ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

–––––––––––

NGUYỄN VĂN TÍNH

TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN ĐỐI VỚI MARTINGALE

CHUYÊN NGÀNH: LÝ THUYẾT XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ TOÁN HỌC
MÃ SỐ: 60.46.15

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC :
GS.TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG

Hà Nội - 2011

LỜI NÓI ĐẦU

Giải tích ngẫu nhiên ngày nay đóng một vai trò hết sức quan trọng trong lý thuyết xác suất - thống kê hiện đại, nó có ứng dụng rộng rãi ở tất cả các lĩnh vực khác nhau như trong công nghệ thông tin, công nghệ viễn thông, kinh tế, thị trường chứng khoán, bảo hiểm, dự báo rủi ro, trong nông nghiệp.Và hiện đang được giảng dạy ở hầu hết các trường đại học trong và ngoài nước, nó thu hút rất nhiều nhà khoa học không ngừng nghiên cứu và phát triển về nó.
Trong đó tích phân ngẫu nhiên là một trong những khái niệm quan trọng của giải tích ngẫu nhiên. Từ khái niệm đó người ta đã xây dựng nên một loại tích phân ngẫu nhiên đối với Martingale,mở rộng tích phân Ito, chúng rất có ý nghĩa về mặt lý thuyết cũng như ứng dụng. Do đó đã được các nhà toán học và các nhà kinh tế nghiên cứu và phát triển.
Phạm vi của luận văn này là hệ thống lại một số kết quả đã có và tìm hiểu thêm các tính chất của tích phân ngẫu nhiên, xem xét một số ứng dụng của tích phân ngẫu nhiên, khái quát lại những kiến thức cơ bản của giải tích ngẫu nhiên và trên cơ sở đó bước đầu tìm hiểu về tích phân ngẫu nhiên đối với Martingale

Luận văn được chia làm 3 chương cụ thể như sau:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Chương này trình bày các kiến thức cơ sở cần cho các chương tiếp theo.Trọng tâm là: Martingale, martingale liên tục, martingale liên tục phải, martingale địa phương, martingale liên tục phải địa phương

Chương 2: Tích phân ngẫu nhiên. Nghiên cứu các tập hợp và quá trình dự đoán được, khoảng thời gian ngẫu nhiên, độ đo trên các tập dự đoán được, mở rộng phép lấy tích phân và hàm lấy tích phân địa phương

Chương 3: Công thức Ito. Tìm hiểu về biến phân bậc hai và tính chất của biến phân bậc hai, công thức Ito và ứng dụng của công thức Ito

Tuy đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên các vấn đề trong luận văn vẫn chưa được trình bày sâu sắc và không thể tránh khỏi có những sai sót trong cách trình bày. Mong được sự chỉ bảo của thầy cô và sự góp ý xây dựng của bạn bè cũng như đồng nghiệp . Em xin chân thành cảm ơn!

Hà nội, ngày 10 tháng 3 năm 2011
Học viên

Nguyễn Văn Tính

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Không gian L^p và tính đo được

Giả sử (S, Σ) là một không gian đo được, gồm một tập hợp S khác rỗng và một σ- trường Σ các tập con của S. Một hàm $X : S \to \mathbb{R}^d$ gọi là Σ- đo được nếu $X^{-1}(A) \in \Sigma$ với mọi tập Borel A trong $\mathbb{R}^d$, ở đây X^{-1} kí hiệu là nghịch ảnh. Một định nghĩa giữ nguyên tương tự đối với hàm $X : S \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ .Ta sử dụng $''X \in \Sigma''$ có nghĩa là " X là Σ- đo được " và $''X \in b\Sigma''$ có nghĩa ” X bị chặn và Σ đo được ".
Nếu Γ là một họ con của Σ, một hàm $X : S \to \mathbb{R}^d$ gọi là Γ- đơn giản nếu $X = \sum_{k=1}^{n} c_k 1_{\Lambda_k}$ với c_k là hằng số trong $\mathbb{R}^d$, tập hợp $\Lambda_k \in \Gamma$, và $n \in \mathbb{N}$. Một hàm như vậy gọi là Σ-đo được. Ngược lại bất kỳ hàm Σ- đo được là một giới hạn theo từng điểm của một dãy các hàm Σ-đơn giản

1.2 Hàm biến phân bị chặn và tích phân Stieltjes

Cho một hàm giá trị thực g trên $\mathbb{R}_+$, biến phân của g trên $[0, t]$ xác định bởi:

$$|g|_t \equiv \sup \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| \right)$$

là sự phân hoạch của $[0, t]$ bởi $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$. Biến phân $|g|_t$ tăng theo t . Nếu $|g|_t < \infty$, g gọi là biến phân bị chặn trên $[0, t]$. Nếu điều này đúng với mọi t trong $\mathbb{R}_+$, g gọi là có biến phân bị chặn địa phương trên $\mathbb{R}_+$; và

nếu $\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|g|_t < \infty$ thì g là biến phân bị chặn trên $\mathbb{R}_+$. Một hàm liên tục là biến phân bị chặn địa phương trên $\mathbb{R}_+$ nếu và chỉ nếu nó là hiệu của hai hàm tăng liên tục. Một hàm g có biến phân bị chặn địa phương trên $\mathbb{R}_+$ cảm sinh một độ đo có dấu μ trên σ- trường $\mathcal{B}$, trong đó
$\mu((a,b]) = g(b) - g(a)$ với $a < b$ trong $\mathbb{R}_+$ và $\mu(\{0\}) = 0$.
Độ đo μ là duy nhất xác định bởi những khoảng ở trên $(a,b]$ cùng với $\{0\}$ sinh ra $\mathcal{B}$. Nó là độ đo dương trên $(a,b]$ nếu g tăng và không có các nguyên tử nếu g liên tục.

1.3 Không gian xác suất,biến ngẫu nhiên,lọc

Cho$(\Omega,\mathcal{F},P)$,là một không gian xác suất. Điều này có nghĩa là $(\Omega,\mathcal{F})$ là một không gian đo được và P là một độ đo xác suất trên $(\Omega,\mathcal{F})$,sao cho mỗi tập con của một P-tập hợp có độ đo không trong $\mathcal{F}$ là trong $\mathcal{F}$.

Lọc là một họ $\{\mathcal{F}_t$,t $\in \mathbb{R}_+\}$ của σ- trường con của $\mathcal{F}$ sao cho $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ với mọi $s < t$ trong $\mathbb{R}_+$. Nếu thoả mãn hai điều kiện sau ,thì $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ gọi là một lọc tiêu chuẩn :
(i) $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} \equiv \bigwedge_{s>t}$,với mọi t;
(ii) $\mathcal{F}_0$ chứa tất cả P- tập hợp có độ đo không trong $\mathcal{F}$

1.4 Điều kiện hội tụ

Ta xem lại một vài khái niệm cơ bản của lý thuyết xác suất dưới đây. Giả định rằng với các tính chất cơ bản của sự hội tụ trong L^p, theo xác suất ,và hội tụ hầu chắc chắn , cũng như tính khả tích đều và hội tụ theo phân phối .

Định nghĩa 1.4.1. Biến ngẫu nhiên X_n được gọi là hội tụ theo xác xuất tới biến ngẫu nhiên X nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ .

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] \to 0$$

Định nghĩa 1.4.2. Dãy biến ngẫu nhiên X_n được gọi là hội tụ hầu chắc chắn đến biến ngẫu nhiên X nếu tồn tại tập A có xác suất không sao cho

$$X_n(\omega) \to X(\omega) \quad \text{với} \quad \omega \notin A$$

Định nghĩa 1.4.3. Dãy biến ngẫu nhiên X_n được gọi là hội tụ theo trung bình bậc p $(0 < p < \infty)$ đến biến ngẫu nhiên X nếu

$$E|X_n - X|^p \to 0, (n \to \infty)$$

1.5 Quá trình ngẫu nhiên

Cho một không gian xác suất $(\Omega,\mathcal{F},P)$ và một không gian trạng thái đo được $\{E,\mathcal{E}\}$, một quá trình ngẫu nhiên là một họ $(X_t)_{t\geq 0}$ sao cho X_t là một biến ngẫu nhiên có giá trị trong E cho mỗi thời điểm t ≥ 0 .Chính thức hơn, một ánh xạ X:$(\mathbb{R}_+\times\Omega,\mathcal{B}_+\otimes\mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathcal{B})$, ở đây $\mathcal{B}_+$ là tập Borel của không gian thời gian $\mathbb{R}_+$.

1.5.1 Hai quá trình ngẫu nhiên quan trọng

1.5.1.1 Quá trình Poisson

Một quá trình $N = \{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ là một quá trình Poisson với tham số $\alpha > 0$ nếu nó có những tính chất sau đây:

(i) $N_0 = 0$

(ii) với $0 \leqslant s < t < \infty, N_t - N_s$ là một biến ngẫu nhiên Poisson với trung bình là $\alpha(t-s)$ có nghĩa là $N_t - N_s$ lấy giá trị trong N_0 sao cho

$$P(N_t - N_s = n) = \frac{(\alpha t)^n e^{-\alpha t}}{n!}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}_0$

(iii) với $0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_l < \infty$,

$$\{N_{t_0}; N_{t_k} - N_{t_{k-1}}, k = 1, \dots, l\}$$

là một họ các biến ngẫu nhiên độc lập

1.5.1.2 Chuyển động Brown

Một quá trình $B = \{B_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ đươc gọi là một chuyển động Brown trong $\mathbb{R}$ nếu nó có tính chất sau đây:

(i) với $0 \leqslant s < t < \infty, B_t - B_s$ là một biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với trung bình không và phương sai $t-s$;

(ii) với $0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_l < \infty$,

$$\{B_{t_0}; B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 1, \dots, l\}$$

là một tập hợp các biến ngẫu nhiên độc lập.

(iii) B là quá trình liên tục,tức là hầu hết các quỹ đạo của B là hàm liên tục
Một chuyển động Brown trong $\mathbb{R}^d$ là một bộ d- quá trình một chiều

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^d), t \in \mathbb{R}_+\}$$

1.6 Thời điểm dừng

Một hàm $\mathcal{F}$-đo được $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ được gọi là một thời điểm dừng thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}_t\}$ nếu $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ với mỗi $t \in \mathbb{R}_+$. Nếu $\{\mathcal{F}_t\}$ là một lọc tiêu chuẩn để $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, thì điều kiện trên τ là tương đương với $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ với mỗi t . Kết hợp với một thời điểm dừng τ là σ-trường $\mathcal{F}_\tau$. Điều này bao gồm tất cả tập A trong $\mathcal{F}_\infty \equiv \vee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$, thỏa mãn

$$A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \quad \text{với mọi} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

1.7 Kỳ vọng có điều kiện và tính chất

Kỳ vọng có điều kiện là một khái niệm rất quan trọng trong lý thuyết xác suất đặc biệt là trong lý thuyết martingale.

1.7.1 Các định nghĩa của kỳ vọng có điều kiện

Định nghĩa 1.7.1. Cho một không gian xác suất $(\Omega,\mathcal{F}, P)$ và cho $A \in \mathcal{F}$ với $P(A) > 0$ .Xác định $Q(B) = P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, với mọi $B \in \mathcal{F}$, $Q(B)$ là một độ đo xác xuất trên $(\Omega,\mathcal{F})$. Nếu X là một biến ngẫu nhiên ,ta xác định kỳ vọng có điều kiện của X đối với A là

$$E(X|A) = \int_A X dQ$$

Định nghĩa 1.7.2. Giả sử $(\Omega,\mathcal{F}, P)$ là không gian xác suất,$\mathcal{G}$ là σ-đại số con của $\mathcal{F}$,X là biến ngẫu nhiên khả tích .Kỳ vọng có điều kiện của biến ngẫu nhiên X với $\mathcal{G}$ đã cho là biến ngẫu nhiên M thỏa mãn các điều kiện sau:
(i) M là $\mathcal{G}$- đo được
(ii) M thỏa mãn đẳng thức

$$\int_A M dP = \int_A X dP, A \in \mathcal{G}$$

M còn được ký hiệu là $E(X|\mathcal{G})$

Định nghĩa 1.7.3. Giả sử $(\Omega, \mathcal{F}.P)$ là không gian xác suất X là biến ngẫu nhiên bất kỳ sao cho với xác suất một

$$\min\{E(X^+|\mathcal{G}), E(X^-|\mathcal{G})\} < \infty$$

Khi đó ta nói X có kỳ vọng có điều kiện đối với σ- trường $\mathcal{G}$, và gọi

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G})$$

là kỳ vọng có điêu kiện của X đối với $\mathcal{G}$

1.7.2 Các tính chất của kỳ vọng có điều kiện

Sau đây là các tính chất cơ bản của kỳ vọng có điều kiện . Các đẳng thức hay bất dẳng thức trong các tính chất sau được hiểu là đúng hầu chắc chắn

1.Nếu C là hằng số thì $E(C|\mathcal{G}) = C$

2.Nếu $X \leqslant Y$ thì $E(X|\mathcal{G}) \leqslant E(Y|\mathcal{G})$

3.Nếu a, b là các hằng số thì $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$

4.$|E(X|\mathcal{G})| \leqslant E(|X||\mathcal{G})$

5. Nếu X và $\mathcal{G}$ độc lập thì $E(X|\mathcal{G}) = EX$

6.$E[E(X|\mathcal{G})] = EX$

7.Nếu $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ thì

$$E[E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1] = E[E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2] = E(X|\mathcal{G}_1)$$

8.Nếu Y là $\mathcal{G}$ - đo được và $E|Y| < \infty, E|XY| < \infty$ thì

$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$$

9. Nếu $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$($\sigma$- trường tầm thường) thì

$$E(X|\mathcal{G}_0) = EX$$

1.8 Martingale

Định nghĩa 1.8.1. Cho $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ là một quá trình khả tích thì X là một

(i) Martingale nếu $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ hầu chắc chắn với mọi $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$

(ii) Martingale trên nếu $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leqslant X_s$ hầu chắc chắn với mọi $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$

(iii) Martingale dưới nếu $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geqslant X_s$ hầu chắc chắn với mọi $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$

Định nghĩa 1.8.2. Một martingale $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ được cho là mộtL^2-martingale hay martingale bình phương khả tích nếu $E(X_t^2) < \infty$ với mọi $t \geq 0$

Định nghĩa 1.8.3. Một quá trình $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ được cho là một L^p bị chặn nếu $(\sup_t)_{t\geq 0} E(|X_t|^p) < \infty$

Định nghĩa 1.8.4. Một quá trình $X = \{X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ được cho là khả tích đều nếu và chỉ nếu $(\sup_t)_{t\geq 0} E(|X_t| 1_{|X_t|\geqslant N}) \longrightarrow 0$ khi $N \to \infty$.

Với $p \in [1, \infty)$, M được gọi là một L^p - martingale nếu nó là một martingale và $M_t \in L^p$ đối với t. Nếu $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} E(|M_t|^p) < \infty$, ta nói M là L^p- bị chặn . Tính chất martingale thì được bảo toàn bởi L^p - giới hạn khi $\mathcal{F}_0$ là hoàn toàn đầy đủ. Một cách chính xác hơn nữa ta có điều sau đây

Định lý 1.8.5. *Cho $p \in [1, \infty)$ và M là một L^p- martingale liên tục phải .Thì với mỗi t và $c \geqslant 0$*

$$c^p P(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_s| \geqslant c) \leqslant E(|M_t|^p; \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_s| \geqslant c) \tag{1.1}$$

Nếu $p > 1$, thì với mỗi t, $\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_s| \in L^p$ và

$$|| \sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_s| ||_p \leqslant q ||M_t||_p \tag{1.2}$$

ở đay $1/p + 1/q = 1$

Định lý 1.8.6. *(Định lý hội tụ martingale)*

. Cho $p \in [1, \infty)$ và M là một martingale liên tục phải và L^p-bị chặn .Khi đó có một biến ngẫu nhiên $M_\infty \in L^p$ sao cho $lim_{t\to\infty} M_t = M_\infty$ hầu chắc chắn. Hơn nữa, nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện sau đây

(i) p=1 và $\{M_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ là khả tích đều hoặc

(ii) p>1

. thì $\{M_t, \mathcal{F}_t, t \in [0, \infty]\}$ là một L^p-martingale trong đó $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$ và $E(|M_\infty|^p)= lim_{t\uparrow\infty} \uparrow E(|M_t|^p)$

Chương 2

Tích phân ngẫu nhiên đối với L^2-Martingale

Trong chương này ta sẽ xác định tích phân ngẫu nhiên dạng $\int_{[0,t]} XdM$ trong đó M là một L^2 - martingale liên tục phải địa phương , và X là một quá trình thỏa mãn chắc chắn tính đo được và tính khả tích, giả thiết rằng họ tích phân ngẫu nhiên $\{\int_{[0,t]} XdM, t \in \mathbb{R}_+\}$ là một L^2 - martingale liên tục phải địa phương đối với M và X, tích phân có thể được xác định quỹ đạo theo các quỹ đạo.Chẳng hạn , nếu M là một L^2 - martingale liên tục phải địa phương mà quỹ đạo là biến phân bị chặn địa phương và X là một quá trình thích nghi liên tục thì $\int_{[0,t]} X_s(\omega)dM_s(\omega)$ là xác định tốt, như là tích phân Riemann - Stieltjes với mỗi t và ω, bởi giới hạn khi $n \to \infty$ của.

$$\sum_{k=0}^{[2^n t]} X_{k2^{-n}}(\omega)(M_{(k+1)2^{-n}}(\omega) - M_{k2^{-n}}(\omega))$$

Ví dụ tiêu chuẩn của quỹ đạo này tích phân theo quỹ đạo này đạt được bởi tập $M_t = N_t - \alpha t$ trong đó N là một quá trình Poisson với tham số $\alpha > 0$. Trong trường hợp với bất kỳ quá trình thích nghi liên tục của X ta có.

$$\int\limits_{[0,t]} X_s(\omega)dM_s(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{\tau_k \leqslant t\}} X_{\tau_k}(\omega) - \alpha \int\limits_0^t X_s(\omega)ds,$$

trong đó τ_k là thời gian bước nhảy k^{th} của N, và hầu chắc chắn với mỗi t cố định. Tổng trên bên phải được xác định bởi các số hạng khác không bởi hầu chắc chắn chỉ có xác định những bước nhảy của N trong $[0, t]$.

Tích phân ngẫu nhiên được xác định trong sự suy diễn có hiệu lực ngay cả khi M không có quỹ đạo mà biến phân bị chặn địa phương ,ví dụ điển hình là chuyển động Brown B trong $\mathbb{R}$. Ngay khi tích phân đơn giản $\int_{[0,t]} BdB$ không thể xác định quỹ đạo trong tích phân Stieltjes. Bởi vì hầu hết quỹ đạo của một chuyển động Brown là biến phân không bị chặn trên một khoảng thời gian. Trong thực tế tích phân ngẫu nhiên xuất hiện ở đây , biết như là tích phân Ito khi M là một chuyển động Brown, không xác định quỹ đạo nhưng qua một phép đẳng cự giữa một không gian của quá trình X đó là bình phương khả tích về quan hệ tới độ đo cảm sinh bởi M và một không gian tích phân ngẫu nhiên bình phương khả tích $\int XdM$

Bây giờ ta bắt đầu chương trình trên sẽ định nghĩa của σ-trường

2.1 Các tập hợp và quá trình dự đoán được

Họ các tập hợp con của $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ bao gồm tất cả các tập hợp có dạng $\{0\} \times F_0$ và $(s,t] \times F$, trong đó $F_0 \in \mathcal{F}_0$ và $F \in \mathcal{F}_s$ với $s < t$ trong $\mathbb{R}_+$ được gọi là lớp các hình chữ nhật dự đoán được và ta kí hiệu bởi $\mathcal{R}$. Vành Bun $\mathcal{A}$ sinh ra bởi $\mathcal{R}$ là họ các tập con nhỏ nhất của $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ bao hàm $\mathcal{R}$ và như vậy nếu $A_1 \in \mathcal{A}$ và $A_2 \in \mathcal{A}$ thì hợp $A_1 \cup A_2$ và hiệu $A_1 \backslash A_2$ trong $\mathcal{A}$. Nó có thể thỏa mãn rằng $\mathcal{A}$ bao gồm tập hợp rỗng $\emptyset$ và tất cả hợp hữu hạn các hình chữ nhật rời nhau trong $\mathcal{R}$. σ- trường $\mathcal{P}$ của các tập con của $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ sinh ra bởi $\mathcal{R}$ được gọi là σ-trường dự đoán được và các tập hợp trong $\mathcal{P}$ được gọi là các tập hợp dự đoán được. Một hàm $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ gọi là dự đoán được nếu X là $\mathcal{P}$ - đo được.Điều này được kí hiệu bởi $X \in \mathcal{P}$. Nếu A là một tập hợp trong $\mathcal{R}$, thì $1_A(t,.)$ là $\mathcal{F}_t$ - đo được với mỗi t .Do đó, 1_A là một quá trình thích nghi và cũng như là 1_{A^c} trong đó A^c kí hiệu là phần bù của A. Nó cũng được tạo thành bởi tổ hợp tuyến tính hữu hạn điều đó thì đúng đối với A trong miền sinh ra bởi $\mathcal{R}$ và bởi một lớp đối số đơn điệu,nó đúng đối với bất kỳ A trong $\mathcal{P}$ .Từ bất kỳ hàm $\mathcal{P}$ - đo được là giới hạn theo từng điểm của một tổ hợp tuyến tính hữu hạn của hàm chỉ tiêu của các tập hợp trong $\mathcal{P}$ do đó nó là một quá trình dự đoán được.

2.2 Khoảng thời gian ngẫu nhiên

Cho η và τ là thời điểm dừng, tập hợp

$$[\eta, \tau] = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : \eta(\omega) \leqslant t \leqslant \tau(\omega)\}$$

được gọi là khoảng thời gian ngẫu nhiên, ba khoảng thời gian ngẫu nhiên khác nhau. $(\eta, \tau]$,(η, τ) và $[\eta, \tau)$ với điểm η cuối bên trái và điểm cuối τ bên phải được xác định tương tự.Số hạng khoảng thời gian ngẫu nhiên sẽ hướng tới bất kỳ bốn loại khoảng này ở đây η và τ là thời điểm dừng bất kỳ.

2.3 Độ đo trên các tập hợp dự đoán được

Giả sử rằng $Z = \{Z_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ là một quá trình có giá trị thực thích nghi với lọc (tiêu chuẩn) $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, $Z_t \in L^1$ với mỗi $t \in \mathbb{R}_+$.
Chúng ta xác định một hàm tập hợp λ_Z trên $\mathcal{R}$ bởi.

$$\lambda_Z((s,t] \times F) = E(1_F(Z_t - Z_s))$$

$$\text{với} \quad F \in \mathcal{F}_s \quad \text{và} \quad s < t \quad \text{trong} \quad \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$\lambda_Z(\{0\} \times F_0) = 0 \quad \text{với} \quad F_0 \in \mathcal{F}_0$$

Ta mở rộng λ_Z để trở thành một hàm tập hợp cộng tính hữu hạn trên vành $\mathcal{A}$ sinh bởi $\mathcal{R}$ xác định bởi

$$\lambda_Z(A) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_Z(R_j)$$

đối với bất kỳ $A = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$, ở đây $\{R_j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ là một tập hợp hữu hạn của các tập hợp rời nhau trong $\mathcal{R}$. Giá trị trên $\lambda_Z(A)$ thì cũng như đối với mọi phép biểu diễn của A, giống như là hợp rời nhau của các tập hợp trong $\mathcal{R}$. Ta gọi λ_Z là dung lượng nếu $\lambda_Z \geqslant 0$ trên $\mathcal{R}$ và do đó trên $\mathcal{A}$.

2.4 Định nghĩa tích phân ngẫu nhiên

Đầu tiên ta định nghĩa tích phân ngẫu nhiên $\int XdM$ ở đây X là một $\mathcal{R}$-quá trình đơn giản và chỉ ra rằng ánh xạ $X \to \int XdM$ là một phép đẳng cự từ không gian con của $\mathcal{L}^2$ vào L^2. Phép đẳng cự này là kết quả của sự mở rộng định nghĩa tới tất cả X trong $\mathcal{L}^2$.
Khi X là một hàm chỉ tiêu của hình chữ nhật dự đoán được , tích phân $\int XdM$ thì xác định như sau Với $s < t$ trong $\mathbb{R}_+$ và $F \in \mathcal{F}_s$

$$\int 1_{(s,t] \times F} dM \equiv 1_F(M_t - M_s) \tag{2.2}$$

và $F_0 \in \mathcal{F}_0$

$$\int 1_{\{0\} \times F_0} dM \equiv 0 \tag{2.3}$$

Cho $\mathcal{E}$ biểu thị lớp tất cả các hàm $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ đó là tổ hợp tuyến tính hữu hạn của các hàm chỉ tiêu của hình chữ nhật dự đoán được. Một hàm như vậy được gọi là một $\mathcal{R}$ quá trình đơn giản .Do đó $X \in \mathcal{E}$ có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$X = \sum_{j=1}^{n} c_j 1_{(s_j,t_j) \times F_j} + c_0 1_{\{0\} \times F_0} \tag{2.4}$$

Định lý 2.4.1. *Cho $X \in \mathcal{E}$ ta có phép đẳng cự*

$$E\left\{\left(\int XdM\right)^2\right\} = \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times \Omega} (X)^2 d\mu_M \tag{2.5}$$

Bổ đề 2.4.2. *Tập hợp của $\mathcal{R}$- quá trình đơn giản $\mathcal{E}$ là trù mật trong không gian Hillerrt $\mathcal{L}^2$.*

Định lý 2.4.3. *Cho $X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$ và với mỗi t cho $Y_t = \int 1_{[0,t]} XdM$. Thì $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ là một L^2 - martingale trung bình không và có một bản sao của Y với tất cả quỹ đạo liên tục phải.*

Định lý 2.4.4. *Cho $X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$ và cho Y biểu thị quá trình tích phân ngẫu nhiên liên tục phải $\{\int_{[0,t]} XdM, t \in \mathbb{R}_+\}$. Thì có các tính chất sau đây.*

(i) Với $s < t$ trong $\mathbb{R}_+$, và với bất kỳ biến phân $Z \in b\mathcal{F}_s$, ta có hầu chắc chắn.

$$\int\limits_{(s,t]} ZXdM = Z \int\limits_{(s,t]} XdM \tag{2.6}$$

(ii) Độ đo μ_Y liên kết với L^2 - martingale liên tục phải Y có tính trù mật $(X)^2$ với mối quan hệ tới μ_M , đối với bất kỳ $A \in \mathcal{P}$.

$$\mu_Y(A) = \int\limits_A (X)^2 d\mu_M \tag{2.7}$$

(iii) Với bất kỳ thời điểm dừng bị chặn τ,

$$Y_\tau = \int\limits_{[0,\tau]} XdM = \int 1_{[0,\tau]} XdM \quad \text{hầu chắc chắn} \tag{2.8}$$

2.5 Mở rộng phép lấy tích phân và hàm lấy tích phân

Vì xa hơn chúng ta có xét đến tích phân ngẫu nhiên $\int 1_{[0,t]} XdM$ ở đây phép lấy tích phân là một. L^2- martingale liên tục phải và hàm lấy tích phân trong $\Lambda^2(\mathcal{P}, M)$. Khi một sự mở rộng cuối cùng ta sẽ xác định tích phân ngẫu nhiên đối với phép lấy tích phân và hàm lấy tích phân mà chỉ có tính chất này trong một ý nghĩa địa phương. Do đó ta sẽ không giải thích lâu hơn rằng M là một L^2 - martingale liên tục phải, thay cho phần còn lại của chương này. Ta giả sử rằng M là một L^2 - martingale liên tục phải địa phương. Nếu $\{\tau_k\}$ là một dãy địa phương hóa thay cho M ta dùng M^k để biểu thị L^2 - martingale liên tục phải $\{M_{t\wedge\tau_k} - M_0, t \in \mathbb{R}_+\}$ với mỗi k.
Tiếp theo ta xác định lớp của hàm lấy tích phân liên kết với M
Định nghĩa : Cho $\Lambda(\mathcal{P}, M)$ biểu thị lớp của tất cả các quá trình X mà có một dãy địa phương hóa $\{\tau_k\}$ đối với M sao cho .

$$1_{[0,\tau_k]} X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M^k) \quad \text{với mỗi k} \tag{2.9}$$

Một dãy như vậy sẽ được gọi là một dãy địa phương hoá đối với M và X.

Định lý 2.5.1. *Cho M là một martingale liên tục địa phương X là một quá trình thích nghi liên tục . Thì $X \in \Lambda(\mathcal{P}, M)$ và $\{\int_0^t XdM, t \in \mathbb{R}_+\}$ là một martingale liên tục địa phương.*

Chương 3

Công thức Ito

Một kết quả quan trọng nhất trong lý thuyết tích nhân ngẫu nhiên là quy tắc đối với sự biến đổi của biến ngẫu nhiên khi biết công thức Ito, vì Ito là người đầu tiên chứng minh nó đối với trường hợp đặc biệt của phép lấy tích phân với mối quan hệ tới chuyển động Brown. Dạng cốt yếu của công thức Ito là phát biểu sau đây.
Nếu M là một martingale địa phương liên tục và f là một hàm giá trị thực khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}$, thì công thức Ito đối với $f(M_t)$ là:

$$f(M_t) - f(M_0) = \int_0^t f'(M_s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)d[M]_s \tag{3.1}$$

Ta so sánh điều này với lý thuyết cơ bản của phép tính tính toán đối với biến ngẫu nhiên thực. Ở đây có một số hạng thêm vào được nâng lên lũy thừa quá trình biến phân bậc hai. Khi $f(x) \equiv x^2$, (3.1) được rút gọn để định nghĩa quá trình biến phân bậc hai.

3.1 Quá trình biến phân bậc hai và các tính chất

Đối với phần này ta sẽ chỉ xét phép lấy tích phân M là martingale địa phương liên tục. Bởi mệnh đề 1.8.14

Trong phần này, ta giới thiệu quá trình biến phân bậc hai ngẫu nhiên với một martingale địa phương liên tục , quá trình này trở nên có vai trò quan trọng trong sự phát triển của công thức Ito

3.1.1 Định nghĩa và đặc trưng của biến phân bậc hai

Định nghĩa: Đối với $t \in \mathbb{R}_+$ một sự phân hoạch π_t của $[0,t]$ là một tập hợp con được sắp hữu hạn $\pi_t = \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ của $[0,t]$ sao cho $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t$. Ta biểu thị độ nhỏ của π_t bởi $\delta\pi_t \equiv \max\{|t_{j+1} - t_j|, j = 0, 1, \dots, k-1\}$. Nếu $\{\pi_t^n, n \in \mathbb{N}\}$ là một dãy của sự phân hoạch của $[0,t]$ thì với mỗi n phần tử của π_t^n sẽ biểu thị bởi $t_{jn}, j = 0, 1, \dots, k-1$.
Kết quả chính của phần này là định lý sau đây:

Định lý 3.1.1. *Cho $t \in \mathbb{R}_+$ và $\{\pi_t^n, n \in \mathbb{N}\}$ là một dãy phân hoạch của $[0,t]$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \delta\pi_t^n = 0$. Giả sử M là một martingale địa phương liên tục và với mỗi n cho*

$$S_t^n = \sum_j (M_{t_{(j+1)n}} - M_{t_{jn}})^2$$

mà là tổng trên tất cả các j sao cho cả hai t_{jn} và $t_{(j+1)n}$ là trong π_t^n . Thì

(i) Nếu M là bị chặn,$\{S_t^n, n \in \mathbb{N}\}$ hội tụ trong L^2 tới:

$$[M]_t \equiv (M_t)^2 - (M_0)^2 - 2\int_0^t M dM \tag{3.2}$$

(ii) $\{S_t^n, n \in \mathbb{N}\}$ hội tụ theo xác suất tới $[M]_t$

3.1.2 Tính chất của biến phân bậc hai đối với L^2-Martingale

Định nghĩa: Một quá trình $U = \{U_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ sẽ được gọi là
(i) Tăng nếu U là thích nghi và đối với hầu hết mọi ω, $t \to U_t(\omega)$ là tăng trong $\mathbb{R}_+$
(ii) Khả tích nếu $U_t \in L^1$ với mỗi t

Định lý 3.1.2. *Cho M là một L^2-martingale liên tục khi đó*

(i) $[M] = \{[M]_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ là một quá trình tăng khả tính liên tục với $[M]_0 = 0$

(ii) $\{\int_0^t M dM, t \in \mathbb{R}_+\}$ là một martingale liên tục với trung bình không.

(iii) Với mỗi t, dãy $\{S_t^n, n \in \mathbb{N}\}$

(iv) Dung lượng $\lambda_{[M]}$ của $[M]$ xác định trong chương 2 thì cho bởi

$$\lambda_{[M]}(A) = E\left(\int_0^\infty 1_A d[M]_s\right) \tag{3.3}$$

Với mỗi $A \in \mathcal{A}$, và hơn nữa $\lambda_{[M]} = \mu_M$ trên $\mathcal{A}$

(v) Đối với $X \in \Lambda^2(\mathcal{P}, M)$ và mỗi t

$$E\left(\int_0^t (X_s)^2 d[M]_s\right) = \int_{\mathbb{R}_+\times\Omega} 1_{[0,t]}(X)^2 d\mu_M \tag{3.4}$$

3.1.3 Định lý giới hạn

Định lý sau đây sẽ cần thiết đối với chứng minh công thức Ito trong phần tiếp theo.

Định lý 3.1.3. *Cho M là một martingale địa phương liên tục và cho Y là một quá trình tương ứng liên tục bị chặn. Cho $t \in \mathbb{R}_+$ và $\{\pi_t^n, n \in \mathbb{N}\}$ là một dãy của sự phân hoạch của $[0,t]$ sao cho $\lim_{n\to\infty} \delta\pi_t^n = 0$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ cho*

$$Z_n = \sum_j Y_{t_{jn}}(M_{t_{(j+1)n}} - M_{t_{jn}})^2.$$

Trong đó tổng ở trên tất cả j sao cho t_{jn} và $t_{(j+1)n}$ cả hai trong π_t^n . Thì $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ hội tụ theo xác suất tới $\int_0^t Y_s d[M]_s$

3.2 Công thức Ito một chiều

Định nghĩa: Một quá trình V gọi là biến phân bị chặn địa phương nếu nó thích ứng đối với hầu hết mọi ω, hàm $t \to V_t(\omega)$ là biến phân bị chặn trên mỗi khoảng thời gian bị chặn trong $\mathbb{R}_+$, Xét một cặp (M, V) ở đây M là một martingale địa phương liên tục và V là một quá trình liên tục mà là biến phân bị chặn địa phương. Công thức Ito đối với cặp đôi này được phát biểu dưới đây. Khi M và V là các quá trình có giá trị thực ,điều này thường được gọi là công thức Ito một chiều.

Định lý 3.2.1. *Cho M là một martingale địa phương liên tục và V là quá trình liên tục mà biến phân bị chặn địa phương. Cho f là hàm giá trị thực liên tục xác định trên $\mathbb{R}^2$ sao cho đạo hàm riêng $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, tồn tại và liên tục đối với tất cả (x,y) trong $\mathbb{R}^2$. Thì hầu chắc chắn , ta có với mỗi t*

$$f(M_t, V_t) - f(M_0, V_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s, V_s)dM_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(M_s, V_s)dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_s, V_s)d[M]_s \tag{3.5}$$

Để cho rõ ràng, ta đặt vào tham số thời gian s trong tích phân ngẫu nhiên $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s, V_s)dM_s$. Mà tích phân đó được xác định ngẫu nhiên không theo quỹ đạo. Một cách viết khác bằng cách dùng vi phân.

$$df(M_t, V_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_t, V_t)dM_t + \frac{\partial f}{\partial y}(M_t, V_t)dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_t, V_t)d[M]_t \tag{3.6}$$

3.3 Ứng dụng của công thức Ito

3.3.1 Đặc trưng của chuyển động Brown

Định lý 3.3.1. *Một quá trình M là một chuyển động Brown trong $\mathbb{R}$ nếu và chỉ nếu nó là một martingale địa phương liên tục với biến phân bậc hai $[M]$ sao cho:*

$$[M]_t = t \quad \textit{hầu chắc chắn với mọi } t \tag{3.7}$$

3.3.2 Quá trình mũ

Áp dụng tiếp theo của công thức Itô, ta chứng minh rằng với martingale địa phương liên tục M với quá trình biến phân A, quá trình mũ $Z^\alpha = \{exp(\alpha M_t - \frac{1}{2}\alpha^2 A_t), t \in \mathbb{R}_+\}$ là một martingale địa phương liên tục với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$. Ngược lại kết quả này cũng đã chứng minh, mặc dù các chứng minh không sử dụng công thức Itô. Hơn nữa, ta cho điều kiện dưới xác định "địa phương" có thể bỏ qua.

Định lý 3.3.2. *Cho M và A là một quá trình thích ứng liên tục sao cho A là tăng và $A_0 = 0$.Đối với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, cho Z^n là quá trình xác định bởi.*

$$Z_t^\alpha = exp\left(\alpha M_t - \frac{1}{2}\alpha^2 A_t)\right).$$

Khi đó hai khẳng định sau đây là tương đương
(i) M là martingale địa phương và $[M] = A$
(ii) Với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$, Z^α là martingale địa phương .
Hơn nữa, nếu M là một L^2-martingale với $[M] = A$ và α sao cho $Z_0^\alpha \in L^2$ và

$$E\left(\int_0^t (Z_s^\alpha)^2 dA_s\right) < \infty \quad \text{với mọi } t \tag{3.8}$$

Thì Z^α là một L^2-martingale. Ngược lại nếu hai điều kiện sau đây thỏa mãn
(a) Biến ngẫu nhiên A_t bị chặn với mỗi t,
(b) Có $\alpha_0 > 0$ sao cho $E(exp(\alpha_0|M_t|)) < \infty$ với mỗi t và Z^α là một martingale với $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}\alpha_0$ thì M là một L^2-martingale với $[M] = A$

3.3.3 Một họ Martingale sinh ra bởi M

Tiếp theo ta mở rộng kết quả này tới đạo hàm có cấp cao hơn. Điều này cung cấp cho ta với một kỹ thuật cho các đa thức được sinh ra trong M và A là martingale.
Kí hiệu: Với mỗi $n \in \mathbb{N}_0$ cho $H_n(x, y)$ biểu thị hàm đa thức của x và y xác định bởi

$$H_n(x, y) = \frac{d^n}{d\alpha^n} exp\left(\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y\right)\Bigg|_{\alpha=0}$$

Thì

$$exp\left(\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} H_n(x, y)$$

với mọi α trong $\mathbb{R}$

Định lý 3.3.3. *Cho M và A là quá trình thích nghi liên tục sao cho A tăng và $A_0 = 0$. Giả sử điều kiện (a) và (b) của định lý 3.3.2 là thỏa mãn. Thì với mỗi $n \in \mathbb{N}_0, H_n(M, A)$, là một martingale*

Tóm lại ta đã chỉ ra rằng đối với bất kỳ quá trình dự đoán được bị chặn X mà $M = \{\int_0^{t_1} X_s dB_s, t \in \mathbb{R}_+\}$,$Z^\alpha = exp(\alpha M - \frac{1}{2}\alpha^2[M])$, và $H_n(M, [M])$ là

L^2-martingale liên tục với mỗi $\alpha \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}_0$. Một ứng dụng của những kết quả này, ta đưa ra một ví dụ cho $n = 4$ làm thế nào người ta có thể có được giới hạn ngay của M bằng cách sử dụng thực tế là $H_n(M, [M])$ là một martingale. Với n = 4 ta có:

$$H_4(M_t, [M]_t) = (M_t)^4 - 6(M_t)^2[M]_t + 3([M]_t)^2$$

Và bằng cách lấy kỳ vọng ta được

$$0 = E\{(M_t)^4 - 6E\{(M_t)^2[M]_t\} + 3E\{([M]_t)^2\}$$

Vì vậy

$$E\{(M_t)^4\} \leqslant 6E\{(M_t)^2[M]_t\} \leqslant 6\left(E\{(M_t)^4\}E\{([M]_t)^2\}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ở đây ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz để được bất đẳng thức thứ hai bằng cách chia cả hai vế cho $E\{(M_t)^4\}$ (khi nó khác không), ta được

$$E\{(M_t)^4\} \leqslant 36E\{([M]_t)^2\}.$$

Do đó

$$E\left\{\left(\int_0^t X_s dB_s\right)^4\right\} \leqslant 36E\left\{\left(\int_0^t (X_s)^2 ds\right)^2\right\} \leqslant 36C^2t^2 \tag{3.9}$$

KẾT LUẬN

Tích phân ngẫu nhiên đối với Martingale là một đề tài rất rộng và khó, tuy nhiên trong khuôn khổ của một luận văn Thạc sĩ chúng tôi chỉ trình bầy được một số kết quả quan trọng của tích phân ngẫu nhiên đối với Martingale đó là các tập hợp và quá trình dự đoán được, khoảng thời gian ngẫu nhiên, độ đo trên các tập hợp dự đoán được, martingale liên tục, martingale liên tục phải, và để từ đó xây dựng tích phân ngẫu nhiên trên cơ sở đó. Đặc biệt nghiên cứu tích phân ngâu nhiên trên L^2- martingale liên tục phải và liên tục phải địa phương. Từ đó có thể mở rộng được phép lấy tích phân và hàm lấy tích phân cần những gì Bên cạnh đó luận văn còn trình bầy đặc điểm và nêu ra được các tính chất của biến phân bậc hai. Ngoài ra trong luận văn còn trình bầy công thức Ito một chiều, và ứng dụng của công thức Ito. Đặc biệt nũa là phép lấy tích phân với mối quan hệ tới chuyển động Brown, và quá trình mũ . Tuy nhiên đối với Martingale không liên tục và L^p- martingale liên tục với p $>$ 2 thì tìm điều kiện , cách chứng minh , và xây dựng tích phân ngẫu nhiên đối với chúng khó khăn và phức tạp hơn.

Với phạm vi và thời gian cho phép tác giả không đi sâu vào vấn đề này và đây cũng là hướng chúng tôi muốn nghiên cứu tiếp

Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Hùng Thắng," *Quá trình ngẫu nhiên và tính toán ngẫu nhiên* ", NXB - Đại học Quốc gia Hà Nội ,2006

[2] Billinglsley,P.,*Convergence of Probability Measures*,John Wiley and Sons,New York,1968

[3] Chung,K.L.,*A Course in Probability Theory,2nd ed.,* New York,1974

[4] Chung,K.L.,,and Li P,.*Lectures from Markov Processes to Brownian Motion,Springer-Verlag*,New York,1982

[5] Chung,K.L.,and Li,P.," Comparison of probability and eigen-value methods for the Schrödinger equation" ,to appear in *Advances in Applied Mathematics*

[6] Coddington,E,A,*An Introduction to Ordinary Differential Equations,* Prentice-Hall,New Jersey,1961.

[7] Dellacherie,C.,and Meyer,P.A., *Probabilities and potentiel,*,Vol. I, North-Holland,Amsterdam,1978

[8] K.L.Chung.,and R.J.Williams., *introduction to stochastic integration*, Birkhäuser Boston • Basel • Stuttgart,1983

[9] Musiela, M. and Rutkowski, M. (2005).*Martingale Methods in Financial Modelling.* Springer, 2nd edition.

[10] Rogers, L. C. G. and Williams, D. (2000). *Diffusions, Markov Processes and Martingales*: Volume Two: Ito Calculus. Cambridge University Press, 2nd edition