

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

VŨ THỊ KIM NGÂN

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI  
HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG CHƯƠNG TRÌNH  
TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. PHẠM VĂN QUỐC

HÀ NỘI - 2015

# Mục lục

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Lời cảm ơn</b>  | <b>2</b>  |
| <b>Mở đầu</b>  | <b>3</b>  |
| <b>1 Một số kiến thức cơ bản</b>   | <b>4</b>  |
| 1.1 Hệ phương trình cơ bản . . . . .                                       | 4         |
| 1.1.1 Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn . . . . .                            | 4         |
| 1.1.2 Hệ phương trình đối xứng . . . . .                                   | 4         |
| 1.1.3 Hệ phương trình đẳng cấp . . . . .                                   | 5         |
| 1.1.4 Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh . . . . .                    | 5         |
| 1.2 Phương pháp cơ bản . . . . .   | 6         |
| 1.2.1 Phương pháp cộng đại số . . . . .                                    | 6         |
| 1.2.2 Phương pháp thế . . . . .  | 7         |
| <b>2 Một số phương pháp giải hệ phương trình</b>                           | <b>9</b>  |
| 2.1 Phương pháp đặt ẩn phụ . . . . .                                       | 9         |
| 2.2 Phương pháp phân tích thành nhân tử . . . . .                          | 10        |
| 2.3 Phương pháp sử dụng hằng đẳng thức . . . . .                           | 13        |
| 2.4 Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số . . . . .                 | 15        |
| 2.5 Phương pháp khác . . . . .   | 16        |
| 2.5.1 Phương pháp đánh giá . . . . .                                       | 16        |
| 2.5.2 Phương pháp lượng giác hóa . . . . .                                 | 18        |
| 2.5.3 Phương pháp sử dụng số phức . . . . .                                | 19        |
| <b>3 Một số phương pháp xây dựng hệ phương trình</b>                       | <b>21</b> |
| 3.1 Xây dựng hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ . . . . .         | 21        |
| 3.2 Xây dựng hệ phương trình từ các đẳng thức . . . . .                    | 24        |
| 3.3 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để xây dựng hệ phương trình . . . . . | 25        |
| 3.4 Xây dựng hệ phương trình bằng phương pháp đánh giá . . . . .           | 25        |
| 3.5 Sử dụng số phức để xây dựng hệ phương trình . . . . .                  | 26        |
| <b>Kết luận</b>  | <b>28</b> |
| <b>Tài liệu tham khảo</b>  | <b>29</b> |

# Lời cảm ơn

Lời đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới TS. Phạm Văn Quốc - người thầy đã truyền cho tôi niềm say mê nghiên cứu Toán học. Thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo Sau đại học, Khoa Toán - Cơ - Tin học, các thầy cô giáo đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi hoàn thành bản luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng, nhưng do thời gian và trình độ còn hạn chế nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Vì vậy tác giả rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Em xin chân thành cảm ơn!

# Mở đầu

Hệ phương trình là một nội dung cổ điển và quan trọng của Toán học. Ngay từ đầu, sự ra đời và phát triển của hệ phương trình đã đặt dấu ấn quan trọng trong Toán học. Chúng có sức hút mạnh mẽ đối với những người yêu Toán, luôn thôi thúc người làm Toán phải tìm tòi, sáng tạo. Bài toán về hệ phương trình thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi, Olympic cũng như kỳ thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng. Hệ phương trình được đánh giá là bài toán phân loại học sinh khá giỏi, nó đòi hỏi kỹ thuật xử lý nhanh và chính xác nhất. Là một giáo viên Trung học phổ thông, tôi muốn nghiên cứu sâu hơn về hệ phương trình nhằm nâng cao chuyên môn, phục vụ cho quá trình giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi của mình.

Với những lý do trên, tôi lựa chọn nghiên cứu đề tài "Một số phương pháp giải hệ phương trình trong chương trình toán Trung học phổ thông" làm luận văn thạc sĩ của mình.

Luận văn được chia làm ba chương:

Chương 1. Một số kiến thức cơ bản

Chương 2. Một số phương pháp giải hệ phương trình

Chương 3. Một số phương pháp xây dựng hệ phương trình.

Hà Nội, ngày 01 tháng 8 năm 2015

Tác giả luận văn

Vũ Thị Kim Ngân

# Chương 1

## Một số kiến thức cơ bản

### 1.1 Hệ phương trình cơ bản

#### 1.1.1 Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

*Phương pháp giải:*

Để giải hệ phương trình này, ta thường sử dụng các phương pháp sau:

- Phương pháp thế,
- Phương pháp cộng đại số,
- Phương pháp dùng định thức.

Ký hiệu:  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ;  $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ;  $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ .

*Trường hợp 1:*  $D \neq 0$ .

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D}. \end{cases}$

*Trường hợp 2:*  $D = D_x = D_y = 0$ .

Hệ phương trình có vô số nghiệm dạng  $\{(x_0; y_0) \mid a_1x_0 + b_1y_0 = c_1\}$ .

*Trường hợp 3:*  $D = 0; D_x \neq 0$  hoặc  $D = 0; D_y \neq 0$  hoặc  $D = 0; D_x \neq 0; D_y \neq 0$ .

Hệ phương trình vô nghiệm.

#### 1.1.2 Hệ phương trình đối xứng

##### 1. Hệ phương trình đối xứng loại I

Hệ phương trình đối xứng loại I đối với hai biến  $x$  và  $y$  là hệ phương trình mà nếu ta thay  $x$  bởi  $y$ , thay  $y$  bởi  $x$  thì hệ không thay đổi.

*Phương pháp giải:*

- Đặt  $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ , điều kiện  $S^2 \geq 4P$ .

- Tìm  $S, P$ ,

- Khi đó,  $x, y$  là nghiệm của phương trình  $u^2 - Su + P = 0$ .

## 2. Hệ phương trình đối xứng loại II

Hệ phương trình đối xứng loại II đối với  $x$  và  $y$  là hệ phương trình mà nếu ta thay  $x$  bởi  $y$ , thay  $y$  bởi  $x$  thì phương trình này biến thành phương trình kia và ngược lại.

*Phương pháp giải:*

- Trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được một phương trình tích dạng:

$$(x - y) f(x; y) = 0.$$

- Sau đó lần lượt thay  $x = y; f(x, y) = 0$ , vào một trong hai phương trình của hệ, ta được một phương trình đã biết cách giải và giải tiếp tìm nghiệm của hệ.

### 1.1.3 Hệ phương trình đẳng cấp

Hệ phương trình  $\begin{cases} f(x, y) = a \\ g(x, y) = b \end{cases}$  được gọi là hệ đẳng cấp bậc  $k$  nếu  $f(x, y); g(x, y)$

là các biểu thức đẳng cấp bậc  $k$ .

*Chú ý:* Biểu thức  $f(x, y)$  được gọi là đẳng cấp bậc  $k$  nếu  $f(mx, my) = m^k f(x, y)$ .

*Phương pháp giải:*

- Xét  $y = 0$  (hoặc  $x = 0$ ) thay vào hệ phương trình tìm nghiệm.

- Xét  $y \neq 0$ . Đặt  $x = ty$ , khi đó ta có

$$\begin{cases} f(ty, y) = y^k f(t, 1) \\ g(ty, y) = y^k g(t, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^k f(t, 1) = a \\ y^k g(t, 1) = b. \end{cases}$$

Chia theo vế hai phương trình của hệ ta được:  $f(t, 1) = \frac{a}{b} g(t, 1)$ .

Giải phương trình tìm  $t$  rồi thay ngược lại ta tìm được nghiệm  $(x, y)$ .

### 1.1.4 Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh

Hệ phương trình dạng hoán vị vòng quanh là hệ có dạng:

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_2) \\ f(x_2) = g(x_3) \\ \dots \\ f(x_{n-1}) = g(x_n) \\ f(x_n) = g(x_1). \end{cases}$$

(Khi ta hoán vị vòng quanh các biến thì hệ phương trình không đổi).

Cụ thể, ta xét hệ hoán vị vòng quanh ba ẩn sau đây.

$$\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x). \end{cases}$$

*Phương pháp giải:*

Giả sử  $f$  là hàm số xác định trên tập  $D$  và có tập giá trị là  $T$ ,  $T \subseteq D$  và  $f$  là hàm số đồng biến trên  $D$ .

- *Cách 1:* Đoán nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất. Để chứng minh hệ có nghiệm duy nhất ta thường cộng theo vế ba phương trình của hệ, sau đó suy ra  $x = y = z$ .

- *Cách 2:* Từ  $T \subseteq D$  ta suy ra  $f(x), f(f(x))$  và  $f(f(f(x)))$  thuộc  $D$ . Để  $(x, y, z)$  là nghiệm của hệ thì  $x \in T$ .

Nếu  $x > f(x)$  thì do  $f$  tăng trên  $D$  nên  $f(x) > f(f(x))$ .

Do đó,  $f(f(x)) > f(f(f(x)))$ . Suy ra:

$$x > f(x) > f(f(x)) > f(f(f(x))) = x.$$

Điều này mâu thuẫn. Chứng tỏ không thể có  $x > f(x)$ .

Tương tự ta cũng chứng minh được rằng không thể có  $x < f(x)$ .

Do đó,  $x = f(x)$ .

Việc giải hệ phương trình ban đầu được quy về việc giải phương trình  $x = f(x)$ .

Hơn nữa ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(f(y)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(f(f(z))) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ y = f(z) \\ z = f(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f(y) \\ z = y \\ z = f(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ z = f(z). \end{cases} \end{aligned}$$

## 1.2 Phương pháp cơ bản

### 1.2.1 Phương pháp cộng đại số

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số, ta có thể kết hợp hai phương trình trong hệ bằng các phép toán cộng, trừ, nhân, chia để thu được phương trình hệ quả đơn giản hơn, dễ giải hơn.

**Ví dụ 1.1.** (Trích đề thi đại học an ninh nhân dân năm 1999)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2 + x + y + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện:  $x^2 + x + y + 1 \geq 0; y^2 + x + y + 1 \geq 0$ .

Cộng, trừ theo về hai phương trình của hệ ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + y + 1} = 10 \\ x + y = 8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{x^2 - 16x + 73} = 10 - \sqrt{x^2 + 9} \\ y = 8 - x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 10 - \sqrt{x^2 + 9} \geq 0 \\ x^2 - 16x + 73 = 100 - 20\sqrt{x^2 + 9} + x^2 + 9 \\ y = 8 - x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -9 \leq x \leq 9 \\ 5\sqrt{x^2 + 9} = 4x + 9 \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 9 \\ x \geq -\frac{9}{4} \\ 25(x^2 + 9) = (4x + 9)^2 \\ y = 8 - x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\frac{9}{4} \leq x \leq 9 \\ (x - 4)^2 = 0 \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là  $(x; y) = (4; 4)$ .

### 1.2.2 Phương pháp thế

Đây là một phương pháp được ứng dụng rất nhiều trong những phương pháp giải hệ phương trình sau này. Dấu hiệu nhận biết của phương pháp này là từ một phương trình của hệ ban đầu, ta rút được biến này theo biến kia (cũng có thể là cả một biểu thức) rồi thay vào phương trình còn lại để giải. Trong một số trường hợp, ta dễ dàng tìm được biểu thức liên hệ giữa các biến nhưng đôi khi ta cần biến đổi hệ để có được điều mong muốn. Cụ thể, ta xét các ví dụ sau đây.

**Ví dụ 1.2.** (Trích đề thi HSG năm 2014 tỉnh Nghệ An)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{5x + y} + \sqrt{2x + y} = 3 & (1) \\ \sqrt{2x + y} + x - y = 1 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện:  $5x + y \geq 0; 2x + y \geq 0$ .

Từ phương trình (1) của hệ ta có:

$$\sqrt{5x + y} = 3 - \sqrt{2x + y}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{2x + y} \geq 0 \\ 5x + y = 9 - 6\sqrt{2x + y} + 2x + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{2x + y} \geq 0 \\ \sqrt{2x + y} = \frac{3 - x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{2x + y} \geq 0 \\ x \leq 3 \\ 2x + y = \left(\frac{3 - x}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{2x + y} \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y = \frac{x^2 - 14x + 9}{4}. \end{cases}$$

Thay  $y = \frac{x^2 - 14x + 9}{4}$  vào phương trình (2) ta được:

$$\frac{3 - x}{2} + x - \frac{x^2 - 14x + 9}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \pm \sqrt{57}$$

$$\Rightarrow x = 8 - \sqrt{57} \quad (\text{TMDK}).$$

$$\Rightarrow y = \frac{9 - \sqrt{57}}{2}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(8 - \sqrt{57}; \frac{9 - \sqrt{57}}{2}\right)$ .

## Chương 2

# Một số phương pháp giải hệ phương trình

### 2.1 Phương pháp đặt ẩn phụ

Đây là một phương pháp thường được sử dụng khi giải hệ phương trình. Đặc điểm nổi bật của phương pháp này là cần phát hiện ra ẩn phụ và xử lý mối liên quan của ẩn phụ với các đại lượng có trong hệ. Từ đó, ta đưa hệ phương trình ban đầu về một hệ đơn giản và dễ xử lý hơn. Có thể ẩn phụ xuất hiện trực tiếp trong hệ nhưng cũng có khi ta phải biến đổi hệ để có thể đặt được ẩn phụ. Một số dạng hệ có thể sử dụng phương pháp này như:

- Hệ đối xứng,
- Hệ có chứa căn thức (Ta thường đặt ẩn mới bằng căn thức để khử căn),
- Hệ có chứa các biểu thức dạng tổng - hiệu, tổng - tích hoặc chứa các biểu thức lặp lại trong hai phương trình.

Với những hệ phương trình có chứa căn thức, ta thường đặt  $u = \sqrt{f(x)}$  hoặc  $\begin{cases} u = \sqrt{f(x)} \\ v = \sqrt{g(x)} \end{cases}$  để đưa về một phương trình hoặc hệ phương trình đã biết cách giải. Ta xét các ví dụ sau đây.

**Ví dụ 2.1.** (Trích đề thi HSG QG năm 2001)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện:  $7x + y \geq 0; 2x + y \geq 0$ .

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sqrt{7x+y} \geq 0 \\ v = \sqrt{2x+y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u^2 - v^2}{5} \\ y = \frac{7v^2 - 2u^2}{5}. \end{cases}$$

Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u + v = 5 \\ v + \frac{u^2 - v^2}{5} - \frac{7v^2 - 2u^2}{5} = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} v = 5 - u \\ u^2 - 15u + 37 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} v = 5 - u \\ u = \frac{15 \pm \sqrt{77}}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u = \frac{15 + \sqrt{77}}{2}; v = \frac{-5 - \sqrt{77}}{2} \\ u = \frac{15 - \sqrt{77}}{2}; v = \frac{-5 + \sqrt{77}}{2}. \end{cases} \quad (\text{Loại vì } v < 0) \\ \text{Với } & \begin{cases} u = \frac{15 - \sqrt{77}}{2} \\ v = \frac{-5 + \sqrt{77}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - \frac{\sqrt{77}}{2} \\ y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2} \end{cases} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left(10 - \frac{\sqrt{77}}{2}; \frac{11 - \sqrt{77}}{2}\right)$ .

## 2.2 Phương pháp phân tích thành nhân tử

Trong phần này chúng ta sẽ tìm hiểu phương pháp giải hệ phương trình dạng:

$$\begin{cases} f(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0. \end{cases}$$

trong đó,  $f(x; y) = f_1(x; y) \cdot f_2(x; y)$ .

$$\text{Từ đó, ta đưa hệ về dạng: } \begin{cases} \begin{cases} f_1(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x; y) = 0 \\ g(x; y) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình bằng phương pháp phân tích nhân tử là một kỹ thuật có tính phát triển nâng cao dựa trên nền tảng giải hệ bằng phương pháp thế.

Dấu hiệu nhận biết một hệ phương trình được giải bằng phương pháp này là:

- Phương trình trong hệ là một phương trình bậc hai có biểu thức delta là một số chính phương.

- Phương trình trong hệ có dạng đẳng cấp.

- Phương trình trong hệ xuất hiện nhân tử chung sau phép nhân với biểu thức liên hợp.

- Phương trình có tính đối xứng giữa hai biến.

**Ví dụ 2.2.** (Trích đề thi thử THPTQG năm 2015 trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 5x = y^2 - 3y - 4 \\ 4(\sqrt{x-1} - 1)\sqrt{x+y} = x + y + 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện:  $x \geq 1; x + y \geq 0$ .

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$y^2 - 3y - x^2 + 5x - 4 = 0.$$

Ta coi đây là một phương trình bậc hai theo biến  $y$ , tham số  $x$ .

Có:  $\Delta = (2x - 5)^2 \geq 0; \forall x \geq 1$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 4 - x \\ y = x - 1. \end{cases}$$

Khi đó ta có thể đưa phương trình thứ nhất của hệ về phương trình tích dạng:

$$(y - 4 + x)(y - x + 1) = 0.$$

Với  $y = 4 - x$ , thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned} 4(\sqrt{x-1} - 1) \cdot 2 &= 7 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 &= \frac{7}{8} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} &= \frac{15}{8} \Leftrightarrow x = \frac{289}{64}. \\ \Rightarrow y &= -\frac{33}{64} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Với  $y = x - 1$ , thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$4(\sqrt{x-1} - 1)\sqrt{2x-1} = 2x + 2.$$

Đặt  $u = \sqrt{x-1} - 1 \Rightarrow x = u^2 + 2u + 2$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có:} \quad 4(\sqrt{x-1} - 1)\sqrt{2x-1} &= 2x + 2 \\ \Leftrightarrow 4u\sqrt{2u^2 + 4u + 3} &= 2(u^2 + 2u + 2) \\ \Leftrightarrow 4u^2(2u^2 + 4u + 3) &= (u^2 + 2u + 2)^2 \\ \Leftrightarrow 7u^4 + 12u^3 + 2u^2 - 12u - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (u - 1)(7u^3 + 19u^2 + 21u + 9) &= 0. \end{aligned}$$

Vì  $7u^3 + 19u^2 + 21u + 9 = 0$  vô nghiệm nên suy ra:

$$u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = 1.$$

Do đó  $x = 5 \Rightarrow y = 4$  (TMDK).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(x; y) = \left(\frac{289}{64}; -\frac{33}{64}\right); (5; 4)$ .

*Lưu ý:* Hạn chế của phương pháp trên là nó chỉ sử dụng được với những hệ có chứa một phương trình bậc hai có biệt thức delta đẹp. Với những bài ta không tính được delta hoặc delta là một biểu thức không chính phương thì ta nghĩ đến cách khác, chẳng hạn như cộng, trừ hay nhân, chia theo vế hai phương trình của hệ để được một phương trình có thể phân tích thành nhân tử.

**Ví dụ 2.3.** (Trích tạp chí toán học và tuổi trẻ tháng 1 năm 2015)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 + y^3 + 2x^2 + y^2 = xy(2x + 3y + 4) \\ \frac{x^2 + 1}{y} + \frac{y^2 + 1}{x} = \frac{10}{3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện:  $xy \neq 0$ .

Phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 + y^3 + 2x^2 + y^2 &= 4xy(x + y + 1) - 2x^2y - xy^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2(x + y + 1) + y^2(x + y + 1) - 4xy(x + y + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + y + 1)(2x^2 + y^2 - 4xy) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4xy = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x + y = 1$ , kết hợp với phương trình thứ hai của hệ đã cho ta có:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ \frac{x^2 + 1}{y} + \frac{y^2 + 1}{x} = \frac{10}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ \frac{x^2 + 1}{-1 - x} + \frac{(x + 1)^2 + 1}{x} = \frac{10}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ xy = -6 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x = 2; y = -3 \\ x = -3; y = 2 \end{cases} \quad (\text{TMDK}). \end{aligned}$$

Với  $2x^2 + y^2 - 4xy = 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4xy &= 2x^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 \geq 2xy \\ \Rightarrow xy &\geq 0. \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình thứ hai của hệ ta có:

$$\frac{x^2 + 1}{y} + \frac{y^2 + 1}{x} \geq \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} = 4 > \frac{10}{3}.$$

Suy ra trường hợp này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(x; y) = (2; -3); (-3; 2)$ .

### 2.3 Phương pháp sử dụng hằng đẳng thức

Trong mục này, chúng ta nghiên cứu về việc sử dụng các hằng đẳng thức để giải hệ phương trình. Bằng các phép biến đổi, ta đưa hệ về một trong các dạng sau:

1.  $A^n = B^n; \quad n \in \mathbb{N}$ .

Khi đó  $\begin{cases} A = B & \text{nếu } n \text{ lẻ,} \\ A = \pm B & \text{nếu } n \text{ chẵn.} \end{cases}$

2.  $A_1^{2n} + A_2^{2n} + \dots + A_k^{2n} = 0; \quad k = 1; 2; \dots; \quad n \in \mathbb{N}^*$ .

Khi đó  $A_1^{2n} = A_2^{2n} = \dots = A_k^{2n} = 0$ .

*Chú ý:* Ta dùng phương pháp này khi giải hệ phương trình mà nhận thấy các biểu thức của ẩn chứa đầy đủ các bậc từ nhỏ đến lớn.

**Ví dụ 2.4.** (Trích đề thi HSG QG năm 2010)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.**

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ -8x^3 + 16y^3 = -24x^2 + 96y^2 + 32x - 256y \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 256 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ (x - 2)^4 = (y - 4)^4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ \begin{cases} x = y - 2 \\ x = 6 - y. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Với  $x = y - 2$  ta có:

$$\begin{aligned} & (y - 2)^4 - y^4 = 240 \\ \Leftrightarrow & (y + 2)(y^2 - 7y + 22) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = -2 \Rightarrow x = -4. \end{aligned}$$

Với  $x = 6 - y$  ta có:

$$\begin{aligned} & (6 - y)^4 - y^4 = 240 \\ \Leftrightarrow & (y - 2)(y^2 - 7y + 22) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = 2 \Rightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(x; y) = (-4; -2); (4; 2)$ .

Trong một số bài toán, khi biến đổi hệ phương trình ta sẽ thu được dạng sau:

$$A_1^{2n} + A_2^{2n} + \dots + A_k^{2n} = 0; \quad k = 1; 2; \dots; \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó,  $A_1^{2n} = A_2^{2n} = \dots = A_k^{2n} = 0$ .

**Ví dụ 2.5.** (Trích đề thi chọn đội tuyển HSG QG năm 2015 tỉnh Nghệ An)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(4y^3 + 3y + \sqrt{5y^2 - x^2}) = y^2(x^2 + 4y^2 + 8) \\ x + \sqrt{12 - 2x} = 2y^2 - 2\sqrt{y} - 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện:  $5y^2 - x^2 \geq 0; x \leq 6; y \geq 0$ .

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned} & (x - 2y)^2(4y^2 + 3) + (x - 2\sqrt{5y^2 - x^2})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2\sqrt{5y^2 - x^2} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2y \\ x = 2\sqrt{5y^2 - x^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2y \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned} & 2y + \sqrt{12 - 4y} = 2y^2 - 2\sqrt{y} - 4 \\ \Leftrightarrow & y + \sqrt{3 - y} = y^2 - \sqrt{y} - 2 \\ \Leftrightarrow & y^2 - y - 2 = \sqrt{3 - y} + \sqrt{y} \geq 0 \\ \Rightarrow & 2 \leq y \leq 3. \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & y + \sqrt{3 - y} = y^2 - \sqrt{y} - 2 \\ \Leftrightarrow & y^2 - 3y + 1 = \sqrt{3 - y} - (y - 2) + \sqrt{y} - (y - 1) \\ \Leftrightarrow & y^2 - 3y + 1 = -\frac{y^2 - 3y + 1}{\sqrt{3 - y} + y - 2} - \frac{y^2 - 3y + 1}{\sqrt{y} + y - 1} \\ \Leftrightarrow & (y^2 - 3y + 1) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3 - y} + y - 2} + \frac{1}{\sqrt{y} + y - 1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Vì  $1 + \frac{1}{\sqrt{3 - y} + y - 2} + \frac{1}{\sqrt{y} + y - 1} > 0; \forall y \in [2; 3]$ .

Nên suy ra  $y^2 - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Kết hợp với điều kiện ta có  $y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 3 + \sqrt{5}$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = \left( 3 + \sqrt{5}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$ .

## 2.4 Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Để giải hệ phương trình bằng phương pháp hàm số, trước tiên ta cần biết đến các tính chất của hàm số như sau.

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $D$  ( $D$  có thể là một đoạn, một khoảng, hoặc nửa khoảng).

### 1. Định lý 1

Nếu hàm số  $y = f(x)$  luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên  $D$  thì phương trình  $f(x) = k$  có nhiều nhất một nghiệm trên  $D$  và  $f(u) = f(v)$  khi và chỉ khi  $u = v$ , với mọi  $u, v$  thuộc  $D$ .

### 2. Định lý 2

Nếu hàm số  $y = f(x)$  luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên  $D$  và hàm số  $y = g(x)$  luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên  $D$  thì phương trình  $f(x) = g(x)$  có nhiều nhất một nghiệm trên  $D$ .

### 3. Định lý 3

Giả sử hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm đến cấp  $n$  trên  $D$  và phương trình  $f^{(k)}(x) = 0$  có  $m$  nghiệm. Khi đó, phương trình  $f^{(k-1)}(x) = 0$  có nhiều nhất  $m+1$  nghiệm trên  $D$ .

*Lưu ý:* Một số đặc điểm để nhận dạng hệ phương trình có thể áp dụng phương pháp này là:

- Có một phương trình trong hệ có thể cô lập được hai biến về một định dạng phương trình có tính đối xứng.
- Hệ đối xứng loại 2 nhưng không giải được bằng phương pháp thông thường.
- Có một phương trình trong hệ có thể cô lập được hai biến nhưng không đưa được về dạng đối xứng, chẳng hạn như:

$f(x) + f(y) = k$  hoặc  $f(x).f(y) = k$  hoặc  $f(x) + g(y) = k$  hoặc  $f(x) = k$ , với  $k$  là hằng số.

Trong một số bài toán, ta dễ dàng phát hiện ra hàm đặc trưng. Chẳng hạn, ta xét ví dụ sau đây.

**Ví dụ 2.6.** (Trích đề thi thử DH năm 2013 trường THPT chuyên DHSPHN)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x^2 + 1} = y + \frac{1}{y^2 + 1} \\ \sqrt{9x^2 + \frac{4}{y^2}} = \frac{3x^2 + 2x - 2}{y} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện:  $y \neq 0$ .



Xét hàm số  $f(t) = t + \frac{1}{t^2 + 1}$ ;  $t \in \mathbb{R}$ .

Có  $f'(t) = 1 - \frac{2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t^4 + t^2 + (t - 1)^2}{(t^2 + 1)^2} > 0; \forall t$ .

Suy ra  $f(t)$  là hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ .

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2}} &= \frac{3x^2 + 2x - 2}{x} \quad (x \neq 0) \\ \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2}} &= 3x - \frac{2}{x} + 2. \end{aligned}$$

Đặt  $u = 3x - \frac{2}{x} \Rightarrow 9x^2 + \frac{4}{x^2} = u^2 + 12$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} \sqrt{9x^2 + \frac{4}{x^2}} &= 3x - \frac{2}{x} + 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{u^2 + 12} &= u + 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u + 2 \geq 0 \\ u^2 + 12 = (u + 2)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 2 \\ 4u = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow u = 2. \\ \Rightarrow 3x - \frac{2}{x} = 2 &\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} &\Rightarrow x = y = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(x; y) = \left(\frac{1 - \sqrt{7}}{3}; \frac{1 - \sqrt{7}}{3}\right); \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}; \frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right)$ .

## 2.5 Phương pháp khác

### 2.5.1 Phương pháp đánh giá

Nội dung chủ đề này đề cập đến việc đánh giá hệ phương trình thông qua điều kiện nghiệm của hệ phương trình và các bất đẳng thức cơ bản như bất đẳng thức Cô si, bất đẳng thức Bunhiacopski, bất đẳng thức véc tơ.

#### 1. Bất đẳng thức Cô si

Cho hai số thực không âm  $a, b$ . Ta có:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

*Tổng quát:* Cho  $n$  số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Khi đó ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

### 2. Bất đẳng thức Bunhiacopski

Cho bốn số thực  $a, b, x, y$ . Ta có:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ .

*Tổng quát:* Cho  $2n$  số thực  $a_i, b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Ta có:

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ .

### 3. Bất đẳng thức véc tơ

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\vec{u} = k\vec{v}, k \in \mathbb{R}$ .

\* Nếu  $\vec{u} = (a; b); \vec{v} = (c; d)$  thì ta có bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $ac = bd$ .

### 4. Bất đẳng thức dấu giá trị tuyệt đối

$|A| + |B| \geq |A + B|$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $AB \geq 0$ .

$|A - B| \geq |A| - |B|$ . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(A - B)B \geq 0$ .

### 5. Một số bổ đề thường dùng

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \text{ với } a > 0; b > 0; ab \geq 1.$$

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \text{ với } a > 0; b > 0; ab \leq 1.$$

Dấu bằng xảy ra ở hai bổ đề này khi và chỉ khi  $\begin{cases} ab = 1 \\ a = b. \end{cases}$

**Ví dụ 2.7.** (Trích đề thi Đại học khối A, A<sub>1</sub> năm 2014)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện:  $-2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}; 2 \leq y \leq 12$ .

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có:

$$x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} \leq \sqrt{(x^2+12-x^2)(12-y+y)} = 12.$$

Dạng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{12-y}} &= \frac{\sqrt{12-x^2}}{\sqrt{y}} \\ \Leftrightarrow x\sqrt{y} &= \sqrt{(12-x^2)(12-y)} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 12-x^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Thay  $y = 12 - x^2$  vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$\begin{aligned} x^3 - 8x - 1 &= 2\sqrt{10-x^2} \\ \Leftrightarrow (x^3 - 8x - 3) + 2(1 - \sqrt{10-x^2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 1) + 2 \cdot \frac{x^2 - 9}{1 + \sqrt{10-x^2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left( x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1 + \sqrt{10-x^2}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Vì  $x^2 + 3x + 1 + \frac{2(x+3)}{1 + \sqrt{10-x^2}} > 0; \quad \forall x \geq 0.$

nên  $x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3 \quad (\text{TMDK}).$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (3; 3)$ .

## 2.5.2 Phương pháp lượng giác hóa

**Ví dụ 2.8.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (3x - 4x^3)(3y - 4y^3) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Đặt  $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad (t \in [0; 2\pi]).$

Khi đó phương trình thứ hai của hệ trở thành:

$$\begin{aligned} (3 \sin t - 4 \sin^3 t)(3 \cos t - 4 \cos^3 t) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin 3t \cdot \cos 3t &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin 6t &= -1 \\ \Leftrightarrow t &= -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Do  $t \in [0; 2\pi]$  nên  $t = \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{15\pi}{12}; \frac{19\pi}{12}.$

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm là

$$(x; y) = (\sin t; \cos t); t \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{15\pi}{12}; \frac{19\pi}{12} \right\}.$$

### 2.5.3 Phương pháp sử dụng số phức

Phương pháp chung là đặt  $z = x + yi$ . Khi đó, chuyển bài toán tìm nghiệm  $(x; y)$  về tìm số phức  $z$  thỏa mãn hệ phương trình đã cho. Dùng phương pháp giải phương trình nghiệm phức tìm được  $z = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

Căn bậc  $n$  của số phức:

$$z^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt[n]{r} \left( \cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n} \right); k = 0; 1; \dots; n - 1.$$

**Ví dụ 2.9.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Giải.** Điều kiện  $x^2 + y^2 \neq 0$ .

Gọi  $z = x + yi$ ,  $(x, y \in \mathbb{R})$ .

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}; \quad \frac{i}{z} = \frac{xi + y}{x^2 + y^2}.$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ yi - \frac{xi + 3yi}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$$\begin{aligned} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} + yi - \frac{xi + 3yi}{x^2 + y^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow (x + yi) + \frac{3x - y - xi - 3yi}{x^2 + y^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow (x + yi) + \frac{3(x - yi) - (xi + y)}{x^2 + y^2} &= 3 \\ \Leftrightarrow z + \frac{3 - i}{z} &= 3 \\ \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 + i \\ z = 1 - i. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là  $(x; y) = (2; 1); (1; -1)$ .

## Chương 3

# Một số phương pháp xây dựng hệ phương trình

### 3.1 Xây dựng hệ phương trình bằng phương pháp đặt ẩn phụ

Để có được một hệ phương trình phức tạp và có độ khó tùy ý, trước tiên ta sẽ xây dựng một hệ phương trình cơ bản. Từ đó ta sẽ phát triển bài toán và thu được kết quả mong muốn. Chẳng hạn như:

Xét  $x = 1, y = 0$ .

Để có được một hệ đối xứng loại I đối với hai biến  $x, y$ , rất đơn giản, ta chỉ cần tính  $xy + x + y = 3, x^2 + y^2 + x + y = 12$ . Từ đó ta có bài toán sau:

**Bài toán 3.1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x + y = 3 \\ x^2 + y^2 + x + y = 12 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

*Hướng dẫn:*

Đặt  $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ , điều kiện  $S^2 \geq 4P$ .

Khi đó, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} S + P = 3 \\ S^2 + S - 2P = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S; P) = (3; 0) \\ (S; P) = (-6; 9) \end{cases}.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm  $(x; y) = (3; 0); (0; 3); (-3; -3)$ .

Tương tự như trên, ta sẽ xây dựng một hệ phương trình đối xứng loại I đối với hai biến  $u, v$ . Sau đó, chọn  $u = f(x, y), v = g(x, y)$  để được một hệ mới.

Xét  $u = 1, v = 1$ . Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + uv + v = 3 \\ u^2v + uv^2 = 2 \end{cases} \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

Sau khi đặt  $S = u + v, P = uv$  ta được một hệ bậc hai đối với  $S, P$ , trong đó có một phương trình bậc nhất theo  $S$  và  $P$ , hơn nữa ta đã chọn  $u = 1, v = 1$  nên ta biết rằng hệ phương trình có một nghiệm  $(S, P) = (1, 1)$ . Vậy chắc chắn ta sẽ giải được hệ phương trình trên.

Bây giờ, để tạo ra được một hệ phương trình mới, hay hơn, khó hơn, ta chỉ cần chọn  $u = \sqrt{x}; v = \frac{1}{y-1}$ . Như vậy, ta thu được hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{y-1} + \frac{1}{y-1} = 3 \\ \frac{x}{y-1} + \frac{\sqrt{x}}{(y-1)^2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}(y-1) + \sqrt{x} + 1 = 3y - 3 \\ \frac{x}{y-1} + \frac{\sqrt{x}}{(y-1)^2} = 2. \end{cases}$$

Từ đó ta có bài toán sau.

**Bài toán 3.2.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x}(y-1) + \sqrt{x} + 1 = 3y - 3 \\ \frac{x - 2y + 2}{y-1} + \frac{\sqrt{x}}{(y-1)^2} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Nhận thấy rằng, bài toán 2 không đơn giản như bài toán 1, nhưng khi ta đã bắt được ý tưởng của bài thì nó trở nên dễ dàng hơn rất nhiều. Ta cũng có thể xây dựng được một hệ phương trình đối xứng loại II đối với hai biến  $(x, y)$ , sau đó, chỉ cần thay  $(x, y)$  bởi những biểu thức khác nhau thì ta sẽ thu được những bài toán giải hệ phương trình phong phú. Chẳng hạn như:

Xét  $x = 2, y = 2$ . Ta có:  $x^2 - xy + 3y = 6$  hay  $x^2 - xy = 3(2 - y)$ .

Khi thay  $x$  bởi  $y$  và thay  $y$  bởi  $x$  ta được phương trình:  $y^2 - xy = 3(2 - x)$ .

Từ đó ta có bài toán sau:

**Bài toán 3.3.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy = 3(2 - y) \\ y^2 - xy = 3(2 - x) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Từ hệ phương trình đơn giản trên, ta có thể sáng tác thêm rất nhiều bài toán, chẳng hạn như:

Với  $u = 2, v = 2$  ta đã xây dựng được hệ đối xứng loại II là:

$$\begin{cases} u^2 - uv = 3(2 - v) \\ v^2 - uv = 3(2 - u). \end{cases}$$

Chọn  $u = \sqrt{x^2 + 1}; v = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ , ta được hệ phương trình:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{y}} = 3 \left( 2 - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) \\ \frac{1}{4y} - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{y}} = 3(2 - \sqrt{x^2 + 1}) \\ 2\sqrt{y}(x^2 + 1) + 3 = \sqrt{x^2 + 1} + 12\sqrt{y} \\ \frac{1}{4y} + 3\sqrt{x^2 + 1} = 6 + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{y}}. \end{cases}$$

Như vậy, ta đã xây dựng được một bài toán hay hơn đó là:

**Bài toán 3.4.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{y}(x^2 + 1) + 3 = \sqrt{x^2 + 1} + 12\sqrt{y} \\ \frac{1}{4y} + 3\sqrt{x^2 + 1} = 6 + \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{y}} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Ngoài ra, từ những nghiệm "đẹp" ban đầu, ta hoàn toàn có thể xây dựng được một hệ đẳng cấp đơn giản, và từ đó ta cũng sẽ có được những hệ phương trình vô cùng phong phú.

Chẳng hạn, ta xét  $x = 1, y = 2$ . Khi đó có được:

$$\begin{cases} 2x^3 + y^3 = 10 \\ x^2y - 3xy^2 + x^3 = -9. \end{cases}$$

(Hoặc cũng có thể chọn được một hệ đẳng cấp khác, tùy theo nhu cầu của mỗi người.)

Như vậy ta có bài toán sau.

**Bài toán 3.5.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 + y^3 = 10 \\ x^2y - 3xy^2 + x^3 = -9 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Từ bài toán trên, nếu ta chọn  $x = u; y = \frac{u}{v}$  thì có hệ mới là:

$$\begin{cases} 2u^3 + \frac{u^3}{v^3} = 10 \\ u^2 \cdot \frac{u}{v} - 3u \cdot \frac{u^2}{v^2} + u^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^3v^3 + u^3 = 10v^3 \\ u^3v - 3u^3 + u^3v^2 = -9v^2. \end{cases}$$

Do đó, ta thu được bài toán sau.

**Bài toán 3.6.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2u^3v^3 + u^3 - 10v^3 = 0 \\ u^3v - 3u^3 + u^3v^2 + 9v^2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

### 3.2 Xây dựng hệ phương trình từ các đẳng thức

Để một hệ phương trình có nghiệm "đẹp" như ý, ta xuất phát từ những đẳng thức đơn giản hoặc có thể từ những hằng đẳng thức.

1. Chẳng hạn như, xét một biểu thức  $(x^2 - y)(2x - y + 1) = 0$  (\*).

Khai triển (\*) ta được

$$2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 (**).$$

Muốn có một hệ phương trình, ta chỉ cần kết hợp (\*\*) với một biểu thức liên hệ giữa hai biến  $x, y$ , ví dụ như  $xy + x - 2 = 0$  (\*\*\*)

Từ (\*\*) và (\*\*\*) ta có bài toán sau.

**Bài toán 3.7.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 & (1) \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Hoàn toàn tương tự, ta xét đẳng thức:

$$\begin{aligned} (x - 4y)(x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4y)(x - y)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Kết hợp với một biểu thức liên hệ giữa  $x; y$ , chẳng hạn  $\sqrt{x - y} + \sqrt{x + y} = 2$ , ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 \\ \sqrt{x - y} + \sqrt{x + y} = 2. \end{cases}$$

Từ đó, ta thu được bài toán sau đây.

**Bài toán 3.8.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2y + 9xy^2 - 4y^3 = 0 & (1) \\ \sqrt{x - y} + \sqrt{x + y} = 2 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2. Xét một biến đổi tương đương bất kỳ do ta chọn là  $(x - 2)^3 = (y + 3)^3$ .

Ta có:

$$(x - 2)^3 = (y + 3)^3 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 \quad (1).$$

Nhận thấy  $(x; y) = (2; -3)$  hoặc  $(x; y) = (3; -2)$  đều thỏa mãn (1).

Có:  $x^3 - y^3 = 35$  (2).

Từ (1) và (2) ta được:  $2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y$  (3).

Kết hợp (2) và (3) ta có bài toán sau.



**Bài toán 3.9.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 & (1) \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

### 3.3 Sử dụng tính đơn điệu của hàm số để xây dựng hệ phương trình

Dựa vào tính chất "Nếu hàm số  $y = f(x)$  đơn điệu trên khoảng  $(a;b)$  và  $x, y$  thuộc  $(a;b)$  thì  $f(x) = f(y)$  khi và chỉ khi  $x = y$ " ta có thể sáng tác được rất nhiều phương trình. Sau đó, chỉ cần kết hợp với một biểu thức liên hệ giữa hai biến  $x, y$  là ta có một hệ phương trình với nghiệm như mong muốn.

1. Xét hàm số  $f(t) = t^3 + 3t$  trên  $\mathbb{R}$ .

Có  $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$  với mọi  $t$ . Suy ra  $f(t)$  là hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó,  $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ .

Lấy  $u = \sqrt{2x-1}; v = y$  ta được:

$$(2x+2)\sqrt{2x-1} = y^3 + 3y.$$

Kết hợp với một biểu thức liên hệ giữa  $x, y$ , chẳng hạn  $y^2 - xy + 5 = 5x - 6y$ .  
Ta có bài toán sau.

**Bài toán 3.10.** ( Trích đề thi thử THPTQG năm 2015 tỉnh Nam Định)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (2x+2)\sqrt{2x-1} = y^3 + 3y & (1) \\ y^2 - xy + 5 = 5x - 6y & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

### 3.4 Xây dựng hệ phương trình bằng phương pháp đánh giá

Vì bất đẳng thức là một lĩnh vực rất phát triển của Toán Sơ Cấp nên theo đó, sử dụng bất đẳng thức ta sẽ sáng tạo ra được rất nhiều hệ phương trình. Điều đặc biệt lưu ý đối với phương pháp này là đoán được nghiệm sẽ góp phần rất lớn vào thành công của lời giải.

Xét bất đẳng thức Cô si

Cho hai số thực không âm  $a, b$ . Ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

Chọn  $a = 2x^2+y; b = 2y^2+x$ , khi đó có:

$$2^{x^2+y} + 2^{y^2+x} \geq 2\sqrt{2^{x^2+y+y^2+x}}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunhiacopski thì

$$x + y \geq \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2; x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2.$$

Ta chỉ cần chọn một biểu thức liên hệ giữa  $\sqrt{x}, \sqrt{y}$  là sẽ có được một hệ phương trình, chẳng hạn, lấy  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ .

Suy ra  $x + y \geq \frac{1}{2}(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 2$  và  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 \geq 2$ .

Do đó  $2^{x^2+y} + 2^{y^2+x} \geq 2\sqrt{2^{x^2+y+y^2+x}} \geq 2\sqrt{2^4} = 8$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = 1$ .

Từ đó, ta có bài toán sau.

**Bài toán 3.11.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^{x^2+y} + 2^{y^2+x} = 8 & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

### 3.5 Sử dụng số phức để xây dựng hệ phương trình

Xuất phát từ một số phức cho trước, ta có thể xây dựng nên những hệ phương trình bằng cách lũy thừa số phức đó, hoặc có thể là từ hai số phức, ta biến đổi và cũng thu được hệ phương trình.

**1.** Xây dựng hệ phương trình bằng cách lũy thừa một số phức cho trước

Xét số phức  $z = 5 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 5 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ .

Giả sử  $w = x + yi$ ;  $(x, y \in \mathbb{R})$  là số phức thỏa mãn:

$$\begin{aligned} (x + yi)^3 &= 5 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 &= \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \\ \Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i &= \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \quad (*). \end{aligned}$$

So sánh hai vế của (\*) ta có:

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = \frac{5}{2} \\ 3x^2y - y^3 = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Từ đó ta có bài toán.

**Bài toán 3.12.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 & (1) \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

2. Xây dựng hệ phương trình từ hai số phức cho trước

$$\text{Xét 2 số phức } \begin{cases} z_1 = 7 - \sqrt{5}i \\ z_2 = \sqrt{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 7 \\ z_1 \cdot z_2 = 5 + 7\sqrt{5}i. \end{cases}$$

Suy ra  $z_1; z_2$  là nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned} z^2 - 7z + 5 + 7\sqrt{5}i &= 0 \\ \Leftrightarrow z - 7 + \frac{5 + 7\sqrt{5}i}{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow z + \frac{5}{z} + \frac{7\sqrt{5}i}{z} &= 7 \\ \Leftrightarrow z + \frac{5\bar{z}}{z\bar{z}} + \frac{7\sqrt{5}i\bar{z}}{z\bar{z}} &= 7. \end{aligned}$$

Giả sử  $z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), khi đó ta có:

$$\begin{aligned} x + yi + \frac{5(x - yi)}{x^2 + y^2} + \frac{7\sqrt{5}(xi + y)}{x^2 + y^2} &= 7 \\ \Leftrightarrow x + yi + \frac{5x - 5yi}{x^2 + y^2} + \frac{7\sqrt{5}xi + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} &= 7 \\ \Leftrightarrow \left( x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} \right) + \left( y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} \right) i &= 7 \quad (*). \end{aligned}$$

So sánh hai vế của (\*), có:

$$\begin{cases} x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có bài toán sau.

**Bài toán 3.13.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 & (1) \\ y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

# Kết luận

Sau thời gian học tập tại khoa Toán - Cơ - Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, được các thầy cô tận tình giảng dạy và dưới sự hướng dẫn của TS. Phạm Văn Quốc, tôi đã hoàn thành luận văn với đề tài "Một số phương pháp giải hệ phương trình trong chương trình toán Trung học phổ thông". Luận văn đã đạt được một số kết quả sau:

1. Luận văn đã trình bày một cách hệ thống những kiến thức cơ bản về hệ phương trình, đồng thời đưa ra được các phương pháp giải thường sử dụng trong toán Trung học phổ thông.

2. Luận văn đã đưa ra được một số cách sáng tác hệ phương trình từ số phức, hay từ các đẳng thức, bất đẳng thức, hoặc tính chất của hàm số.

3. Luận văn đã sưu tầm được nhiều bài toán trong các đề thi Đại học, thi học sinh giỏi Quốc gia và Olympic. Vì vậy, luận văn có thể dùng làm tài liệu tham khảo nhằm nâng cao kiến thức cho học sinh Trung học phổ thông.

Mặc dù trong quá trình làm luận văn, tác giả đã nghiêm túc và có nhiều cố gắng, nhưng luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của thầy cô và bạn bè để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

# Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Tài Chung (2015), *Sáng tạo và giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình*, NXB Tổng hợp TP HCM.

[2] Hà Văn Chương (2012), *Tuyển chọn và giải hệ phương trình, hệ bất phương trình, phương trình, bất phương trình không mẫu mực*, NXB ĐHQGHN.

[3] Nguyễn Văn Lộc (2012), *Tuyển chọn các bài thi vô địch Toán ở các địa phương*, NXB ĐHQGHN.

[4] Nguyễn Vũ Lương (Chủ biên)- Phạm Văn Hùng - Nguyễn Ngọc Thắng (2006), *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức*, NXB ĐHQGHN.

[5] Nguyễn Văn Mậu, *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình*, NXB GD.

[6] Đặng Thành Nam (2014), *Những điều cần biết luyện thi Đại học kỹ thuật giải nhanh hệ phương trình*, NXB ĐHQGHN.

[7] Lê Xuân Sơn (2014), *Phương pháp hàm số trong giải Toán*, NXB ĐHQGHN.

[8] Mai Xuân Vinh (Chủ biên) - Phạm Kim Chung - Phạm Chí Tuấn - Đào Văn Chung - Dương Văn Sơn (2015), *Tư duy logic tìm tòi lời giải hệ phương trình*, NXB ĐHQGHN.

[9] Ban tổ chức kỳ thi, *Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4*, NXB GD.