THÔNG TIN VỀ LUẬN VĂN THẠC SĨ

1. Họ và tên : **Trần Thế Anh**
2. Giới tính : Nam
3. Ngày sinh : 12-06-1989
4. Nơi sinh : Hà Nội
5. Quyết định công nhận học viên số , ngày tháng năm
6. Các thay đổi trong quá trình đào tạo : không
7. Tên đề tài luận văn
   " Một số bất đẳng thức phi tuyến với thời gian rời rạc "
8. Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp
9. Mã số : 60460113
10. Cán bộ hướng dẫn khoa học : **GS. TS. Nguyễn Hữu Dư** - Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc Gia Hà Nội
11. Tóm tắt các kết quả của luận văn

Luận văn " Một số bất đẳng thức phi tuyến với thời gian rời rạc " trình bày một số khái niệm cơ bản, các định lý về bất đẳng thức sai phân một biến và nhiều biến. Luận văn trình bày trong hai chương.

Chương 1 : Bất đẳng thức sai phân một biến.
Chúng ta biết rằng các bất đẳng thức đã cung cấp cho ta một nguyên lý so sánh rất tổng quát trong việc nghiên cứu các tính chất định tính cũng như định lượng của nghiệm của các phương trình liên quan. Bất đẳng thức nổi tiếng Gronwall là một trong các ví dụ cho toán tử không đổi trong đó nghiệm chính xác của phương trình $w = p + \kappa w$ cung cấp một cận trên trong số tất cả các nghiệm của bất phương trình $u \leq p + \kappa u$. Chúng ta sẽ bắt đầu chương này với bất đẳng thức Gronwall, tiếp theo là các bất đẳng thức phi tuyến, sai phân, hệ hữu hạn các bất đẳng thức, và cuối cùng là bất đẳng thức Opial và Wirtinger.

a. Bất đẳng thức Gronwall

Định lý : Với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$, giả sử bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$u(k) \leq p(k) + q(k) \sum_{l=a}^{k-1} f(l)u(l). \tag{1}$$

Khi đó, với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$ ta có

$$u(k) \leq p(k) + q(k) \sum_{l=a}^{k-1} p(l)f(l) \prod_{\tau=l+1}^{k-1} (1 + q(\tau)f(\tau)). \tag{2}$$

b. Bất đẳng thức phi tuyến

Định lý : Với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$, giả sử bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$u(k) \leq p(k) = \left[q + \sum_{i=1}^{r} H_i(k,u)\right],$$

trong đó

$$H_i(k,u) = \sum_{l_1=a}^{k-1} f_{i1}(l_1) u^{\alpha_{i1}}(l_1) \cdots \sum_{l_i=a}^{l_{i-1}-1} f_{ii}(l_i) u^{\alpha_{ii}}(l_i)$$

và $a_{ij}, 1 \leq j \leq i, 1 \leq i \leq r$ là các hằng số không âm và hằng số $q > 0$.
Khi đó, với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$ ta có

$$u(k) \leq qp(k) \prod_{l=a}^{k-1} (1 + \Delta Q(l)) \quad \text{nếu } \alpha = 1 \tag{3}$$

$$u(k) \leq p(k) \left[q^{1-\alpha} + (1-\alpha) Q(k)\right]^{1/1-\alpha} \quad \text{nếu } \alpha \neq 1 \tag{4}$$

trong đó

$$Q(k) = \sum_{i=1}^{r} H_i(k,p) q^{\alpha_i - \alpha}$$

và khi $\alpha > 1$, ta giả thiết $q^{1-\alpha} + (1-\alpha)Q(k) > 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$.

c. Bất đẳng thức sai phân

Định lý : Với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$, giả sử bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\Delta^n u(k) \leq p(k) + q(k) \sum_{i=0}^{n} \sum_{l=a}^{k-1} q_i(l) \Delta^i u(l). \tag{5}$$

Khi đó, với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$ ta có

$$\Delta^n u(k) \leq p(k) + q(k) \sum_{l=a}^{k-1} \phi_1(l) \prod_{\tau=l+1}^{k-1} (1 + \phi_2(\tau)), \tag{6}$$

trong đó

$$\phi_1(k) = p(k) q_n(k) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i} \Delta^i u(a) q_i(k) \frac{(k-a)^{(i-j)}}{(i-j)!} + \sum_{i=0}^{n-1} q_{n-i-1}(k) \sum_{l=a}^{k-i-1} \frac{(k-l-1)^{(i)}}{i!} p(l) \tag{7}$$

và

$$\phi_2(k) = q(k) q_n(k) + \sum_{i=0}^{n-1} q_{n-i-1}(k) \sum_{l=a}^{k-i-1} \frac{(k-l-1)^{(i)}}{i!} q(l). \tag{8}$$

d. Hệ hữu hạn các bất đẳng thức

Giới hạn i trong phạm vi các số tự nhiên $1, \cdots, n$ và r là một số nguyên dương cố định sao cho $1 \leq r \leq n$. Giới hạn p và q trong phạm vi các số tự nhiên tương ứng $1 \cdots r$ và $r+1 \cdots n$.

Định nghĩa 1. Hàm $\mathbf{f}(k, \mathbf{u})$ được gọi là có tính đơn điệu hỗn hợp nếu

- $f_p(k, \mathbf{u})$ không giảm trong $u_1, \cdots u_r$ và không tăng trong $u_{r+1}, \cdots u_n$ với mọi k cố định thuộc $N(a)$.

- $f_q(k,\mathbf{u})$ không tăng trong $u_1, \cdots u_r$ và không giảm trong $u_{r+1}, \cdots u_n$

Đặc biệt, $\mathbf{f}(k,\mathbf{u})$ được gọi là có tính không giảm nếu $f_i(k,\mathbf{u})$ không giảm trong $u_1, \cdots, u_n$ với mọi k cố định thuộc $\mathbb{N}(a)$.

Định nghĩa 2. Hàm $\mathbf{v}(k)$ xác định trên $\mathbb{N}(a)$ được gọi là hàm r dưới và $(n-r)$ trên đối với hệ $\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{f}(k,\mathbf{u}(k))$ nếu $v_p(k+1) \leq f_p(k,\mathbf{v}(k))$ và $v_q(k+1) \geq f_q(k,\mathbf{v}(k))$ với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$. Nếu $v(k)$ thỏa mãn các bất đẳng thức ngược lại thì được gọi là một hàm r trên và $(n-r)$ dưới.

Định lý : Giả sử hàm $\mathbf{f}(k,\mathbf{u})$ có tính đơn điệu hỗn hợp. Hơn nữa, giả sử tồn tại hai hàm $\mathbf{v}(k)$ và $\mathbf{w}(k)$ xác định trên $\mathbb{N}(a)$ sao cho cho

$$\begin{aligned} v_p(k+1) \leq f_p(k,\mathbf{v}(k)), \quad v_q(k+1) \geq f_q(k,\mathbf{v}(k)) \\ w_p(k+1) \geq f_p(k,\mathbf{w}(k)), \quad w_q(k+1) \leq f_q(k,\mathbf{w}(k)) \\ v_p(a) \leq w_q(a), \quad v_q(a) \geq w_q(a). \end{aligned} \tag{9}$$

Khi đó, với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$ ta có

$$v_p(k) \leq w_p(k), \quad v_q(k) \geq w_q(k). \tag{10}$$

e. Bất đẳng thức Opial

Định lý : Giả sử $u(k)$ không giảm với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$ và $u(a) = 0$. Khi đó

(a) Nếu $p > 0, q > 0, p+q \geq 1$ hoặc $p < 0, q < 0$ thì

$$\sum_{l=a}^{k-1} (\Delta u(l))^q u^p(l+1) \leq H(k-a) \sum_{l=a}^{k-1} (\Delta u(l))^{p+q}, \tag{11}$$

trong đó $H(0) = q(p+q)^{-1}$ và với mọi $k \in \mathbb{N}(a+1)$

$$H(k-a) = max\left\{H(k-a-1) + \frac{p(k-a)^{p-1}}{(p+q)}, \frac{q(k-a+1)^p}{(p+q)}\right\}.$$

(b) Nếu $p > 0, q < 0, p+q \leq 1, p+q \neq 0$ hoặc $p < 0, q > 0, p+q \geq 1$ thì

$$\sum_{l=a}^{k-1} (\Delta u(l))^q u^p(l+1) \geq h(k-a) \sum_{l=a}^{k-1} (\Delta u(l))^{p+q}, \tag{12}$$

trong đó $h(0) = q(p+q)^{-1}$, và với mọi $k \in \mathbb{N}(a)$

$$h(k-a) = min\left\{h(k-a-1) + \frac{p(k-a)^{p-1}}{(p+q)}, \frac{q(k-a+1)^p}{(p+q)}\right\}.$$

(c) Nếu $p \geq 1, q \geq 1$ thì trong bất đẳng thức (9) thay $H(k-a)$ bằng $q(k-a+1)^p(p+q)^{-1}$.

(d) Nếu $p \leq 0, q < 0$ thì trong bất đẳng thức (9) thay $H(k-a)$ bằng $J(k-a)$, trong đó $J(0) = q(p+q)^{-1}$, và với mọi $k \in \mathbb{N}(a+1)$

$$J(k-a) = 1 + p(p+q)^{-1} \sum_{l=a+2}^{k} (l-a)^{p-1}.$$

(e) Nếu $p \geq 0, p+q < 0$ thì trong bất đẳng thức (10) thay $h(k-a)$ bằng $J(k-a)$.

f. Bất đẳng thức Wirtinger

Định lý : Giả sử $\theta_i \in (0, l), p_i > 0, i = 1, \cdots, n, P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$, và $\sigma = (1/P_n) \sum_{i=1}^{n} p_i\theta_i$. Giả sử $f(\theta)$ là một hàm dương trên $C^{(2)}(0, l)$ sao cho $f'(\theta)f''(\theta) \neq 0$ trên $(0, l)$ và

$$[f'(\theta)]^2 - f(\theta)f''(\theta) = \mu, \;\; 0 < \theta < 1 \tag{13}$$

ở đây μ là hằng số.

(a) Nếu $f''(\theta) < 0$ trên $(0, l)$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f(\theta_i)\right)^2 - c_n \sum_{i=1}^{n} p_i f(\theta_i) f'(\theta_i) \geq \left(P_n f(\sigma) - \sum_{i=1}^{n} p_i f(\theta_i)\right)^2, \tag{14}$$

(b) Nếu $f''(\theta) > 0$ trên $(0, l)$ thì

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i f(\theta_i)\right)^2 - c_n \sum_{i=1}^{n} p_i f(\theta_i) f'(\theta_i) \leq \left(P_n f(\sigma) - \sum_{i=1}^{n} p_i f(\theta_i)\right)^2, \tag{15}$$

ở đây $c_n = P_n f(\sigma)/f'(\sigma)$.

Trong các bất đẳng thức (12) và (13) dấu đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $\theta_i = \cdots = \theta_n = \sigma$.

Chương 2 : Bất đẳng thức sai phân nhiều biến độc lập

Các bất đẳng thức ở chương 1 được mở rộng cho các hàm m biến độc lập. Các bất đẳng thức này được sử dụng như một công cụ cơ bản trong việc nghiên cứu các phương trình sai phân từng phần. Chúng ta sẽ bắt đầu chương này với khái niệm về hàm Riemann rời rạc và sử dụng hàm này để nghiên cứu về các bất đẳng thức tuyến tính Gronwall và Wendroff. Tiếp theo là các bất đẳng thức phi tuyến và bất đẳng thức sai phân bậc cao với hai biến độc lập. Sau đó, chúng ta chuyển qua xem xét không gian tuyến tính nhiều chiều với các bất đẳng thức tuyến tính và phi tuyến trong không gian này. Cuối cùng, chúng ta sẽ mở rộng các bất đẳng thức Opial và Wirtinger với hai biến độc lập.

a. Hàm Riemann rời rạc.

Cho $\mathbb{N} = \{0, 1, \cdot\}$ là tập các số tự nhiên bao gồm cả số 0, $\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ (m lần) được kí hiệu là $\mathbb{N}^m$. Một điểm $(x_1, \cdots, x_m)$ trong $\mathbb{N}^m$ được kí hiệu là x, trong khi $\overline{x}_i$ kí hiệu thay cho $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_m)$ và $(\overline{x}_i, \bullet)$ thay cho $(x_1, \cdots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, \cdots, x_m)$. Với mọi $s, x \in \mathbb{N}^m$, $0 \leq s \leq x$ tức là $0 \leq s_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq m$. Với một hàm $u(x)$ cho trước trên N^m, ta định nghĩa sai phân cấp 1 đối với biến x_i là $\Delta_{x_i} u(x) = u(\overline{x}_i, x_i+1) - u(k)$, sai phân cấp 2 đối với các biến x_i, x_j là $\Delta_{x_i}\Delta_{x_j} u(x) = \Delta_{x_i} u(\overline{x}_j, x_j + 1) - \Delta_{x_i} u(x) = u(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \cdots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \cdots, x_m) - u(\overline{x}_i, x_i + 1) - u(\overline{x}_j, x_j + 1) + u(x)$. Sai phân cấp cao hơn được định nghĩa tương tự. Ngoài ra, kí hiệu $\mathbf{S}_{l=s}^{x-1} u(l)$ thay cho tổng cấp m $\sum_{l_1=s_1}^{x_1-1} \cdots \sum_{l_m=s_m}^{x_m-1} u(l_1, \cdots, l_m)$ và $\Delta_x^m u(x)$ kí hiệu cho $\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_m} u(x_1, \cdots, x_m)$.

b. Bất đẳng thức tuyến tính.

Trong phần tiếp theo ta luôn giả sử các hàm xuất hiện trong bất đẳng thức là hàm thực, không âm và xác định trên $\mathbb{N}^m$.

Định lý : Với mọi $x \in \mathbb{N}^m$, giả sử bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$u(x) \leq p(x) + q(x)\mathbf{S}_{s=0}^{x-1} f(s)u(s). \tag{16}$$

Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{N}^m$ ta có

$$u(s) \leq p(x) + q(x)\mathbf{S}_{s=0}^{x-1} f(s)p(s)V(s+1;x), \tag{17}$$

ở đây $V(s;x)$ là nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} &(-1)^m \Delta_s^m V(s;x) = f(s)q(s)V(s+1;x), \;\; s \leq x-1 \\ &V(\overline{s}_i, x_i; x) = 1, \;\; 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

c. Bất đẳng thức Wendroff.

Giả sử $W(s;x)$ là hàm bất kì xác định với mọi $s \leq x-1$, $(s;x) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^m$ và

$$\begin{aligned} &(-1)^m \Delta_s^m W(s;x) \geq f(s)q(s)W(s+1;x), \quad s \leq x-1 \\ &W(\overline{s}_i, x_i; x) = 1, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \tag{18}$$

Khi đó, từ bổ đề 2.1.4 ta có thể suy ra (2.14), $V(s+1;x)$ có thể thay bằng $W(s+1;x)$. Tuy nhiên, việc tìm $W(s;x)$ phù hợp để thỏa mãn (2.23) khá khó khăn. Do đó, với hàm $V(s;x)$ ta sẽ tìm một ước lượng trên phù hợp hơn trong thực hành tính toán.

Bổ đề : Cho $V(s;x)$ được xác định như trong định lý 2.2.1. Khi đó, với mọi $s \leq x-1, (s;x) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^m$ ta có

$$V(s;x) \leq \prod_{l_1=s_1}^{x_1-1} \left(1 + \mathbf{S}_{\overline{l}_1=\overline{s}_1}^{\overline{x}_1-1} f(l)q(l)\right). \tag{19}$$

d. Bất đẳng thức phi tuyến.

Định lý: Với mọi $x \in \mathbb{N}^m$, giả sử bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$u(x) \leq p(x)\left[q(x) + \sum_{i=1}^{r} H_i(x,u)\right], \tag{20}$$

trong đó

$$H_i(x,u) = \mathbf{S}_{x^1=0}^{x-1} f_{i1}(x^1)u^{\alpha_{1i}}(x^1) \cdots \mathbf{S}_{x^i=0}^{x^{i-1}-1} f_{ii}(x^i)u^{\alpha_i i}(x^i) \tag{21}$$

và $\alpha_{ij}, 1 \leq j \leq i, 1 \leq i \leq r$ là các hằng số không âm, q là hằng số dương.
Đặt $\alpha_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}$ và $\alpha = \max\limits_{1 \leq j \leq r} \alpha_i$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{N}^m$ ta có

$$u(x) \leq qp(x) \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \prod_{l_i=0}^{x_i-1} (1 + \Delta_{l_i} Q(\overline{x}_i, l_i)) \right\}, \quad \text{nếu } \alpha = 1 \tag{22}$$

và

$$u(x) \leq p(x)[q^{1-\alpha} + (1-\alpha)Q(x)]^{1/(1-\alpha)}, \quad \text{nếu } \alpha \neq 1 \tag{23}$$

Trong đó $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} H_i(x,p)q^{\alpha_i - \alpha}$ và khi $\alpha > 1$, ta giả sử $q^{1-\alpha} + (1-\alpha)Q(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{N}^m$.

e. Bất đẳng thức chứa sai phân riêng.

Định lý: Với mọi $k, l \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, giả sử bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\Delta_k^{r_1}\Delta_l^{r_2}u(k,l) \le p(k,l) + q(k,l)\sum_{i=0}^{r_1}\sum_{j=0}^{r_2}\sum_{\tau=0}^{k-1}\sum_{\eta=0}^{l-1} h_{ij}(\tau,\eta)\Delta_\tau^i\Delta_\eta^j u(\tau,\eta). \tag{24}$$

Khi đó, với mọi $(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ta có

$$\Delta_k^{r_1}\Delta_l^{r_2}u(k,l) \le p(k,l) + q(k,l)\sum_{\tau=0}^{k-1}\sum_{\eta=0}^{l-1} A_1(\tau,\eta)V(\tau+1,\eta+1;k,l),. \tag{25}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
&A_1(k,l) = h_{r_1r_2}(k,l)p(k,l) + \sum_{j=0}^{r_2-1} h_{r_1j}(k,l)\times\\
&\left[\sum_{\beta=j}^{r_2-1}\frac{(l)^{(\beta-j)}}{(\beta-j)!}\Delta_k^{r_1}\Delta_l^{\beta}u(k,0) + \frac{1}{(r_2-j-1)!}\sum_{\eta=0}^{l-r_2+j}(l-\eta-1)^{(r_2-j-1)}p(k,\eta)\right]\\
&+\sum_{i=0}^{r_1-1} h_{ir_2}(k,l)\times\left[\sum_{\alpha=i}^{r_1-1}\frac{(k)^{(\alpha-i)}}{(\alpha-i)!}\Delta_k^{\alpha}\Delta_l^{r_2}u(0,l) + \frac{1}{(r_1-i-1)!}\times\sum_{\tau=0}^{k-r_1+i}(k-\tau-1)^{(r_1-i-1)}p(\tau,l)\right]\\
&+\sum_{i=0}^{r_1-1}\sum_{j=0}^{r_2-1} h_{ij}(k,l)\times\\
&\left[\phi_{ij}(k,l) + \frac{1}{(r_1-i-1)!(r_2-j-1)!}\sum_{\tau=0}^{k-r_1+i}\sum_{\eta=0}^{k-r_2+j}(k-\tau-1)^{(r_1-i-1)}(l-\eta-1)^{(r_2-j-1)}p(\tau,\eta)\right]
\end{aligned} \tag{26}$$

và $V(\tau,\eta;k,l), \tau \le k-1, \eta \le l-1$ là nghiệm của

$$\Delta_\tau\Delta_\eta V(\tau,\eta;k,l) = B_1(\tau,\eta)V(\tau+1,\eta+1;k,l) \tag{27}$$

$$V(k,\eta;k,l) = V(\tau,l;k,l) = 1, \tag{28}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
B_1(k,l) &= h_{r_1r_2}(k,l)q(k,l)\\
&+\sum_{j=0}^{r_2-1} h_{r_1j}(k,l)\frac{1}{(r_2-j-1)!}\sum_{\eta=0}^{l-r_2+j}(l-\eta-1)^{(r_2-j-1)}q(k,\eta)\\
&+\sum_{i=0}^{r_1-1} h_{ir_2}(k,l)\frac{1}{(r_1-i-1)!}\sum_{\tau=0}^{k-r_1+i}(k-\tau-1)^{(r_1-i-1)}q(\tau,l)\\
&+\sum_{i=0}^{r_1-1}\sum_{j=0}^{r_2-1} h_{ij}(k,l)\frac{1}{(r_1-i-1)!(r_2-j-1)!}\times\\
&\sum_{\tau=0}^{k-r_1+i}\sum_{\eta=0}^{k-r_2+j}(k-\tau-1)^{(r_1-i+1)}(l-\eta-1)^{(r_2-j-1)}q(\tau,\eta).
\end{aligned} \tag{29}$$

f. Bất đẳng thức tuyến tính nhiều chiều.
Định lý: Cho các ma trận $n \times n$ $\mathbf{G}(x)$ và $\mathbf{H}(x)$ xác định và không âm trên N^m, cho hàm vec-tơ $\mathbf{p}(x)$ và $\mathbf{u}(x)$ xác định trên N^m. Hơn nữa, với mọi $x \in \mathbb{N}^m$, giả sử bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\mathbf{u}(x) \leq \mathbf{p}(x) + \mathbf{G}(x)\mathbf{S}_{s=0}^{x-1}\mathbf{H}(s)\mathbf{u}(s). \tag{30}$$

Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{N}^m$ ta có

$$\mathbf{u}(x) \leq \mathbf{p}(x) + \mathbf{G}(x)\mathbf{S}_{s=0}^{x-1}\mathbf{V}(s+1;x)\mathbf{H}(s)\mathbf{p}(s), \tag{31}$$

ở đây $\mathbf{V}(s;x)$ thỏa mãn

$$\mathbf{V}(s;x) = \mathbf{X} + \mathbf{S}_{l=s}^{x-1}\mathbf{V}(l+1;x)\mathbf{H}(l)\mathbf{G}(l). \tag{32}$$

g. Bất đẳng thức phi tuyến nhiều chiều.
Ở phần này ta sẽ so sánh nghiệm $\mathbf{u}(x), x \in \mathbb{N}^m$ của phương trình sai phân phi tuyến

$$\Delta_x^m \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}(x)) \tag{33}$$

với các nghiệm $\mathbf{v}(x)$ và $\mathbf{w}(x)$ tương ứng của các bất phương trình sai phân phi tuyến

$$\Delta_x^m \mathbf{v}(x) \leq \mathbf{f}(x, \mathbf{v}(x)) \tag{34}$$

và

$$\Delta_x^m \mathbf{w}(x) \geq \mathbf{f}(x, \mathbf{w}(x)), \tag{35}$$

Kí hiệu $(i)x$ cho một điểm $(x_1, \cdots, x_m)$ mà trong đó i biến bằng 0. Có tất cả $\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}$ khả năng như vậy. Do đó, nếu tại m siêu phẳng $x = (1)x$ thì có thể dùng lập luận đệ quy để bảo đảm sự tồn tại và duy nhất của nghiệm của (31). Thật vậy, vì

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_i \mathbf{u}((i)x) + \mathbf{S}_{s=0}^{x-1}\mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)), \tag{36}$$

trong đó $\sum_i$ kí hiệu cho tổng tất cả các khả năng $(i)x$. Từ đây các nghiệm $\mathbf{v}(x)$ và $\mathbf{w}(x)$ của bất phương trình (32) và (33) có biểu diễn

$$\mathbf{v}(x) \leq \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_i \mathbf{v}((i)x) + \mathbf{S}_{s=0}^{x-1}\mathbf{f}(s, \mathbf{v}(s)) \tag{37}$$

và

$$\mathbf{w}(x) \geq \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}\sum_i \mathbf{w}((i)x) + \mathbf{S}_{s=0}^{x-1}\mathbf{f}(s, \mathbf{w}(s)). \tag{38}$$

h. Bất đẳng thức Opial và Wirtinger hai biến.
Định lý: Cho r_1 và r_2 là các số nguyên dương cố định và $u(k,l)$ là một hàm xác định

trên $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sao cho $u(k,l)=0$ với mọi $k,l\in\mathbb{N}, 0\le k\le r_1-1, 0\le l\le r_2-1$. Khi đó, với $0\le i\le r_1-1, 0\le j\le r_2-1$ và $(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tau=1}^{k-r_1+i}\sum_{\eta=1}^{l-r_2+j}|\Delta_\tau^i\Delta_\eta^j u(\tau+r_1-i-1,\eta+r_2-j-1)||\Delta_\tau^{r_1}\Delta_\tau^{r_2}u(\tau,\eta)|\\
&\le \frac{1}{2\sqrt{2}(r_1-i)(r_2-j)!}\left(\frac{r_1-i}{2r_1-2i-1}\right)^{1/2}\left(\frac{r_2-j}{2r_2-2j-1}\right)^{1/2}\\
&\times (k)^{(r_1-i)}(l)^{(r_2-j)}\sum_{\tau=0}^{k-r_1+i}\sum_{\eta=0}^{l-r_2+j}|\Delta_\tau^{r_1}\Delta_\eta^{r_2}u(\tau,\eta)|^2.
\end{aligned} \tag{39}$$

Hà Nội, ngày 19 tháng 5 năm 2014

Học viên : Trần Thế Anh