ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN-CƠ-TIN HỌC

– – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ QUỲNH

VỀ PHỨC KOSZUL

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ
Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Giảng viên hướng dẫn: TS. Nguyễn Phụ Hoàng Lân

HÀ NỘI- 2015

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Các phức và đồng điều của phức

1.1.1 Các phức

Định nghĩa 1.1. Một dãy các môđun và các đồng cấu

$$M_\bullet : \cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \to \dots \tag{1.1}$$

được gọi là *một phức* nếu $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Tương tự, một dãy các môđun và các đồng cấu

$$M^\bullet = \cdots \to M^{n-1} \xrightarrow{\partial^{n-1}} M^n \xrightarrow{\partial^n} M^{n+1} \to \dots, \tag{1.2}$$

được gọi là *một đối phức* nếu $\partial^n \partial^{n-1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Một phức được gọi là *khớp ở vị trí thứ n* nếu $\operatorname{Ker} \partial_n = \operatorname{Im} \partial_{n+1}$. Một phức được gọi là *khớp* nếu nó khớp tại mọi vị trí.

Lưu ý rằng, một phức (khớp) cũng có thể hữu hạn, đó là khi dãy (1.1) hữu hạn.

Định nghĩa 1.2. Một dãy khớp với 5 môđun có dạng

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$$

được gọi là *một dãy khớp ngắn.*

Nhận xét 1.3. Mọi dãy khớp dài $\cdots \to M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \to \dots$ đều có thể phân tích thành các dãy khớp ngắn

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 0 & \longrightarrow & \ker \partial_n & \longrightarrow & M_n & \longrightarrow & \operatorname{im} \partial_n \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \| & & & & \\
0 & \longrightarrow & \ker \partial_{n+1} & \longrightarrow & M_{n+1} & \longrightarrow & \operatorname{im} \partial_{n+1} & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

Định nghĩa 1.4. Một *đồng cấu giữa hai phức* $M_\bullet$ và $M'_\bullet$ là một họ các đồng cấu $f_\bullet := \{f_n : M_n \to M'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & M_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & M_n & \xrightarrow{\partial_n} & M_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\dots & \xrightarrow{\partial'_{n+2}} & M'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & M'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & M'_{n-1} & \xrightarrow{\partial'_{n-1}} & \dots
\end{array}$$

tức là $f_{n-1} \circ \partial_n = \partial'_n \circ f_n, \forall n$.
Ta kí hiệu $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$.

1.1.2 Đồng điều của phức

Định nghĩa 1.5. Môđun thương $H_n(M_\bullet) := \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$ được gọi là *môđun đồng điều thứ n* của phức $M_\bullet$. Một cách tương tự, môđun thương $H^n(M^\bullet) := \ker \partial^n / \operatorname{im} \partial^{n-1}$ được gọi là *môđun đối đồng điều thứ n* của đối phức $M^\bullet$.

Mệnh đề 1.6. *Cho một đồng cấu $f_\bullet$ giữa hai phức $M_\bullet$ và $M'_\bullet$*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & M_n & \xrightarrow{\partial_n} & M_{n-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & \\
\dots & \longrightarrow & M'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & M'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & M'_{n-1} & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Khi đó với mỗi n sẽ có một đồng cấu $(f_*)_n : H_n(M_\bullet) \to H_n(M'_\bullet)$ được cảm sinh bởi f_n như sau

$$(f_*)_n([m]) = [f_n(m)], \forall m \in \ker \partial_n.$$

Định nghĩa 1.7. Cho các phức $M_\bullet, M'_\bullet, M''_\bullet$ và các đồng cấu $f_\bullet : M'_\bullet \to M_\bullet$, $g_\bullet : M_\bullet \to M''_\bullet$. Nếu với mỗi n dãy

$$0 \to M'_n \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{g_n} M''_n \to 0$$

là một dãy khớp ngắn, thì ta gọi dãy

$$0 \to M'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} M''_\bullet \to 0$$

là *một dãy khớp ngắn của các phức* $M'_\bullet, M_\bullet, M''_\bullet$.

Định lý 1.8. *Cho một dãy khớp ngắn của các phức*

$$0 \to M'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} M''_\bullet \to 0$$

Dãy này sẽ cảm sinh ra một dãy khớp dài trên các đồng điều

$$\begin{aligned} \cdots \to H_n(M'_\bullet) \xrightarrow{(f_*)_n} H_n(M_\bullet) \xrightarrow{(g_*)_n} H_n(M''_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(M'_\bullet) \\ \xrightarrow{(f_*)_{n-1}} H_{n-1}(M_\bullet) \xrightarrow{(g_*)_{n-1}} H_{n-1}(M''_\bullet) \xrightarrow{\delta_{n-1}} H_{n-2}(M'_\bullet) \to \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Các đồng cấu $\delta_n : H_n(M''_\bullet) \to H_{n-1}(M'_\bullet)$ được gọi là các đồng cấu nối.

1.1.3 Tích tenxơ của các phức

Cho $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ và $(K_\bullet, \lambda_\bullet)$ là hai phức. Ta có thể tạo ra tích tenxơ của hai phức $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ và $(K_\bullet, \lambda_\bullet)$, kí hiệu $C_\bullet \otimes_R K_\bullet$, theo cách sau: $(C_\bullet \otimes_R K_\bullet)_n := \sum_i C_i \otimes K_{n-i}$, và đồng cấu $g_n : (C_\bullet \otimes_R K_\bullet)_n \to (C_\bullet \otimes_R K_\bullet)_{n-1}$ được xác định trên từng thành phần $C_i \otimes K_{n-i}$ là $\partial_i \otimes id_{K_{n-i}} + (-1)^i id_{C_i} \otimes \lambda_{n-i}$.

1.2 Các dãy giải và các môđun mở rộng

1.2.1 Các dãy giải

Định nghĩa 1.9. Một *dãy giải của một môđun M* là một phức

$$M_\bullet : \ldots \to M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \to 0, \quad (1.4)$$

với $H_i(M_\bullet) = 0, \forall i > 0$ và $H_0(M_\bullet) = M$. Hơn nữa, nếu tồn tại $n \geq 0$ sao cho $M_n \neq 0$ và $M_k = 0, \forall k > n$ thì dãy giải được gọi là có độ dài bằng n.

Nhận xét 1.10. Đôi khi, một dãy giải của M còn được viết dưới dạng

$$\ldots \to M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \to M \to 0.$$

Khi đó phức trên là một dãy khớp.

Định nghĩa 1.11. Dãy giải (1.4) được gọi là một *dãy giải xạ ảnh (tự do) của M* nếu M_i là môđun xạ ảnh (tự do) với mọi i.

Mệnh đề 1.12. *Mọi môđun M đều có một dãy giải tự do.*

Định nghĩa 1.13. Một *dãy giải nội xạ* của môđun M là một phức các môđun nội xạ

$$0 \to Q_0 \to Q_1 \to Q_2 \to \ldots,$$

với $H^i(Q_\bullet) = 0, \forall i > 0$ và $H^0(Q_\bullet) = M$. Đôi khi, ta còn viết dãy giải nội xạ của M dưới dạng

$$0 \to M \to Q_0 \to Q_1 \to Q_2 \to \dots,$$

khi đó phức trên là một dãy khớp.

Mệnh đề 1.14. *Mỗi môđun M đều có một dãy giải nội xạ.*

1.2.2 Các môđun mở rộng

Cho M, N là các môđun và $P_\bullet$ là một dãy giải xạ ảnh của M

$$\dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0.$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}_R(\_, N)$ lên dãy giải trên, ta được phức đối đồng điều $\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N)$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P_0, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_1, N) \to \mathrm{Hom}_R(P_2, N) \to \ \dots \qquad (1.5)$$

Định nghĩa 1.15. Ta định nghĩa $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(P_\bullet, N))$.

Mệnh đề 1.16. *Ta có* $\mathrm{Ext}^0_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N), \forall M, N$.

Nhận xét 1.17. Môđun $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ có thể được xây dựng theo cách khác như sau. Xuất phát từ một dãy giải nội xạ của N

$$0 \to Q_0 \to Q_1 \to Q_2 \to \dots.$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}_R(M, \_)$ lên dãy giải đó ta được phức đối đồng điều $\mathrm{Hom}_R(M, Q_\bullet)$

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, Q_0) \to \mathrm{Hom}_R(M, Q_1) \to \mathrm{Hom}_R(M, Q_2) \to \ \dots \qquad (1.6)$$

Ta định nghĩa $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(M, Q_\bullet))$.

Người ta chứng minh được rằng, hai cách xây dựng môđun $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ như trên là tương đương.

Định lý 1.18. *Cho M là một môđun tùy ý, và một dãy khớp ngắn của các môđun: $0 \to A \to B \to C \to 0$. Khi đó, ta có dãy khớp dài như sau*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C) &\xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Ext}^1_R(M, A) \\ \to \mathrm{Ext}^1_R(M, B) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, C) &\xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Ext}^2_R(M, A) \to \dots \end{aligned}$$

1.3 Đại số tenxơ, đại số đối xứng, đại số ngoài

1.3.1 Đại số tenxơ

Cho M là một môđun. Với mỗi số nguyên dương k, ta đặt

$$\mathcal{T}^k(M) = M \otimes M \otimes \cdots \otimes M \ (k \text{ lần}),$$

và quy ước $\mathcal{T}^0(M) = R$. Các phần tử của $\mathcal{T}^k(M)$ được gọi là các *k-tenxơ* trên M.

Đặt $\mathcal{T}(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{T}^k(M)$ là tổng trực tiếp của các R-môđun. Mỗi phần tử của $\mathcal{T}(M)$ là một tổ hợp tuyến tính hữu hạn của các k-tenxơ. Ta sẽ trang bị cho $\mathcal{T}(M)$ một phép nhân để nó trở thành một R-đại số.

Vì tích tenxơ có tính chất kết hợp, ta có các đẳng cấu tuyến tính tự nhiên sau

$$\mu_{ij} : \mathcal{T}^i(M) \otimes \mathcal{T}^j(M) \to \mathcal{T}^{i+j}(M).$$

Các đẳng cấu trên cảm sinh một đẳng cấu chính tắc

$$\mu : \mathcal{T}(M) \otimes \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M).$$

Đẳng cấu μ xác định một phép nhân trên $\mathcal{T}(M)$ như sau

$$\mathcal{T}(M) \times \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(M)$$

$$(\alpha, \beta) \mapsto \mu(\alpha \otimes \beta).$$

Ta có thể chứng minh được R-môđun $\mathcal{T}(M)$ với phép nhân trên là một R-đại số.

Định nghĩa 1.19. R-đại số $\mathcal{T}(M)$ được gọi là *đại số tenxơ* của M.

Đặc biệt, khi M là một môđun tự do thì ta có thể mô tả tường minh $\mathcal{T}(M)$ như sau.

Mệnh đề 1.20. *Giả sử M là một môđun tự do với cơ sở $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Khi đó, $\mathcal{T}^k(M)$ như là một R-môđun có một cơ sở gồm các k-tenxơ dạng*

$$(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} : 1 \le i_1, i_2, \ldots, i_k \le n),$$

và $\mathcal{T}(M)$ có một cơ sở dạng

$$(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} : 0 \leq k < \infty, 1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n).$$

Do phép nhân trong $\mathcal{T}(M)$ thỏa mãn $\mathcal{T}^i(M)\mathcal{T}^j(M) \subseteq \mathcal{T}^{i+j}(M)$, nên $\mathcal{T}(M)$ là một R-đại số phân bậc.

Định lý 1.21. *Cho M là một môđun và $\mathcal{T}(M)$ là đại số tenxơ của nó. Nếu A là một R-đại số bất kỳ và $\varphi : M \to A$ là một đồng cấu R-môđun, thì tồn tại duy nhất một đồng cấu R-đại số $\psi : \mathcal{T}(M) \to A$ sao cho $\psi\big|_M = \varphi$.*

Giả sử $f : M \to N$ là một đồng cấu R-môđun. Khi đó, f cảm sinh một đồng cấu R-đại số $\mathcal{T}(f) : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(N)$. Đồng cấu này là tổng trực tiếp của các ánh xạ thành phần

$\mathcal{T}^0(f) = id_R$ và

$\mathcal{T}^k(f) : \mathcal{T}^k(M) \to \mathcal{T}^k(N),\ (0 < k < \infty),$

$\mathcal{T}^k(f)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_k) = f(m_1) \otimes \cdots \otimes f(m_k), \forall m_1, \ldots, m_k \in M.$

Mệnh đề 1.22. *Cho hai dãy khớp các môđun*

$$E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E'' \to 0,$$
$$F' \xrightarrow{s} F \xrightarrow{t} F'' \to 0.$$

Khi đó đồng cấu $v \otimes t : E \otimes F \to E'' \otimes F''$ là một toàn cấu và hạt nhân của nó bằng

$$\mathrm{Im}(u \otimes 1_F) + \mathrm{Im}(1_E \otimes s)$$

Mệnh đề 1.23. *Cho M và N là các môđun. Nếu $f : M \to N$ là một toàn cấu thì đồng cấu $\mathcal{T}(f) : \mathcal{T}(M) \to \mathcal{T}(N)$ cũng là một toàn cấu và hạt nhân của nó là iđêan của $\mathcal{T}(M)$ được sinh bởi $P := \ker f \subset M \subset \mathcal{T}(M)$.*

1.3.2 Đại số đối xứng

Ta gọi $\mathcal{C}(M)$ là iđêan của $\mathcal{T}(M)$ sinh bởi các phần tử có dạng

$$m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1, \forall m_1, m_2 \in M.$$

Định nghĩa 1.24. *Đại số đối xứng* của một môđun M, kí hiệu $\mathcal{S}(M)$, là thương của đại số tenxơ $\mathcal{T}(M)$ cho iđêan $\mathcal{C}(M)$.

Đại số tenxơ $\mathcal{T}(M)$ được sinh bởi $R = \mathcal{T}^0(M)$ và $M = \mathcal{T}^1(M)$. Các phần tử của M giao hoán với nhau trong đại số thương $\mathcal{S}(M)$. Do đó, đại số đối xứng $\mathcal{S}(M)$ là một đại số giao hoán. Hơn nữa, do iđêan $\mathcal{C}(M)$ sinh bởi các phần tử thuần nhất nên $\mathcal{C}(M)$ là một iđêan phân bậc. Vậy $\mathcal{S}(M)$ là một R-đại số giao hoán phân bậc với các thành phần thuần nhất bậc k của nó là $\mathcal{S}^k(M) = \mathcal{T}^k(M)/\mathcal{C}(M)_k$. R-môđun $\mathcal{S}^k(M)$ được gọi là *lũy thừa đối xứng cấp k* của M.

Để thuận tiện, ta kí hiệu $M^{(k)} := M \times \cdots \times M$ (k lần).

Định lý 1.25. *Cho M là một môđun và $\mathcal{S}(M)$ là đại số đối xứng của nó.*

(1) *Lũy thừa đối xứng cấp k của M, $\mathcal{S}^k(M)$, bằng*

$$\mathcal{S}^k(M) = \frac{\mathcal{T}^k(M)}{(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_k - m_{\sigma(1)} \otimes m_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes m_{\sigma(k)})},$$

với $\forall m_i \in M$ và mọi phép hoán vị σ trong nhóm đối xứng S_k.

(2) *Nếu $\varphi : M^{(k)} \to N$ là một ánh xạ đa tuyến tính đối xứng, thì tồn tại duy nhất một đồng cấu $\psi : \mathcal{S}^k(M) \to N$ sao cho $\varphi = \psi \circ i$, trong đó ánh xạ $i : M^{(k)} \to \mathcal{S}^k(M), (m_1, \dots, m_k) \mapsto m_1 \otimes \cdots \otimes m_k \mod \mathcal{C}(M)$.*

(3) *Nếu A là một R-đại số giao hoán và $\varphi : M \to A$ là một đồng cấu R-môđun, thì tồn tại duy nhất một đồng cấu R-đại số $\psi : \mathcal{S}(M) \to A$ sao cho $\psi\big|_M = \varphi$.*

Hệ quả 1.26. *Cho M là một môđun tự do có hạng n. Khi đó $\mathcal{S}(M)$ đẳng cấu (như một R-đại số phân bậc) với vành đa thức n biến trên R.*

Giả sử $f : M \to N$ là một đồng cấu R-môđun. Khi đó, f cảm sinh một đồng cấu R-đại số $\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{S}(N)$. Đồng cấu này là tổng trực tiếp của các ánh xạ thành phần

$$\mathcal{S}^0(f) = id_R \text{ và}$$
$$\mathcal{S}^k(f) : \mathcal{S}^k(M) \to \mathcal{S}^k(N),\ (0 \le k < \infty),$$
$$\mathcal{S}^k(f)(m_1 \dots m_k) = f(m_1) \dots f(m_k), \forall m_1, \dots, m_k \in M.$$

Mệnh đề 1.27. *Cho M, N là các môđun. Nếu $f : M \to N$ là một toàn cấu thì $\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(M) \to \mathcal{S}(N)$ cũng là một toàn cấu và hạt nhân của nó là một iđêan của $\mathcal{S}(M)$ được sinh bởi $P := \ker f \subset M \subset \mathcal{S}(M)$.*

Hệ quả 1.28. *Cho $I = (x_1, \ldots, x_n)$ là một iđêan của R và một toàn cấu $f : R^n \to I$, $e_i \mapsto x_i$. Khi đó, tồn tại một toàn cấu $\psi : R[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{S}(I)$ và hạt nhân của nó là iđêan thuần nhất N của $R[T_1, \ldots, T_n]$ được sinh bởi các đa thức bậc một $\sum_{i=1}^{n} a_i T_i$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.*

Hệ quả 1.29. *Với giả thiết như trong Hệ quả 1.28. Khi đó*

$$N = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i T_i \;\middle|\; f_1, \ldots, f_n \in R[T_1, \ldots, T_n] \text{ và } \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 0 \right\}.$$

1.3.3 Đại số ngoài

Gọi $\mathcal{A}(M)$ là iđêan của $\mathcal{T}(M)$ sinh bởi các phần tử có dạng $m \otimes m, \forall m \in M$.

Định nghĩa 1.30. *Đại số ngoài* của một môđun M, kí hiệu $\wedge(M)$, là thương của đại số tenxơ $\mathcal{T}(M)$ cho iđêan $\mathcal{A}(M)$.

Ảnh của phần tử $m_1 \otimes \cdots \otimes m_k$ trong $\wedge(M)$ được kí hiệu là $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$.

Tương tự như đại số đối xứng, do iđêan $\mathcal{A}(M)$ sinh bởi các phần tử thuần nhất, nên $\wedge(M)$ là một R-đại số phân bậc với các thành phần thuần nhất bậc k của nó là $\wedge^k(M) = \mathcal{T}^k(M)/\mathcal{A}(M)_k$. R-môđun $\wedge^k(M)$ được gọi là *lũy thừa ngoài* bậc k của M.

Định nghĩa 1.31. Phép nhân

$$(m_1 \wedge \cdots \wedge m_k) \wedge (m_1^{'} \wedge \cdots \wedge m_h^{'}) = m_1 \wedge \cdots \wedge m_k \wedge m_1^{'} \wedge \cdots \wedge m_h^{'}$$

trong đại số ngoài được gọi là *tích ngoài*.

Theo định nghĩa của $\wedge(M)$, phép nhân trên có tính thay phiên, tức là tích $m_1 \wedge \cdots \wedge m_k = 0$ trong $\wedge(M)$ nếu tồn tại một cặp chỉ số (i, j), $1 \leq i, j \leq k$ nào đó mà $m_i = m_j$ với $i \neq j$ nào đó. Khi đó, $\forall m, m^{'} \in M$

ta có

$$\begin{aligned}0 &= (m + m^{'}) \wedge (m + m^{'}) \\ &= (m \wedge m) + (m \wedge m^{'}) + (m^{'} \wedge m) + (m^{'} \wedge m^{'}) \\ &= (m \wedge m^{'}) + (m^{'} \wedge m).\end{aligned}$$

Điều này chỉ ra rằng, phép nhân $\wedge$ còn có tính phản đối xứng

$$m \wedge m^{'} = -m^{'} \wedge m, \forall m, m^{'} \in M$$

Áp dụng lặp lại đẳng thức trên nhiều lần ta có

$$m_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge m_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(\sigma) m_1 \wedge \cdots \wedge m_k,$$

với mọi $m_1, \ldots, m_k \in M, \sigma \in S_k$.

Định lý 1.32. *Cho M là một môđun và $\wedge(M)$ là đại số ngoài của nó.*

(1) *Lũy thừa ngoài cấp k của M, $\wedge^k(M)$, bằng*

$$\wedge^k(M) = \frac{\mathcal{T}^k(M)}{(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_k : m_i = m_j,\ \text{với}\ i \neq j)}.$$

(2) *Nếu $\varphi : M^{(k)} \to N$ là một ánh xạ đa tuyến tính thay phiên, thì tồn tại duy nhất một đồng cấu $\psi : \wedge^k(M) \to N$ sao cho $\varphi = \psi \circ i$, trong đó ánh xạ $i : M^{(k)} \to \wedge^k(M), (m_1, \ldots, m_k) \mapsto m_1 \wedge \cdots \wedge m_k$.*

Hệ quả 1.33. *Cho M là một môđun tự do với cơ sở $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$. Khi đó tập sau là cơ sở của $\wedge^k(M)$*

$$(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}, 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n),$$

và $\wedge^k(M) = 0$ khi $k > n$. Nói riêng, $\operatorname{rank}_R \wedge^k (M) = \binom{n}{k}$.

Chương 2

Độ sâu

Định nghĩa 2.1. Một dãy các phần tử $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$ được gọi là một *dãy chính quy* trên môđun M (hoặc một M*-dãy*) nếu

(i) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)M \neq M$.

(ii)Với $i = 1, 2, \ldots, n$, thì α_i không là ước của không trên $M/(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})M$ (với $i = 1$, α_1 không là ước của không trên M).

Khi đó n được gọi là độ dài của M-dãy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
Nếu điều kiện (ii) được thỏa mãn, dãy $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ được gọi là *chính quy yếu* (trên M), hay M*-dãy yếu*.

Mệnh đề 2.2. *Những điều kiện sau là tương đương*

(i) $x_1, \ldots, x_n$ *là một* M*-dãy.*

(ii) $x_1, \ldots, x_s$ *là một* M*-dãy và* $x_{s+1}, \ldots, x_n$ *là một* $M/(x_1, \ldots, x_s)M$*-dãy,* $\forall\, 0 < s < n, s \in \mathbb{N}^*$.

Bổ đề 2.3. *Nếu* x_1, x_2 *là một* M*-dãy thì* x_2, x_1 *là một* M*-dãy khi và chỉ khi* x_2 *không là ước của không trên* M*. Điều này luôn đúng với vành Noether địa phương.*

Mệnh đề 2.4. *Cho* $(R, \mathfrak{m})$ *là một vành Noether địa phương,* M *là một môđun hữu hạn sinh. Khi đó, mọi hoán vị của một* M*-dãy luôn là một* M*-dãy.*

Mệnh đề 2.5. *Cho* R *là một vành Noether và* M *là một môđun bất kỳ. Khi đó mọi dãy chính quy trên* M *đều hữu hạn.*

Định nghĩa 2.6. Một *dãy chính quy cực đại* trên môđun M là một M-dãy $x_1, \ldots, x_n$ sao cho với mọi $y \in R$, dãy $x_1, \ldots, x_n, y$ không là một M-dãy.

Bổ đề 2.7. *Cho một iđêan I của R, một môđun M và một M-dãy $x_1, \ldots, x_k$ có độ dài k được chứa trong I. Đặt $I_k = (x_1, \ldots, x_k)$ và $M_k = M/I_kM$ với $k = \overline{1, n}$ (và $M_0 = M$). Khi đó $\operatorname{Ext}^k_R(R/I, M) \cong \operatorname{Hom}_R(R/I, M_k)$.*

Định lý 2.8. *Cho R là một vành Noether, M là một môđun hữu hạn sinh, và một iđêan thực sự $I \subset R$ sao cho $IM \neq M$, khi đó mọi dãy chính quy cực đại trên M mà được chứa trong I đều có độ dài bằng $\inf\{i \mid \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}$.*

Hệ quả 2.9. *Cho R là một vành Noether và M là một môđun. Khi đó mọi M-dãy trong R đều có thể được bổ sung thành một M-dãy cực đại.*

Định nghĩa 2.10. Cho một môđun M và một iđêan thực sự $I \subset R$. *Độ sâu* của I trên M, kí hiệu $\operatorname{depth}(I, M)$, được định nghĩa là độ dài cực đại của mọi M-dãy được chứa trong iđêan I.

Nhận xét 2.11. Như vậy, theo Định lý 2.8, độ sâu của iđêan I trên môđun M trong vành Noether được tính như sau

$$\operatorname{depth}(I, M) = \inf\{i \mid \operatorname{Ext}^i_R(R/I, M) \neq 0\}.$$

Chương 3

Phức Koszul

3.1 Cách xây dựng Phức Koszul theo tích ngoài

Cố định một dãy $\mathbf{x} = x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ và một cơ sở $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ của R^n. Đặt $K_0 = R$ và $K_i = 0$ với $i < 0$. Với mỗi $i \geq 1$, đặt $K_i = \wedge^i(R^n)$. Khi đó K_i là một R-môđun tự do có hạng $\binom{n}{i}$ với một cơ sở có dạng

$$(e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \mid 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq n).$$

Đặc biệt, $K_i = 0$, $\forall i > n$ và K_n có một cơ sở là $(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n)$.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, đặt $\partial_i^K : K_i \to K_{i-1}$ được cho bởi

$$e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \mapsto \sum_{k=1}^{i} (-1)^{k+1} x_{j_k} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_k}} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}.$$

Với $i > n$ hoặc $i < 1$, đồng cấu $\partial_i^K = 0$.

Dãy các môđun K_i và các đồng cấu ∂_i^K sẽ có dạng sau

$$K_\bullet : 0 \to R \xrightarrow{B} R^n \to \cdots \to R^n \xrightarrow{A} R \to 0. \tag{3.1}$$

Ta có thể kiểm tra rằng $\partial_i^K \partial_{i+1}^K = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$. Do đó $K_\bullet$ là một phức. Đặc biệt, $H_n(K_\bullet) \cong \{r \in R \mid x_i r = 0, \forall i = 1, \ldots, n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{0 :_R x_i\}$ và $H_0(K_\bullet) \cong R/(\mathbf{x})$.

Định nghĩa 3.1. Phức $K_\bullet$ được xây dựng như trên được gọi là *phức Koszul của* $\mathbf{x}$ (liên kết với $\mathbf{x}$), kí hiệu là $K_\bullet(\mathbf{x})$ hoặc $K_\bullet(\mathbf{x}; R)$.

Với mỗi R-môđun M, phức $K_\bullet(\mathbf{x}; M) := K_\bullet(\mathbf{x}) \otimes_R M$ được gọi là *phức*

Koszul của $\mathbf{x}$ *với hệ số trên* M. Phức này đẳng cấu với phức sau

$$0 \to M \to M^n \to M^{\binom{n}{2}} \to \cdots \to M^n \to M \to 0. \tag{3.2}$$

Môđun đồng điều thứ i của phức (3.2) là $H_i(K_\bullet(\mathbf{x}; M))$, được kí hiệu là $H_i(\mathbf{x}; M)$. Trong trường hợp R là một vành Noether và M hữu hạn sinh thì các môđun $H_i(\mathbf{x}; M)$ cũng hữu hạn sinh.

Dễ thấy $H_0(\mathbf{x}; M) \cong M/\mathbf{x}M$ và $H_n(\mathbf{x}; M) \cong \bigcap_{i=1}^{n} \{0 :_M x_i\}$.

3.2 Cách xây dựng Phức Koszul bằng cách lấy tenxơ các phức

(1) Cho M là một môđun và x là một phần tử của R. Phức Koszul của x với hệ số trên M được định nghĩa là

$$G_\bullet(x; M) : 0 \to M \xrightarrow{x} M \to 0$$

Khi $M = R$, phức $G_\bullet(x; R)$ còn được kí hiệu là $G_\bullet(x)$.

(2) Nếu $x_1, \ldots, x_n$ là một dãy các phần tử thuộc R, thì phức Koszul của $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trên M, kí hiệu $G_\bullet(x_1, \ldots, x_n; M)$, được định nghĩa theo quy nạp bằng $G_\bullet(x_1, \ldots, x_{n-1}; M) \otimes G_\bullet(x_n; R)$.

Mệnh đề 3.2. $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n) \cong G_\bullet(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall \mathbf{x} := x_1, \ldots, x_n \in R$.

Nhận xét 3.3. Do tích tenxơ của hai phức thỏa mãn $C_\bullet \otimes K_\bullet \cong K_\bullet \otimes C_\bullet$, nên phức Koszul là bất biến (sai khác đẳng cấu) với mọi hoán vị của $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Do đó, theo Mệnh đề 1.6, thì đồng điều của phức Koszul cũng là bất biến với mọi hoán vị của $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3.3 Một số tính chất cơ bản của phức Koszul

Mệnh đề 3.4. *Cho* $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ *là một phức trên* R *và* $K_\bullet = K_\bullet(x)$ *là phức Koszul của* $x \in R$. *Khi đó ta có dãy khớp ngắn của các phức như sau*

$$0 \to C_\bullet \to (C_\bullet \otimes K_\bullet) \to C_\bullet[-1] \to 0, \tag{3.3}$$

trong đó $C_n[-1] = C_{n-1}$, và các đồng cấu ở cấp thứ n được định nghĩa như sau

$$\delta_n : C_n \to (C_n \otimes R) \oplus (C_{n-1} \otimes R) \cong C_n \oplus C_{n-1},\ a \mapsto (a, 0),$$
$$\gamma_n : C_n \oplus C_{n-1} \to C_n[-1], (a, b) \mapsto b.$$

Hệ quả 3.5. *Với giả thiết như trên, ta có một dãy khớp dài*

$$\ldots \xrightarrow{x} H_n(C_\bullet) \to H_n(C_\bullet \otimes K_\bullet) \to H_{n-1}(C_\bullet) \xrightarrow{x} H_{n-1}(C_\bullet) \to \ldots \quad (3.4)$$

Nhận xét 3.6. Dãy khớp dài trong hệ quả trên được phân tích thành các dãy khớp ngắn

$$0 \to \frac{H_n(C_\bullet)}{xH_n(C_\bullet)} \to H_n(C_\bullet \otimes K_\bullet) \to \mathrm{Ann}_{H_{n-1}(C_\bullet)}(x) \to 0,$$

với mọi n, và $\mathrm{Ann}_M(N) = \{m \in M \mid mn = 0, \forall n \in N\}$.

Chương 4

Ứng dụng của phức Koszul

4.1 Phức Koszul và dãy chính quy

Định lý 4.1. *Nếu* $x_1, \ldots, x_n$ *là một* R*-dãy thì phức Koszul* $K_\bullet(x_1, \ldots, x_n)$ *cho ta một dãy giải tự do của* $R/(x_1, \ldots, x_n)$.

Định lý 4.2. *Một dãy các phần tử* $x_1, \ldots, x_n$ *trong iđêan cực đại* $\mathfrak{m}$ *của vành địa phương* $(R, \mathfrak{m})$ *là một* R*-dãy khi và chỉ khi* $H_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Hệ quả 4.3. *Cho* M *là một môđun trên vành địa phương* $(R, \mathfrak{m})$ *và một dãy các phần tử* $x_1, \ldots, x_n$ *trong iđêan cực đại* $\mathfrak{m}$. *Nếu* $H_i(x_1, \ldots, x_n; M) = 0$ *thì* $H_i(x_1, \ldots, x_{n-1}; M) = 0$, *với* $i \geq 1$.

4.2 Phức Koszul và độ sâu

Bổ đề 4.4. *Cho* M *là một môđun, và* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *là một dãy các phần tử trong* R. *Giả sử* $I = (x_1, \ldots, x_n)$ *chứa một* M*-dãy* $\mathbf{y} = y_1, \ldots, y_m$. *Khi đó*

$$H_{n+1-i}(\mathbf{x}; M) = 0 \text{ với } i = 1, 2, \ldots, m, \text{ và}$$
$$H_{n-m}(\mathbf{x}; M) \cong \operatorname{Hom}_R(R/I, M/\mathbf{y}M) \cong \operatorname{Ext}^m_R(R/I, M).$$

Định lý 4.5. *Cho* R *là vành Noether địa phương,* M *là một môđun hữu hạn sinh, và* $I = (x_1, \ldots, x_n) \subset R$ *sao cho* $IM \neq M$, *thì mọi* M*-dãy cực đại được chứa trong* I *đều có độ dài là* $\inf\{k \mid H_{n-k}(x_1, \ldots, x_n; M) \neq 0\}$.

4.3 Phức Koszul và dãy giải tự do của đại số đối xứng

Giả sử $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ là một tập sinh của iđêan I của vành R. Từ hai đồng cấu

$$
\begin{aligned}
u : & R[T_1, \ldots, T_n]^n \xrightarrow{(x_1,\ldots,x_n)} R[T_1, \ldots, T_n] \\
& (a_1, \ldots, a_n) \qquad \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \\
v : & R[T_1, \ldots, T_n]^n \xrightarrow{(T_1,\ldots,T_n)} R[T_1, \ldots, T_n] \\
& (a_1, \ldots, a_n) \qquad \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i T_i,
\end{aligned}
$$

ta xây dựng hai phức Koszul $K_\bullet(\mathbf{x}; R[\mathbf{T}])$, $K_\bullet(\mathbf{T}; R[\mathbf{T}])$ với các đồng cấu tương ứng là $d_\mathbf{x}$, $d_\mathbf{T}$. Ta có thể kiểm tra rằng các đồng cấu này thỏa mãn

$$d_\mathbf{x} \circ d_\mathbf{T} + d_\mathbf{T} \circ d_\mathbf{x} = 0.$$

Từ tính chất này, ta có thể xây dựng được một phức mới, được gọi là *phức xấp xỉ*, với các môđun là $\ker d_\mathbf{x}$, các đồng cấu là $d_\mathbf{T}$, và được kí hiệu là $\mathcal{Z}_\bullet$

$$\mathcal{Z}_\bullet = (\ker d_\mathbf{x}; d_\mathbf{T}).$$

Phức này có phần cuối là $\ker u \xrightarrow{v} R[T_1, \ldots, T_n] \to 0$. Do đó

$$H_0(\mathcal{Z}_\bullet) = \frac{R[T_1, \ldots, T_n]}{v(\ker(u))},$$

trong đó $v(\ker(u)) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i T_i \;\middle|\; f_1, \ldots, f_n \in R[T_1, \ldots, T_n] \text{ và } \sum_{i=1}^{n} f_i x_i = 0 \right\}$.

Hơn nữa, theo Hệ quả 1.29, ta có

$$H_0(\mathcal{Z}_\bullet) = \frac{R[T_1, \ldots, T_n]}{v(\ker(u))} \cong \mathcal{S}(I).$$

Tài liệu tham khảo

[1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addision-Wesley Publishing Company, Inc.: Reading, Massachusetts, 1969.

[2] N. Bourbaki, *Algebra I* Chap. 1 - 3: *Elements of Mathematics*, Hermann, Paris, 1974.

[3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics, No. **39**, Cambridge University Press: Cambridge, 1993.

[4] D. A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *Some structure theorems for Finite Free Resolutions*, Advances in Mathematics **12(1)**, 84-139, 1974.

[5] L. Busé and M. Chardin, *Implicitizing rational hypersufaces using approximation complexes*, Journal of Symbolic Computation, Elsevier, **40**(4-5), pp.1150-1168, 2005.

[6] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press: Princeton, New Jersey, 1956.

[7] D. S. Dumit and R. M. Foote, *Abstract Algebra*, John Wiley & Sons, Inc, 2004.

[8] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a view toward Algebra Geometry*, Graduate Texts in Mathematics. No.**150**, Spring-Verlag: New York, 1995.

[9] J. Herzog, A. Simis, and W. V. Vasconcelos, *Koszul homology and blowing-up rings*, Lecture note in Pure and Applied Math.,**84**:79-169, 1983.

[10] N.H.V. Hưng, *Đại số đại cương*, NXB Giáo dục, 1998.

[11] N.H.V. Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục, 2000.

[12] S. Sather-Wagstaff, *Commutative Algebra Mini-Course*, 2004. http://www.math.utah.edu/vigre/minicourses/algebra/sather-wagstaff.pdf

[13] S. Sather-Wagstaff, *Koszul notes*, 2011. https://www.ndsu.edu/pubweb/ ssatherw/sp14/790/koszul120611.pdf.

[14] Irena Swanson, *Homological Algebra*, Rome, 2010. http://people.reed.edu/ iswanson/homologicalalgebra.pdf

[15] G. Valla, *On the Symmetric and Rees algebras of an ideal*, Manuscripta math.**30**, 239-255, 1980.