ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

– – – – – – – – – – –

TRẦN TRƯỜNG SINH

BẤT PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANTE TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH NGUYỄN VĂN MẬU

HÀ NỘI - 2015

Mục lục

Mở đầu **2**

1 Một số kiến thức chuẩn bị **4**

1.1 Ước số chung lớn nhất. Thuật toán Euclid 4

1.2 Liên phân số 5

1.3 Phương trình Diophante tuyến tính 6

1.3.1 Tìm nghiệm riêng dựa vào giản phân 6

1.3.2 Tìm nghiệm riêng dựa vào thuật toán Euclid 6

1.4 Nghiệm nguyên dương của phương trình Diophante tuyến tính 7

2 Bất phương trình Diophante tuyến tính **8**

2.1 Bất phương trình Diophante tuyến tính 8

2.2 Bất phương trình Diophante tuyến tính "bị chặn" 9

2.3 Nghiệm nguyên dương của bất phương trình Diophante tuyến tính . . . 11

2.3.1 Một số ví dụ liên quan 11

2.3.2 Bất phương trình Diophante dạng liên phân số 13

3 Một số bài toán liên quan **14**

3.1 Nghiệm nguyên của phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình lượng giác 14

3.2 Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình lượng giác có điều kiện 15

3.3 Xác định phân thức chính quy thỏa mãn điều kiện cho trước 16

Kết luận **19**

Tài liệu tham khảo **20**

Mở đầu

Phương trình nghiệm nguyên hay còn gọi là phương trình Diophante là một trong những dạng toán lâu đời nhất của Toán học. Thông qua việc giải phương trình Diophante, các nhà toán học đã tìm ra được những tính chất sâu sắc của số nguyên, số hữu tỉ, số đại số. Giải phương trình Diophante đã đưa đến sự ra đời của liên phân số, lý thuyết đường cong elliptic, lý thuyết xấp xỉ Diophant, thặng dư bình phương, số học modular,...

Bất phương trình Diophante tuyến tính thực chất là phương trình Diophante tuyến tính có chứa tham số. Có thể nói đây là một dạng toán khá mới mẻ và chưa phổ biến trong các kỳ thi học sinh giỏi bậc phổ thông.

Trong luận văn này, tác giả không có tham vọng bao quát hết các vấn đề về bất phương trình Diophante tuyến tính mà chủ yếu đi sâu nghiên cứu bất phương trình dạng này với hai biến, ba biến hoặc bốn biến. Hi vọng đây sẽ là một tài liệu bổ ích cho các thầy cô giáo và các em học sinh trong quá trình ôn luyện thi học sinh giỏi.

Luận văn được chia làm 3 chương:

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Bất phương trình Diophante tuyến tính

Chương 3. Một số bài toán liên quan.

Nhân đây, tác giả xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của học trò trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và giúp đỡ tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo Sau đại học, Khoa Toán - Cơ - Tin học, các thầy cô giáo đã tạo điều kiện thuận lợi để tác giả có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè đã luôn quan tâm, động viên, cổ vũ và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong suốt thời gian mà tác giả học tập tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian và trình độ còn nhiều hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy giáo, cô giáo cũng như các bạn đồng nghiệp để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, tháng 09 năm 2015

Học viên thực hiện

Trần Trường Sinh

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Ước số chung lớn nhất. Thuật toán Euclid

Định nghĩa 1.1 (xem [1]). Số nguyên c được gọi là một ước số chung của hai số nguyên a và b (không đồng thời bằng không) nếu c chia hết a và c chia hết b.

Định nghĩa 1.2 (xem [1]). Một ước số chung d của hai số nguyên a và b (không đồng thời bằng không) được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b nếu mọi ước số chung c của a và b đều là ước của d.

Chú ý 1.1. Nếu d là ước số chung lớn nhất của a và b thì $-d$ cũng là ước số chung lớn nhất của a và b. Vậy ta quy ước rằng ước số chung lớn nhất của a và b là số nguyên dương.

Định nghĩa 1.3 (xem [1]). Một số nguyên c được gọi là một ước số chung của n số nguyên $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (không đồng thời bằng không) nếu c là ước của mỗi số đó.

Định nghĩa 1.4 (xem [1]). Một ước số chung d của n số nguyên $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ (không đồng thời bằng không) được gọi là ước số chung lớn nhất của $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nếu mọi ước số chung c của $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ đều là ước của d.

Định lí 1.1. (*về sự tồn tại ước số chung lớn nhất của nhiều số*, xem [1]) Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ không đồng thời bằng không. Khi đó tồn tại ước số chung lớn nhất của $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Tính chất 1.1 (xem [1]). Cho a, b, q, r là các số nguyên ($a^2 + b^2 \neq 0$). Nếu $a = bq + r$ và $0 \leq r < |b|$ thì (a,b) = (b,r).

Thuật toán Euclid (*thuật toán tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên dương*).

1.2 Liên phân số

Định nghĩa 1.5. (*Liên phân số hữu hạn*, xem [3])

Định nghĩa 1.6. (*Liên phân số vô hạn*, xem [3])

Tính chất 1.2 (xem [3])**.** Mỗi số hữu tỉ là một liên phân số hữu hạn.

Tính chất 1.3. (*Tính duy nhất của liên phân số hữu hạn*, xem [3])

Tính chất 1.4. (*Công thức tính giản phân*, xem [3])

Tính chất 1.5 (xem [3])**.** Giả sử $\{C_k\}$ là dãy giản phân của liên phân số hữu hạn $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Khi đó ta có các mối liên hệ sau

i) $C_k - C_{k-1} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$, với $1 \leq k \leq n$.

ii) $C_k - C_{k-2} = \dfrac{a_k(-1)^{k}}{q_k q_{k-2}}$, với $2 \leq k \leq n$.

Tính chất 1.6 (xem [3])**.** Với các giản phân C_k của liên phân số hữu hạn $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ta có các dãy bất đẳng thức sau

i) $C_1 > C_3 > C_5 > \ldots$

ii) $C_0 < C_2 < C_4 < \ldots$

iii) mỗi giản phân lẻ C_{2j-1} đều lớn hơn mỗi giản phân chẵn C_{2i}.

Tính chất 1.7 (xem [3])**.** Với mọi $k = 0, 1, \ldots, n$ thì $(p_k, q_k) = 1$ (tức là p_k, q_k nguyên tố cùng nhau).

Tính chất 1.8 (xem [3])**.** Cho $a_0, a_1, a_2, \ldots$ là dãy vô hạn các số nguyên, $a_i > 0$ với $\forall i \geq 1$. Với mỗi k, đặt $C_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$. Khi đó tồn tại giới hạn

$$\lim_{k \to +\infty} C_k.$$

Tính chất 1.9 (xem [3])**.** Mọi số vô tỉ α đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng một liên phân số vô hạn.

1.3 Phương trình Diophante tuyến tính

Định nghĩa 1.7 (xem [3])**.** Phương trình Dipophante tuyến tính có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

trong đó các hệ số a_i, $c \in \mathbb{Z}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$, các biến số $x_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Định lí 1.2 (xem [3])**.** Xét phương trình Diophante tuyến tính

$$Ax + By = C. \tag{1}$$

i) (1) có nghiệm khi và chỉ khi $d = (A, B)\,|C$.

ii) Nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của phương trình (1) thì mọi nghiệm của phương trình (1) được cho bởi công thức

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{B}{d}t \\ y = y_0 - \dfrac{A}{d}t \end{cases},\ t \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét 1.1. Việc giải phương trình (1) quy về việc tìm

i) $d = (A, B)$.

ii) Một nghiệm riêng (x_0, y_0) của phương trình (1).

1.3.1 Tìm nghiệm riêng dựa vào giản phân

1.3.2 Tìm nghiệm riêng dựa vào thuật toán Euclid

Định lí 1.3 (xem [3])**.** Xét phương trình Diophante tuyến tính

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c. \tag{5}$$

i) Phương trình (5) có nghiệm khi và chỉ khi $d = (a_1,\, a_2, \ldots, a_n)\,|c$.

ii) Nếu phương trình (5) có nghiệm thì nó sẽ có vô số nghiệm.

Ví dụ 1.1. Giải phương trình Diophante tuyến tính

$$6x + 15y + 10z = 3. \tag{7}$$

1.4 Nghiệm nguyên dương của phương trình Diophante tuyến tính

Xét phương trình Dipophante tuyến tính

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c \tag{5}$$

với các hệ số a_i, $c \in \mathbb{Z}^+$, các biến số $x_i \in \mathbb{Z}^+$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó phương trình (5) luôn có hữu hạn nghiệm nguyên dương $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Từ đề bài, ta có thể hạn chế điều kiện của các biến số bởi

$$1 \leq x_i \leq \left[\frac{(c + a_i) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{a_i} \right], \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Khi đó, cách đơn giản nhất để tìm nghiệm nguyên dương $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của phương trình (5) là ta cho một biến số x_i nào đó lần lượt chạy qua các giá trị có thể có của nó và tìm các biến số còn lại từ phương trình đã cho.

Ví dụ 1.2. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình Diophante tuyến tính

$$6x + 15y + 10z = 200. \tag{8}$$

Đáp số: Phương trình (8) có cả thảy 15 nghiệm nguyên dương (x, y, z) bao gồm $(5, 2, 14)$, $(5, 4, 11)$, $(5, 6, 8)$, $(5, 8, 5)$, $(5, 10, 2)$, $(10, 2, 11)$, $(10, 4, 8)$, $(10, 6, 5)$, $(10, 8, 2)$, $(15, 2, 8)$, $(15, 4, 5)$, $(15, 6, 2)$, $(20, 2, 5)$, $(20, 4, 2)$, $(25, 2, 2)$.

Chương 2

Bất phương trình Diophante tuyến tính

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu cách giải bất phương trình Diophante tuyến tính và các thí dụ minh họa.

2.1 Bất phương trình Diophante tuyến tính

Định nghĩa 2.1. Bất phương trình Dipophante tuyến tính có dạng

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n < c \tag{9}$$

(hoặc $f(x) \leq c,\ f(x) > c,\ f(x) \geq c,$ với $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$)
trong đó các hệ số $a_i,\ c \in \mathbb{Z},$ các biến số $x_i \in \mathbb{Z},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0.$
Cách giải. Ta có bất phương trình (9) tương đương với

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = m \tag{10}$$

trong đó m là tham số, $m \in \mathbb{Z},\ m < c.$
Như vậy việc giải bất phương trình Diophante tuyến tính được đưa về giải phương trình Diophante tuyến tính (chứa tham số) mà chúng ta đã biết cách giải.

Ví dụ 2.1. Giải bất phương trình Diophante tuyến tính

$$342x - 123y \geq 13. \tag{11}$$

Đáp số: Nghiệm tổng quát của bất phương trình (11) là

$$\begin{cases} x = 9k + 41t \\ y = 25k + 114t \end{cases},\ \forall t,\ k \in \mathbb{Z},\ k \geq 5.$$

Ví dụ 2.2. Giải bất phương trình Diophante tuyến tính

$$6x + 9y + 18z < 5. \tag{12}$$

Đáp số: Nghiệm tổng quát của bất phương trình (12) là

$$\begin{cases} x = -k + 3u + 3t \\ y = -k + 4u + 2t \\ z = \quad k - 3u - 2t \end{cases}$$

trong đó $k,\ u,\ t \in \mathbb{Z},\ \ k \leq 1$.

Ví dụ 2.3. Giải bất phương trình Diophante tuyến tính

$$6x + 15y + 10z > 3. \tag{13}$$

Đáp số: Nghiệm tổng quát của bất phương trình (13) là

$$\begin{cases} x = -4m + 25u + 15t \\ y = -\ \ m + \ \ 6u + \ \ 4t \\ z = \quad 4m - 24u - 15t \end{cases}$$

trong đó $m,\ u,\ t \in \mathbb{Z},\ \ m \geq 4$.

Ví dụ 2.4. Giải bất phương trình Diophante tuyến tính

$$2x + 4y + 6z - 10t \geq 1. \tag{14}$$

Đáp số: Nghiệm tổng quát của bất phương trình (14) là

$$\begin{cases} x = k - 2u - 3v + 5\mathrm{w} \\ y = \qquad u \\ z = \qquad\qquad v \\ t = \qquad\qquad\qquad \mathrm{w} \end{cases}$$

trong đó $k,\ u, v, \mathrm{w} \in \mathbb{Z},\ \ k \geq 1$.

2.2 Bất phương trình Diophante tuyến tính "bị chặn"

Định nghĩa 2.2. Bất phương trình Dipophante tuyến tính "bị chặn" có dạng

$$b \leq a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq c \tag{15}$$

trong đó các hệ số $a_i,\ b, c \in \mathbb{Z}$, các biến số $x_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

Cách giải. Ta có bất phương trình (15) tương đương với

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = m \tag{16}$$

trong đó m là tham số, $m \in \mathbb{Z},\ b \leq m \leq c.$

Như vậy việc giải bất phương trình Diophante tuyến tính được đưa về giải phương trình Diophante tuyến tính (chứa tham số) mà chúng ta đã biết cách giải.

Ví dụ 2.5. Giải bất phương trình Diophante tuyến tính "bị chặn"

$$1 < 12x + 15y \leq 10. \tag{17}$$

Đáp số: Nghiệm tổng quát của bất phương trình (17) là

$$\begin{cases} x = -k + 5t \\ y = \quad k - 4t \end{cases}$$

trong đó $k \in \{1; 2; 3\}\,,\ t \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 2.6. Giải bất phương trình Diophante tuyến tính "bị chặn"

$$12 < 6x - 18y + 54z \leq 17. \tag{18}$$

Đáp số: Bất phương trình (18) vô nghiệm.

Ví dụ 2.7. Giải bất phương trình Diophante tuyến tính "bị chặn"

$$-1 < 4x + 10y - 20z < 20. \tag{19}$$

Đáp số: Nghiệm tổng quát của bất phương trình (19) là

$$\begin{cases} x = 3k - 1\,5u + 5t \\ y = \quad k - \quad 4u + 2t \\ z = \quad k - \quad 5u + 2t \end{cases}$$

trong đó $k,\ u,\ t \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k \leq 9.$

Ví dụ 2.8. Giải bất phương trình Diophante tuyến tính "bị chặn"

$$-2 \leq 6x + 8y + 2z + 4t \leq 28. \tag{20}$$

Đáp số: Nghiệm tổng quát của bất phương trình (20) là

$$\begin{cases} x = \qquad u \\ y = \qquad\quad v \\ z = k - 3u - 4v - 2\mathrm{w} \\ t = \qquad\qquad\quad \mathrm{w} \end{cases}$$

trong đó $k,\ u, v, \mathrm{w} \in \mathbb{Z},\ -1 \leq k \leq 14.$

2.3 Nghiệm nguyên dương của bất phương trình Diophante tuyến tính

Xét bất phương trình Dipophante tuyến tính

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq c \tag{5}$$

với các hệ số a_i, $c \in \mathbb{Z}^+$, các biến số $x_i \in \mathbb{Z}^+$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó bất phương trình (5) luôn có hữu hạn nghiệm nguyên dương $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Từ đề bài, ta có thể hạn chế điều kiện của các biến số bởi

$$1 \leq x_i \leq \left[\frac{(c + a_i) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{a_i}\right], \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Khi đó, cách đơn giản nhất để tìm nghiệm nguyên dương $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của bất phương trình (5) là ta cho một biến số x_i nào đó lần lượt chạy qua các giá trị có thể có của nó và tìm các biến số còn lại từ bất phương trình đã cho.

Ví dụ 2.9. Tìm nghiệm nguyên dương của bất phương trình Diophante tuyến tính

$$3x + 4y + z + 2t \leq 14. \tag{21}$$

Đáp số: Bất phương trình (21) có cả thảy 12 nghiệm nguyên dương (x, y, z, t) bao gồm

$$\begin{array}{l}(1,1,1,1)\,,\ (1,1,1,2)\,,\ (1,1,1,3)\,,\ (1,1,2,1)\,,\ (1,1,2,2)\,,\ (1,1,3,1)\,,\\ (1,1,3,2)\,,\ (1,1,4,1)\,,\ (1,1,5,1)\,,\ (1,2,1,1)\,,\ (2,1,1,1)\,,\ (2,1,2,1)\,.\end{array}$$

2.3.1 Một số ví dụ liên quan

Tiếp theo ta xét một số ví dụ liên quan.

Ví dụ 2.10. Tìm nghiệm nguyên dương của bất phương trình Diophante tuyến tính "bị chặn"

$$-1 < 4x + 10y - 20z < 20. \tag{22}$$

Đáp số: Nghiệm nguyên dương tổng quát của bất phương trình (22) là

$$\begin{cases} x = 3k - 5l \\ y = k \quad + 2a \\ z = k \quad - l + \quad a \end{cases}$$

trong đó l, $a \in \mathbb{Z}$, $l < \frac{3k}{5}$, $a > -\frac{k}{2}$, $l - a < k$, $k = 0, 1, \ldots, 9$.

Bài toán 2.1. Một trường học có 20 bạn học sinh giỏi, trong đó số học sinh giỏi mỗi môn Toán, Lý, Hóa, Văn tương ứng là 6, 8, 2, 4 bạn. Hỏi có bao nhiêu cách chia 28 quả cam cho 20 bạn đó sao cho đồng thời ta có:

i) Mỗi bạn nhận được ít nhất 1 quả cam và số cam nhận được là số nguyên.

ii) Các bạn học sinh giỏi cùng môn học thì nhận được số cam như nhau.

Hãy xác định tất cả các cách chia cam sao cho tổng số cam mà 20 bạn nhận được là nhiều nhất.

Đáp số: Bài toán có 12 cách chia cam, tương ứng với các nghiệm nguyên dương $(x; y; z; t)$ của hệ trên, cụ thể là:
$(1; 1; 1; 1)$, $(1; 1; 2; 1)$, $(1; 1; 3; 1)$, $(1; 1; 4; 1)$, $(1; 1; 5; 1)$, $(1; 1; 1; 2)$, $(1; 1; 2; 2)$, $(1; 1; 3; 2)$, $(2; 1; 1; 1)$, $(2; 1; 2; 1)$, $(1; 2; 1; 1)$, $(1; 1; 1; 3)$.
Đặt

$$S = S(x, y, z, t) = 6x + 8y + 2z + 4t.$$

MaxS = 28 và tương ứng là 5 cách chia cam thỏa mãn

$$(x; y; z; t) \in \{(1; 1; 5; 1), (1; 1; 3; 2), (2; 1; 2; 1), (1; 2; 1; 1), (1; 1; 1; 3)\}.$$

Bài toán 2.2. Clara cần mua cả hai loại thực phẩm là Pizza và Cola. Biết giá mỗi bánh Pizza là 57 USD và mỗi chai Cola có giá 22 USD. Hỏi Clara có bao nhiêu phương án chọn mua hai loại thực phẩm trên sao cho số tiền bỏ ra không vượt quá 399 USD. Từ đó xác định phương án mua mà số tiền Clara bỏ ra là nhiều nhất.

Đáp số: Clara có cả thảy 41 phương án để mua hàng.
Mua 5 bánh Pizza và 5 chai Cola thì Clara sẽ bỏ ra số tiền nhiều nhất là 395 USD.

Bài toán 2.3. An cần mua cả ba loại vật nuôi là Thỏ, Mèo và Chó. Biết giá mỗi con thỏ là 16 đồng, mỗi con Mèo là 19 đồng và mỗi con Chó là 25 đồng. Hỏi An có bao nhiêu phương án chọn mua cả ba loại vật nuôi trên sao cho số tiền bỏ ra không vượt quá 150 đồng. Từ đó xác định phương án mua mà số tiền An bỏ ra là nhiều nhất.

Đáp số: An có cả thảy 37 phương án để mua cả ba loại vật nuôi trên.
Mua 3 Thỏ – 4 Mèo – 1 Chó hoặc 5 Thỏ – 1 Mèo – 2 Chó thì số tiền An bỏ ra nhiều nhất là 149 đồng.

2.3.2 Bất phương trình Diophante dạng liên phân số

Với $m \in \mathbb{Z}$ cho trước ta có

i) $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] > m \Leftrightarrow a_0 \geq m$, a_i nguyên dương, tùy ý, $\forall i = 1, 2, 3, \dots$

ii) $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_k] < m \Leftrightarrow a_0 \leq m - 1$, a_i nguyên dương, tùy ý, $\forall i = 1, 2, 3, \dots$

Ví dụ 2.11. Giải các bất phương trình Diophante sau

$$[a_0; a_1, a_2, a_3] > 2 \quad \left(a_0 \in \mathbb{Z},\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}^+\right). \tag{25}$$

$$[b_0; b_1, b_2] < 3 \quad \left(b_0 \in \mathbb{Z},\ b_1, b_2 \in \mathbb{Z}^+\right). \tag{26}$$

$$2 < [c_0; c_1, c_2, c_3] < 3 \quad \left(c_0 \in \mathbb{Z},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{Z}^+\right). \tag{27}$$

$$-2 \leq [d_0; d_1, d_2, d_3, d_4] \leq 5 \quad \left(d_0 \in \mathbb{Z},\ d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{Z}^+\right). \tag{28}$$

Đáp số:

a) Nghiệm của (25) là $(a_0; a_1; a_2; a_3)$, trong đó

$$a_0 \in \mathbb{Z},\ a_0 \geq 2,\ a_i \in \mathbb{Z}^+, \forall i = 1, 2, 3.$$

b) Nghiệm của (26) là $(b_0; b_1; b_2)$, trong đó

$$b_0 \in \mathbb{Z},\ b_0 \leq 2,\ b_i \in \mathbb{Z}^+, \forall i = 1, 2.$$

c) Nghiệm của (27) là $(c_0; c_1; c_2; c_3)$, trong đó

$$c_0 = 2,\ c_i \in \mathbb{Z}^+, \forall i = 1, 2, 3.$$

d) Nghiệm của (28) là $(d_0; d_1; d_2; d_3; d_4)$, trong đó

$$d_0 \in \mathbb{Z},\ -2 \leq d_0 \leq 4,\ d_i \in \mathbb{Z}^+, \forall i = 1, 2, 3, 4.$$

Chương 3

Một số bài toán liên quan

Trong chương này, chúng ta sẽ xét một số bài toán liên quan đến việc giải bất phương trình Diophante tuyến tính.

3.1 Nghiệm nguyên của phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình lượng giác

Ví dụ 3.1. Đếm số nghiệm nguyên của phương trình

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

trong khoảng $(-2015; 2015)$.

Đáp số: Phương trình đã cho có 2016 nghiệm nguyên x trong khoảng $(-2015; 2015)$.

Ví dụ 3.2. Tìm các nghiệm nguyên (x, y) của hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\pi(2x+y)}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \cos\dfrac{\pi(x+y)}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Biết x, y thuộc khoảng $(-6; 10)$.

Đáp số: Hệ phương trình đã cho có 14 nghiệm nguyên (x, y) bao gồm

$$\begin{aligned} &(0,5)\,,\ (6,5)\,,\ (-2,-3)\,,\ (4,-3)\,,\ (-2,9)\,,\ (4,9)\,,\ (-4,-3)\,,\\ &(2,-3)\,,\ (-4,9)\,,\ (8,-3)\,,\ (2,9)\,,\ (8,9)\,,\ (0,1)\,,\ (6,1) \end{aligned}$$

với x, y thuộc khoảng $(-6; 10)$.

3.2 Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình lượng giác có điều kiện

Cách giải.

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ của phương trình (hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình) lượng giác.

Bước 2: Từ điều kiện của phương trình (hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình) lượng giác ta hạn chế điều kiện của các tham số trong nghiệm tổng quát $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ví dụ 3.3. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} \sin 2015x > \dfrac{1}{2} \\ \cos 445x \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ví dụ 3.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sin(2x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

với điều kiện $x - y \ge 10\pi$.

Đáp số: Có 4 họ nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn đề bài, bao gồm

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + (a+t)2\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + t2\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + (b+t)2\pi \\ y = -\dfrac{5\pi}{6} + t2\pi \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + (c+t)2\pi \\ y = -\dfrac{\pi}{6} + t2\pi \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + (d+t)2\pi \\ y = -\dfrac{3\pi}{2} + t2\pi \end{cases}$$

trong đó $a, b, c, d, t \in \mathbb{Z}$, $a \ge 6$, $b \ge 5$, $c \ge 5$, $d \ge 4$.

Ví dụ 3.5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sin(2x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

trên đoạn $[-6\pi; 6\pi]$ và thỏa mãn $x - y \ge 10\pi$.

Đáp số: Bài toán đã cho có hai nghiệm $(x; y)$ bao gồm

$$\left(\frac{35\pi}{6}; -\frac{11\pi}{2}\right), \left(\frac{31\pi}{6}; -\frac{11\pi}{2}\right).$$

3.3 Xác định phân thức chính quy thỏa mãn điều kiện cho trước

Định nghĩa 3.1. (*Phân thức chính quy một biến*, xem[5]) Cho $a_i > 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ với $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i}$ với $x > 0$ được gọi là phân thức chính quy (một biến x) nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = 0$.

Chú ý 3.1. Phân thức chính quy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.

Định nghĩa 3.2. (*Phân thức chính quy hai biến*, xem [5]) Cho $a_i > 0$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ với $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$ với $x > 0$, $y > 0$ được gọi là phân thức chính quy (hai biến x, y) nếu $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i = 0$.

Chú ý 3.2. Phân thức chính quy $f(x, y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = y = 1$.
Trong các ví dụ sau ta xét $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 3.6. Xét phân thức chính quy

$$f(x) = x^{\alpha_1} + 2x^{\alpha_2} + 3x^{\alpha_3} + 5x^{\alpha_4} + 7x^{\alpha_5}.$$

Tìm $(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4; \alpha_5)$ sao cho

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 > 4. \tag{29}$$

Đáp số:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2m - a + 3b + 9c \\ \alpha_2 = m - a - 4b - 8c \\ \alpha_3 = a \\ \alpha_4 = b \\ \alpha_5 = c \end{cases}$$

trong đó $m, a, b, c \in \mathbb{Z}$, $m < -4$.
Chẳng hạn với $m = -5$, $a = 1$, $b = 2$, $c = -4$ ta có bài toán sau

Bài toán 3.1. Cho x là số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$2x^{18} + 5x^2 + 3x + \frac{7}{x^4} + \frac{1}{x^{21}} \geq 18.$$

Ví dụ 3.7. Xét phân thức chính quy

$$f(x,y) = x^{\alpha_1}y^{\beta_1} + 2x^{\alpha_2}y^{\beta_2} + 3x^{\alpha_3}y^{\beta_3}.$$

Tìm $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ và $(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ sao cho thỏa mãn đồng thời các hệ thức sau

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\alpha_3 > 0, \tag{30}$$

$$\beta_1 - 3\beta_2 + \beta_3 \leq 3. \tag{31}$$

Đáp số:

$$(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3) = (-9m - 7a; 3m + 2a; m + a),$$

$$(\beta_1;\beta_2;\beta_3) = (4n + 11b; n + 2b; -2n - 5b)$$

trong đó $m,\ n,\ a,\ b \in \mathbb{Z},\ m \geq 1,\ n \geq -3.$

Chẳng hạn với $m = 1,\ n = -3,\ a = 1,\ b = 2$ ta có phân thức chính quy

$$f(x,y) = \frac{y^{10}}{x^{16}} + 2x^5y + \frac{3x^2}{y^4}$$

có giá trị nhỏ nhất

$$\min f(x,y) = f(1,1) = 6.$$

Nếu thay $x = \dfrac{a}{2},\ y = \dfrac{b}{2}$ thì ta có bài toán sau

Bài toán 3.2. Cho a,b là các số thực dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{64b^{10}}{a^{16}} + \frac{a^5b}{32} + \frac{12a^2}{b^4}.$$

Ví dụ 3.8. Cho hàm phân thức chính quy

$$f(x) = ax^2 + bx^4 + \frac{c}{x^2}$$

với a,b,c là các số nguyên dương. Tìm bộ số (a,b,c) sao cho giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ không vượt quá 11.

Đáp số: Có 7 bộ số (a,b,c) thỏa mãn yêu cầu bài toán, gồm

$$(1,1,3),\ (2,1,4),\ (1,2,5),\ (3,1,5),\ (2,2,6),\ (1,3,7),\ (4,1,6).$$

Với (a,b,c) = (1,1,3) ta có phân thức chính quy

$$f(x) = x^2 + x^4 + \frac{3}{x^2}.$$

Thay x bởi $x\sqrt{3}$ ta được bài toán sau

Bài toán 3.3. Cho x là số thực dương thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x) = \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^4} - 9x^2.$$

Ví dụ 3.9. Cho hàm phân thức chính quy

$$f(x,y) = ax^2y + b\frac{y^3}{x} + c\frac{x^5}{y^4} + d\frac{y}{x^3}$$

với a, b, c, d là các số nguyên dương. Tìm bộ số (a, b, c, d) sao cho $2a+b+3c+2d < 40$.

Đáp số: Có 2 bộ số (a, b, c, d) thỏa mãn yêu cầu bài toán, gồm

$$(1, 2, 3, 5)\,,\ \ (4, 1, 4, 9)\,.$$

Chẳng hạn với $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 5)$ ta có phân thức chính quy

$$f(x,y) = x^2y + \frac{2y^3}{x} + \frac{3x^5}{y^4} + \frac{5y}{x^3}$$

có giá trị nhỏ nhất

$$\min f(x,y) = f(1,1) = 11.$$

Nếu thay $x = a,\ y = \dfrac{b}{2}$ thì ta thu được bài toán sau

Bài toán 3.4. Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$2a^2b + \frac{b^3}{a} + \frac{192a^5}{b^4} + \frac{10b}{a^3} \geq 44.$$

Kết luận

Sau một thời gian học tập tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, được các thầy cô tận tình giảng dạy và dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, tác giả đã hoàn thành luận văn với đề tài "Bất phương trình Diophante tuyến tính". Luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

1. Trình bày được một cách có hệ thống những kiến thức cơ bản làm cơ sở cho việc giải bất phương trình Diophante tuyến tính (mà thực chất là phương trình Diophante tuyến tính có chứa tham số).

2. Đưa ra được hai cách giải phương trình Diophante tuyến tính. Lấy đó làm cơ sở để đưa ra cách giải bất phương trình Diophante tuyến tính cũng như bất phương trình Diophante tuyến tính "bị chặn".

3. Tìm tòi, đưa ra một số dạng toán liên quan đến việc giải bất phương trình Diophante tuyến tính, có thể dùng cho việc ôn thi học sinh giỏi rất hữu ích.

Mặc dù trong quá trình làm luận văn, tác giả đã rất cố gắng song chắc chắn luận văn vẫn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến góp ý của các thầy cô và bạn bè để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Tài liệu tham khảo

[1] Vũ Tuấn Anh (2014), *Hệ phương trình Diophante tuyến tính*, luận văn thạc sĩ khoa học, Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội.

[2] Phan Huy Khải (2004), *Các bài toán cơ bản của số học*, NXB Giáo dục.

[3] Phan Huy Khải (2009), *Các chuyên đề số học bồi dưỡng học sinh giỏi toán trung học, chuyên đề 5 - Phương trình nghiệm nguyên*, NXB Giáo dục, tr.7 - 68.

[4] Hà Huy Khoái (2008), *Số học*, NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Văn Mậu (2006), *Bất đẳng thức. Định lí và áp dụng*, NXB Giáo dục.

[6] Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, Đặng Huy Ruận (2008), *Một số vấn đề số học chọn lọc*, NXB Giáo dục.

[7] Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Văn Ngọc, Vũ Kim Thủy (2010) *Bài giảng số học*, NXB Giáo dục.