

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

---

NGUYỄN VĂN VĨNH

**PHƯƠNG PHÁP KHÔNG LƯỚI RBIEM  
VỚI MIỀN ĐỊA PHƯƠNG TRÒN  
GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES**

Chuyên ngành: Cơ học chất lỏng

Mã số: 60440108

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

T.S Bùi Thanh Tú

Hà Nội - 2015

# Mục lục

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Giới thiệu tổng quan</b>  | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Phương pháp không lưới RBIEM giải phương trình Navier-Stokes</b>                  | <b>5</b>  |
| 2.1      | Phương trình tích phân biên và phương pháp đối ngẫu tương hỗ . . . . .               | 5         |
| 2.2      | Nội suy hàm giá trị . . . . .  | 9         |
| 2.3      | Phương pháp không lưới RBIEM . . . . .   | 10        |
| 2.4      | Số hạng phi tuyến . . . . .  | 13        |
| <b>3</b> | <b>Phương pháp RBIEM với miền địa phương tròn giải hệ phương trình Navier-Stokes</b> | <b>15</b> |
| <b>4</b> | <b>Kết quả số</b>  | <b>18</b> |

# Chương 1

## Giới thiệu tổng quan

Phương pháp phần tử biên (BEM) để giải phương trình Navier-Stokes là một trong những bài toán được các nhà khoa học quan tâm. Khi dùng phương trình tích phân biên, số hạng phi tuyến xuất hiện trong tích phân miền. Có nhiều phương pháp khác nhau để giải số hạng phi tuyến đó như Zheng et al. [11] dùng phương pháp nghiệm riêng, Power và Partridge [7] sử dụng phương pháp đối ngẫu tương hỗ (DRM). Nhưng kết hợp giữa BEM và DRM chỉ giải được các bài toán dòng chảy phức tạp với số Reynolds nhỏ bằng 40 hay 100. Bằng phương pháp phân chia miền con [4, 8] Power và Mingo đã giải bài toán cho số Reynolds cao hơn với độ chính xác cao hơn. Tuy nhiên phương pháp BEM-DRM đã xấp xỉ đạo hàm của vận tốc trong số hạng phi tuyến thông qua hàm bán kính cơ sở và tạo ra phương trình đại số tuyến tính với số phương trình lớn hơn số ẩn làm tăng độ phức tạp của bài toán.

Bên cạnh đó, phương pháp không lưới kết hợp với phương trình tích phân biên đang được quan tâm rộng rãi bởi tính chính xác mà phương trình tích phân biên mang lại. Trong đó phương pháp không lưới tích phân miền địa phương (LBIE) đưa ra bởi Zhu et al. [12, 13] giải bài toán Poisson và bài toán phi tuyến dựa trên xấp xỉ dịch chuyển bình phương tối thiểu với ý tưởng tạo ra biên địa phương trên mỗi nút. Sau đó Sellountos và Sequeira [10] dùng LBIE để giải phương trình Navier-Stokes với cách tiếp cận dùng phương pháp nghiệm đi kèm để xấp xỉ số hạng phi tuyến. Gần đây, Popov và Bui [5] đưa ra phương pháp không lưới dựa trên phương trình tích phân biên và hàm bán kính cơ sở (RBIEM) để giải bài toán khuếch tán nhiễu, trong đó phương trình tích phân biên được áp dụng trên mỗi miền con địa

---

phương tương ứng với mỗi nút. Khi đó RBIEM tạo ra hệ phương trình đại số tuyến tính với số phương trình bằng số ẩn để giải, ma trận hệ số là ma trận thưa. RBIEM được áp dụng để giải hệ phương trình Navier-Stokes, trong đó với mỗi nút trong miền tính toán, có bảy ẩn số tương ứng với bảy phương trình tích phân biên. Thay vì phải xấp xỉ biến đạo hàm riêng của vận tốc  $\frac{\partial u_i}{\partial x_h}$  hàm bán kính cơ sở.

Ý tưởng của phương pháp RBIEM là xây dựng một miền con địa phương ứng với mỗi nút bên trong và trên biên miền tính toán. Về lý thuyết, những miền con địa phương này có thể có hình dạng bất kỳ. Khi đó để tích phân trên biên của miền bất kỳ, RBIEM phân rã biên thành những phần tử, tích phân trên biên địa phương sẽ được tính trên từng phần tử và sau đó được ghép lại. Trên thực tế, để thuận tiện trong quá trình tính toán, miền con được RBIEM tạo ra là những miền tròn. Nhưng khi đó, để tính tích phân biên có thể dùng phương pháp khác đơn giản hiệu quả hơn việc phân rã biên.

Trong luận văn này, phương pháp không lưới RBIEM cải tiến được đề xuất. Để thuận tiện, ta gọi phương pháp RBIEM cải tiến là m-RBIEM (modified RBIEM). Để tính tích phân trên biên của miền con, thay việc rời rạc biên thành các phần tử bằng cách thêm vào các nút trên biên, phương pháp không lưới m-RBIEM sẽ sử dụng hệ tọa độ cực để tính trực tiếp các tích phân khi miền con có dạng hình tròn. Phương pháp m-RBIEM đưa ra lời giải số chính xác hơn, tiết kiệm thời gian tính toán hơn và dễ dàng hơn trong việc lập trình giải các bài toán thực tế.

Cấu trúc luận văn được trình bày như sau:

- Chương 1: Giới thiệu tổng quan về phương pháp không lưới dùng phương trình tích phân biên.
- Chương 2: Đề cập phương pháp không lưới RBIEM giải phương trình Navier-Stokes.
- Chương 3: Phương pháp RBIEM với miền địa phương tròn giải hệ phương trình Navier-Stokes.
- Chương 4: Kết quả số.

## Chương 2

# Phương pháp không lưới RBIEM giải phương trình Navier-Stokes

### 2.1 Phương trình tích phân biên và phương pháp đối ngẫu tương hỗ

Phương pháp đối ngẫu tương hỗ DRM (Dual Reciprocity Method) được kết hợp với phương pháp phương trình tích phân biên BEM (Boundary Element Method) dùng để chuyển số hạng tích phân miền thành tích phân trên biên khi giải phương trình Navier-Stokes.

Xét phương trình Navier-Stokes cho chất lỏng không nén được:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$

trong đó:

$u_i$ : là thành phần vectơ vận tốc theo hướng  $i$ ;

$\rho$ : là mật độ;

$F_i$ : là lực tác động theo hướng  $i$ ;

$\sigma_{ij}$ : là tenzor ứng suất tương ứng trường vận tốc và áp suất  $(u_i, p)$ .

## 2.1. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN BIÊN VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐỐI NGẪU TƯƠNG HỒ

Với chất lỏng Newton ta có:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.2)$$

trong đó:

- $p$ : là áp suất chất lỏng;
- $\delta_{ij}$ : là ký hiệu Kronecker;
- $\mu$ : là hệ số nhớt.

Phương trình Navier-Stokes cho một điểm  $x$  trong miền  $\Omega$  đóng bởi biên  $S$  dưới dạng tích phân được đưa ra bởi Ladyzhenskaya (1963):

$$u_k(x) = \int_S t_{ki}^*(x,y) u_i(y) dS_y - \int_S u_{ki}^*(x,y) t_i(y) dS_y + \int_{\Omega} u_{ki}^*(x,y) g_i d\Omega, \quad (2.3)$$

trong đó:

- $g_i = \rho u_j u_{i,j}$ : là số hạng phi tuyến;
- $t_i = \sigma_{ij} n_j$ ,  $n_j$ : là vectơ pháp tuyến hướng ra ngoài miền  $S$ ;
- $u_i^k$ : là trường nghiệm vectơ vận tốc của phương trình Stokes.

Trong trường hợp hai chiều nghiệm  $u_{ki}^*$  và  $q^k$  có dạng:

$$u_{ki}^*(x,y) = -\frac{1}{4\pi\mu} \left[ \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ik} + \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}{r^2} \right]; \quad (2.4)$$

$$q^k(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_k - y_k)}{r^2},$$

trong đó  $r = |x - y|$ . Nghiệm cơ bản  $t_{ki}^*$  có dạng:

$$t_{ki}^* = -\frac{1}{\pi r} \frac{(x_i - y_i)(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{r^3} n_j. \quad (2.5)$$

Khai triển số hạng  $g_i(x)$  để xấp xỉ tích phân miền trong phương trình (2.3) thành tích phân biên dạng:

$$g_i(x) = \sum_{m=1}^{N_D} f^m(x) \alpha_i^m \delta_{il}, \quad (2.6)$$

## 2.1. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN BIÊN VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐỐI NGẪU TƯƠNG HỒ

trong đó  $f^m(x)$  là hàm bán kính cơ sở phụ thuộc vào bán kính điểm cần xấp xỉ  $x$  và điểm lân cận  $y^m$ ,  $m = 1, \dots, N$ . Hàm  $f^m(x)$  chỉ phụ thuộc vào giá trị  $R = |x - y^m|$  là khoảng cách từ điểm  $x$  đến điểm lân cận  $y^m$ .

Hệ số  $\alpha_l^m$  chưa biết được xác định bằng cách áp dụng phương trình (2.6) cho  $N_D$  nút lân cận  $y^m$ ,  $m = \overline{1, N_D}$ . Khi đó:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^*(x, y) g_i(y) d\Omega = \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \int_{\Omega} u_{ki}^*(x, y) f^m(x) \delta_{il} d\Omega. \quad (2.7)$$

Trường vận tốc và áp suất bổ sung  $(\hat{u}_i^{lm}(x), \hat{p}^{lm}(x))$  được cho bởi phương trình:

$$\mu \frac{\partial^2 \hat{u}_i^{lm}(x)}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \hat{p}^{lm}(x)}{\partial x_i} = f^m(x) \delta_{il}; \quad \frac{\partial \hat{u}_i^{lm}}{\partial x_i} = 0. \quad (2.8)$$

Trong đó biểu thức giải tích cho trường Stokes  $(\hat{u}_i^{lm}(y), \hat{p}^{lm}(y))$  tương ứng với các hàm xấp xỉ được có thể được đưa ra bằng phương pháp tiếp cận đề xuất bởi Power và Wrobel.

Khi đó trường vận tốc và lực kéo bổ trợ có thể được tìm như sau:

$$\hat{u}_i^{lm}(x) = \frac{1}{96} \left[ \left( 5R^4 \log R - \frac{7}{3}R^4 \right) \delta_{il} - \hat{x}_i \hat{x}_l \left( 4R^2 \log R - \frac{5}{3}R^2 \right) \right], \quad (2.9)$$

trong trường hợp  $f^m(x) = r^2 \log r$ , với  $\hat{x} = x - y^m$  và  $R = \|x - y^m\|$ . Biểu thức lực kéo bổ trợ tương ứng là:

$$\begin{aligned} \hat{t}_i^{lm}(x) &= \sigma_{ij}^l(x) n_j(x) \\ &= \frac{1}{96} \left[ 8r^2 (\hat{x}_i n_l + \hat{x}_j n_j \delta_{il} + \hat{x}_l n_i) \times \left( 2 \log R - \frac{1}{3} \right) \right] - \frac{1}{96} \left[ 4 \hat{x}_i \hat{x}_l \hat{x}_j n_j \left( 4 \log R + \frac{1}{3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Áp dụng định lý Green cho trường vận tốc mới  $(\hat{u}_i^{lm}(x), \hat{p}^{lm}(x))$  ta có:

$$\hat{u}_i^{lm}(x) = \int_S t_{ki}^*(x, y) \hat{u}_i^{lm}(y) dS_y - \int_S u_{ki}^*(x, y) \hat{t}_i^{lm}(y) dS_y + \int_{\Omega} u_{ki}^*(x, y) f^m(y) \delta_{il} d\Omega. \quad (2.11)$$

## 2.1. PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN BIÊN VÀ PHƯƠNG PHÁP ĐỐI NGẪU TƯƠNG HỒ

Trong đó  $\hat{t}_i^{lm}$  được cho bởi  $\hat{t}_i^{lm}(y) = \sigma_{ij}(u_{ki}^*(y), \hat{p}^{lm}(y)) n_j(y)$ .

Tích phân miền trong (2.3) được viết dưới dạng:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^*(x,y) f^m(y) \delta_{il} d\Omega = - \int_S t_{ki}^*(x,y) \hat{u}_i^{lm}(y) dS_y + \int_S u_{ki}^*(x,y) \hat{t}_i^{lm}(y) dS_y + \hat{u}_i^{lm}(x). \quad (2.12)$$

Thay (2.15) và (2.7) vào (2.3) với  $t_i = -pn_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  dẫn đến phương trình cho vận tốc  $u_i$  tại điểm  $x$  chỉ gồm các tích phân biên liên hệ giữa trường vận tốc, áp suất và các đạo hàm riêng của vận tốc:

$$\begin{aligned} u_k(x) - \int_S t_{ki}^*(x,y) u_i(y) dS_y + \int_S u_{ki}^*(x,y) \left[ -p(y) n_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(y)}{\partial x_i} \right) \right] dS_y \\ = \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left\{ - \int_S t_{ki}^*(x,y) \hat{u}_i^{lm}(y) dS_y + \int_S u_{ki}^*(x,y) \hat{t}_i^{lm}(y) dS_y + \hat{u}_i^{lm}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Đạo hàm phương trình (2.16) theo biến  $x_h$  ( $h=1,2$ ) ta được:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_h} = \int_S \frac{\partial t_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} u_i(y) dS_y - \int_S \frac{\partial u_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} \left[ -p(y) n_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(y)}{\partial x_i} \right) \right] dS_y \\ + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left\{ - \int_S \frac{\partial t_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} \hat{u}_i^{lm}(y) dS_y + \int_S \frac{\partial u_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} \hat{t}_i^{lm}(y) dS_y + \frac{\partial \hat{u}_k^{lm}(x)}{\partial x_h} \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Rời rạc hóa biên  $S$ , phương trình (2.16), (2.17) cho ta công thức tính giá trị vận tốc và các đạo hàm riêng của thành phần vận tốc theo các biến  $x_1, x_2$  tại nút  $n$ :

$$\begin{aligned} u_k^n - \sum_{a=1}^{N_a} H_{ki}^a u_i^a + \sum_{a=1}^{N_a} G_{ki}^a \left[ -p^a n_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} \right) \right] \\ = \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left\{ - \sum_{a=1}^{N_a} H_{ki}^a \hat{u}_i^{lma} + \sum_{a=1}^{N_a} G_{ki}^a \hat{t}_i^{lms} + \hat{u}_k^{lmn} \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} u_{k,h}^n - \sum_{a=1}^{N_a} H_{ki,h}^a u_i^a + \sum_{a=1}^{N_a} G_{ki,h}^a \left[ -p^a n_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} \right) \right] \\ = \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left\{ - \sum_{a=1}^{N_a} H_{ki,h}^a \hat{u}_i^{lma} + \sum_{a=1}^{N_a} G_{ki,h}^a \hat{t}_i^{lma} + \hat{u}_{k,h}^{lmn} \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$



Trong đó  $H_{ki}^a, G_{ki}^a, H_{kih}^a, G_{kih}^a$  là các hệ số đi kèm với vận tốc và đạo hàm của thành phần vận tốc theo biến  $x_1, x_2$ . Các hệ số  $H_{ki}^a, G_{ki}^a, H_{ki,h}^a, G_{ki,h}^a$  thu được từ tích phân trên các phần tử biên được phân rã trong các phương trình (2.16), (2.17). Giá trị  $u_k^n, u_{k,h}^n$  trong công thức (2.16), (2.17) là giá trị của vận tốc và đạo hàm thành phần vận tốc theo biến  $x_1, x_2$  tại các nút a, (a=1, ...,  $N_a$ ) trên biên tròn địa phương. Các biến này thu được nhờ phép xấp xỉ nội suy dùng hàm bán kính cơ sở RBF sẽ được trình bày ở mục tiếp theo.

## 2.2 Nội suy hàm giá trị

Những giá trị hàm chưa biết trên biên tròn miền con  $u_i(y), \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j}, \frac{\partial u_j(y)}{\partial x_i}, p(y)$  được xác định bằng hàm bán kính cơ sở  $f(y, z_s)$  để nội suy giá trị xung quanh các nút  $z_s, s = 1, \dots, N_A$ :

$$u_i(y) = \sum_{s=1}^{N_A} f(y, z_s) \beta_{is}, \quad \frac{\partial u_i(y)}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{N_A} f(y, z_s) \gamma_{is}, \quad \frac{\partial u_j(y)}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{N_A} f(y, z_s) \zeta_{is}, \quad p(y) = \sum_{s=1}^{N_A} f(y, z_s) \varepsilon_s, \quad (2.17)$$

trong đó:  $\beta_{is}, \gamma_{is}, \zeta_{is}, \varepsilon_s$  xác định cho các nút  $y = z_t, t = 1, \dots, N_A$ .

Suy ra:

$$u_i^t = \sum_{s=1}^{N_A} F_{ts} \beta_{is}, \quad \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{N_A} F_{ts} \gamma_{is}, \quad \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{N_A} F_{ts} \zeta_{is}, \quad p^t = \sum_{s=1}^{N_A} F_{ts} \varepsilon_s. \quad (2.18)$$

Với:  $u_i^t = u_i(z_t), \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(z_t)}{\partial x_j}, \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} = \frac{\partial u_j(z_t)}{\partial x_i}, p^t = p(z_t)$ .

Suy ra:

$$\beta_{is} = \sum_{t=1}^{N_A} R_{ts} u_i^t, \quad \gamma_{is} = \sum_{t=1}^{N_A} R_{ts} \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j}, \quad \zeta_{is} = \sum_{t=1}^{N_A} R_{ts} \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_s = \sum_{t=1}^{N_A} R_{ts} p^t, \quad (2.19)$$

trong đó:  $R_{ts} = [F_{ts}]^{-1}$ .

Suy ra:

$$u_i(y) = \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} f(y, z_s) R_{ts} u_i^t, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} F_{sa} R_{ts} \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} F_{sa} R_{ts} \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i}, \quad (2.22)$$

$$p(y) = \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} f(y, z_s) R_{ts} p^t. \quad (2.23)$$

## 2.3 Phương pháp không lưới RBIEM

Phương pháp RBIEM đưa vào 7 ẩn tại mỗi nút gồm thành phần vectơ vận tốc  $u_1, u_2$ , các đạo hàm riêng của thành phần vectơ theo biến  $x_1, x_2$ :  $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$  và áp suất  $p$ . Tại mỗi nút 7 phương trình tương ứng với 7 ẩn được tạo ra. Khi đó RBIEM sẽ tạo ra một hệ phương trình đại số tuyến tính với số phương trình bằng số ẩn. Giá trị  $u_k^n, u_{k,h}^n$  tại nút  $n$  trên biên địa phương trong công thức (2.18), (2.19) thu được bằng cách áp dụng công thức (2.23), (2.24), (2.25) tương ứng với nút  $y$  là nút  $a$  trên biên địa phương, khi đó ta có:

$$u_i^a = \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} F_{sa} R_{st} u_i^t, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u_i^a}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} F_{sa} R_{ts} u_i^t, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u_j^a}{\partial x_i} = \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} F_{sa} R_{ts} u_j^t, \quad (2.26)$$

$$p^a = \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} F_{sa} R_{ts} p^t. \quad (2.27)$$

Thay công thức (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) vào (2.18), (2.19) ta có giá trị vận tốc và đạo hàm thành phần vận tốc theo các biến  $x_1, x_2$  tại những nút cho trước trên miền tính toán như sau:

$$u_k^n = \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} H_{ki}^a F_{sa} R_{ts} u_i^t - \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} G_{ki}^a F_{sa} R_{ts} \left[ -p^t n_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} \right) \right] + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left\{ - \sum_{a=1}^{N_a} H_{ki}^a \hat{u}_i^{lma} + \sum_{a=1}^{N_a} G_{ki}^a \hat{t}_i^{lms} + \hat{u}_k^{lmn} \right\}, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
 u_{k,h}^n = & \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} H_{ki,h}^a F_{sa} R_{ts} u_i^t - \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} G_{ki,h}^a F_{sa} R_{ts} \left[ -p^t n_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} \right) \right] \\
 & + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left\{ - \sum_{a=1}^{N_a} H_{ki,h}^a \hat{u}_i^{lma} + \sum_{a=1}^{N_a} G_{ki,h}^a \hat{t}_i^{lms} + \hat{u}_k^{lmn} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Đặt:

$$T_k^{lmn} = - \sum_{s=1}^{N_A} H_{ki}^s \hat{u}_i^{lms} + \sum_{s=1}^{N_A} G_{ki}^s \hat{t}_i^{lms} + \hat{u}_k^{lmn}, \tag{2.30}$$

$$T_{k,h}^{lmn} = - \sum_{s=1}^{N_A} H_{ki,h}^s \hat{u}_i^{lms} + \sum_{s=1}^{N_A} G_{ki,h}^s \hat{t}_i^{lms} + \hat{u}_{k,h}^{lmn}. \tag{2.31}$$

Từ phương trình (2.31), (2.33) ta có phương trình cho vận tốc theo phương  $i$  tại nút  $n$  biểu diễn qua vận tốc, áp suất và đạo hàm vận tốc nút  $a$  trên biên  $S$ .

$$\begin{aligned}
 u_k^n = & \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} H_{ki}^a F_{sa} R_{ts} u_i^t \\
 & - \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} G_{ki}^a F_{sa} R_{ts} \left[ -p^t n_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} \right) \right] + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m T_k^{lmn}.
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Từ phương trình (2.32), (2.43) ta có phương trình cho đạo hàm riêng thành phần thứ  $i$  của vectơ vận tốc theo biến  $x_h$  tại nút  $n$  biểu diễn qua vận tốc, áp suất, đạo hàm vận tốc tại nút  $a$  trên biên  $S$ .

$$\begin{aligned}
 u_{k,h}^n = & \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} H_{ki,h}^a F_{sa} R_{ts} u_i^t \\
 & - \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_A} \sum_{t=1}^{N_A} G_{ki,h}^a F_{sa} R_{ts} \left[ -p^t n_i + \mu n_j \left( \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} \right) \right] + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m T_{k,h}^{lmn}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Sử dụng phép xấp xỉ DRM kết hợp với phương trình tích phân biên cho áp suất, ta có phương trình tích phân biên cho áp suất:

$$\begin{aligned}
 p(x) = & \int_S q^k(x,y) \left[ -p(y) n_k + \mu n_j \left( \frac{\partial u_k(y)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(y)}{\partial x_k} \right) \right] dS_y - 2\mu \int_S \frac{\partial q^k(x,y)}{\partial x_j} u_k(y) n_j(y) dS_y \\
 & + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left\{ \hat{p}^{lm}(x) + \int_S q^k(x,y) \hat{t}_k^{lm}(y) dS_y + 2 \int_S \frac{\partial q^k(x,y)}{\partial x_j} \hat{u}_k^{lm}(y) n_j(y) dS_y \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Rời rạc hóa biên S, áp suất tại điểm n được tính bởi công thức sau:

$$\begin{aligned}
 p^n = & - \sum_{a=1}^{N_a} Q^{ka} \left[ -p^a n_k + \mu n_j \left( \frac{\partial u_k^a}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^a}{\partial x_k} \right) \right] - 2\mu P_j^{ka} u_k^a n_j^a \\
 & + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left( \hat{p}^{lm}(x) + \sum_{a=1}^{N_a} Q^{ka} \hat{t}_k^{lma} + 2\mu \sum_{a=1}^{N_a} P_j^{ka} \hat{u}_k^{lma} n_j^a \right).
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Kết hợp với các phương trình (2.27), (2.28) (2.29) (2,30) ta được:

$$\begin{aligned}
 p^n = & - \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_a} \sum_{t=1}^{N_a} Q^{ka} F_{sa} R_{ts} \left[ -p^t n_k + \mu n_j \left( \frac{\partial u_k^t}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^t}{\partial x_k} \right) \right] \\
 & - 2\mu \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_a} \sum_{t=1}^{N_a} P_j^{ka} F_{sa} R_{ts} u_k^t n_j^a \\
 & + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m \left( \hat{p}^{lm}(x) + \sum_{a=1}^{N_a} Q^{ka} \hat{t}_k^{lma} + 2\mu \sum_{a=1}^{N_a} P_j^{ka} \hat{u}_k^{lma} n_j^a \right).
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Đặt:

$$S^{lmn} = \hat{p}^{lm}(x) + \sum_{a=1}^{N_a} Q^{ka} \hat{t}_k^{lma} + 2\mu \sum_{a=1}^{N_a} P_j^{ka} \hat{u}_k^{lma} n_j^a. \tag{2.37}$$

Từ phương trình (2.39), (2.40) ta có áp suất tại điểm n được tính qua các nút xung quanh:

$$\begin{aligned}
 p^n = & - \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_a} \sum_{t=1}^{N_a} Q^{ka} F_{sa} R_{ts} \left[ -p^t n_k + \mu n_j \left( \frac{\partial u_k^t}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^t}{\partial x_k} \right) \right] \\
 & - 2\mu \sum_{a=1}^{N_a} \sum_{s=1}^{N_a} \sum_{t=1}^{N_a} P_j^{ka} F_{sa} R_{ts} u_k^t n_j^a + \sum_{m=1}^{N_D} \alpha_l^m S^{lmn}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Hệ số chưa biết  $\alpha_l^m$  trong phương trình (2.35), (2.36), (2.41) được xác định bằng cách xây dựng hệ phương trình từ phương trình (6) cho nút  $y^k$ ,  $k = \overline{1, n}$ :

$$g_i(y^k) = \sum_{m=1}^{N_D} f(y^k, y^m) \alpha_l^m \delta_{il}, \quad l = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, 2} \tag{2.39}$$

Kí hiệu F là ma trận mà các thành phần được cho bởi  $F_{il}(y^k, y^m) = f(y^k, y^m) \alpha_l^m \delta_{il}$ , khi đó  $\alpha_l^m = [F_{il}(y^k, y^m)]^{-1} g_i(y^k)$ . Kết hợp với  $g_i = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ , ta có:

$$\alpha_l^m = [F_{il}(y^k, y^m)]^{-1} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.40}$$

Khi đó phương trình (2.35), (2.36), (2.41) xuất hiện các số hạng phi tuyến khi thay giá trị  $\alpha_l^m$  trong biểu thức (2.43).

## 2.4 Số hạng phi tuyến

Việc xác định các hệ số chưa biết  $\alpha_l^m$  được thực hiện bằng cách xây dựng các phương trình thu được khi áp dụng phương trình (2.6) trên các điểm  $y^k$ :

$$g_i(y^k) = \sum_{m=1}^{N+A} f(y^k, y^m) \alpha_l^m \delta_{il}, \quad (2.41)$$

trong đó:  $k = 1, \dots, N, l = 1, 2$  và  $i = 1, 2$

Kí hiệu:

$$F_{il}(y^k, y^m) = f(y^k, y^m) \delta_{il} \quad (2.42)$$

Phương trình (2.44) có thể được viết như sau:

$$g_i(y^k) = \sum_{m=1}^{N+A} F_{il}(y^k, y^m) \alpha_l^m \quad (2.43)$$

Khi đó hệ số chưa biết  $\alpha_l^m$  được xác định bằng cách nghịch đảo (2.46)

$$\alpha_l^m = \left[ F_{il}(y^k, y^m) \right]^{-1} g_i(y^k) \quad (2.44)$$

Thuật toán thiết lập phải liên quan đến giá trị của  $g_i(y^k)$  với các giá trị của vectơ vận tốc. Số hạng  $g_i(y^k)$  có dạng:

$$g_i(x) = u_j(x) \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}. \quad (2.45)$$

Vận tốc  $u_i(x)$  có thể được xấp xỉ như sau:

$$u_i(x) = F_{ip}(x, y^n) \beta_p^n, \quad n = 1, \dots, N+A \quad (2.46)$$

Hệ số  $\beta_p^n$  được cho nghiệm duy nhất của hệ phương trình đại số tuyến tính thu được từ phương trình trên tại các điểm nút  $x = y^s, s = 1, 2, \dots, N$

$$\beta_p^n = [F_{tp}(y^s, y^n)]^{-1} u_t(y^s). \quad (2.47)$$

Lấy vi phân hai vế phương trình cho ta:

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} = \left[ \frac{\partial F_{ip}(x, y^n)}{\partial x_j} \right] \beta_p^n \quad (2.48)$$

Thay phương trình (2.50) vào phương trình trên:

$$\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_{ip}(x, y^n)}{\partial x_j} [F_{tp}(y^s, y^n)]^{-1} u_t(y^s) \quad (2.49)$$

Các đạo hàm của trường vận tốc có thể được xấp xỉ bởi tích phân có dạng như phương trình (2.17) Để xấp xỉ số hạng phi tuyến  $g_i(x)$ , phương trình (2.52) được sử dụng thay cho phương trình (2.17). Đó là bởi vì có tồn tại một số hạng phi tuyến trong phương trình (2.17)

Thay phương trình (2.52) và phương trình (2.46), số hạng phi tuyến  $g_i(x)$  có thể được xấp xỉ như sau:

$$g_i(x) = u_j(x) \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial F_{ip}(x, y^n)}{\partial x_j} [F_{tp}(y^s, y^n)]^{-1} u_t(y^s) u_j(x) \quad (2.50)$$

Cuối cùng thay phương trình (2.53) và phương trình (2.47) cho ta biểu thức của các hệ số  $\alpha_l^m$

$$\alpha_l^m = [F_{il}(y^s, y^n)]^{-1} \left[ \frac{\partial F_{ip}(x, y^n)}{\partial x_j} \right] [F_{tp}(y^s, y^n)]^{-1} u_t(y^s) u_j(y^k) \quad (2.51)$$

## Chương 3

# Phương pháp RBIEM với miền địa phương tròn giải hệ phương trình Navier-Stokes

Để tính các tích phân biên trên miền địa phương tròn trong các phương trình (2.16), (2.17), (2.37), thay cho việc rời rạc biên thành các phần tử bằng cách thêm vào các nút trên biên, phương pháp m-RBIEM sẽ tính toán trực tiếp các tích phân biên đó bằng cách tham số hóa các biến trong hệ tọa độ cực. Thay vào công thức (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) vào các công thức (2.16), (2.17), (2.37) ta được:

$$\begin{aligned} u_k(x) = & \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \int_S t_{ki}^*(x,y) f(y, z_s) R_{ts} u_i^t dS_y + \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \int_S u_{ki}^*(x,y) f(y, z_s) R_{ts} p_t n_i dS_y \\ & - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \int_S u_{ki}^*(x,y) f(y, z_s) R_{ts} n_j \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} dS_y - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \int_S u_{ki}^*(x,y) f(y, z_s) R_{ts} n_j \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} dS_y \\ & + \sum_{m=1}^{N_s+3} \alpha_l^m \left\{ - \int_S t_{ki}^*(x,y) \hat{u}_i^{lm}(y) dS_y + \int_S u_{ki}^*(x,y) \hat{t}_i^{lm}(y) dS_y + \hat{u}_i^{lm}(x) \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_k(x)}{\partial x_h} &= \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \int_S \frac{\partial t_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} f(y,z_s) R_{ts} u_{it} dS_y + \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \int_S \frac{\partial u_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} f(y,z_s) R_{ts} p_t n_i dS_y \\
&\quad - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \int_S \frac{\partial u_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} f(y,z_s) R_{ts} n_j \frac{\partial u_j^t}{\partial x_j} dS_y - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \int_S \frac{\partial u_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} f(y,z_s) R_{ts} n_j \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} dS_y \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N_s+3} \alpha_l^m \left\{ - \int_S \frac{\partial t_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} \hat{u}_i^{lm}(y) dS_y + \int_S \frac{\partial u_{ki}^*(x,y)}{\partial x_h} \hat{t}_i^{lm}(y) dS_y + \frac{\partial \hat{u}_k^{lm}(x)}{\partial x_h} \right\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \int_S q^k(x,y) f(y,z_s) R_{ts} p_t n_k dS_y - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \int_S \mu q^k(x,y) n_j f(y,z_s) R_{ts} \frac{\partial u_k^t(y)}{\partial x_j} dS_y \\
&\quad - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \int_S \mu q^k(x,y) n_j f(y,z_s) R_{ts} \frac{\partial u_j^t(y)}{\partial x_k} dS_y - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} 2\mu \int_S \frac{\partial q^k(x,y)}{\partial x_j} f(y,z_s) R_{ts} u_k^t n_j dS_y \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N_s+3} \alpha_l^m \left( \hat{p}^{lm}(x) + \int_S q^k(x,y) \hat{t}_k^{lm}(y) dS_y + 2\mu \int_S \frac{\partial q^k(x,y)}{\partial x_j} \hat{u}_k^{lm}(y) n_j(y) dS_y \right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Đặt:

$$H_{ki}^s = \int_S t_{ki}^* f(y,z_s) dS_y \tag{3.4}$$

$$H_{ki,h}^s = \int_S \frac{\partial t_{ki}^*}{\partial x_h} f(y,z_s) dS_y \tag{3.5}$$

$$G_k^s = \int_S u_{ki}^* f(y,z_s) n_i dS_y \tag{3.6}$$

$$G_{k,h}^s = \int_S \frac{\partial u_{ki}^*}{\partial x_h} f(y,z_s) n_i dS_y \tag{3.7}$$

$$\bar{G}_{kij}^s = \int_S u_{ki}^* f(y,z_s) n_j dS_y \tag{3.8}$$

$$\bar{G}_{kij,h}^s = \int_S \frac{\partial u_{ki}^*}{\partial x_h} f(y,z_s) n_j dS_y \tag{3.9}$$

$$T_k^{lm} = - \int_S t_{ki}^* \hat{u}_i^{lm} dS_y + \int_S u_{ki}^* \hat{t}_i^{lm} dS_y + \hat{u}_k^{lm} \tag{3.10}$$

$$T_{k,h}^{lm} = - \int_S \frac{\partial t_{ki}^*}{\partial x_h} \hat{u}_i^{lm} dS_y + \int_S \frac{\partial u_{ki}^*}{\partial x_h} \hat{t}_i^{lm} dS_y + \frac{\partial \hat{u}_k^{lm}}{\partial x_h} \tag{3.11}$$



$$Q^s = \int_S q^k(x, y) f(y, z_s) n_k dS_y \quad (3.12)$$

$$\bar{Q}_j^{ks} = \int_S q^k(x, y) f(y, z_s) n_j dS_y \quad (3.13)$$

$$P^{ks} = \int_S \frac{\partial q^k(x, y)}{\partial x_j} f(y, z_s) n_j dS_y \quad (3.14)$$

$$S^{lm} = \hat{p}^{lm}(x) + \int_S q^k(x, y) \hat{t}_k^{lm}(y) dS_y + 2\mu \int_S \frac{\partial q^k(x, y)}{\partial x_j} \hat{u}_k^{lm}(y) n_j(y) dS_y \quad (3.15)$$

Từ đó suy ra:

$$u_k(x) = \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} H_{ki}^s R_{ts} u_i^t + \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} G_k^s R_{ts} p_t - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \bar{G}_{kij}^s R_{ts} \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \bar{G}_{kij}^s R_{ts} \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{N_s+3} \alpha_l^m T_k^{lm} \quad (3.16)$$

$$u_{k,h}(x) = \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} H_{ki,h}^s R_{ts} u_i^t + \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} G_{k,h}^s R_{ts} p_t - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \bar{G}_{kij,h}^s R_{ts} \frac{\partial u_i^t}{\partial x_j} - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \bar{G}_{kij,h}^s R_{ts} \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{N_s+3} \alpha_l^m T_{k,h}^{lm} \quad (3.17)$$

$$p(x) = \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} Q^s R_{ts} p_t - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \bar{Q}_j^{ks} R_{ts} \frac{\partial u_k^t(y)}{\partial x_j} - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} \mu \bar{Q}_j^{ks} R_{ts} \frac{\partial u_j^t(y)}{\partial x_k} - \sum_{s=1}^{N_s+3} \sum_{t=1}^{N_s} 2\mu P^{ks} R_{ts} u_k^t + \sum_{m=1}^{N_s+3} \alpha_l^m S^{lm} \quad (3.18)$$

Để tính các tích phân từ (3.4)-(3.15), tọa độ điểm  $y = (y_1, y_2)$  trên biên tròn  $S_i$ , bán kính  $r$  được tham số bởi:  $y_1 = x_1 + r \cos \theta$ ;  $y_2 = x_2 + r \sin \theta$ ;  $\theta \in (0; 2\pi)$ . trong đó:  $n_1 = \cos(\theta)$ ,  $n_2 = \sin(\theta)$

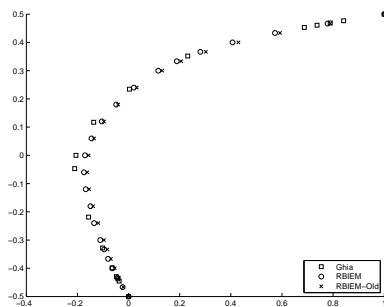
Các phương trình (3.16), (3.17), (3.18) được sử dụng cho phương pháp m-RBIEM. Những phương trình đó là đơn giản hơn so với phương trình (2.35), (2.36), (2.41).

# Chương 4

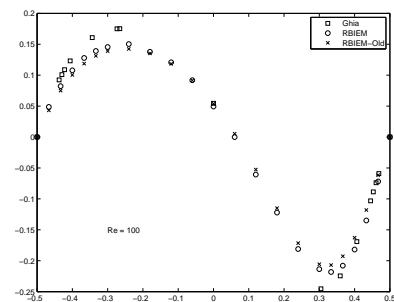
## Kết quả số

Phần này sẽ đưa ra lời giải số của phương pháp m-RBIEM với bài toán dòng chảy đi qua hình hộp vuông trong không gian 2 chiều. Đây là bài toán được dùng để kiểm tra tính chính xác phương pháp số giải bài toán chất lỏng. Bài toán được phát biểu như sau:

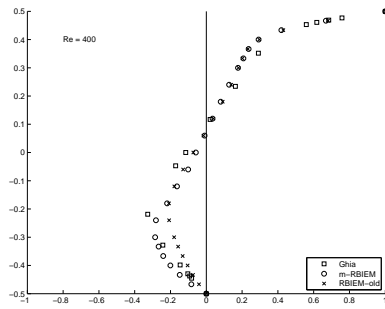
Cho dòng chất lỏng ổn định đi qua mặt trên của hình hộp với vận tốc theo phương ngang là hằng số, vận tốc theo phương dọc bằng không. Điều kiện không trượt và không thấm được áp dụng trên các mặt còn lại của hình vuông. Phương pháp m-RBIEM sẽ được sử dụng để giải bài toán trên với hai trường hợp số Reynolds  $Re=100$  và  $Re=400$ . Lời giải số cho bởi m-RBIEM được so sánh với lời giải của Ghia [2], dùng phương pháp sai phân hữu hạn với lưới có độ mịn cao. Bài toán được giải với các trường hợp dùng 529 nút và 1369.



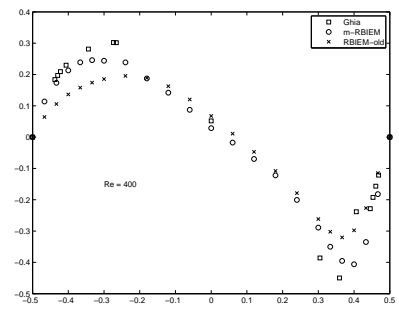
Hình 4.1: Trường vận tốc  $u_x$  dọc theo đường chính giữa  $x=0$  tại  $Re=100$ ; 589 nút



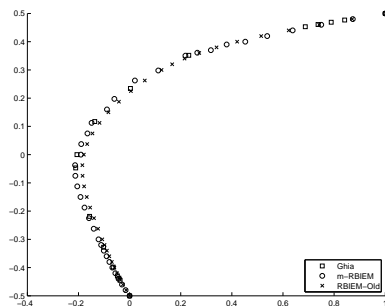
Hình 4.2: Trường vận tốc  $u_y$  dọc theo đường chính giữa  $y=0$  tại  $Re=100$ ; 589 nút



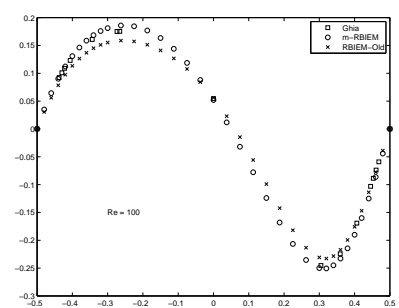
Hình 4.3: Trường vận tốc  $u_x$  dọc theo đường chính giữa  $x=0$  tại  $Re=400$ ; 589 nút



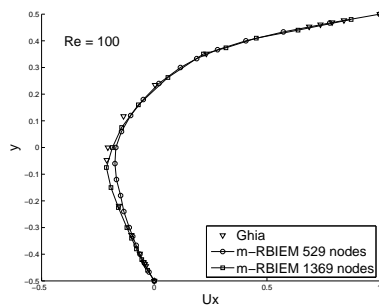
Hình 4.4: Trường vận tốc  $u_y$  dọc theo đường chính giữa  $y=0$  tại  $Re=400$ ; 589 nút



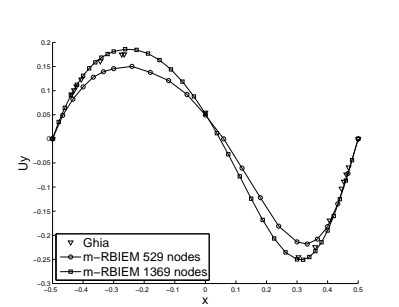
Hình 4.5: Trường vận tốc  $u_x$  dọc theo đường dọc chính giữa  $x=0$  tại  $Re=100$ ; 1369 nút



Hình 4.6: Trường vận tốc  $u_y$  dọc theo đường ngang chính giữa  $y=0$  tại  $Re=100$ ; 1369 nút



Hình 4.7: Trường vận tốc  $u_x$  dọc theo đường dọc chính giữa  $x=0$  tại  $Re=100$



Hình 4.8: Trường vận tốc  $u_y$  dọc theo đường ngang chính giữa  $y=0$  tại  $Re=100$

Các hình 4.3, 4.4, 4.7 và 4.8 đưa ra trường vận tốc  $u_x$  dọc theo đường dọc chính giữa  $x=0$  và trường vận tốc  $u_y$  dọc theo đường ngang chính giữa  $y=0$  trong trường hợp  $Re=100$  với số nút là 529 và 1369. Nghiệm cho bởi phương pháp RBIEM cải tiến cho nghiệm tương đối chính xác và khá trùng với lời giải của Ghia. Phương pháp m-RBIEM cho nghiệm chính xác hơn phương pháp RBIEM cũ.

---

Tương tự, hình 4.5 và hình 4.6 tương ứng đưa ra trường vận tốc  $u_x$  dọc theo đường dọc chính giữa  $x=0$  và trường vận tốc  $u_y$  dọc theo đường ngang chính giữa  $y=0$  trong trường hợp  $Re=400$  với số nút là 529.

Hình 4.9 và hình 4.10 tương ứng đưa ra trường vận tốc  $u_x$  dọc theo đường dọc chính giữa  $x=0$  và trường vận tốc  $u_y$  dọc theo đường ngang chính giữa  $y=0$  trong trường hợp  $Re=400$  với số nút khác nhau. Hai đồ thị cho thấy, trong trường hợp là 529 nút. Lời giải số RBIEM và lời giải của Ghia có sự khác biệt rõ. Nhưng khi tăng số nút lên 1369, lời giải của RBIEM không khác biệt nhiều so với lời giải của Ghia khi dùng phương pháp sai phân hữu hạn với độ mịn cao hơn.

# Kết luận

Luận văn trình bày phương pháp không lưới RBIEM (Radial Basis Integral Equation Method) với miền địa phương tròn giải hệ phương trình Navier-Stokes bằng cách đưa ra công thức giải tích cho phương trình tích phân trên biên tròn. Trong đó với mỗi nút trong miền tính toán, có bảy ẩn số tương ứng với bảy phương trình tích phân biên. Thay vì phải xấp xỉ biến đạo hàm riêng của vận tốc  $\frac{\partial u_i}{\partial x}$  bằng hàm bán kính cơ sở, RBIEM dùng phương trình tích phân biên. Phương pháp m-RBIEM sẽ tính toán trực tiếp các tích phân trên biên tròn mà không cần quá trình rời rạc hóa trên biên bằng cách tham số hóa các biến trong hệ tọa độ cực. Các công thức phát triển đưa ra trong luận văn đơn giản, cho kết quả chính xác và công việc lập trình cho tính toán dễ dàng. Áp dụng các công thức đó để giải bài toán dòng chảy qua hình hộp và nghiệm số cho bởi RBIEM trùng với nghiệm số cho bởi Ghia [1].

Hướng nghiên cứu tiếp theo:

- + Giải phương trình Navier-stokes có tính đến yếu tố nhiệt độ.
- + Xây dựng mô hình và giải cho bài toán ba chiều
- + Xây dựng giải mô hình chất lỏng phi Newton.

# Tài liệu tham khảo

1. Florez, W. F, H. Power and F. Chejne, "Multi-domain dual reciprocity BEM approach for the Navier-Stokes system of equations", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2000. **16**(10):p. 671-681.
2. Ghia, U.,K. N. Ghia and C. T. Shin, "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method", *Journal of Computational Physics*, 1982. **48**:p.387-411.
3. Ladyzhenskaya, O. A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. 1963: Gordon and Breach, New York.
4. Mingo, R. and H. Power, "The DRM subdomain decomposition approach for two-dimensional thermal convection flow problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2000.**24**:p. 121-127.
5. Popov, V. and T. T. Bui, "A meshless solution to two-dimensional convection-diffusion problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2010.**34**:p. 680-689.
6. Popov, V. and T. T. Bui, "A meshless solution to convection-diffusion problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2010. **34** :p. 680-689.
7. Power, H. and P. W. Partridge, "The use of Stokes fundamental solution for the boundary only element formulation of the three-dimensional Navier-Stokes equations for moderate Reynolds numbers, " *International journal for numerical methods in engineering*, 1994.**37** :p. 1825-1840.
8. Power,H. and R. Mingo, "The DRM subdomain decomposition approach to solve the two-dimensional Navier-Stokes system of equations", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2000.**24**(1):p. 107-119.

9. Power, H. and L. Wrobel, "Boundary integral methods in fluid machenics". 1995: Southampton, UK. Computational Mechanics Publications.
10. Sellountos, E. J and A. Sequeira, "An advanced meshless LBIE/RBF method for solving two-dimensional incompressible fluid flows", *Computational Mechanics* , 2008.**44**:p. 617-631.
11. Zheng,R., N. Phan-Thien and C. J. Coleman, "A boundary element approach for non-linear boundary value problems", *Computational Mechanics* , 1981.**8** :p. 71-86.
12. Zhu, T., J. D. Zhang and S. N. Atluri, "A local boundary integral equation (LBE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach", *Computational Mechanics.* , 1998.**21**:p. 223-235
13. Zhu, T., J. D. Zhang and S. N. Atluri, "A meshless local boundary integral equation (LBIE) method for solving nonlinear problems", *Computational Mechanics*, 1998.**22**:p. 174-186.