ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRẦN THỊ THỦY

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và thống kê toán học

Mã số: 60 46 0106

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

GS.TS.ĐẶNG HÙNG THẮNG

Hà Nội - 2015

LỜI NÓI ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài:

Từ cuối thế kỉ 17, Newton và Leibniz đã xây dựng phép tính vi phân và tích phân cổ điển. Tới nửa đầu thế kỉ 20, tích phân ngẫu nhiên bắt đầu được xây dựng. Cùng với phương trình vi phân ngẫu nhiên thì phép tính tích phân ngẫu nhiên đã trở thành công cụ quan trọng ứng dụng nhiều trong toán học, vật lý, sinh học và kinh tế. Trong phương trình toán tử tuyến tính, phương trình tích phân ngẫu nhiên giúp cho việc nghiên cứu toán học hiện đại mang lại nhiều kết quả.

Trong luận văn "Phương trình tích phân ngẫu nhiên" này, chúng ta xét hai loại phương trình tích phân ngẫu nhiên là Fredholm và Volterra. Ngoài ra, chúng ta xét một số phương trình tích phân ngẫu nhiên phi tuyến. Chúng được quan tâm lớn và có tầm quan trọng trong nhiều nhánh của khoa học, kinh tế và công nghệ. Đặc biệt, những phương trình tích phân phi tuyến xuất hiện trong những hiện tượng vật lý cụ thể và trong việc xây dựng phương trình tích phân của những phương trình vi phân phi tuyến.

2. Cấu trúc của luận văn

Luận văn này gồm các phần như sau.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

Chương 2: Phương trình tích phân ngẫu nhiên Fredholm và Volterra :

Chương 3: Một số phương trình tích phân phi tuyến

Mục lục

Lời nói đầu **1**

1 Kiến thức chuẩn bị **4**

1.1 Phương trình tích phân tất định: 4

1.1.1 Giới thiệu: 4

1.1.2 Phương trình Fredholm loại 2 với hạch suy biến: . . 7

1.1.3 Phương trình tích phân phi tuyến: 8

1.2 Phép tính vi tích phân cho hàm ngẫu nhiên 10

1.3 Toán tử ngẫu nhiên tuyến tính 11

1.3.1 Toán tử ngẫu nhiên tuyến tính liên tục 11

1.3.2 Toán tử ngẫu nhiên tuyến tính bị chặn: 12

2 PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN FREDHOLM VÀ VOLTERRA **14**

2.1 Phương trình Fredholm và Volterra với hàm vế phải là ngẫu nhiên 14

2.1.1 Giới thiệu: 14

2.1.2 Nghiệm của phương trình tích phân: 14

2.1.3 Nghiệm của hàm hiệp phương sai: 15

2.1.4 Sự liên tục bình phương trung bình của nghiệm: . . 16

2.1.5 Phương trình tích phân Volterra với đầu vào Wiener: 17
2.2 Hạch $K(x, y, \omega)$ là ngẫu nhiên suy biến 17
2.3 Hạch $K(x, y, \omega)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian các hàm gián đoạn vừa phải 18

3 MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN PHI TUYẾN 19

3.1 Phương trình vi phân phi tuyến ngẫu nhiên 19
3.1.1 Thiết lập phương trình tích phân của một số các phương trình vi phân phi tuyến ngẫu nhiên 19
3.1.2 Phương trình vi phân phi tuyến ngẫu nhiên trong không gian các hàm liên tục: 21
3.2 Phương trình tích phân phi tuyến với vế phải ngẫu nhiên . . 22
3.3 Phương trình tích phân phi tuyến loại Volterra với hạch ngẫu nhiên và vế phải ngẫu nhiên 22

Tài liệu tham khảo 24

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Phương trình tích phân tất định:

1.1.1 Giới thiệu:

Xét phương trình tích phân:

$$\int_a^b K(x,y)f(y)dy = g(x) \tag{1.1}$$

$$\int_a^b K(x,y)f(y)dy - \lambda f(x) = g(x) \tag{1.2}$$

là phương trình Fredholm không thuần nhất của loại thứ nhất và thứ hai tương ứng và phương trình tích phân tuyến tính:

$$\int_a^x K(x,y)f(y)dy = g(x) \tag{1.3}$$

$$\int_a^x K(x,y)f(y)dy - \lambda f(x) = g(x) \tag{1.4}$$

là phương trình Volterra không thuần nhất của loại thứ nhất và thứ hai tương ứng. Từ sự phân loại của phương trình tuyến tính trên, ta thấy phương trình Volterra là trường hợp đặc biệt của một phương trình Fredholm với hạch:

$$\widetilde{K}(x,y) = \begin{cases} K(x,y) & \text{nếu } x > y \\ 0 & \text{nếu } x < y \end{cases} \tag{1.5}$$

1. Bài toán giá trị ban đầu:

Xét phương trình vi phân cấp 2:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = f(t) \tag{1.6}$$

cùng với điều kiện ban đầu

$$x(0) = x_0, \qquad x'(0) = v_0 \tag{1.7}$$

Trong (1.6) a và b có thể là những hàm của t. Nếu chúng ta viết lại phương trình (1.6) là:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dx}{dt} - bx + f(t)$$

và tích phân trong khoảng $(0, t)$ chúng ta có được, sử dụng (1.7)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\int_0^t a\frac{dx}{dt}dr - \int_0^t bxdr + \int_0^t fdr \\ &= -ax - \int_0^t (b - a')xdr + \int_0^t fdr + a(0)x_0 + v_0\end{aligned}$$

Tích phân trên chúng ta có được:

$$\begin{aligned}x(t) = x_0 - \int_0^t a(r)x(r)dr - \int_0^t \int_0^t [b(r) - a(r)]x(r)drdr \\ + \int_0^t \int_0^t f(r)drdr + [a(0)x_0 + v_0]t\end{aligned}$$

mà có thể được viết với hình thức là:

$$\begin{aligned}x(t) = -\int_0^t a(r) + (t - r)[b(r) - a'(r)]x(r)dr \\ + \int_0^t (t - r)f(r)dr + [a(0)x_0 + v_0]t + x_0\end{aligned}$$

Có thể viết lại là:

$$x(t) - \int_0^t K(t, r)x(r)dr = g(t) \tag{1.8}$$

Trong đó:

$$K(t,r) = (r-t)[b(r) - a'(r)] - a(r)$$
$$g(t) = \int_0^t (t-r)f(r)dr + [a(0)x_0 + v_0]t + x_0$$

Do đó chúng ta đã chỉ ra rằng phương trình (1.6) và (1.7) và phương trình tích phân (1.8) như một phương trình Volterra của loại thứ hai.

2. Bài toán biên:

Xét phương trình vi phân sau:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x(a) = 0 \tag{1.9}$$

Tiến hành như trong ví dụ đầu tiên, tích phân trong khoảng $(0,t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda \int_0^t x(r)dr + x'(0)$$

Ở đây $x'(0)$ chưa biết. Tích phân lặp lại khoảng $(0,t)$ và sử dụng điều kiện $x(0) = 0$, chúng ta có được:

$$x(t) = -\lambda \int_0^t (t-r)x(r)dr + x'(0)t \tag{1.10}$$

Thay điều kiện thứ hai $x(a) = 0$ chúng ta có:

$$x'(0) = (\lambda/a)\int_0^a (a-r)x(r)dr$$

Do đó, (1.10) có thể được viết lại là :

$$\begin{aligned} x(t) &= -\lambda \int_0^t (t-r)x(r)dr + t(\lambda/a)\int_0^a (a-r)x(r)dr \\ &= (\lambda/a)\int_0^t r(a-t)x(r)dr + (\lambda/a)\int_t^a t(a-r)x(r)dr \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nếu chúng ta đặt :

$$K(t,r) = \begin{cases} (r/a)(a-t) & \text{với } r < t \\ (t/a)(a-r) & \text{với } r > t \end{cases}$$

Phương trình (1.11) có thể được viết lại là:

$$x(t) = \lambda \int_0^a K(t,r)x(r)dr \tag{1.12}$$

Do đó, phương trình (1.9) dẫn đến phương trình Fredholm của loại thứ hai.

3. Xét toán tử vi phân tuyến tính cấp 2 sau:

$$L[x] = \frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dx}{dt}\right] + q(t)x \tag{1.13}$$

Ở đó, $p(t) \geqslant 0$. Chúng ta sẽ xét hàm $x(t)$ ở hai đầu của một khoảng đã cho (a,b) thỏa mãn điều kiện biên thuần nhất:

$$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0, \qquad \gamma x(b) + \delta x'(b) = 0 \tag{1.14}$$

1.1.2 Phương trình Fredholm loại 2 với hạch suy biến:

Trong phần này, chúng ta xét phương trình tích phân Fredholm loại hai:

$$\int_0^1 K(x,y)f(y)dy - \lambda f(x) = g(x) \tag{1.15}$$

trong trường hợp hạch $K(x,y)$ là hạch suy biến. Một hạch Fredholm $K(x,y)$ được gọi là suy biến nếu nó có dạng:

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(y) \tag{1.16}$$

với $\alpha_i(x)_{i=1}^n$ và $\beta_i(y)_{i=1}^n$ là hai bộ độc lập của hàm $L_2(0,1)$ độc lập tuyến tính. Trong trường hợp này, phương trình tích phân Fredholm (1.15) tương đương hệ n phương trình đại số tuyến tính với n chưa biết. eqref6'.

1.1.3 Phương trình tích phân phi tuyến:

$$x(t) = x(a) + \int_a^t f(r, x(r))dr \tag{1.17}$$

và bài toán giá trị biên có thể dẫn đến phương trình tích phân Hammerstein có dạng:

$$x(t) + \int_a^K (t, r)f(r, x(r))dr = 0 \tag{1.18}$$

Định lý 1.1. *Hàm ngẫu nhiên* $X = X(t), t \in T = [a, b]$ *là* L_2 *khả tích nếu và chỉ nếu hàm trung bình m(t) khả tích trên* T *và hàm tự tương quan* $K(s, t)$ *khả tích trên* $T \times T$. *Trong trường hợp đó ta có:*

$$E[\int_a^b X(t)dt] = \int_a^b EX(t)dt = \int_a^b m(t)dt$$

$$Var[\int_a^b X(t)dt] = \int_a^b \int_a^b K(s, t)dsdt$$

$$cov[\int_a^b X(t)dt, \int_c^d X(t)dt] = \int_a^b \int_c^d K(s, t)dsdt$$

Nếu $X = X(t), t \in T = [a, b], Y = Y(t), t \in T = [c, d]$ *là* L_2 *khả tích thì:*

$$E[\int_a^b X(t)dt][\int_c^d Y(t)dt] = \int_a^b \int_c^d E[X(t)Y(s)]dsdt \tag{1.19}$$

Từ đó suy ra

$$cov[\int_a^b X(t)dt, \int_c^d X(t)dt] = \int_a^b \int_a^b cov[X(t)Y(s)]dsdt$$

Ví dụ 1.1. *Giả sử* $W = (W(t), t \geqslant 0)$ *là hàm ngẫu nhiên Wiener. Xét hàm ngẫu nhiên* $X = (X(t), t \geqslant 0)$ *xác định bởi:*

$$X(t) = \int_0^t W(s)ds$$

Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan của X.

Ví dụ 1.2. *Ta tìm khai triển Karunen-Loeve của hàm ngẫu nhiên Wiener trên [0;1]. Ta có* $m(t) = 0, K(s,t) = min(s,t)$. *Xét phương trình:*

$$\int_0^1 min(s,t)\phi_n(s)ds = \lambda_n\phi_n(t)$$
$$\to \int_0^t s\phi_n(s)ds + t\int_t^1 \phi_n(s)ds = \lambda_n\phi_n(t)$$
$$\to \lambda_n\phi_n'(t) = -\int_1^t \phi_n(s)ds$$
$$\to \lambda_n\phi_n''(t) = -\phi_n(t)$$

Từ hệ phương trình vi phân này với điều kiện ban đầu $\phi_n(0) = 0, \phi_n'(1) = 0$ *và điều kiện chuẩn hóa* $\int_0^1 \phi_n^2(t)dt = 1$ *ta tìm được:*

$$\phi_n(t) = \sqrt{2}sin(n + \frac{1}{2})\pi t$$
$$\lambda_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Cho nên:

$$W(t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n sin(n + \frac{1}{2})\pi t$$

trong đó dãy $(\xi_n), n = 1, 2, \ldots$ *là dãy các biến Gauss độc lập* $N(0, \lambda_n)$.

Một khai triển Karunen-Loeve khác của hàm ngẫu nhiên Wiener trên [0;1] được thiết lập như sau:

Đặt $X(t) = W(t) - tW(1)$. *Dễ thấy X(t) là hàm ngẫu nhiên Gauss với hàm trung bình m(t)=0 và hàm tự tương quan* $K(s,t) = min(s-t) - ts$. *Tương tự như trên ta tìm được các hàm riêng và giá trị riêng là:*

$$\phi_n(t) = \sqrt{2}sin(n\pi t)$$
$$\lambda_n = \frac{1}{n^2\pi^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Vì vậy :

$$X(t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n sinn\pi t$$

$$\to W(t) = tW(1) + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n sinn\pi t$$

trong đó $(\xi_n), n = 1, 2, \ldots$ *là dãy các biến Gauss độc lập. Đặt* $\xi_0 = W(1)$ *dễ kiểm tra được* $E\xi_0 = 0, E\xi_0^2 = 1$ *và:*

$$E\xi + 0\xi_n = \sqrt{2}\int_0^1 E(W(t) - tW(1))W(1)sinn\pi tdt$$
$$= \sqrt{2}\int_0^1 (EW(t)W(1) - tEW(1)^2)sinn\pi tdt = 0$$

Do đó :

$$W(t) = t\xi_0 + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n sinn\pi t}{n\pi}$$

trong đó dãy $(\xi_n), n = 0, 1, 2, \ldots$ *là dãy các biến Gauss độc lập* $N(0, 1)$.

1.2 Phép tính vi tích phân cho hàm ngẫu nhiên

Định nghĩa 1.1. *Cho T=[a;b] và hàm ngẫu nhiên* $X = X(t), t \in T$

1. $X = X(t), t \in T$ *được gọi là* L_0 *khả vi tại điểm s nếu tồn tại giới hạn:*

$$p - \lim_{t\to s}\frac{X(t) - X(s)}{t - s}$$

Giới hạn này được kí hiệu là $L_0 - X'(s)$.

$X = X(t), t \in T$ *được gọi là* L_0 *khả vi trên T nếu* L_0 *khả vi tại mọi điểm* $s \in T$

2. Giả sử $X(t) \in L_p, \forall t \in T, X = X(t), t \in T$ *được gọi là* $(0 < p < \infty)$ *tại điểm s nếu tồn tại giới hạn:*

$$\lim_{t\to s}\frac{X(t) - X(s)}{t - s}$$

trong L_p. Giới hạn này được kí hiệu là $L_p - X'(s)$.

$X = X(t), t \in T$ được gọi là L_p khả vi nếu nó L_p tại mọi điểm $s \in T$

1.3 Toán tử ngẫu nhiên tuyến tính

1.3.1 Toán tử ngẫu nhiên tuyến tính liên tục

Định nghĩa 1.2. *Cho E là không gian metric khả ly và Y là không gian Banach khả ly. Một ánh xạ $\Phi : \Omega \times E \to Y$ được gọi là một toán tử ngẫu nhiên từ E vào Y nếu với mỗi $x \in E, \Phi(\omega, x)$ là một biến ngẫu nhiên Y giá trị.*

Định nghĩa 1.3. *Cho Φ là toán tử ngẫu nhiên từ E vào Y.*

1. Φ được gọi là liên tục tại $x_0 \in E$ nếu với mỗi $\omega \in \Omega$ ánh xạ $x \to \Phi(\omega, x)$ là liên tục tại x_0.

2. Φ được gọi là liên tục trên E nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in E$.

3. Φ được gọi là liên tục ngẫu nhiên tại điểm $x_0 \in E$ nếu với mỗi dãy $(x_n) \subset E$ sao cho $\lim x_n = x_0 \in E$ và với mỗi $\varepsilon > 0$ ta có:

$$\lim_{n\to\infty} P(\omega : ||\Phi(\omega, x_n) - \Phi(\omega, x_0)|| > \varepsilon) = 0$$

4. Φ được gọi là liên tục ngẫu nhiên trên E nếu nó liên tục tại mọi điểm $x_0 \in E$

Định lý 1.2. *Một toán tử ngẫu nhiên tuyến tính A từ E vào Y là liên tục ngẫu nhiên nếu và chỉ nếu:*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{||x||\leqslant 1} P(||Ax|| > t) = 0 \tag{1.20}$$

1.3.2 Toán tử ngẫu nhiên tuyến tính bị chặn:

Định lý 1.3. *Toán tử tuyến tính liên tục ngẫu nhiên A từ E vào Y là bị chặn nếu và chỉ nếu có tồn tại ánh xạ $T : \Omega \to L(X, Y)$ sao cho:*

$$Ax(\omega) = T(\omega)x \tag{1.21}$$

hầu chắc chắn.

Định lý 1.4. *Giả sử E là không gian Banach có cơ sở Shauder (e_n) và (e_n^*) là cơ sở liên hợp trong E^1. Cho A là toán tử tuyến tính liên tục ngẫu nhiên từ E vào Y. Khi đó A bị chặn nếu và chỉ nếu tồn tại tập D có xác suất 1 sao cho với mỗi $\omega \in D$ và với mỗi $x \in X$ chuỗi:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k^*) Ae_k(\omega)$$

hội tụ trong Y.

Định lý 1.5. *Giả sử $E = l_p (1 \leqslant p < \infty)$ và A là toán tử tuyến tính liên tục ngẫu nhiên từ E vào Y.*

1. Điều kiện cần để A bị chặn là:

$$\sup_n ||Ae_n|| < \infty \tag{1.22}$$

hầu chắc chắn.

2. Trường hợp p>1: Điều kiện đủ để A bị chặn là:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n||^q < \infty \tag{1.23}$$

hầu chắc chắn. Ở đó (e_n) là cơ sở tự nhiên trong l_p và q là số liên hợp với p. Nếu Y là không gian hữu hạn chiều thì (1.23) cũng là điều kiện cần để

A bị chặn.

3. Trường hợp p=1 (1.22) *cũng là điều kiện đủ để A bị chặn.*

Chú ý: Điều kiện (1.23) không là điều kiện cần. Xét ví dụ sau:
Giả sử (r_n) là dãy biến ngẫu nhiên Rademakher. Xác định toán tử tuyến tính liên tục ngẫu nhiên A từ l_p vào l_p bởi:

$$Ax(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(\omega)(x, e_n)e_n$$

Vì $\sum ||r_n(\omega)(x, e_n)e_n||^p = ||x||^p < \infty$ nên chuỗi này hội tụ với mọi $\omega \in \Omega$.
Theo định lý (1.23) ta có A bị chặn. Tuy nhiên:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||Ae_n(\omega)||^q = \sum_{n=1}^{\infty} ||r_n(\omega)e_n||^q = \infty$$

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN FREDHOLM VÀ VOLTERRA

2.1 Phương trình Fredholm và Volterra với hàm vế phải là ngẫu nhiên

2.1.1 Giới thiệu:

Xét phương trình tích phân tuyến tính ngẫu nhiên:

$$f(x,w) - Lf(y,w) = g(x,w) \tag{2.1}$$

Ở đó L là một toán tử Fredholm (hoặc Volterra) trên [a,b] (a,b hữu hạn) và $g(x,w)$ với $x \in [a,b]$ là hàm ngẫu nhiên bậc hai mà thỏa mãn điều kiện liên tục bình phương:

1. $E\{|g(x,w)|^2\} < \infty \qquad \forall x \in [a,b]$

2. $\lim\limits_{h\to\infty} E\{|g(x+h,w) - g(x,w)|^2\} = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$

2.1.2 Nghiệm của phương trình tích phân:

Bây giờ chúng ta phát biểu và chứng minh định lý sau:

Định lý 2.1. *Nếu*

(i) $K(x, y), \quad x, y \in [a, b]$ *là hạt nhân Fredholm mà* $|b - a|$ *max và* $|K(x, y)| < 1$

(ii) $g(x, y)$ *với* $x \in [a, b], \omega \in \Omega$ *là hàm ngẫu nhiên bậc hai thỏa mãn các điều kiện đã nêu. Khi đó, hàm ngẫu nhiên* $f(x, w)$ *được định nghĩa bởi:*

$$f(x, w) = g(x, w) - \int_a^b \Gamma(x, y) g(y, w) dy \tag{2.2}$$

$x \in [a, b] \quad \omega \in \Omega$ *là nghiệm của phương trình Fredholm* (2.1) *trên* $[a, b] \times \Omega$

2.1.3 Nghiệm của hàm hiệp phương sai:

Để

$$R_f(x_1, x_2) = \mathfrak{E}\{f(x_1, w) f(x_2, w)\} \qquad x_1, x_2 \in [a, b] \tag{2.3}$$

là hàm hiệp phương sai của nghiệm $f(x, w)$ của phương trình tích phân ngẫu nhiên (2.2). Thiết lập sự tồn tại của $R_f(x_1, x_2)$, chúng ta biểu diễn $\mathfrak{E}\{|f(x, w)|^2\} \leqslant \infty, \forall x \in [a, b]$ nghĩa là $f(x, w)$ là hàm ngẫu nhiên bậc hai. Dưới đây từ bất đẳng thức Holder:

$$|\int_a^b \Gamma(x, y) g(y, w) dy|^2 \leq \int_a^b |\Gamma(x, y)|^2 dy \int_a^b |g(y, w)|^2 dy$$

Và:

$$\mathfrak{E}\{|\int_a^b \Gamma(x, y) g(y, w) dy|^2\} \leq \int_a^b |\Gamma(x, y)|^2 dy \quad \mathfrak{E}\{\int_a^b |g(y, w)|^2 dy\} < \infty$$

$\forall x \in [a, b]$, từ $g(x, w)$ là liên tục trong hình vuông. Như vậy, nó theo sau từ (2.2) là $\mathfrak{E}\{|f(x, w)|^2\} < \infty, \forall x \in [a, b]$, thiết lập sự tồn tại của hàm hiệp phương sai $R_f(x_1, x_2)$. Phép tính của $R_f(x_1, x_2)$ là trực tiếp. Từ (2.3) và (2.2) chúng ta có:

$$
\begin{aligned}
&R_f(x_1, x_2) = \\
&= \mathfrak{E}\{(g(x_1, w) - \int_a^b \Gamma(x_1, y) g(y, w) dy)(\overline{g(x_2, w)} - \int_a^b \overline{\Gamma(x_2, y) g(y, w)} dy)\} \\
&\qquad = \mathfrak{E}\{g(x_1, w)\overline{g(x_2, w)}\} - \mathfrak{E}\{g(x_1, w) \int_a^b \overline{\Gamma(x_2, y) g(y, w)} dy\} \\
&\qquad\qquad - \mathfrak{E}\{\overline{g(x_2, w)} \int_a^b \Gamma(x_1, y), g(y, w) dy\} \\
&\qquad\qquad\quad + \mathfrak{E}\{\int_a^b \Gamma(x_1, y) g(y, w) dy \int_a^b \overline{\Gamma(x_2, y) g(y, w)} dy\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_f(x_1, x_2) &= R_g(x_1, x_2) - \int_a^b (\overline{\Gamma(x_2, y)} \mathfrak{E}\{g(x_1, w)\overline{g(y, w)} dy\}) \\
&\qquad - \int_a^b (\Gamma(x_1, y) \mathfrak{E}\{g(y, w)\overline{g(x_2, w)}\}) dy \\
&\quad - \int_a^b \int_a^b (\Gamma(x_1, y_1)\overline{\Gamma(x_2, y_2)} \mathfrak{E}\{g(x_1, w)\overline{g(x_2, w)}\}) dy_1 dy_2 \\
&= R_g(x_1, x_2) \int_a^b \Gamma(x_2, y) R_g(x_1, y) dy - \int_a^b \Gamma(x_1, y) R_g(y, x_2) dy \\
&\qquad - \int_a^b \int_a^b \Gamma(x_1, y_1)\overline{\Gamma(x_2, y_2)} R_g(y_1, y_2) dy_1 dy_2
\end{aligned}
$$

Đặt:

$$
H(x_1, x_2) = R_g(x_1, x_2) - \int_a^b \overline{\Gamma(x_2, y)} R_g(x_1, y) dy \tag{2.4}
$$

Phép tính đơn giản dưới đây biểu diễn cho $R_f(x_1, x_2)$ của hàm hiệp phương sai $R_g(x_1, x_2)$ đặt trong hàm ngẫu nhiên $g(x, w)$:

$$
R_f(x_1, x_2) = H(x_1, x_2) - \int_a^b \overline{\Gamma(x_2, y)} R_g(x_1, y) dy \tag{2.5}
$$

2.1.4 Sự liên tục bình phương trung bình của nghiệm:

Chúng ta biểu diễn hàm ngẫu nhiên $f(x, w)$ là liên tục trong bình phương trung bình nếu hạch $K(x, y)$ của toán tử tích phân là liên tục.

Định lý 2.2. *Cho $K(x,y)$ là hạch Fredholm trên $[a,b]\times[a,b]$ và $\Gamma(x,y)$ biểu thị cho liên kết giải thức, nếu $K(x,y)$ liên tục trên $[a,b]\times[a,b]$, nghiệm $f(x,w)$ của phương trình tích phân (2.1) là liên tục trong bình phương trung bình trên $[a,b]$.*

2.1.5 Phương trình tích phân Volterra với đầu vào Wiener:

Trong chủ đề này, chúng ta xét một ví dụ cụ thể của loại phương trình tích phân nghiên cứu trong phần này, phương trình tích phân Volterra đặt vào quá trình Wiener. Xét phương trình tích phân (2.1) trên $[0,1]$ với hạch:

$$K(x,y)=\begin{cases}-1 & \text{với } x\geqslant y\\ 0 & \text{với } x<y\end{cases}\tag{2.6}$$

Trong trường hợp này, phương trình (2.1) có dạng:

$$f(x,w)+\int_0^x f(y,w)dy=g(x,w)\tag{2.7}$$

Giải thức $\Gamma(x,y)$ là phép tính đơn giản được cho bởi chuỗi Neumann:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}K^{(n)}(x,y)=\Gamma(x,y)=\begin{cases}e^{-}(x-y) & \text{với } x\geqslant y\\ 0 & \text{với } x<y\end{cases}$$

2.2 Hạch $K(x,y,\omega)$ là ngẫu nhiên suy biến

Xét phương trình

$$K(x,y,\omega)f(y)dy-\lambda f(x)=g(x)\tag{2.8}$$

Với hạch suy biến ngẫu nhiên:

$$K(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x,w)\beta_i(y)\tag{2.9}$$

Định lý 2.3. *: Cho λ khác 0 là số thực*

$$\mu(\Omega(\lambda)) = \mu\omega[\sum_{i,j=1} n a_{ij}^2(\omega)]^{\frac{1}{2}} < |\lambda| = 1$$

Khi đó ma trận ngẫu nhiên $A(w) - \lambda I$ là đảo ngược và nghiệm:

$$\xi(\omega) = (A(\omega) - \lambda I)^{-1} b$$

2.3 Hạch $K(x, y, \omega)$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian các hàm gián đoạn vừa phải

Định lý 2.4. *Cho K là ánh xạ của Ω vào $\mathfrak{R}$ và cho sự biến đổi $L(w)$ của $\Omega \times C$ vào C được định nghĩa $\forall w \in \Omega$ và $\forall f \in C$ bởi (**??**). Khi đó, $L(w)$ là toán tử tuyến tính liên tục hoàn toàn trên $C, \forall w \in \Omega$. Ngoài ra, những nhận định sau là tương đương:*

(i) $L(w)$ là toán tử ngẫu nhiên trên C.

(ii) $\omega : K(x, y\omega) < \xi \in \mathfrak{U} \quad \forall x, y \in [a, b], \forall \xi \in R$

(iii)$K(x, y\omega)$ là hạch ngẫu nhiên.

(iv)$L(\omega)$ là biến ngẫu nhiên với giá trị toán tử.

Chương 3

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN NGẪU NHIÊN PHI TUYẾN

3.1 Phương trình vi phân phi tuyến ngẫu nhiên

3.1.1 Thiết lập phương trình tích phân của một số các phương trình vi phân phi tuyến ngẫu nhiên

Xét phương trình vi phân:

$$dx(t,\omega)/dt = f(t, x(t,\omega), \omega) \qquad x(t_0, \omega) = x_0(\omega) \tag{3.1}$$

Trước hết chúng ta xét ba bài toán của phương trình có dạng (3.1). T được định nghĩa là khoảng đóng [a,b] hoặc khoảng mở $[a, \infty)$

Bài toán 1: Hàm mẫu (SF)

Giả sử hàm $f : T \times R_n \times \Omega \to R_n$ có tính chất là nếu: $x : T \to R_n$ là liên tục tuyệt đối khi đó hầu hết với mọi $\omega \in \Omega, f(t, x(t,\omega), \omega)$ là tích phân trên T. Hàm $x : T \times \Omega \to R_n$ được gọi là giải bài toán SF.

$$x'(t,\omega) = f(t, x(t,\omega), \omega) \qquad x(a,\omega) = x_0(\omega)$$

Nếu và chỉ nếu hầu hết với mọi $\omega \in \Omega$ những điều kiện sau được thỏa mãn:

(1.1) $x(t,\omega)$ liên tục tuyệt đối trên T

(1.2) $x(a,\omega) = x_0(\omega)$

(1.3) $x'(t,\omega) = f(t, x(t,\omega),\omega \qquad \forall t \in T$

Để trình bày hai bài toán sau chúng ta xét hai không gian Banach của hàm trên Ω và khái niệm vi phân của hàm với giá trị trong không gian đó. Đặt $L_p(\Omega) = L_p(\Omega, \mathfrak{U}, \mu)$ và đặt $L_p^n(\Omega)$ định nghĩa là tích trực tiếp của $L_p(\Omega)$ với chính nó n lần. Chuẩn một phần tử của $L_p^n(\Omega)$ là $||x|| = max(||x_1||, ||x_2||, \ldots, ||x_n||$. Đạo hàm L_p của ánh xạ $x : R \to L_p^n(\Omega)$ tại t là phần tử $x' \in L_p^n(\Omega)$ sao cho:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = x'$$

trong chuẩn topo của $L_p^n(\Omega)$. Nếu giới hạn trên tồn tại trong topo yếu của $L_p^n(\Omega)$, x' được gọi là W_p đạo hàm của x tại t. Ánh xạ x được gọi là W_p giả vi phân nếu với mọi hàm tuyến tính liên tục $x^* : L_p^n(\Omega) \to R, x^*(x(t))$ có thể vi phân được hầu khắp nơi.

Chúng ta cũng cần dựa vào ánh xạ: $g : T \times L_p^n(\Omega) \to L_p^n(\Omega)$ sao cho miền của $g(t,x)$ được phép biến đổi với t. khi chúng ta viết $g : T \times D_p^n(t) \to L_p^n(\Omega)$ nghĩa là miền của g là $(t,x) : t \in T, x \in D(\binom{n}{p}t)$ ở đó $D(\binom{n}{p}t)$ ánh xạ T vào tập con $L_p^n(\Omega)$.

Bài toán 2: Bài toán L_p

Đặt $g : T \times D_p^n(t) \to L_p^n(\Omega)$ và $x_0 \in D_p^n(t)$. Hàm $x : T \to L_p^n(\Omega)$ được gọi là nghiệm của bài toán L_p và thỏa mãn các điều kiện dưới đây:

(2.1) $x(t) \in D_p^n(t), \forall t \in T$

(2.2) $x(t)$ là hàm liên tục tuyệt đối mạnh

(2.3) $x(a) = x_0$

(2.4) $g(t, x(t))$ là khả tích Bochner trên T

(2.5) Đạo hàm L_p của x tồn tại $\forall t \in T$ và thỏa mãn $x'(t) = g(t, x(t))$

Bài toán3: Bài toán W_p

Đặt $g : T \times D_p^n(t) \to L_p^n(\Omega)$ và $x_0 \in D_p^n(t)$. Hàm $x : T \to L_p^n(\Omega)$ được gọi là giải của bài toán W_p và thỏa mãn các điều kiện dưới đây: (3.1) $x(t) \in D_p^n(t), \forall t \in T$

(3.2) $x(t)$ là hàm liên tục tuyệt đối mạnh

(3.3) $x(a) = x_0$

(3.4) $g(t, x(t))$ là tích phân Bochner trên T

(3.5) Giả đạo hàm W_p của x tồn tại $\forall t \in T$ và thỏa mãn $x'(t) = g(t, x(t))$

3.1.2 Phương trình vi phân phi tuyến ngẫu nhiên trong không gian các hàm liên tục:

Đặt $C_0[0, 1]$ định nghĩa không gian các hàm liên tục trên khoảng $T = [0, 1]$ và triệt tiêu tại 0. Xét không gian độ đo $(C_0, \mathfrak{B}, w)$, trong đó $\mathfrak{B}$ là σ-đại số tập con Borel $C_0[0, 1]$ và w là độ đo Wiener.

Xét phương trình vi phân phi tuyến ngẫu nhiên:

$$dy(t, \omega)/dt = f(t, y(t, \omega) + w(t, \omega)) \qquad y(0, \omega) = 0 \tag{3.2}$$

ở đó $w(t, \omega)$ là Winer và $y(t, \omega)$ với mọi $\omega \in \Omega$ cố định, phần tử của $C_0[0, 1]$. Hàm $f(t, u) : T \times R \to R$ là hàm liên tục giá trị thực của t. Đặt $x(t, \omega) = y(t, \omega) + w(t, \omega)$ khi đó phương trình (3.2) tương đương với phương trình Volterra ngẫu nhiên phi tuyến.

$$x(t, \omega) - \int_0^t f(r, x(r, \omega), \omega) dr = w(t, \omega) \tag{3.3}$$

3.2 Phương trình tích phân phi tuyến với vế phải ngẫu nhiên

Định lý 3.1. *Giả sử*

(i) $\psi(x,t)$ *thỏa mãn (3.28)* $x_1(t,\omega) \in M_2, x_2(t,\omega) \in M_2$ *trong đó* $x_1(t,\omega) \geqslant x_2(t,\omega)$

(ii) $K(t)$ *là hàm* L_p *thỏa mãn (3.29) và (3.30). Để* $Y(t,\omega)$ *là hàm ngẫu nhiên có độ đo tùy ý trong* M_2 *Khi đó có sự tồn tại nghiệm ngẫu nhiên* $x(t,\omega) \in M_2$ *của phương trình* (**??**) *và nghiệm là duy nhất trong* M_2/M_0

3.3 Phương trình tích phân phi tuyến loại Volterra với hạch ngẫu nhiên và vế phải ngẫu nhiên

Định lý 3.2. *Giả sử rằng:*

(i) $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ *là không gian Banach từ* $R^+ \to L_2(\Omega)$ *với tô pô mạnh hơn tô pô của* $C_c(R^+, (L_2(\Omega))$ *và cặp* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ *được thừa nhận với sự lưu ý đến toán tử tích phân ngẫu nhiên:*

$$L(\omega)x(t,\omega) = \int_0^t K(t,r,\omega)x(r,\omega)dr \tag{3.4}$$

trong đó hạch ngẫu nhiên $K(t,\tau,\omega)$ *liên tục trong phương được chỉ ra sớm hơn.*

(ii) Ánh xạ: $x(t,\omega) \to f(t,(x(t,\omega))$ *là toán tử trên tập hợp:*

$$S = \{x(t,\omega) : x(t,\omega) \in \mathfrak{Y}, \qquad ||x(t,\omega)||_{\{\mathfrak{Y}\}} \leqslant p\}$$

cho $p \geqslant 0$ *với giá trị trong* $\mathfrak{X}$ *thỏa mãn điều kiện:*

$$||f(t,x_1(t,\omega)) - f(t,x_2(t,\omega))||_{\{\mathfrak{X}\}} \leqslant k||x_1(t,\omega) - x_2(t,\omega)||_{\{\mathfrak{Y}\}} \tag{3.5}$$

với $x_1, x_2 \in S$ *và* k *là một hằng số dương.*

(iii) $y(t, \omega) \in \mathfrak{Y}$ *Khi đó tồn tại một nghiệm ngẫu nhiên duy nhất của phương trình* (**??**) *mỗi khi (a)* $k < N^{-1}$ *và (b)* $||y(t, \omega)||_{\mathfrak{Y}} + N||f((t, 0)||_{\mathfrak{X}} \leqslant p(1 - kN)$ *trong đó* N *là chuẩn của* $L(\omega)$

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng ta nghiên cứu được các vấn đề liên quan đến phương trình tích phân ngẫu nhiên Fredholm và Volterra. Trước hết ta tìm hiểu được thế nào là phương trình Fredholm và Volterra với hàm vế phải ngẫu nhiên, tính chất của nghiệm phương trình tích phân loại trên như nghiệm của hàm hiệp phương sai, sự liên tục bình phương trung bình của nghiệm. Đặc biệt, chúng ta đã đưa ra được ví dụ cụ thể của loại tích phân này là phương trình tích phân Volterra với đầu vào Wiener. Tiếp theo, chúng ta đã xét được sự tồn tại, tính duy nhất, tính đo được của nghiệm phương trình Fredholm khi hạch K(x,y,w) là các biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian các hàm gián đoạn vừa phải.

Ngoài ra, luận văn còn đưa ra một số phương trình tích phân phi tuyến với vế phải ngẫu nhiên và trong trường hợp loại Volterra với hạch ngẫu nhiên. Kết quả nữa là chúng ta đã chỉ ra được sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của phương trình loại đó.

Tài liệu tham khảo

[1] Bharucha-Reid A.T,1972, *Random Integral Equations*, Academic Press NewYork.

[2] Đặng Hùng Thắng,2013, *Xác suất nâng cao*, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[3] P.A. Cojuhari, 2013, *Random Integral Equations On Time Scales*, AGH University of Science and Technology Press