tô bằng hai màu cạnh xanh, đỏ thì luôn có đồ thị con đầy đủ $K_3$ xanh hoặc đồ thị con đầy đủ $K_4$ đỏ (hoặc ngược lại nếu ta đổi hai màu cho nhau)*

**Định lí 2.2.7.** *Đồ thị đầy đủ $K_{14}$ gồm 14 đỉnh được tô bằng hai màu cạnh xanh, đỏ, thì luôn có tam giác xanh hoặc ngũ giác đỏ (hoặc ngược lại nếu ta đổi hai màu cho nhau.)*

**Định lí 2.2.8.** *Đồ thị 3 mảng $G(X, E)$ với lực lượng mỗi mảng đều bằng $n(n \geq 1)$. Mỗi đỉnh được nối với từng đỉnh thuộc hai mảng còn lại bằng các cạnh tô màu xanh hoặc màu đỏ, sao cho số cạnh đỏ xuất phát từ mỗi đỉnh bằng đúng $(n+1)$. Khi đó đồ thị $G(X, E)$ có chu trình tam giác đỏ.*

### 2.2.3 Thuật toán tô màu đỉnh.

1, Lập danh sách các đỉnh đồ thị theo thứ tự bậc giảm dần.
Đặt $i := 1$

2, Tô màu i cho đỉnh đầu tiên trong danh sách. Duyệt lần lượt các đỉnh tiếp theo và tô màu i cho đỉnh không kề đỉnh đã được tô màu i.

3, Nếu tất cả các đỉnh đã được tô màu thì kết thúc: Đồ thị đã được tô bằng i màu. Ngược lại sang bước 4.

4, Loại khỏi tập đỉnh các đỉnh đã tô màu, đặt $i := i + 1$, và quay lại bước 2.

# Chương 3

# Ứng dụng lý thuyết đồ thị vào giải toán phổ thông.

## 3.1 Quy trình giải bài toán bằng phương pháp đồ thị.

Để giải bài toán T bằng phương pháp đồ thị ta cần thực hiện lần lượt hai bước sau:

### 3.1.1 Xây dựng đồ thị G mô tả các quan hệ.

• ***Đỉnh:*** Lấy các điểm trên mặt phẳng hoặc trong không gian tương ứng với các đối tượng đã cho trong bài toán. Dùng ngay các ký hiệu đối tượng để ghi trên điểm tương ứng.

• ***Cạnh:*** Hai đỉnh $x, y$ tùy ý được nối với nhau bằng một cạnh (cung) với "đặc điểm t", khi và chỉ khi các đối tượng $x, y$ có quan hệ "t" với nhau. Khi đó bài toán T đã được chuyển về bài toán D trên đồ thị.

### 3.1.2 Dựa vào các kết quả của lý thuyết đồ thị hoặc lý luận trực tiếp suy ra đáp án của bài toán D.

Nếu đáp án của bài toán D còn dưới dạng "ngôn ngữ đồ thị", thì căn cứ vào phép đặt tương ứng khi xây dựng đồ thị mà diễn đạt thành đáp án bằng ngôn ngữ thông thường (tức là đáp án của bài toán T).

## 3.2 Bài toán về đỉnh - cạnh của đồ thị.

**Bài toán 3.2.1.** *(Olympic Toán Mỹ 1982) Sống trong một ký túc xá có 1982 người. Cứ bốn người trong đó bao giờ cũng chọn được ít nhất một người quen với cả ba người còn lại. Có ít nhất bao nhiêu người mà mỗi người quen với tất cả những người trong ký túc xá.*

**Bài toán 3.2.2.** *Trường THPT Tân Dân có 1101 học sinh. Biết rằng mỗi học sinh quen ít nhất 1001 học sinh. Chứng minh với mỗi học sinh của trường luôn tìm được 11 học sinh khác để tạo thành một nhóm gồm 12 học sinh, sao cho hai học sinh bất kỳ trong nhóm đều quen nhau.*

**Bài toán 3.2.3.** *Liệu có thể có nhóm 9 người, mà trong đó mỗi người chỉ quen biết đúng 5 người khác được không?*

**Bài toán 3.2.4.** *([4]Lý thuyết đồ thị và các bài toán không mẫu mực) Chứng minh rằng: Nếu trong một tập số nguyên dương tùy ý M gồm ít nhất 3 số, mà có đúng 2 số có số số đồng dư bằng nhau, thì các số này không thể đồng thời không đồng dư với một số nào hoặc đồng thời đồng dư với tất cả các số còn lại thuộc tập M.*

**Bài toán 3.2.5.** *Trong hội thi đấu cờ vua của khối các trường trung học phổ thông thuộc huyện Phú Xuyên có 10 em học sinh đại diện cho các trường tham gia thi đấu. Thể lệ cuộc thi là mỗi em phải đấu một trận với các em khác. Chứng minh rằng bất kỳ lúc nào cũng có 2 em đã đấu được một số trận như nhau.*

**Bài toán 3.2.6.** *Cho một khối đa diện lồi $A_1, A_2, ..., A_n$. Gọi $m_1, m_2, ..., m_n$ lần lượt là số cạnh xuất phát từ các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ và $c$ là số cạnh của khối đa diện. Khi đó ta có $m_1 + m_2 + ... + m_n = 2c$.*

## 3.3 Bài toán về xích, chu trình, đường, vòng và tính liên thông của đồ thị.

**Bài toán 3.3.1.** *([4]Lý thuyết đồ thị và các bài toán không mẫu mực) Một thôn có ít nhất 4 gia đình, mỗi gia đình thân với ít nhất 3 gia đình khác. Chứng minh rằng có thể xếp một số chẵn gia đình làm nhà xung quanh một cái hồ để mỗi gia đình sống giữa hai gia đình mà họ thân.*

**Bài toán 3.3.2.** *([3]Lý thuyết đồ thị và ứng dụng) Một tập số nguyên dương M gồm ít nhất ba số. Mỗi số đều có ước chung với ít nhất hai số khác. Chứng minh rằng luôn luôn có thể ghi một nhóm gồm ít nhất ba số thuộc tập hợp lên một vòng tròn, để mỗi số đều đứng giữa hai số mà nó có ước chung.*

**Bài toán 3.3.3.** *(IMO 1991) Giả sử G là một đồ thị liên thông có k cạnh. Chứng minh rằng: Có thể đánh nhãn được các cạnh 1, 2, 3,...,k theo cách mà mỗi đỉnh thuộc vào hai hoặc nhiều hơn hai cạnh, ước số chung lớn nhất của các số nguyên đánh nhãn các cạnh này là 1.*

**Bài toán 3.3.4.** *([3]Lý thuyết đồ thị và ứng dụng) Trên bàn cờ 3X3 ô vuông. Chứng minh rằng con Mã không thể đi qua tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần, rồi trở về ô xuất phát.*

**Bài toán 3.3.5.** *([1]Graph và giải toán phổ thông)*
*Lớp 10A gồm 40 em học sinh.Khi về nghỉ hè, mỗi học sinh đã trao đổi địa chỉ với ít nhất một nửa số bạn trong lớp. Chứng minh rằng mỗi em học sinh lớp 10A đều có thể báo tin (một cách trực tiếp hoặc gián tiếp) cho tất cả các bạn trong lớp.*

**Bài toán 3.3.6.** *([1]Graph và giải toán phổ thông)*
*Một cơ quan cần tuyển ba người để lập thành một nhóm có đủ năng lực biên dịch các tài liệu từ 6 thứ tiếng: Anh, Pháp, Nga, Đức, Trung Quốc và Bồ Đào Nha sang tiếng Việt. Có 7 người đến dự tuyển, trong đó mỗi người đều biết 2 và chỉ 2 trong 6 thứ tiếng đó và bất cứ hai người nào cũng cùng biết nhiều nhất một thứ tiếng chung trong 6 thứ tiếng đó. Biết rằng thứ tiếng nào cũng có ít nhất hai người biết. Hỏi có thể xảy ra trường hợp không thể tuyển chọn được như yêu cầu đã nêu không? Tại sao?.*

## 3.4 Bài toán về tô màu đồ thị.

**Bài toán 3.4.1.** *(IMO 1964) Mười bảy nhà bác học viết thư cho nhau. Mỗi người đều viết thư cho tất cả người khác. Các thư chỉ trao đổi về 3 đề tài. Từng cặp nhà bác học chỉ viết thư trao đổi về cùng một đề tài. Chứng minh rằng có ít nhất 3 nhà bác học viết thư cho nhau trao đổi về cùng một vấn đề.*

**Bài toán 3.4.2.** *(Thi Olympic Toán 1978, Bungary) Một nhóm gồm 5 thành viên, trong đó cứ ba người thì có 2 người quen nhau và 2 người không quen nhau. Chứng minh rằng có thể xếp họ ngồi xung quanh một bàn tròn để mỗi người đều ngồi giữa hai người mà thành viên đó quen nhau.*

**Bài toán 3.4.3.** *([4]Lý thuyết đồ thị và các bài toán không mẫu mực) Có 5 thành phố, mà từ mỗi thành phố đều có đường bay đến một số thành phố khác. Biết rằng cứ ba thành phố bất kỳ trong 5 thành phố này đều có hai thành phố có đường bay trực tiếp đến nhau và hai thành phố chưa có đường bay trực tiếp. Chứng minh rằng:*

*1. Mỗi thành phố có đường bay trực tiếp đến hai và chỉ hai thành phố khác.*

*2. Từ mỗi thành phố có thể bay đến các thành phố khác mỗi nơi một lần rồi quay về được nơi xuất phát.*

**Bài toán 3.4.4.** *(Thi học sinh giỏi Bungari 1977) Có ba trường, mỗi trường có $n$ học sinh. Mỗi học sinh có $n + 1$ bạn quen ở hai trường khác. Chứng minh rằng có thể chọn ở mỗi trường một học sinh để có 3 bạn học sinh từng đôi một quen nhau.*

**Bài toán 3.4.5.** *([3]Lý thuyết đồ thị và ứng dụng) Chứng minh rằng trong 20 số tự nhiên tùy ý ta luôn chọn được 16 bộ, mỗi bộ có 3 số, sao cho các số trong cùng một bộ đôi một có ước chung khác 1 hoặc đôi một nguyên tố cùng nhau.*

**Bài toán 3.4.6.** *(Vô địch nước Anh 1980) Trong một căn phòng có 10 người, biết rằng giữa 3 người bất kỳ có hai người quen nhau. Chứng minh rằng có thể tìm được 4 người mà 2 người bất kỳ trong số đó đều quen nhau. Kết quả trên còn đúng không khi số người trong phòng là 9 người?*

**Bài toán 3.4.7.** *(IMO 1992) Cho 9 điểm trong không gian, trong đó không có 4 điểm nào nằm trên cùng một mặt phẳng. Tất cả những điểm này được nối với nhau từng cặp bằng đoạn thẳng. Mỗi đoạn thẳng được tô màu xanh hoặc đỏ hoặc không tô màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của $n$, sao cho với mọi cách tô màu $n$ đoạn thẳng tùy ý ta đều tìm được một tam giác có các cạnh cùng màu.*

**Bài toán 3.4.8.** *Một quốc gia có 14 sân bay. Biết rằng cứ 3 sân bay bất kỳ thì có ít nhất 2 sân bay có đường bay trực tiếp. Chứng minh có 5 sân bay mà hai sân bay bất kỳ trong số này có đường nối trực tiếp.*

**Bài toán 3.4.9.** *Một sở thú nhập về 6 loại thú khác nhau, mà ta ký hiệu là A, B, C, D, E, F. Một số loại trong đó có thể sống cùng trong một chuồng. Bảng sau đây cho biết những loài nào không thể sống chung với nhau:*

| **Loại** | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Không thể sống với** | B, C | A, C, E | A, B, D, E | C, F | B, C, F | D, E |

*Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chuồng để có thể nhốt tất cả các loại thú đó?*

**Bài toán 3.4.10.** *Trường trung học phổ thông ở một huyện, trong một học kỳ của năm học nhà trường tổ chức cho học sinh lớp 12 (thí sinh tự do) theo học một trong bảy lớp sau:*

*Lớp 1 sẽ học các môn: Toán, Tiếng Anh, Sinh, Hóa.*
*Lớp 2 sẽ học các môn: Toán, Tiếng Anh, Tin, Địa.*
*Lớp 3 sẽ học các môn: Sinh, GDCD, Lý, Địa.*
*Lớp 4 sẽ học các môn: Văn, Sinh, Tin, Sử.*
*Lớp 5 sẽ học các môn: Tiếng Anh, GDCD, Tin, Sử.*
*Lớp 6 sẽ học các môn: Văn, Hóa, GDCD, Tin.*
*Lớp 7 sẽ học các môn: Lý, Sử, Địa, GDCD.*

*Cuối kỳ nhà trường tổ chức cho các lớp thi các môn đã học. Hãy sắp xếp một lịch thi để học sinh của các lớp đều có thể tham gia thi các môn mà họ đã học, sao cho số lần tổ chức thi là ít nhất.*

## 3.5 Bài toán liên quan đến số ổn định trong, số ổn định ngoài.

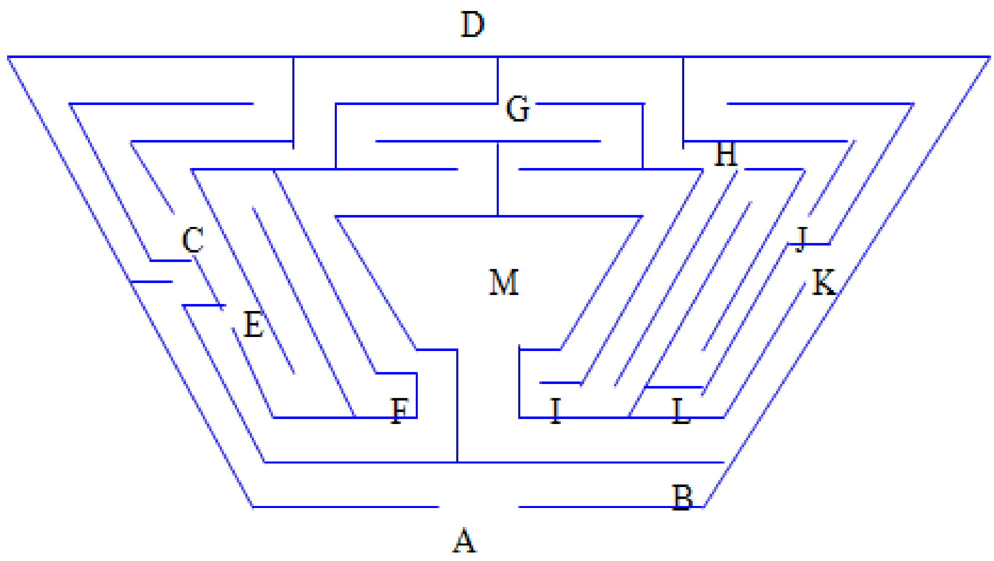
**Bài toán 3.5.1.** *([4]Lý thuyết đồ thị với các bài toán không mẫu mực) Trên bàn cờ 8X8 có thể đặt tối đa bao nhiêu con mã để chúng không ăn lẫn nhau.*

**Bài toán 3.5.2.** *([4]Lý thuyết đồ thị với các bài toán không mẫu mực) Trên bàn cờ 8X8 có thể đặt tối thiểu bao nhiêu con mã để chúng khống chế được tất cả các ô còn lại của bàn cờ.*

## 3.6 Bài toán liên quan đến đường đi.

### 3.6.1 Bài toán tìm đường đi trong mê cung

**Bài toán 3.6.1.** *([1]Graph và giải toán phổ thông)*
*Cho mê cung như hình vẽ 3.13a.Tìm đường đi từ vị trí A (cổng) đến vị trí M.*




***Hình 3.13a***

**Bài toán 3.6.2.** ***Bài toán ba ông chồng ghen***
*Có ba cặp vợ chồng qua sông bằng 1 thuyền nhỏ. Mỗi lần thuyền chở được nhiều nhất 2 người và ai cũng biết bơi thuyền. Các ông chồng mắc bệnh ghen nặng nên không cho vợ đứng với người đàn ông khác khi không có mình. Hãy tìm phương án chở tất cả sang sông.*

### 3.6.2 Bài toán liên quan đến đường và chu trình Euler

### 3.6.3 Bài toán liên quan đến đường và chu trình Hamilton

**Bài toán 3.6.3.** *([1]Graph và giải toán phổ thông)*
*Có 5 đội bóng chuyền thi đấu với nhau để tranh giải cúp quốc gia. Biết rằng hai đội chỉ đấu với nhau đúng một trận và mỗi đội phải đấu với 4 đội khác, đồng thời không có trận hòa.*

*Chứng tỏ rằng căn cứ vào kết quả thi đấu có thể xếp đội trưởng các đội đứng theo một hàng dọc để đội đứng sau thắng đội đứng ngay trước.*

**Bài toán 3.6.4.** *([4]Lý thuyết đồ thị và các bài toán không mẫu mực)*
*Một nước có 10 thành phố. Hãy thiết lập một mạng cầu hàng không (bằng đồ thị) sao cho:*

*1. Mỗi thành phố có cầu hàng không nối trực tiếp với đúng 3 thành phố khác;*

*2. Từ mỗi thành phố có đường hàng không đi tới một thành phố tùy ý khác và trong hành trình đi tới đích có thể đi qua từng thành phố đúng một lần.*

## 3.7 Bài toán liên quan đến cây.

**Bài toán 3.7.1.** *([4]Lý thuyết đồ thị và các bài toán không mẫu mực)*
*Tại Euro 92, bốn đội Đức, Đan Mạch, Hà Lan, Thụy Điển vào bán kết. Có mấy dự đoán xếp hạng như sau:*

*a) Đan Mạch vô địch, Thụy Điển nhì.*

*b) Đan Mạch nhì, Hà Lan ba.*

*c) Pháp nhì, Hà Lan tư.*

*Kết quả: Mỗi dự đoán đúng về một đội. Hãy cho biết kết quả xếp hạng của các đội.*

**Bài toán 3.7.2.** *Minh và Châu thi đấu cầu lông với nhau. Hai bạn chơi 5 ván, bạn nào thắng 3 ván trước sẽ kết thúc cuộc thi và giành chiến thắng. Cuộc thi đấu có thể diễn ra theo bao nhiêu cách khác nhau?*

**Bài toán 3.7.3.** *([1]Graph và giải toán phổ thông)*
*Hãy tìm tất cả các ước số của 126.*

# KẾT LUẬN

Trong luận văn này, tác giả đã tập trung vào việc nghiên cứu lý thuyết đồ thị và vận dụng các kết quả của nó để giải quyết các bài toán phổ thông trung học và đã đạt được các kết quả sau:

1. Nhằm mục đích tổng quan về một số vấn đề cơ bản nhất của lý thuyết đồ thị: Trình bày các khái niệm, định nghĩa cơ bản về lý thuyết đồ thị, các định lý, tính chất được áp dụng thiết thực và hiệu quả để giải các bài toán sơ cấp.

2. Làm nổi bật ưu thế của lý thuyết đồ thị trong việc giải một số bài toán sơ cấp: Nêu ra được một số bài toán liên quan đến đỉnh, cạnh, tô màu, chu trình, đường đi của đồ thị. Các bài toán đó được chứng minh một cách cụ thể và được vận dụng có hiệu quả trong việc giải các bài toán sơ cấp liên quan.

3. Hệ thống và phân loại một số lớp các bài toán trong chương trình toán phổ thông trung học có thể giải bằng cách ứng dụng hiệu quả lý thuyết đồ thị. Bên cạnh những bài toán dành cho học sinh lớp chuyên, lớp chọn, tác giả còn đưa ra những bài toán để giảng dạy cho học sinh phổ thông đại trà.

Tuy nhiên, với khả năng nghiên cứu khoa học còn hạn chế, nội dung của đề tài là rất mới đối với tác giả, cho nên dù cố gắng rất nhiều nhưng vẫn còn có những hạn chế. Tác giả mong muốn nhận được sự quan tâm chỉ dẫn của quý thầy cô và sự đóng góp ý kiến của bạn đọc để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

**Tác giả xin chân thành cảm ơn!**

# Tài liệu tham khảo

[1] Hoàng Chúng, 1992, *Graph và giải toán phổ thông* ,NXB Giáo Dục

[2] Vũ Đình Hòa, 2008, *Giáo trình lý thuyết đồ thị*, NXB đại học sư phạm.

[3] Đặng Huy Ruận, 2000, *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng,* NXB khoa học và kĩ thuật.

[4] Đặng Huy Ruận, 2003, *Lý thuyết đồ thị và các bài toán không mẫu mực.*

[5] Đặng Huy Ruận, 2003, *Trò chơi và đồ thị*, NXB khoa học và kĩ thuật.

[6] Đặng Huy Ruận, 2002, *Bảy phương pháp giải các bài toán logic*, NXB khoa học và kĩ thuật.

[7] Vũ Dương Thụy (Chủ biên), 2001, *40 năm Olympic toán học quốc tế (1959-2000),* NXB Giáo dục

[8] Một số luận văn Thạc sĩ về toán logic và ứng dụng thuộc chuyên ngành "Phương pháp toán sơ cấp".