ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
- - - - - - - - o0o - - - - - - - -

TRẦN THỊ MAI

INFIMUM CỦA PHỔ CỦA TOÁN TỬ LAPLACE-BELTRAMI TRÊN MIỀN GIẢ LỒI BỊ CHẶN VỚI METRIC BERGMAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

HÀ NỘI - 2015

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
- - - - - - - - o0o - - - - - - - -

TRẦN THỊ MAI

INFIMUM CỦA PHỔ CỦA TOÁN TỬ LAPLACE-BELTRAMI TRÊN MIỀN GIẢ LỒI BỊ CHẶN VỚI METRIC BERGMAN

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 60460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN THẠC DŨNG

HÀ NỘI - 2015

Mục lục

Phần mở đầu

Cho (M^n, g) là một đa tạp Kähler n chiều với metric Kähler

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\bar{z}_j.$$

Giả sử

$$\Delta_g = -4 \sum_{i,j=1}^{n} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$$

là toán tử Laplace-Beltrami tương ứng với metric g. Ở đây ta dùng ký hiệu $\left[g^{i\bar{j}}\right]^t = \left[g_{i\bar{j}}\right]^{-1}$. Khi đó, cận dưới nhỏ nhất của phổ của toán tử Laplace-Beltrami được xác định bởi

$$\lambda_1(\Delta_g, M) = \inf \left\{ 4 \int_M \sum_{i,j=1}^{n} g^{i\bar{j}} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} dV_g : f \in C_0^\infty(M), \|f\|_{L^2} = 1 \right\}$$

trong đó dV_g là dạng thể tích trên M tương ứng với metric Kähler g.

Bài toán đặt ra là tính giá trị λ_1 hoặc cho một đánh giá về λ_1. Tất nhiên việc đánh giá này là phụ thuộc vào đa tạp M và metric Kähler g.

Người ta đã chứng minh được rằng khi M là đa tạp compact và Δ_g là toán tử elliptic đều thì $\lambda_1(\Delta_g)$ là giá trị riêng dương đầu tiên của Δ_g với điều kiện biên Dirichlet. Việc nghiên cứu λ_1 có nhiều ứng dụng trong các bài toán hình học và vật lý...

Luận văn này trình bày một cách chi tiết các kết quả chính trong bài báo của Song-Ying Li và My-An Tran ([16]). Nội dung chính của luận văn là đưa ra các ví dụ về đa tạp Kähler đầy đủ mà đối với chúng giá trị chính xác của λ_1 có thể tính toán được. Nói một cách cụ thể, ta sẽ ước lượng chính xác $\lambda_1(\Delta_u)$ trên các miền D là miền giả lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với metric Kähler $u_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\bar{z}_j$, trong đó $u_{i\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$ với u là hàm đa điều hòa dưới chặt, vét cạn miền D. Trong trường hợp tổng quát, khi D là miền giả lồi bị chặn thì việc tính được chính xác giá trị của $\lambda_1(\Delta_u)$ là rất phức tạp. Vì thế, chúng ta cần phải đưa vào những điều kiện phụ khác nhau đối với hàm u vét cạn trên D. Nhờ các điều kiện đó, chúng ta sẽ xấp xỉ cận trên và cận dưới của λ_1 bằng cách xây dựng các hàm đặc biệt và tiến hành phân tích trên miền con của D.

Luận văn bao gồm hai chương. Trong chương mở đầu, tôi nhắc lại một vài kiến thức cơ bản về hàm đa điều hòa dưới, miền giả lồi và toán tử Laplace-Beltrami trên đa tạp Kähler. Trong chương hai, tôi xét ước lượng cận dưới và cận trên của cận dưới nhỏ nhất của phổ của toán tử Laplace-Beltrami. Ước lượng cận dưới được xét trong mục 2.1, ước lượng cận trên được trình bày trong mục 2.2. Đặc biệt, trong mục 2.2 tôi đưa ra một cách chứng minh khác cho Định lý 2.2. Chứng minh này là mới và đơn giản hơn so với chứng minh trong bài báo gốc. Trong mục 2.3, tôi đưa ra các ước lượng của cận dưới nhỏ nhất của phổ trên các miền giả lồi đặc biệt với metric Kähler-Einstein và metric Bergman.

Chương 1

Một số kiến thức về giải tích phức nhiều biến

1.1 Hàm đa điều hòa dưới và miền giả lồi

1.1.1 Hàm đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1. Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ là một hàm thuộc lớp C^2. Khi đó u được gọi là hàm đa điều hòa dưới nếu và chỉ nếu

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(z)\xi_i\overline{\xi}_j \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n,\ \ \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Do $u_{i\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 u}{dz_i d\overline{z}_j} = \Re u_{i\bar{j}} + i\Im u_{i\bar{j}}$, đặt $\xi_j = x_j + iy_j$, $\forall j = \overline{1, n}$, ta có

$$u_{i\bar{j}}\xi_i\overline{\xi}_j = (\Re u_{i\bar{j}} + \sqrt{-1}\Im u_{i\bar{j}})(x_i + \sqrt{-1}y_i)(x_j - \sqrt{-1}y_j)$$

$$= \Re u_{i\bar{j}}(x_i x_j + y_i y_j) + \Im u_{i\bar{j}}(y_i x_j - x_i y_j + \sqrt{-1}(\Re u_{i\bar{j}}(y_i x_j - x_i y_j)$$

$$+ \Im u_{i\bar{j}}(x_i x_j + y_i y_j)).$$

Vì vậy, nếu u là hàm đa điều hòa dưới thuộc lớp C^2 thì

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Re u_{i\bar{j}}(x_i x_j + y_i y_j) + \Im u_{i\bar{j}}(y_i x_j - x_i y_j) \geq 0$$

và

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Re u_{i\bar{j}}(y_i x_j - x_i y_j) + \Im u_{i\bar{j}}(x_i x_j + y_i y_j) = 0 \qquad \forall\ x_i,\ y_i \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.2. Một hàm u thuộc lớp C^2 được gọi là hàm đa điều hòa dưới chặt khi và chỉ khi tồn tại một hằng số $\epsilon > 0$ sao cho $u - \epsilon|z|^2$ là một hàm đa điều hòa dưới.

Vì vậy, nếu u là một hàm đa điều hòa dưới (chặt) thì ma trận Hessian phức $(u_{i\bar{j}})$của nó là một ma trận Hermit và xác định dương (chặt). Chú ý rằng nếu u là một hàm đa điều hòa dưới chặt thì $(u_{i\bar{j}})$ khả nghịch và $u^{-1} = (u^{i\bar{j}})^t$ cũng là một ma trận Hermit và xác định dương chặt.

1.1.2 Miền giả lồi

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là một tập con mở. Ta nói rằng Ω có biên lớp C^k, $k \geq 2$ nếu tồn tại một lân cận U của $\partial\Omega$ và một hàm r lớp C^k xác định trên U sao cho

1. $\Omega \cap U = \{z \in U : r(z) < 0\}$.
2. $dr \neq 0$ trên $\partial\Omega$ trong đó với mọi $z \in \partial\Omega$

$$dr(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial x_j}(z) dx_j.$$

Định nghĩa 1.3. Giả sử Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ và r là một hàm xác định trên D. D được gọi là miền giả lồi hay miền giả lồi Levi tại $p \in \partial\Omega$ nếu dạng Levi

$$L_p(r, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}(p) \xi_i \overline{\xi}_j \geq 0 \qquad \forall \xi \in T_p^{(1,0)}(\partial\Omega).$$

Ω được gọi là miền giả lồi chặt tại p nếu dạng Levi xác định dương chặt $\forall \xi \neq 0$. Ω là miền giả lồi chặt nếu Ω là miền giả lồi chặt tại mọi điểm của nó.

1.2 Toán tử Laplace-Beltrami trên đa tạp Kähler

Giả sử M là một đa tạp Riemann định hướng, n chiều và $\Omega^p(M)$ là một không gian p-dạng trên M, đặt $d : \Omega^p(M) \Rightarrow \Omega^{p+1}(M)$ là toán tử vi phân thông thường, $p \geq 0$. Giả định rằng $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$ là một metric Riemann trên $T^*M \otimes T^*(M), (g_{ij})$ là ma trận thực cấp n và xác định dương chặt. Khi đó ds^2 chứa một metric Riemann trên $T(M) \otimes T(M)$ xác định bởi

$$dS^2 = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}$$

trong đó (g^{ij}) là ma trận nghịch đảo của (g_{ij}).

Giả sử d^* là toán tử liên hợp của d trên $\bigoplus_{p=0}^{n} \Omega^p(M)$ tương ứng với metric Riemann $\sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$ nghĩa là

$$d^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$$

và

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta) = \int_M < d\alpha, \beta >_{ds^{2^*}} \quad \forall \alpha \in \Omega^{p-1}(M), \beta \in \Omega^p(M)$$

trong đó * là toán tử Hogde.

Định nghĩa 1.4. Toán tử Hogde-Laplace trên $\Omega^p(M)$ là

$$\Delta_H = -(dd^* + d^*d) : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M).$$

Toán tử Hogde-Laplace được liên hệ với toán tử Laplace-Beltrami như sau.

Với mọi hàm trơn f, ta có thể định nghĩa gradient của nó là

$$\nabla f := \text{grad} f := g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

trong đó $g = \det(g_{ij})$.
Khi đó với mọi trường véc tơ X ta có

$$< \text{grad} f, X >= X(f) = df(X).$$

Mặt khác, toán tử div tác động lên một trường véc tơ $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ được định nghĩa là

$$\text{div} Z := \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} Z^j).$$

Định nghĩa 1.5. Toán tử Laplace-Beltrami trên $\Omega^p(M)$ là

$$\Delta f = -\text{div}(\text{grad} f).$$

Khi đó, chúng ta biết rằng trên không gian các hàm khả vi trên M, ta có

$$\Delta = -\Delta_H.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = -g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f + ...$$

Vì (g_{ij}) là xác định dương chặt, $-\Delta f$ là một toán tử elliptic.

Định nghĩa 1.6. Giả sử M là một đa tạp phức với tọa độ địa phương $z = (z_1, ..., z_n)$. Một metric Hermit trên M được xác định bởi

$$h_{i\overline{k}}(z) dz_j \otimes d\overline{z}_k z_k$$

trong đó $h_{j\overline{k}}(z)$ là ma trận Hermit, xác định dương và phụ thuộc vào z. Ngoài ra, các hàm thành phần $h_{j\overline{k}}(z)$ là các hàm trơn.

Dạng vi phân song bậc $(1,1)$ xác định bởi

$$\frac{i}{2} h_{j\overline{k}}(z) dz_j \wedge d\overline{z}_k$$

được gọi là dạng Kähler của metric Hermit.

Định nghĩa 1.7. Một metric Hermit $h_{j\overline{k}}dz_j \otimes d\overline{z}_k$ được gọi là một metric Kähler nếu với mọi z tồn tại một lân cận U của z và một hàm $F : U \to \mathbb{R}$ với $\frac{i}{2}h_{j\overline{k}}dz_j \wedge d\overline{z}_k = \partial\overline{\partial}F$, $\partial\overline{\partial}F$ được gọi là dạng Kähler, F được gọi là thế vị Kähler.

Giả sử $h_{j\overline{k}}dz_j \otimes d\overline{z}_k$ là một metric Kähler trên một đa tạp phức M. Do mỗi metric Hermit đều cảm sinh ra một metric Riemann nên ta có thể định nghĩa toán tử Laplace-Beltrami tương ứng với metric Riemann $< v, w >_{\mathbb{R},h}$. Trong metric này, toán tử Laplace-Beltrami có dạng

$$\Delta = -4\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(hh^{i\overline{j}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right) = -4\sum_{i,j=1}^{n} h^{i\overline{j}}\frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \overline{z}_j},$$

trong đó $h = det(h_{j\overline{k}})$. Công thức trên có thể suy ra trực tiếp nhờ sử dụng kết quả sau ([16])

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}(hh^{i\overline{j}}) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}(hh^{i\overline{j}}) = 0.$$

Lưu ý rằng, chúng ta sẽ dùng công thức này để chứng minh một công thức tích phân cho toán tử Laplace–Beltrami trong chương sau.

Định nghĩa 1.8. Cho $\Omega \subset M$ là một tập con mở. Một số thực dương λ được gọi là một giá trị riêng của toán tử Δ đối với bài toán Dirichlet trên Ω nếu tồn tại một hàm trơn $v \in C^\infty(\Omega)$ sao cho

$$\Delta v = \lambda v.$$

Hàm v khi đó được gọi là một hàm riêng của Δ ứng với giá trị riêng λ.

Do Δ là toán tử elliptic tự liên hợp, nhờ lý thuyết phương trình đạo hàm riêng chúng ta biết rằng tập hợp các giá trị riêng $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ lập thành một dãy tăng

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \lambda_k \leq \ldots$$

và $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

Trong giải tích phức nhiều biến, chúng ta biết rằng nếu D là hình cầu đơn vị B_n trong $\mathbb{C}^n$ và $u(z) = -\log(1 - |z|^2)$ thì

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} u_{i\overline{j}}dz_i \wedge d\overline{z}_j$$

vừa là metric Bergman đồng thời cũng là metric Kähler-Einstein trên B_n. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\lambda_1(B_n) = n^2$.

Để tính giá trị chính xác của $\lambda_1(\Delta_u)$ trên B_n, chúng ta sẽ đồng thời đánh giá cận trên và cận dưới của nó. Trước hết, chúng ta giả thiết $f(z) = (1 - |z|^2)^{\frac{n}{2}}$. Khi đó, áp dụng nguyên lý Rayleigh ta có

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{B_n} | \bigtriangledown f|^2}{\int_{B_n} |f|^2} = n^2.$$

Đồng thời áp dụng Mệnh đề 9.2 trong [8] ta lại có $\lambda_1 \geq \mu > 0$ nếu tồn tại một hàm dương h sao cho $\Delta_u h \geq \mu h$. Thực tế, hàm f định nghĩa ở trên luôn thỏa mãn điều kiện $\Delta_u f \geq n^2 f$. Do vậy $\lambda_1(\Delta_u) = n^2$ trên B_n (xem [16]).

Chương 2

Cận dưới nhỏ nhất của phổ của toán tử Laplace-Beltrami trên miền giả lồi bị chặn

2.1 Ước lượng cận dưới của λ_1

Nhắc lại, giả sử D là một miền giả lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với hàm xác định $r(z) \in C^2(\mathbb{C}^n)$ và $u(z) = -\log(-r(z))$ là hàm đa điều hòa dưới chặt trong D. Khi đó, toán tử Laplace-Beltrami Δ_u tương ứng với metric Kähler $u_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\bar{z}_j$trên D xác định bởi

$$\Delta_u = -4 \sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \tag{2.1}$$

trong đó $[u^{i\bar{j}}]^t = H(u)^{-1} = [u_{i\bar{j}}]^{-1}$.

Bổ đề 2.1. *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ và $u_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\bar{z}_j$ là metric Kähler bất kỳ trên Ω, trong đó $u_{i\bar{j}} = \partial_{i\bar{j}} u$ và $u \in C^2(\Omega)$ là hàm đa điều hòa dưới chặt. Đặt*

$f(z) = e^{-\alpha u(z)}$ *với* $\alpha > 0$. *Khi đó*
(i)

$$\Delta_u f(z) = 4\alpha f(z)\left(n - \alpha|\partial u|_u^2\right), \tag{2.2}$$

trong đó

$$|\partial u|_u^2 = \sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}} u_i u_{\bar{j}} = \sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}} \partial_i u \partial_{\bar{j}} u. \tag{2.3}$$

(ii) *Nếu* $r(z) = -e^{-u(z)}$ *là hàm đa điều hòa dưới chặt thì* $|\partial u|_u^2 < 1$ *trong* Ω.
(iii) *Giả thiết rằng* Ω *bị chặn với* $\partial\Omega \in C^1$. *Khi đó với* $h_1, h_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *thì*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (h_2\Delta_u h_1 - h_1\Delta_u h_2)\, dV_u \\ &= 4\int_{\partial\Omega}\left[h_2\left(-\sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}}\nu_i\frac{\partial h_1}{\partial \overline{z}_j}\right) - h_1\left(-\sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}}\nu_{\bar{j}}\frac{\partial h_2}{\partial z_i}\right)\right] g(z)d\sigma(z).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Trong đó

$$g(z) = detH(u), \quad dV_u(z) = g(z)dv(z),$$

và $\nu(z) = (\nu_1(z), ..., \nu_n(z))$ *là véc tơ pháp tuyến phức hướng ngoài* $\partial\Omega$ *sao cho* $|\nu(z)|^2 = 4$.
Đặc biệt, nếu

$$\begin{cases} \Delta_u h_1(z) & \geq 0 \text{ trong } \Omega \\ h_1(z) & = 0 \text{ trên } \partial\Omega \\ h_2(z) & \geq 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases}$$

thì

$$\int_\Omega (h_2\Delta_u h_1 - h_1\Delta_u h_2)\, dV_u \geq 0. \tag{2.5}$$

Chứng minh. Chú ý rằng

$$\Delta_u f(z) = -4f(z) \sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}} \left[-\alpha u_{i\bar{j}} + \alpha^2 u_i u_{\bar{j}}\right]$$

$$= 4\alpha f(z) \left[n - \alpha |\partial u|_u^2\right].$$

Vậy (i) được chứng minh.

Tiếp theo, ta chứng minh (ii).

Sử dụng các ký hiệu

$$|\partial r|_r^2 = \sum_{i,j=1}^{n} r^{i\bar{j}} u_i u_{\bar{j}}, \quad r^i = \sum_{j=1}^{n} r^{i\bar{j}} r_{\bar{j}} \quad \text{và} \quad r^{\bar{j}} = \sum_{i=1}^{n} r^{i\bar{j}} r_i,$$

bằng cách tính toán trực tiếp, ta có

$$u_{i\bar{j}} = -\frac{1}{r}\left(r_{i\bar{j}} - \frac{r_i r_{\bar{j}}}{r}\right), \quad u^{i\bar{j}} = -r\left(r^{i\bar{j}} - \frac{r^i r^{\bar{j}}}{|\partial r|_r^2 - r}\right).$$

Do $-r(z) > 0$ với mọi $z \in \Omega$ nên

$$\frac{|\partial r|_r^2}{|\partial r|_r^2 - r} < 1, \forall z \in \Omega.$$

Vậy (ii) đã được chứng minh.

Tiếp theo, ta chứng minh (iii).

Từ định nghĩa của Δ_u, ta có

$$h_2 \Delta_u h_1 = -4h_2 \sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 h_1}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}, \quad h_1 \Delta_u h_2 = -4h_1 \sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 h_2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}.$$

Do đó

$\int_\Omega \left(h_2 \Delta_u h_1 - h_1 \Delta_u h_2\right) dV_u$

$$= 4\int_\Omega \left[-g h_2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(u^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 h_1}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) + g h_1 \sum_{i,j=1}^{n} \left(u^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 h_2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right)\right] dv.$$

Đặt

$J := -g h_2 \sum_{i,j=1}^{n} \left(u^{i\bar{j}} \dfrac{\partial^2 h_1}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right) + g h_1 \sum_{i,j=1}^{n} \left(u^{i\bar{j}} \dfrac{\partial^2 h_2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right),$

$K := \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial z_i}\left[h_2\left(-\sum_{j=1}^{n} u^{i\bar{j}} g \dfrac{\partial h_1}{\partial \overline{z}_j}\right)\right] - \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\left[h_1\left(-\sum_{i=1}^{n} u^{i\bar{j}} g \dfrac{\partial h_2}{\partial z_i}\right)\right].$

Ta sẽ chứng minh được rằng $K = J$.
Như vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (h_2\Delta_u h_1 - h_1\Delta_u h_2)\, dV_u \\
&\quad = 4\int_\Omega \left[-gh_2 \sum_{i,j=1}^n \left(u^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 h_1}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \right) + gh_1 \sum_{i,j=1}^n \left(u^{i\bar{j}} \frac{\partial^2 h_2}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} \right) \right] dv \\
&\quad = 4\int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \left[h_2 \sum_{j=1}^n \left(-u^{i\bar{j}} g \frac{\partial h_1}{\partial \overline{z}_j} \right) \right] - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left[h_1 \sum_{i=1}^n \left(-u^{i\bar{j}} g \frac{\partial h_2}{\partial z_i} \right) \right] \right\} dv.
\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Stokes, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (h_2\Delta_u h_1 - h_1\Delta_u h_2)\, dV_u \\
&\quad = 4\int_{\partial\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[h_2 \sum_{j=1}^n \left(-u^{i\bar{j}} g \frac{\partial h_1}{\partial \overline{z}_j} \right) \right] \nu_i - \sum_{j=1}^n \left[h_1 \sum_{i=1}^n \left(-u^{i\bar{j}} g \frac{\partial h_2}{\partial z_i} \right) \right] \nu_{\bar{j}} \right\} d\sigma \\
&\quad = 4\int_{\partial\Omega} \left[h_2 \left(-\sum_{i,j=1}^n u^{i\bar{j}} \nu_i \frac{\partial h_1}{\partial \overline{z}_j} \right) - h_1 \left(-\sum_{i,j=1}^n u^{i\bar{j}} \nu_{\bar{j}} \frac{\partial h_2}{\partial z_i} \right) \right] g d\sigma.
\end{aligned}$$

Vậy (2.4) đã được chứng minh.
Trong trường hợp đặc biệt, nếu

$$\begin{cases} \Delta_u h_1 & \geq 0 \text{ trong } \Omega \\ h_1 & = 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases}$$

thì theo Nguyên lý cực đại cho phương trình elliptic, ta có

$$-\sum_{i,j=1}^n u^{i\bar{j}} \nu_i \frac{\partial h_1}{\partial \overline{z}_j} \geq 0, \text{ trên } \partial D.$$

Giả thiết thêm $h_2 \geq 0$ trên ∂D, từ khẳng định (2.4), ta nhận được

$$\int_\Omega (h_2\Delta_u h_1 - h_1\Delta_u h_2)\, dV_u \geq 0.$$

Vậy bổ đề đã được chứng minh xong. □

Mệnh đề 2.1. *Giả sử* Ω *là một miền bất kỳ trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $u \in C^2(\Omega)$ *là hàm điều hòa dưới chặt. Nếu*

$$|\partial u|_u^2 \leq \beta \quad \textit{trong } \Omega \tag{2.6}$$

với hằng số $\beta > 0$ *nào đó thì*

$$\lambda_1(\Delta_u, \Omega) \geq \frac{n^2}{\beta} \tag{2.7}$$

trong đó $\lambda_1(\Delta_u, \Omega)$ *là cận dưới nhỏ nhất của phổ dương của toán tử* Δ_u *trên* Ω.

Chứng minh. Đặt $f(z) = e^{-\alpha u(z)}$ với $z \in \Omega,\ \alpha > 0$.
Theo Bổ đề 2.1, ta có

$$\Delta_u f(z) = 4\alpha(n - \alpha|\partial u|_u^2)f(z) \geq 4\alpha(n - \alpha\beta)f(z), \quad z \in \Omega.$$

Ta sẽ chứng minh rằng, trên Ω, ta có

$$\lambda_1(\Delta_u, \Omega) \geq 4\alpha(n - \alpha\beta), \quad \alpha > 0.$$

Thật vậy, $\forall\epsilon > 0$, giả sử $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ là một miền con compact của Ω sao cho $\partial\Omega_\epsilon \in C^\infty$ và $\Omega_\epsilon \uparrow \Omega$ khi $\epsilon \to 0^+$. Giả sử $\lambda_1(\epsilon)$là giá trị riêng dương đầu tiên của bài toán Dirichlet đối với Δ_u với hàm riêng $v(z)$ trên Ω_ϵ. Khi đó do tính chất chính quy của v mà hàm $v(z)$ dương trên Ω_ϵ. Hơn nữa $v = 0$ trên $\partial\Omega_\epsilon$. Sử dụng bất đẳng thức (2.4) cho các hàm

$$\begin{cases} h_1 = v \\ \\ h_2 = f \end{cases},$$

ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Omega_\epsilon} (f\Delta_u v - v\Delta_u f)dV_u = \int_{\Omega_\epsilon} [f\lambda_1(\epsilon)v - v4\alpha f(n - \alpha|\partial|_u^2)]dV_u \\ &\leq \lambda_1(\epsilon)\int_{\Omega_\epsilon} fvdV_u - 4\alpha(n - \alpha\beta)\int_{\Omega_\epsilon} fvdV_u \\ &= [\lambda_1(\epsilon) - 4\alpha(n - \alpha\beta)]\int_{\Omega_\epsilon} fvdV_u. \end{aligned}$$

Do f, v là các hàm dương trong Ω_ϵ nên

$$\lambda_1(\epsilon) - 4\alpha(n - \alpha\beta) \geq 0.$$

Điều này tương đương với

$$\lambda_1(\epsilon) \geq 4\alpha(n - \alpha\beta).$$

Vì vậy

$$\lambda_1(\Delta_u, \Omega) = \liminf_{\epsilon \to 0} \lambda_1(\epsilon) \geq 4\alpha(n - \alpha\beta).$$

Do đó

$$\lambda_1(\Delta_u, \Omega) \geq \max_{\alpha > 0}\{4\alpha\,(n - \alpha\beta)\} = 4\frac{n}{2\beta}\left(n - \frac{n}{2\beta}\beta\right) = \frac{n^2}{\beta}.$$

Vậy mệnh đề được chứng minh xong. $\square$

Chú ý 2.1. *Để thuận tiện, chúng ta sẽ sử dụng các ký hiệu $\lambda_1(\Delta_u, D)$, $\lambda_1(D)$ và λ_1 thay thế cho nhau để chú thích lại infimum của phổ dương của Δ_u trên D. Nhắc lại rằng, ở đây chúng ta đang giả sử α và β là các hằng số dương, dV_u là dạng thể tích trên D tương ứng với metric Kähler $\sum_{i,j=1}^n u_{i\bar{j}} dz_i \otimes d\bar{z}_j$, dv là dạng thể tích Lebesgue trên $\mathbb{C}^n$ và $d\sigma$ là dạng Hausdorff trên siêu mặt bất kỳ trong D.*

2.2 Ước lượng cận trên của λ_1

Giả sử J là toán tử Fefferman được định nghĩa trong [3] thì

$$J(r) = -\det \begin{bmatrix} r & \overline{\partial} r \\ (\overline{\partial} r)^* & H(r) \end{bmatrix},$$

trong đó

$$\overline{\partial} r = [r_{\bar{1}}, ..., r_{\bar{n}}], \quad (\overline{\partial} r)^* = [r_1, ..., r_n]^t \quad \text{và } H(r) = [r_{i\bar{j}}] = \left[\frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right].$$

Do $r(z) = -e^{-u(z)}$ nên

$$\overline{\partial} r = u_{\overline{z}} e^{-u}, \quad (\overline{\partial} r)^* = (u_{\overline{z}} e^{-u})^t, \quad r_{i\overline{j}} = u_{i\overline{j}} e^{-u} - u_i u_{\overline{j}} e^{-u}.$$

Từ định nghĩa của $J(r)$ ta có

$$J(r) = e^{-(n+1)u} \det \begin{bmatrix} u_{1\overline{1}} & \dots & u_{1\overline{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n\overline{1}} & \dots & u_{n\overline{n}} \end{bmatrix}.$$

Đặt

$$H(u) := \begin{bmatrix} u_{1\overline{1}} & \dots & u_{1\overline{n}} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ u_{n\overline{1}} & \dots & u_{n\overline{n}} e^{-u} \end{bmatrix}.$$

Khi đó $J(r) = e^{-(n+1)u} \det H(u)$.
Một cách tương đương, ta có

$$\det H(u) = \frac{J(r)}{e^{-(n+1)u}} = \frac{J(r)}{(-1)^{n+1} \left[(-e^{-u})^{n+1}\right]} = \frac{J(r)}{(-1)^{n+1} r^{n+1}}.$$

Vậy, từ đó ta kết luận

$$\det H(u) = J(r) \left(\frac{1}{-r}\right)^{n+1}.$$

Từ khẳng định trên, ta dễ dàng nhận được

$$dV_u = \det H(u) dv = \frac{J(r)}{(-r)^{n+1}} dv.$$

Định lý 2.1. *Nếu $|\partial u|_u^2 \leq \beta$ trên D và $r \in C^2(D) \cap C^{0,1}(\overline{D})$ với $J(r)$ bị chặn trên D thì*

$$\lambda_1(D) \leq \beta n^2. \tag{2.8}$$

Chứng minh. Ta sẽ ước lượng cận trên của λ_1 thông qua đặc trưng biến phân của λ_1 bằng cách xây dựng hàm thử phù hợp f và thay vào định nghĩa của λ_1. Để làm như vậy, trước hết, ta chọn $\alpha = \frac{n}{2} + \epsilon$ với $\epsilon > 0$ rất nhỏ và $f(z) = (-r(z))^\alpha$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
\int_D |f(z)|^2 dV_u &= \int_D (-r(z))^{2\alpha} dV_u \\
&= \int_D (-r(z))^{n+2\epsilon} \frac{J(r)}{(-r(z))^{n+1}} dv \\
&= \int_D \frac{J(r)(z)}{(-r(z))^{1-2\epsilon}} dv(z) < +\infty
\end{aligned}$$

vì $(-r(z)) \approx \operatorname{dist}(z, \partial D)$ khi z ở gần ∂D và $J(r)$ là bị chặn trên D. Do đó, theo đặc trưng biến phân của λ_1, ta có

$$\lambda_1 \leq \frac{(\nabla f, \nabla f)_u}{(f, f)_u} = \frac{\int_D 4 \sum_{i,j=1}^n u^{i\bar{j}} \partial_i f \partial_{\bar{j}} f dV_u}{(f, f)_u}.$$

Với cách chọn hàm f như trên, ta thấy rằng

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial z_i} = [(-r(z))^\alpha]'_{z_i} = -\alpha(-r)^\alpha \partial_i u.$$

Tương tự

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{j}} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} &= [(-r(z))^\alpha]'_{\bar{z}_j} = \alpha(-r(z))^{\alpha-1}(-r(z))'_{\bar{z}_j} \\
&= -\alpha(-r)^{\alpha-1} r_{\bar{j}} = \frac{-\alpha(-r)^\alpha r_{\bar{j}}}{r} = -\alpha(-r)^\alpha \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = -\alpha(-r)^\alpha \partial_{\bar{j}} u.
\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\leq \frac{\int_D 4 \sum_{i,j=1}^n u^{i\bar{j}} \alpha^2 (-r)^{2\alpha} \partial_i u \partial_{\bar{j}} u dV_u}{(f, f)_u} \\
&\leq \frac{\int_D 4\alpha^2 (-r)^{2\alpha} |\partial u|_u^2 dV_u}{(f, f)_u} \\
&\leq \frac{\int_D 4\alpha^2 |f(z)|^2 |\partial u|_u^2 dV_u}{(f, f)_u} \\
&\leq 4\alpha^2 \beta \frac{\int_D |f(z)|^2 dV_u}{(f, f)_u} = 4\alpha^2 \beta.
\end{aligned}$$

Khi $\alpha = \dfrac{n}{2} + \epsilon \to \dfrac{n^+}{2}$ thì $\lambda_1 \leq 4\left(\dfrac{n}{2}\right)^2 \beta = n^2\beta$.
Định lý được chứng minh xong. $\square$

Với mỗi $\epsilon > 0$, đặt

$$D_\epsilon := \{z \in D : r(z) < -\epsilon\}. \tag{2.9}$$

Chú ý rằng $\partial D_\epsilon \in C^2$, $D_\epsilon \uparrow D$ khi $\epsilon \to 0^+$. Khi đó ta có một ước lượng cận trên của λ_1 như sau.

Định lý 2.2. *Nếu* $\lim\limits_{z\to\partial D} |\partial u|_u^2 = \beta$ *và* $\int_{\partial D_t} J(r)(z)d\sigma(z)$ *là một hàm liên tục theo* t *trên* $[0,1]$, *thì*

$$\lambda_1(D) \leq n^2\beta. \tag{2.10}$$

Chứng minh. Với $\alpha := \dfrac{n}{2} + s$ $(s > 0,$ rất nhỏ$)$ và $\gamma > 0$, ta đặt

$$f(z) = \begin{cases} [-r(z)]^s\{[-r(z)]^\gamma - \epsilon^\gamma\} & \text{nếu } z \in D\backslash D_\epsilon \\ \\ 0 & \text{nếu } z \notin D\backslash D_\epsilon \end{cases}.$$

Trước hết, ta thấy rằng

$$\begin{aligned}(f,f)_u &= \int_D |f(z)|^2 dV_u \\ &= \int_{D\backslash D_\epsilon} \frac{(-r)^{n+2s}[(-r)^\gamma - \epsilon^\gamma]^2 J(r)}{(-r)^{n+1}} dv \\ &= \int_{D\backslash D_\epsilon} \frac{[(-r)^\gamma - \epsilon^\gamma]^2 J(r)}{(-r)^{1-2s}} dv < +\infty\end{aligned}$$

vì $-r(z) \approx \operatorname{dist}(z, \partial D)$ nếu z ở gần ∂D và $J(r)$ bị chặn trong $D\backslash D_\epsilon$.
Tiếp theo, ta đặt

$$C := \int_{\partial D} J(r)(z)d\sigma(z).$$

Do $\lim\limits_{z\to\partial D} |\partial u|_u^2 = \beta$ và

$$\lim_{t\to 0} \int_{\partial D_t} J(r)(z)d\sigma(z) = \int_{\partial D} J(r)(z)d\sigma(z) = C$$

nên tồn tại $\delta(\epsilon) > 0$ sao cho $|\partial u|_u^2 \leq \beta(1+\delta(\epsilon))$ trên $D\backslash D_\epsilon$ và

$$\left|\int_{\partial D_t} J(r)(z)d\sigma(z) - \int_{\partial D} J(r)(z)d\sigma(z)\right| \leq C\delta(\epsilon) \qquad \forall\, 0 < t < \epsilon.$$

Từ bất đẳng thức trên ta nhận được

$$C(1-\delta(\epsilon)) \leq \int_{\partial D_t} J(r)(z)d\sigma(z) \leq C(1+\delta(\epsilon))$$

với $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \delta(\epsilon) = 0$.

Do $-r = e^{-u}$ nên với mỗi $z \in D\backslash D_\epsilon$, bằng biến đổi sơ cấp, ta có $f(z) = (e^{-u})^\alpha[(e^{-u})^\gamma - \epsilon^\gamma] = e^{-\alpha u}(e^{-\gamma u} - \epsilon^\gamma) = e^{-(\alpha+\gamma)u} - \epsilon^\gamma e^{-\alpha u}$.
Từ đó, ta dễ dàng chỉ ra rằng

$$f_i = u_i[-(\alpha+\gamma)e^{-(\alpha+\gamma)u} + \alpha\epsilon^\gamma e^{-\alpha u}],\ f_{\bar{j}} = u_{\bar{j}}[-(\alpha+\gamma)e^{-(\alpha+\gamma)u} + \alpha\epsilon^\gamma e^{-\alpha u}].$$

Sử dụng nguyên lý Rayleigh, ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
\lambda_1(D\backslash D_\epsilon) &\leq \frac{(\nabla f, \nabla f)_u}{(f,f)_u} = \frac{4\int_{D\backslash D_\epsilon}\sum_{i,j=1}^n u^{i\bar{j}} f_i f_{\bar{j}} dV_u}{(f,f)_u} \\
&= \frac{4\int_{D\backslash D_\epsilon}\sum_{i,j=1}^n u^{i\bar{j}} u_i u_{\bar{j}}[-(\alpha+\gamma)e^{-(\alpha+\gamma)u} + \alpha\epsilon^\gamma e^{-\alpha u}]^2 dV_u}{\int_{D\backslash D_\epsilon}[e^{-(\alpha+\gamma)u} - \epsilon^\gamma e^{-\alpha u}]^2 dV_u} \\
&= \frac{4\int_{D\backslash D_\epsilon}|\partial u|_u^2\,[-(\alpha+\gamma)e^{-(\alpha+\gamma)u} + \alpha\epsilon^\gamma e^{-\alpha u}]^2 dV_u}{\int_{D\backslash D_\epsilon}[e^{-(\alpha+\gamma)u} - \epsilon^\gamma e^{-\alpha u}]^2 dV_u} \\
&\leq 4\beta\frac{\int_{D\backslash D_\epsilon}[-(\alpha+\gamma)e^{-(\alpha+\gamma)u} + \alpha\epsilon^\gamma e^{-\alpha u}]^2 dV_u}{\int_{D\backslash D_\epsilon}[e^{-(\alpha+\gamma)u} - \epsilon^\gamma e^{-\alpha u}]^2 dV_u}, \quad \forall \epsilon > 0.
\end{aligned}$$

Với $\epsilon > 0$ đủ nhỏ, ta nhận được

$$\lambda_1(D\backslash D_\epsilon) \leq 4\beta\frac{\int_{D\backslash D_\epsilon}(\alpha+\gamma)^2 e^{-2(\alpha+\gamma)u} dV_u}{\int_{D\backslash D_\epsilon} e^{-2(\alpha+\gamma)u} dV_u} = 4(\alpha+\gamma)^2\beta + \epsilon.$$

Cho $\gamma \to 0^+$ và $\alpha \to \dfrac{n}{2}$, kết quả là

$$\lambda_1(D\backslash D_\epsilon) \leq 4\frac{n^2}{4}\beta + \epsilon = \beta n^2 + \epsilon.$$

Do tính chất đơn điệu theo miền của các giá trị riêng nên với mọi $\epsilon > 0$ thì $\lambda_1(D) \leq \lambda_1(D\backslash D_\epsilon)$. Vì vậy $\lambda_1(D) \leq \beta n^2 + \epsilon$. Vì ϵ là bé tùy ý, ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.3 Giá trị cực đại của λ_1 trên một vài miền đặc biệt

Định lý 2.3. *Giả sử D là miền giả lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với một hàm xác định $r(z) \in C^2(\mathbb{C}^n)$. Giả thiết rằng $u(z) = -\log(-r(z))$ là hàm đa điều hòa dưới chặt trên D với $\beta(z) = 1$ trên ∂D. Khi đó ký hiệu $\lambda_1(D) = \lambda_1(\Delta_u, D)$, ta có:*
(a) *$\lambda_1(D) \leq \lambda_1(D\backslash K) \leq n^2$ với bất kỳ tập con compact K nào của D.*
(b) *Nếu bổ sung thêm điều kiện $r(z)$ là hàm đa điều hòa dưới trên D thì $\lambda_1(D) = n^2$.*

Chứng minh. a) Từ kết quả của hai định lý trên ta có

$$\lambda_1(D) \leq \lambda_1(D\backslash K) \leq n^2 \qquad \forall\, K_{\text{cp}} \subset D.$$

b) Do $r(z)$ là hàm đa điều hòa dưới trong D, không mất tính tổng quát, ta giả sử $H(r)(z)$ xác định dương với $z \in D$ hoặc có thể sử dụng $r_1(z) = r(z) + \epsilon(|z|^2 - d)$ thay thế cho $r(z)$, với d là đường kính của D. Từ Bổ đề 2.1 phần (ii), ta có

$$|\partial u|_u^2 = \frac{|\partial r|_r^2}{-r + |\partial r|_r^2} \leq 1$$

nên theo Mệnh đề 2.1, suy ra $\lambda_1(D) \geq n^2$.
Mặt khác, theo Định lý 2.1, ta lại có $\lambda_1(D) \leq n^2$.
Do vậy với $r(z)$ là hàm đa điều hòa dưới trong D thì $\lambda_1(D) = n^2$. □

Từ định lý này ta dẫn tới một hệ quả quan trọng sau đây.

Hệ quả 2.1. *Giả sử D là một miền giả lồi chặt, bị chặn trơn trong $\mathbb{C}^n$ với hàm xác định $r(z) \in C^2(\mathbb{C}^n)$ và $u(z) = -\log(-r(z)$. Khi đó*
(i) *Nếu $\sum_{\alpha,\beta=1}^n u_{\alpha\overline{\beta}} dz_\alpha \otimes d\overline{z}_\beta$ là một metric Kähler-Einstein trên D thì $\lambda_1(\Delta_1, D) \leq n^2$, trong đó u là nghiệm đa điều hòa dưới chặt của phương trình Monge-Ampère:*

$$\det H(u) = e^{(n+1)u} \text{ trên } D \text{ và } u = \infty \text{ trên } \partial D. \tag{2.11}$$

(ii) *Nếu $\sum_{\alpha,\beta=1}^n u_{\alpha\overline{\beta}} dz_\alpha \otimes d\overline{z}_\beta$ là một metric Bergman trên D, trong đó*

$$u_{i\bar{j}} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial^2 \log K(z,z)}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}$$

và $K(z,w)$ là hàm nhân Bergman đối với miền D thì $\lambda_1(\Delta_u, D) \le n^2$.

Chứng minh. (i) Trước hết ta quan tâm đến toán tử Laplace-Beltrami trong trường hợp metric Kähler-Einstein. Giả sử u là hàm đa điều hòa dưới chặt trong D sao cho

$$\begin{cases} \det H(u) = e^{(n+1)u} & \text{trong } D \\ \\ u = +\infty & \text{trên } \partial D \end{cases} \tag{2.12}$$

và

$$r(z) = -e^{-u(z)}. \tag{2.13}$$

Khi đó

$$\det H(u) = J(r)\left(\frac{1}{-r}\right)^{n+1}.$$

Do giả thiết về nghiệm u của phương trình Monge-Ampère (2.12), ta có

$$e^{(n+1)u} = J(r)\left(\frac{1}{e^{-u}}\right)^{n+1}.$$

Dễ dàng thấy rằng, từ phương trình này, ta nhận được

$$J(r) = e^{(n+1)u}e^{-(n+1)u} = e^0 = 1.$$

Bởi các định lý chính quy nghiệm của phương trình Monge-Ampère phức của Cheng và Yau ([2]), Lee và Melrose ([7]), ta có $r(z) \in C^{n+2-\epsilon}(\overline{D})$ với mọi $\epsilon > 0$. Vì vậy, $\partial r \ne 0$ trên ∂D và

$$\det H(r) = e^u\left(1 - |\partial u|_u^2\right) \quad \text{trên } D.$$

Do $\det H(r)(z)$ bị chặn trên $\overline{D}$ và $u(z) \to +\infty$ khi $z \to \partial D$ nên

$$\lim_{z\to\partial D} |\partial u|_u^2 = 1.$$

Áp dụng Định lý 2.1 với $\beta = 1$ ta có kết quả $\lambda_1(D) \le n^2$.

(ii) Giả sử K là hàm nhân Bergman. Đặt $u(z) = \dfrac{1}{n+1}\log K(z,z)$ thì $u(z)$ là hàm đa điều hòa dưới chặt trong D.
Đặt $r(z) = -e^{-u(z)}$ thì $r \in C^{n+2-\epsilon}(\overline{D})$ là một hàm xác định trên D theo kết quả của Fefferman ([4]). Giả sử $\rho \in C^{\infty}(\overline{D})$ là một hàm xác định đa điều hòa dưới chặt bất kỳ trên D. Theo Fefferman ([4]), ta có

$$u(z) = -log(-\rho(z)) + b(z),$$

trong đó $b \in C^{n+2-\epsilon}(\overline{D})$. Do đó

$$[u^{i\bar{j}}] = [(-log(-\rho))^{i\bar{j}}](I_n + \rho B), \tag{2.14}$$

trong đó B là một ma trận vuông cấp n với tất cả các phần tử bị chặn gần ∂D. Đặt $u^0 = -log(-\rho)$ thì từ (2.9) ta có $\lim\limits_{z\to\partial D} |\partial u^0|^2_{u^0} = 1$. Từ phương trình (2.14), chúng ta có thể chứng minh được

$$|\partial u^0|^2_{u^0}(1 + C\rho) \leq |\partial u|^2_u \leq |\partial u^0|^2_{u^0}(1 - C\rho)$$

với $C \gg 1$ và z gần ∂D. Vì vậy, $\lim\limits_{z\to\partial D} |\partial u|^2_u = 1$.
Áp dụng Định lý 2.2 với $\beta = 1$, ta có $\lambda_1(D) \leq n^2$ đối với toán tử Laplace-Beltrami trong metric Bergman.
Đó là điều phải chứng minh.

$\square$

Kết luận

1. Luận văn đã chứng minh một cách chi tiết các kết quả chính trong bài báo của Song-Ying Li và My-An Tran([16]). Các kết quả bao gồm, chứng minh các ước lượng cận trên và cận dưới cho phổ của toán tử Laplace–Beltrami trên các miền giả lồi đặc biệt. Từ đó đưa ra các áp dụng để đánh giá cận trên của giá trị phổ trên các miền giả lồi với metric Kähler-Einstein và metric Bergman.

2. Luận văn đưa ra một cách chứng minh mới cho Định lý 2.2. Chứng minh này đơn giản và ngắn gọn hơn so với bài báo gốc.

Tài liệu tham khảo

[1] S. Y. Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric application*, Math. Zeits., **143** (1975), 289-297.

[2] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *On the existence of a complex Kähler metric on noncompact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation*, Comm. Pure Appl. Math., **33** (1980), 507-544.

[3] C. Fefferman, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains*, Ann. of Math., **103** (1976), 395-416.

[4] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math., **65** (1974), 1-65.

[5] L. Ji, P. Li and J. Wang, *Ends of locally symmetric spaces with maximal bottom spectrum*, J. Reine Angew. Math., **632** (2009), 1-35. 58Jxx(22Exx)

[6] S. Kong, P. Li and D. Zhou, *Spectrum of the Laplacian on quaternionic Kähler manifolds*, J. Differential Geom., **78** (2008), 295-332.

[7] J. M. Lee and R. Melrose, *Boundary behavior of the complex Monge-Ampère equations*, Acta Math., **148** (1982), 159-192.

[8] P. Li, *Lecture notes on geometric analysis*, Lecture Notes Series, **6**, Research Institute of Mathematics and Global Analysis Research Center, Seoul National University, Korea, 1993.

[9] P. Li, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Handbook of Geometric Analysis, No. 1, Advanced Lectu. Maths., **7**, International press, 2008.

[10] P. Li and J. Wang, *Comparion theorem for Kähler manifolds and positivity of spectrum*, J. Differential Geom., **69** (2005), 43-74.

[11] P. Li and J. Wang, *Complete manifolds with positive spectrum II*, J. Differential Geom., **62** (2002), 143-162.

[12] P. Li and J. Wang, *Complete manifolds with positive spectrum*, J. Differential Geom., **58** (2001), 501-534.

[13] S. Y. Li, *Characterization for balls by potential function of Kähler-Einstein metrics for domains in* $\mathbb{C}^n$, Comm. Anal. Geom., **13**(2) (2005), 461-478.

[14] S. Y. Li, *On the existence and regularity of Dirichlet problem for complex Monge-Ampère equations on weakly pseudoconvex domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **20** (2004), 119-132.

[15] S. Y. Li, *Characterization for a class of pseudoconvex domains whose boundaries having positive constant pseudo scalar curvature*, Comm. Anal. Geom., **17** (2009), 17-35.

[16] S. Y. Li and M. A. Tran, *Infimum of the spectrum of Laplace–Beltrami operator on a bounded pseudoconvex domain with a Kähler metric of Bergman type*, Comm. Anal. Geom., **18**(2) (2010), 375–395.

[17] O. Munteanu, *A sharp estimate for the bottom of the spectrum of the Laplacian on Kähler manifolds*, J. Differential Geom., **83** (2009), 163-187.

[18] S. Udagawa, *Compact Kähler manifolds and the eigenvalues of the Laplacian*, Colloq. Math., **56**(2) (1988), 341-349.