ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN VĂN THÀNH

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG NGẪU NHIÊN

DỰ THẢO TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương trình vi phân và tích phân

Mã số: 62460103

HÀ NỘI, 2018

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐH Quốc gia Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học : PGS. TS Cung Thế Anh

Phản biện: ....
....

Phản biện: ....
....

Phản biện: ....
....

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng cấp Trường chấm luận án tiến sĩ họp tại Trường Khoa học Tự nhiên, ĐH Quốc Gia Hà Nội vào hồi ...giờ ...ngày...tháng ...năm 2018.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Thư viện Trường Đại học Khoa học Tự nhiên

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên xuất hiện nhiều trong các quá trình của vật lý, hóa học và sinh học, chẳng hạn quá trình truyền nhiệt và khuếch tán, quá trình truyền sóng trong cơ học chất lỏng, các mô hình quần thể trong sinh học khi mà sự tác động của ngoại lực là liên tục và ngẫu nhiên. Việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ.

Những vấn đề định tính cơ bản đặt ra khi nghiên cứu các phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên:

- Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm của các hệ động lực ngẫu nhiên bằng cách sử dụng lí thuyết tập hút ngẫu nhiên. Bài toán cơ bản của lí thuyết này là nghiên cứu sự tồn tại và các tính chất của tập hút ngẫu nhiên, chẳng hạn tính trơn của tập hút.
- Nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định và ổn định hóa của nghiệm dừng của hệ tất định và hệ ngẫu nhiên tương ứng. Nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của hệ phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên.

TỔNG QUAN VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU

Một trong các hướng phát triển lớp phương trình parabolic là lớp **phương trình đạo hàm riêng suy biến kiểu Caldiroli-Musina** đã được nghiên cứu nhiều trong những năm gần đây có dạng

$$\begin{aligned}
&du+[-\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u)+f(u)+\lambda u]dt=gdt+h(x,t,u)dW(t), x\in\mathcal{O}, t>0,\\
&u|_{\partial\mathcal{O}}=0, t>0, \qquad (1)\\
&u|_{t=0}=u_0.
\end{aligned}$$

Trong trường hợp tất định $(h(x,t,u)\equiv 0)$, lớp phương trình này được đưa ra bởi Caldiroli-Musina trong bài báo của P. Caldiroli and R. Musina (2000) khi miền $\mathcal{O}$ bị chặn và hệ số khuếch tán σ là hàm không âm, đo được và có thể bằng không tại hữu hạn điểm. Một ví dụ điển hình là $\sigma(x) \sim |x|^\alpha, \alpha \in (0,2)$ trong trường hợp miền bị chặn. Phương trình này có thể xem là mô hình đơn giản của quá trình khuếch tán nơtron (điều khiển phản hồi của phản ứng hạt nhân) (xem R. Dautray and J.L. Lions (1985)). Trong trường hợp này u và σ tương ứng chỉ sự chảy nơtron và sự khuếch tán nơtron. Để nghiên cứu lớp phương trình này, Caldiroli và Musina đã xét không gian năng lượng tự nhiên $\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)$ được định nghĩa là bổ sung đủ của $C_0^\infty(\mathcal{O})$ đối với chuẩn

$$\|u\|_{\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)} := \left(\int_{\mathcal{O}} \sigma(x)|\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$$

và chứng minh một số định lí nhúng tương ứng. Dựa trên những kết quả này, đã nhiều kết quả nghiên cứu của lớp các phương trình này như sau:

- Nghiên cứu sự tồn tại của tập hút và các tính chất của tập hút, các tác giả N.I. Karachalios và N.B. Zographopoulos đã nghiên cứu sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận của nghiệm bài toán Cauchy-Dirichlet đối với lớp phương trình trên trong trường hợp đặc biệt $f(u) = -\lambda u + |u|^{2\gamma}u(0 \leq \gamma \leq \dfrac{2-\alpha}{N-2+\alpha}), g(x) = 0$ (xem N.I. Karachalios and N.B. Zographopoulos (2005), (2006)).

- Trong các năm từ 2010 đến 2012, các tác giả C.T. Anh, N. D. Bình, T. Q. Bảo và L.T.Thúy đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong $L^2(\mathcal{O})$ và $L^2(\mathbb{R}^N)$ và tính trơn của tập hút toàn cục và sự phụ thuộc nửa liên tục trên và số hạng phi tuyến của một số lớp phương trình parabolic suy biến nửa tuyến tính ôtônôm trên miền bị chặn và không bị chặn với số hạng phi tuyến tiêu hao và tăng trưởng kiểu đa thức (xem C.T. Anh, N.D. Binh and L.T. Thuy (2010), C.T. Anh and L.T. Thuy (2012), C.T. Anh, T.Q. Bao and L.T.Thuy (2013)).

Trong trường hợp ngẫu nhiên $(h(x,t,u) \neq 0)$, với phương trình parabolic suy biến ngẫu nhiên dạng

$$du + [-\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) + \lambda u]dt = [f(x,u) + g(x)]dt + \sum_{j=1}^{m} h_j(x)dW_j(t), \qquad (2)$$

năm 2011, các tác giả M. Yang và P.E. Kloeden đã chứng minh được sự tồn tại tập hút ngẫu nhiên trong $L^2(\mathcal{O})$ với $\mathcal{O}$ là một miền bị chặn (xem M. Yang and P.E. Kloeden (2011)).

Tiếp theo, một lớp phương trình dạng Navier-Stokes được nhiều nhà toán học nghiên cứu nhiều trong những năm gần đây là lớp **phương trình Navier-Stokes-Voigt** có dạng

$$\begin{aligned} &d(u-\alpha^2\Delta u)+[-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p]dt \\ &\qquad\qquad = f(x,t)dt+h(x,t,u)dW(t), x\in\mathcal{O}, t>0, \\ &\nabla\cdot u=0, \quad x\in\mathcal{O}, t>0, \\ &u(x,t)=0, \quad x\in\partial\mathcal{O}, t>0, \\ &u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathcal{O}, \end{aligned} \tag{3}$$

trong đó $\mathcal{O}$ là một miền bị chặn với biên $\partial\mathcal{O}$ trơn.

Trong trường hợp tất định ($h(x,t,u)\equiv 0$), lớp phương trình này được giới thiệu bởi A.P. Oskolkov (1973) với mô hình động lực của một chất lỏng loại Kelvin-Voigt không nén được, nhớt, đàn hồi (với tham số đặc trưng cho tính đàn hồi α). Chú ý rằng khi $\alpha=0$, hệ Navier-Stokes-Voigt trở thành hệ Navier-Stokes cổ điển và khi $\nu=0$ ta được mô hình Bardina dạng đơn giản, mô tả chuyển động của các chất lỏng không nhớt. Vì vậy, gần đây, hệ (3) trong trường hợp tất định được E.S. Titi và các cộng sự sử dụng để chính quy hóa phương trình Navier-Stokes, từ đó xấp xỉ hệ phương trình này cho không gian ba chiều khi α nhỏ, giúp mô phỏng trực tiếp nghiệm của hệ Navier-Stokes trong cả trường hợp điều kiện biên tuần hoàn và biên điều kiện Dirichlet (xem Y. Cao, E.M. Lunasin and E.S. Titi (2006)). Thực tế, mô hình này còn được gọi là $\alpha-$ mô hình trong cơ học chất lỏng (xem M. Holst, E. Lunasin and G. Tsogtgerel (2010)).

Khi ngoại lực f không phụ thuộc vào biến thời gian, sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm được chứng minh đầu tiên bởi A.P. Oskolkov (1973). Sau đó, V. K. Kalantarov đã chứng minh sự tồn tại và đánh giá số chiều của tập hút toàn cục của nửa nhóm sinh bởi hệ này (xem V.K. Kalantarov (1986)). Gần đây, trong công trình V.K. Kalantarov and E.S. Titi (2009) đã phát triển kết quả trên, chứng minh được tính determining modes và tính chính quy Gevrey của tập hút toàn cục. Năm 2013, các tác giả C.T. Anh và P. T. Trang đã chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm đồng thời chứng minh sự tồn tại tập hút lùi trong trường hợp ngoại lực không phụ thuộc vào thời gian (xem C.T. Anh and P.T. Trang (2013)).

Trong trường hợp ngẫu nhiên ($h(x,t,u) \neq 0$), năm 2012, H. Gao và C. Sun đã chứng minh sự tồn tại tập hút ngẫu nhiên và đánh giá số chiều Hausdorff của hệ phương trình này với nhiễu ngẫu nhiên $dW(t)$ (xem H. Gao and C. Sun (2012)). Năm 2013, T. Q. Bảo đã chứng minh tính trơn và tính liên tục của tập hút với nhiễu ngẫu nhiên $h(x)dW(t)$ (xem T. Q. Bao (2013)).

Một số vấn đề mà hiện nay chúng tôi đã và đang quan tâm nghiên cứu bài toán này là:

- Nghiên cứu tính ổn định và ổn định hóa của nghiệm dừng bằng các nhiễu ngẫu nhiên hoặc điều khiển phản hồi có giá trên miền phù hợp.
- Sự tồn tại, tính duy nhất nghiệm và tính ổn định của nghiệm dừng của phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên và lớp phương trình parabolic suy biến ngẫu nhiên.

Một hướng phát triển tiếp của hệ phương trình Navier-Stokes-Voigt ở trên là lớp **hệ phương trình Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer 3 chiều** với $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ và biên trơn $\partial\mathcal{O}$.

$$\begin{aligned}
&d(u-\alpha^2\Delta u) + [-\nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + f(x,u) + \nabla p]dt \\
&\qquad\qquad = g(x)dt + h(x,t,u)dW(t), x \in \mathcal{O}, t > 0, \\
&\nabla\cdot u = 0, \quad x \in \mathcal{O}, t > 0, \\
&u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\mathcal{O}, t > 0, \\
&u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathcal{O},
\end{aligned} \tag{4}$$

với $u = (u_1, u_2, u_3)$ là hàm vectơ vận tốc, $p = p(x,t)$ là hàm áp suất cần tìm, $\nu > 0$ là hệ số nhớt, $\alpha > 0$ là tham số đặc trưng cho tính đàn hồi của chất lỏng, u_0 là vận tốc ban đầu, $f(x,u)$ là hàm phi tuyến và $h(x,t,u)W(t)$ là nhiễu ngẫu nhiên trong không gian H. Chú ý rằng với $f \equiv 0$ ta có hệ phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên tương ứng, và với $\alpha = 0$ ta có hệ phương trình Brinkman-Forchheimer (xem V. K. Kalantarov and S. Zelik (2012)). Hơn nữa, trong trường hợp tất định (với $h(x, t, u) \equiv 0$), bài báo của C. T. Anh và P. T. Trang (xem C.T. Anh and P.T. Trang (2013)) là công trình nghiên cứu đầu tiên về bài toán (4) về sự tồn tại, tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút lùi và tính ổn định mũ của nghiệm dừng. Một số vấn đề mà hiện nay chúng tôi đang quan tâm nghiên cứu bài toán này là:

- Nghiên cứu tính ổn định của nghiệm dừng của phương trình tất định.
- Nghiên cứu ảnh hưởng của nhiễu ngẫu nhiên lên tính ổn định của nghiệm dừng của phương trình tất định.

MỤC ĐÍCH, ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

- Mục đích luận án: Nghiên cứu sự tồn tại và tính chất của tập hút ngẫu nhiên, bài toán ổn định và ổn định hóa đối với một số lớp phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên xuất hiện trong các quá trình khuếch tán, truyền nhiệt và trong cơ học chất lỏng.
- Đối tượng nghiên cứu: Dáng điệu tiệm cận nghiệm của một lớp phương trình parabolic suy biến với nhiễu ngẫu nhiên; sự tồn tại, tính duy nhất của nghiệm, tính ổn định và ổn định hóa nghiệm của Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên ba chiều; tính ổn định của nghiệm hệ phương trình Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer ngẫu nhiên ba chiều.
- Phạm vi nghiên cứu: Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận bằng tập hút ngẫu nhiên, sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm, sự tồn tại, tính ổn định của nghiệm dừng và ổn định hóa nghiệm dừng.

- **Nội dung 1: Phương trình parabolic suy biến ngẫu nhiên.**

  Sự tồn tại của tập hút ngẫu nhiên của lớp phương trình này trong $L^2(\mathcal{O})$ cho hệ động lực ngẫu nhiên sinh bởi vấn đề (2) đã được nghiên cứu bởi P.

E. Kloeden và M. Yan năm 2011. Vì vậy, phạm vi nghiên cứu của chúng tôi gồm

- Nghiên cứu tính trơn của tập hút ngẫu nhiên thu được trong $L^2(\mathcal{O})$. Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh sự tồn tại sự tồn tại của tập hút ngẫu nhiên trong không gian $L^p(\mathcal{O})$ và $\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)$, và các tập hút này cũng chính là tập hút ngẫu nhiên thu được trong M. Yang và P.E. Kloeden (2011) bởi vì tính duy nhất của tập hút.
- Nghiên cứu sự ảnh hưởng của nhiễu Ito tuyến tính và phi tuyến đối với sự ổn định của nghiệm dừng của bài toán (2). Chúng tôi đã chỉ ra rằng một nhiễu ngẫu nhiên với cường độ đủ lớn sẽ ổn định hóa được nghiệm dừng đã cho.

- **Nội dung 2: Hệ phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên ba chiều.** Những nội dung nghiên cứu của chúng tôi trong phần này gồm
  - Nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm,
  - Nghiên cứu sự ổn định của nghiệm dừng bao gồm ổn định theo nghĩa trung bình bình phương và ổn định hầu chắc chắn,
  - Nghiên cứu sự ổn định hóa nghiệm dừng bằng điều khiển có giá bên trong miền.
- **Nội dung 3: Hệ phương trình Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer ngẫu nhiên ba chiều.** Những nội dung trong phần này là từ kết quả về sự ổn định của nghiệm dừng của phương trình tất định trong bài báo C.T. Anh and P.T. Trang (2013), chúng tôi nghiên cứu sự ảnh hưởng của nhiễu ngẫu nhiên lên tính ổn định của nghiệm dừng.

PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

- Để nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm, chúng tôi sử dụng các phương pháp và công cụ của giải tích hàm phi tuyến: phương pháp xấp xỉ Galerkin, phương pháp hội tụ trong giải tích hàm, sử dụng các tính chất của thời điểm dừng và các bổ đề xử lí số hạng phi tuyến.

- Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm, chúng tôi sử dụng các công cụ và phương pháp của lí thuyết hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều không ôtônôm, công thức Ito với các đánh giá tiên nghiệm và các phương pháp nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình đạo hàm riêng.

CẤU TRÚC CỦA LUẬN ÁN

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các công trình được công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương:

- *Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.* Chương này trình bày các khái niệm và các kiến thức cơ sở cần thiết được sử dụng trong luận án.
- *Chương 2: Dáng điệu tiệm cận nghiệm của một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính suy biến ngẫu nhiên.* Trình bày các kết quả về tính trơn của tập hút ngẫu nhiên, sự tồn tại, tính ổn định và ổn định hóa nghiệm dừng.
- *Chương 3. Dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên.* Trình bày các kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm, sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm dừng theo bình phương trung bình, hầu chắc chắn, ổn định hóa nghiệm dừng bằng điều khiển có giá bên trong miền.
- *Chương 4. Dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer ngẫu nhiên.* Trình bày các kết quả về tính ổn định của nghiệm dừng của phương trình tất định theo bình phương trung bình, hầu chắc chắn khi có sự tác động của nhiễu ngẫu nhiên.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. CÁC KHÔNG GIAN HÀM

1.1.1. Không gian Sobolev có trọng

Cho $\mathcal{O}$ là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$. Giả sử $\alpha \in (0,2)$ và $\sigma : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ là hàm đo được Lebesgue, không âm và thỏa mãn điều kiện sau (xem P. Caldiroli and R. Musina (2000)):

$$(\mathcal{H}_\alpha) : \sigma \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{O}) \text{ và } \liminf_{x \to z} |x - z|^{-\alpha}\sigma(x) > 0 \text{ với mọi } z \in \overline{\mathcal{O}}.$$

Khi đó, không gian $\mathcal{D}^1_0(\mathcal{O}, \sigma)$ là bổ sung đủ của không gian $C^\infty_0(\mathcal{O})$ đối với chuẩn

$$\|u\|_\sigma := \left(\int_{\mathcal{O}} \sigma(x)|\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Khi đó, $\mathcal{D}^1_0(\mathcal{O}, \sigma)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$((u, v))_\sigma := \int_{\mathcal{O}} \sigma(x)\nabla u \nabla v dx.$$

1.2. MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ GIẢI TÍCH NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

1.2.1. Không gian hàm của các quá trình ngẫu nhiên

Định nghĩa 1.1. i) Kí hiệu $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, L^2(0,T;X))$ (hoặc ta cũng dùng kí hiệu $L^p_{\mathcal{F}_t}(0,T;X)$ trong ngữ cảnh $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ được xác định) là không gian tất cả các quá trình ngẫu nhiên $\mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,T])-$ đo được $u : \Omega \times [0,T] \to X$ sao cho tương thích với bộ lọc $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ và thỏa mãn

$$\|u\|^2_{L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, L^2(0,T;X))} := \mathbb{E}\left(\int_0^T \|u(t)\|^2_X dt \right)^{p/2} < \infty.$$

ii) Kí hiệu $L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, C([0,T];X))$ là không gian tất cả các quá trình $\{u(t); 0 \le t \le T\}$ nhận giá trị trong X, liên tục, $\mathcal{F}_t-$ đo được liên tục và thỏa mãn

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P},C([0,T];X))} := \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^p_X < \infty.$$

1.2.2. Tích phân ngẫu nhiên trong không gian Hilbert

Với K_0, H là các không gian Hilbert, ta xét $\Phi : [0,T] \times \Omega \to L^2(K_0, H)$ thỏa mãn các tính chất sau

- Φ là đo được và tương thích với bộ lọc $\mathcal{F}_t$;
- Φ là khả tích cấp hai theo nghĩa sau

$$\|\Phi\|^2_{T;H} := \mathbb{E} \int_0^T \|\Phi(s,\cdot)\|^2_{L^2(K_0,H)} ds < +\infty. \tag{1.2}$$

Từ kết quả về định lý biểu diễn quá trình Wiener trong không gian Hilbert, ta có định nghĩa tích phân ngẫu nhiên

$$\int_0^T \Phi(t,\omega) dW(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu_n} \int_0^T \Phi(t,\omega) e_n dW_n(t).$$

1.3. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HỆ ĐỘNG LỰC NGẪU NHIÊN VÀ TẬP HÚT NGẪU NHIÊN

Định nghĩa 1.2. Một tập ngẫu nhiên $\{\mathcal{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \in \mathcal{D}(\omega)$ được gọi là $\mathcal{D}$-tập hút ngẫu nhiên của ϕ nếu với $\mathbb{P}$-hầu chắc chắn, $\omega \in \Omega$, ta có

(i) $\mathcal{A}(\omega)$ là compact, và ánh xạ $\omega \mapsto d(x, \mathcal{A}(\omega))$ là đo được với mọi $x \in X$;

(ii) $\{\mathcal{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ là bất biến, tức là,

$$\phi(t, \omega, \mathcal{A}(\omega)) = \mathcal{A}(\theta_t \omega) \text{ với mọi } t \ge 0;$$

(iii) $\{\mathcal{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ hút mọi tập trong $\mathcal{D}$, tức là, với mọi $\{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{dist}_X(\phi(t, \theta_{-t}\omega, B(\theta_{-t}\omega)), \mathcal{A}(\omega)) = 0,$$

ở đây dist_X là nửa khoảng cách Hausdorff trong X,

$$\operatorname{dist}_X(A, B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \|x - y\|_X \text{ với } A, B \subset X.$$

Chương 2

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC NỬA TUYẾN TÍNH SUY BIẾN NGẪU NHIÊN

Nội dung của chương này được viết dựa trên các bài báo [1, 3] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. TÍNH TRƠN CỦA TẬP HÚT NGẪU NHIÊN

2.1.1. Đặt bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán parabolic nửa tuyến tính suy biến ngẫu nhiên trên miền bị chặn

$$\begin{aligned} & du + [-\mathrm{div}(\sigma(x)\nabla u) + f(u) + \lambda u]dt = gdt + \sum_{j=1}^{m} h_j dW_t^j, x \in \mathcal{O}, t > 0, \\ & u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, t > 0, \qquad (2.1) \\ & u|_{t=0} = u_0, \end{aligned}$$

trong đó $u_0 \in L^2(\mathcal{O})$ cho trước, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ là một miền bị chặn với biên trơn, $\lambda > 0$, $\{W_t^j\}_{j=1}^m$ là một quá trình Wiener hai phía độc lập m chiều. Để nghiên cứu bài toán (2.1), ta giả thiết:

($\mathcal{H}_\alpha$) Hàm $\sigma : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ là một hàm đo được không âm thỏa mãn $\sigma \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathcal{O})$ và $\alpha \in (0, 2)$, $\liminf_{x \to z} |x - z|^{-\alpha}\sigma(x) > 0$ với mọi $z \in \overline{\mathcal{O}}$;

(F) Số hạng phi tuyến $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tiêu hao và tăng trưởng kiểu đa thức, tức là, có một số $p \geq 2$ sao cho với mọi $u \in \mathbb{R}$,

$$f(u)u \geq C_1|u|^p - C_2, \qquad (2.2)$$

$$|f(u)| \leq C_3|u|^{p-1} + C_4, \qquad (2.3)$$

và

$$(f(u) - f(v))(u - v) \geq -\ell(u - v)^2, \qquad (2.4)$$

ở đây $C_i, i = 1, 2, 3, 4$, và ℓ là các hằng số dương;

(G) $g \in L^2(\mathcal{O})$;

(H) Các hàm $h_j, j = 1, \ldots, m$, thuộc $L^\infty(\mathcal{O}) \cap \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, với $\mathcal{A}u = -\mathrm{div}(\sigma(x)\nabla u)$, $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{D}_0^1(\mathcal{O}, \sigma) : \mathcal{A}u \in L^2(\mathcal{O})\}$.

Phép đổi biến $v(t) := u(t) - z(\theta_t\omega)$ sẽ chuyển phương trình (2.1) thành phương trình sau

$$v_t + \mathcal{A}v + f(v + z(\theta_t\omega)) + \lambda v = g - \mathcal{A}z(\theta_t\omega), \tag{2.5}$$

với giá trị ban đầu $v(x,0) = v_0(\omega) = u_0 - z(\omega)$ và $\mathcal{A}u = -\mathrm{div}(\sigma(x)\nabla u)$.

2.1.2. Sự tồn tại của tập hút ngẫu nhiên trong $L^p(\mathcal{O})$

Mệnh đề 2.1 (Tồn tại tập hấp thụ ngẫu nhiên trong $L^p(\mathcal{O})$)**.** *Giả sử các điều kiện* $(\mathcal{H}_\alpha) - $ **(F)** $-$ **(G)** $-$ **(H)** *được thỏa mãn. Đặt $B = \{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \in \mathcal{D}$ và $u_0(\omega) \in B(\omega)$. Khi đó, cho $\mathbb{P}$-hầu chắc chắn, $\omega \in \Omega$, tồn tại $T = T(B,\omega) > 0$, với mọi $t \geq T$,*

$$|u(t, \theta_{-t}\omega, u_0(\theta_{-t}\omega))|_p^p \leq c(1 + r(\omega)).$$

Đặc biệt, cho $\omega \in \Omega, K_0(\omega) = \{u \in L^p(\mathcal{O}) : |u|_p^p \leq c(1 + r(\omega))\}$ là một tập hấp thụ ngẫu nhiên trong $L^p(\mathcal{O})$ của ϕ.

Mệnh đề 2.2. *Giả sử rằng các điều kiện* $(\mathcal{H}_\alpha) - $ **(F)** $-$ **(G)** $-$ **(H)** *được thỏa mãn. Đặt $B = \{B(\omega)\}_{\omega\in\Omega} \in \mathcal{D}$, khi đó với mọi $\epsilon > 0$ và $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}$-hầu chắc chắn, tồn tại hằng số $T = T(\epsilon, B, \omega) > 0, M = M(\epsilon, B, \omega)$ sao cho*

$$\int_{\mathcal{O}(|u(t,\theta_{-t}\omega,u_0(\theta_{-t}\omega))| \geq M)} |u(t, \theta_{-t}\omega, u_0(\theta_{-t}\omega))|^p dx \leq \epsilon. \tag{2.6}$$

với mọi $t \geq T$.

Từ Mệnh đề 2.1, Mệnh đề 2.2 và Định lí 2.10 trong Wenqiang Zhao và Yangrong Li (2012), ta có định lí sau

Định lí 2.1. *Giả sử rằng các điều kiện* $(\mathcal{H}_\alpha) - $ **(F)** $-$ **(G)** $-$ **(H)** *được thỏa mãn. Khi đó hệ động lực ngẫu nhiên ϕ sinh ra bởi (2.5) có duy nhất một tập hút ngẫu nhiên $\{\mathcal{A}_p(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$, tập ngẫu nhiên tăng chậm này là compact, bất biến của $L^p(\mathcal{O})$ hút mọi tập con tăng chậm ngẫu nhiên của $L^2(\mathcal{O})$. Hơn nữa, $\mathcal{A}_p(\omega) = \mathcal{A}(\omega)$, ở đây $\{\mathcal{A}(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ là tập hút trong $L^2(\mathcal{O})$.*

2.1.3. Sự tồn tại của tập hút ngẫu nhiên trong không gian $\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)$

Bổ đề 2.1. *Giả sử* $\{B^*(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *là một tập hấp thụ ngẫu nhiên trong* $L^p(\mathcal{O})\cap\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)$ *tương ứng với hệ động lực ngẫu nhiên* ϕ*. Khi đó* ϕ *là compact tiệm cận lùi với* $\omega\in\Omega,\mathbb{P}$*-hầu chắc chắn, tức là,* $\{\phi(t_n,\theta_{-t_n}\omega,x_n)\}$ *là compact tương đối khi* $t_n\to+\infty$ *và* $x_n\in B^*(\theta_{-t_n}\omega)$*.*

Bổ đề 2.2. *Với mỗi* $\eta>0$*, tồn tại* $t_0>0$ *và* $m\in\mathbb{N}^*$ *sao cho*

$$\|(Id_{\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)}-P_m)v(t,\theta_{-t}\omega,v_0(\theta_{-t}\omega))\|_\sigma^2\le\eta,\forall t\ge t_0,\forall u_0(\theta_{-t}\omega)\in B^*(\theta_{-t}\omega), \tag{2.7}$$

ở đây P_m *là một phép chiếu chuẩn tắc từ* $\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)$ *vào một không gian con m-chiều.*

Định lí 2.2. *Giả sử rằng các giả thiết* $(\mathcal{H}_\alpha)-(\mathbf{F})-(\mathbf{G})-(\mathbf{H})$ *được thỏa mãn. Khi đó, hệ động lực ngẫu nhiên sinh bởi* (2.1) *có một tập hút ngẫu nhiên compact* $\mathcal{A}=\{A(\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ *trong* $\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)$*.*

2.2. ỔN ĐỊNH HÓA NGHIỆM DỪNG BẰNG NHIỄU NGẪU NHIÊN NHÂN TÍNH.

Trong mục này, ta sẽ nghiên cứu sự ảnh hưởng của nhiễu Ito đối với sự ổn định của nghiệm dừng của phương trình, với $u_0\in L^2(\mathcal{O})$,

$$\begin{cases} du+[-\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u)+f(u)]dt=g(x)dt, & x\in\mathcal{O},t>0,\\ u(x,t)=0, & x\in\partial\mathcal{O},t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathcal{O}.\end{cases} \tag{2.8}$$

2.2.1. Sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm dừng của phương trình tất định

Định nghĩa 2.1. Một hàm u^* được gọi là nghiệm dừng yếu của bài toán (2.8) nếu $u^*\in\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)\cap L^p(\mathcal{O})$, và

$$\int_\mathcal{O}\sigma(x)\nabla u^*\cdot\nabla\varphi dx+\int_\mathcal{O}f(u^*)\varphi dx=\int_\mathcal{O}g(x)\varphi dx$$

với mọi hàm thử $\varphi\in\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)\cap L^p(\mathcal{O})$.

Định lí 2.3. *Giả sử các điều kiện* $(\mathcal{H}_\alpha) - (\mathbf{F}) - (\mathbf{G}) - (\mathbf{H})$ *được thỏa mãn, bài toán* (2.8) *có ít nhất một nghiệm dừng yếu* u^*. *Hơn nữa, nếu*

$$\lambda_{\sigma 1} > \ell,$$

thì nghiệm dừng u^* *của bài toán* (2.8) *là duy nhất và ổn định mũ toàn cục, tức là, với mọi nghiệm yếu* $u(t)$ *của bài toán* (2.8), *ta có ước lượng*

$$|u(t) - u^*|_2^2 \leq |u(0) - u^*|_2^2 e^{-2(\lambda_{\sigma 1} - \ell)t}, \ \forall t \geq 0.$$

2.2.2. Ổn định hóa nghiệm dừng bằng nhiễu ngẫu nhiên nhân tính

Trong mục này, ta sẽ nghiên cứu sự ổn định hóa của nghiệm u^* bằng cách sử dụng nhiễu ngẫu nhiên dạng $h(t,u)dW(t)$

$$\begin{cases} du + [-\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) + f(u)]dt = g(x)dt + h(t,u)dW(t), & x \in \mathcal{O}, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\mathcal{O}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathcal{O}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ta giả sử rằng, $h(t,\cdot) : L^2(\mathcal{O}) \to L^2(\mathcal{O})$ có $h(t,u^*) = 0$, tương thích với bộ lọc $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ và thỏa mãn các điều kiện

(E1) $|h(t,u) - h(t,v)|_2^2 \leq \gamma(t)|u - v|_2^2, t > 0, u, v \in L^2(\mathcal{O})$, với $\gamma(t)$ là một hàm liên tục không âm thỏa mãn

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)ds \leq \gamma_0, \text{ với } \gamma_0 \text{ là một hằng số dương;}$$

(E2) $(h(t,u), u - u^*)^2 \geq \rho(t)|u - u^*|_2^4, u \in L^2(\mathcal{O})$, với $\rho(\cdot)$ là một hàm liên tục không âm thỏa mãn

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \rho(s)ds \geq \rho_0, \text{ với } \rho_0 \text{ là một hằng số dương.}$$

Một ví dụ đơn giản của $h(t,u)$ khi thỏa mãn các điều kiện **(E1)** - **(E2)** ở phía trên là $h(t,u) = c(u - u^*), c \in \mathbb{R}$.

Định lí 2.4. *Giả sử rằng các điều kiện* $(\mathcal{H}_\alpha)-(\mathbf{F})-(\mathbf{G})-(\mathbf{H})$ *và* $(\mathbf{E1})-(\mathbf{E2})$ *được thỏa mãn, nếu*

$$\lambda_{\sigma 1}+\rho_0>\ell+\frac{1}{2}\gamma_0, \tag{2.10}$$

khi đó nghiệm dừng u^* *của* (2.9) *là ổn định mũ toàn cục. Cụ thể hơn, với mỗi nghiệm toàn cục* $u(t)$ *của bài toán* (2.9), *ta có*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log|u(t)-u^*|_2^2\le 2\ell+\gamma_0-2\lambda_{\sigma 1}-2\rho_0 \quad \mathbb{P}\text{-hầu chắc chắn}$$

Nhận xét 2.1. Trong trường hợp nhiễu ngẫu nhiên tuyến tính $h(t,u)dW(t)=c(u-u^*)dW(t), c\in\mathbb{R}$, điều kiện ổn định (2.10) trở thành

$$\lambda_{\sigma 1}+\frac{1}{2}c^2>\ell.$$

Chú ý rằng trong trường hợp tất định, nghiệm dừng u^* có thể không ổn định với $\lambda_{\sigma 1}\le\ell$. Vì vậy, nhiễu ngẫu nhiên Wiener tuyến tính đã ổn định hóa nghiệm dừng u^* với ℓ trong khoảng $\big[\lambda_{\sigma 1},\lambda_{\sigma 1}+\frac{1}{2}c^2\big)$. Khi tham số c càng lớn thì khoảng này sẽ dài hơn. Hơn nữa, với mỗi $\ell>0$ cho trước, ta luôn có thể chọn c đủ lớn sao cho nghiệm dừng u^* được ổn định.

Chương 3

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA HỆ NAVIER-STOKES-VOIGT NGẪU NHIÊN

Nội dung của chương này được viết dựa trên các bài báo [4, 5] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM

3.1.1. Đặt bài toán

Xét phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên ba chiều trên $\mathcal{O}$ có dạng sau:

$$\begin{aligned}
&d(u-\alpha^2\Delta u)+[-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p]dt\\
&\qquad\qquad = f(x,t)dt+h(t,u)dW(t), x\in\mathcal{O}, t>0,\\
&\nabla\cdot u=0, \quad x\in\mathcal{O}, t>0,\\
&u(x,t)=0, \quad x\in\partial\mathcal{O}, t>0,\\
&u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathcal{O},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó $W(t)$ là một quá trình Wiener trên không gian xác suất $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ và nhận giá trị trong không gian Hilbert tách được $K_0:=Q^{1/2}K$. Kí thiệu $u=(u_1,u_2,u_3)$, $p=p(x,t)$ tương ứng là vectơ vận tốc và hàm áp suất cần tìm, $\nu>0$ là hệ số nhớt và $\alpha>0$ là tham số đặc trưng cho tính đàn hồi của chất lỏng, u_0 là vận tốc ban đầu và $h(t,u)W(t)$ là nhiễu nhẫu nhiên.

Các số hạng của phương trình (3.1) thỏa mãn các điều kiện sau:

(H1) u_0 là phần tử ngẫu nhiên nhận giá trị trong V, $\mathcal{F}_0-$đo được thỏa mãn $\mathbb{E}\|u_0\|_V^4<\infty$;

(H2) $f\in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+,V')$;

(H3) $h:\Omega\times[0,T]\times V\to L^2(K_0;H)$ thỏa mãn

(H3.1) Với mọi $t>0, u\in V, h(t,u):\Omega\to L^2(K_0;H)$ là hàm đo được.

(H3.2) Với mọi $u \in V$, $h(\cdot, u)$ là $\mathcal{F}_t$ quá trình đo được.

(H3.3) Tồn tại $\gamma \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+), \gamma(t) \geq 0$, thỏa mãn

$$\|h(t,u) - h(t,v)\|^2_{L^2(K_0;H)} \leq \gamma(t)\|u-v\|^2_V, \quad \text{với mọi } u, v \in V, t > 0.$$

(H3.4) Với mọi $T > 0$, ta có

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \|h(s,0)\|^2_{L^2(K_0;H)} ds\right)^2 < \infty.$$

Định nghĩa 3.1. Một quá trình ngẫu nhiên $(u(t))_{t\in[0,T]}$ nhận giá trong V được gọi là nghiệm trong khoảng $[0,T]$ của bài toán (3.1) nếu

(1a) $u \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}; L^2(0,T;V)\right)$; tức là

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \|u(s)\|^2_V \, ds\right) < \infty.$$

(1b) Với mọi $t \in [0,T]$, phương trình sau đúng với $\mathbb{P}$-hầu chắc chắn,

$$\begin{aligned}(u(t),\phi)_V &+ \nu \int_0^t ((u,\phi))ds + \int_0^t \langle B(u,u),\phi\rangle \, ds \\ &= (u_0,\phi)_V + \int_0^t \langle f(s),\phi\rangle \, ds + \left(\int_0^t h(s,u(s))dW(s), \phi\right),\end{aligned}$$

với mọi $\phi \in V$.

3.1.2. Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm

Định lí 3.1. *Giả sử các điều kiện* (**H1**)-(**H3**) *được thỏa mãn. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm u của bài toán* (3.1)*, hơn nữa,*

$$u \in L^4\left(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}; C([0,T];V)\right), \quad \textit{với mọi } T > 0.$$

3.2. TÍNH ỔN ĐỊNH MŨ CỦA NGHIỆM DỪNG

Để tìm hiểu về sự tồn tại của nghiệm dừng, ta giả sử rằng ngoại lực f trong phương trình (3.1) không phụ thuộc vào thời gian, tức là $f = f(x)$. Khi đó giả sử **(H2)** sẽ trở thành

(H2bis) $f \in V'$.

3.2.1. Sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm dừng của phương trình Navier-Stokes-Voigt tất định

Xét phương trình Navier-Stokes-Voigt tất định

$$u_t + \alpha^2 A u_t + \nu A u + B(u,u) = f. \tag{3.2}$$

Định nghĩa 3.2. Một hàm $u^* \in V$ được gọi là nghiệm dừng yếu của phương trình (3.2) nếu nó thỏa mãn

$$\nu((u^*, v)) + b(u^*, u^*, v) = \langle f, v \rangle, \tag{3.3}$$

với mọi hàm thử $v \in V$.

Định lí 3.2. *Giả sử $f \in V'$. Khi đó bài toán (3.2) có ít nhất một nghiệm yếu u^* thỏa mãn*

$$\|u^*\|^2 \leq \frac{1}{\nu^2}\|f\|_{V'}^2.$$

Hơn nữa, nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$\nu > \sqrt{c_0\|f\|_{V'}\lambda_1^{-1/4}}, \tag{3.4}$$

ở đây c_0 là hằng số dương, khi đó nghiệm u^* là duy nhất và ổn định mũ toàn cục, tức là, với mọi nghiệm yếu $u(t)$ của phương trình Navier-Stokes-Voigt tất định (3.2), ta có

$$\|u(t) - u^*\|_V \leq e^{-\lambda t}\|u(0) - u^*\|_V^2, \quad \text{với } \lambda > 0 \text{ nào đó và với mọi } t > 0.$$

3.2.2. Ổn định mũ theo bình phương trung bình

Trong mục này, chúng tôi sẽ nghiên cứu tính ổn định của nghiệm dừng u^*, nghiệm này cũng là một nghiệm của phương trình Navier-Stokes-Voigt (3.1). Để làm điều này, ta giả sử thêm một vài điều kiện mạnh hơn cho $h(t,u)$.

> (**H3bis**): Cho $h(t, u^*) = 0$ với mọi $t \geq 0$, h thỏa mãn điều kiện **(H3)**, ở đây $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục không âm và bị chặn thỏa mãn
>
> $$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\gamma(s) - \gamma_0| ds = 0, \text{ với } \gamma_0 \text{ là một hằng số cố định dương.}$$

Chú ý rằng từ những giả thiết này ta có u^* cũng là nghiệm của phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên (3.1).

Định lí 3.3. *Giả sử các điều kiện* (**H2bis**) - (**H3bis**)*được thỏa mãn, và nếu*

$$\nu > \sqrt{c_0\|f\|_{V'}\lambda_1^{-1/4} + \eta_1^2} + \eta_1, \tag{3.5}$$

với c_0 là một hằng số dương và $\eta_1 = \dfrac{\gamma_0}{4\lambda_1}$, khi đó nghiệm bất kì $u(t)$ của phương trình (3.1) *hội tụ đến nghiệm dừng u^* theo tốc độ mũ của bình phương trung bình. Tức là, tồn tại một số thực $a > 0$ và $T(a) > 0$ thỏa mãn*

$$\mathbb{E}\|u(t) - u^*\|_V^2 \leq \mathbb{E}\|u(0) - u^*\|_V^2 e^{-\frac{a}{2}t}, \qquad \text{với mọi } t \geq T(a).$$

3.2.3. Ổn định mũ hầu chắc chắn

Định lí 3.4. *Giả sử các điều kiện* (**H2bis**) - (**H3bis**) *và* (3.5) *được thỏa mãn, khi đó mọi nghiệm $u(t)$ của* (3.1) *hội tụ đến nghiệm dừng u^* theo tốc độ mũ hầu chắc chắn.*

3.3. ỔN ĐỊNH HÓA NGHIỆM 0 BẰNG ĐIỀU KHIỂN CÓ GIÁ BÊN TRONG MIỀN

3.3.1. Đặt bài toán và một vài kết quả

Xét $\mathcal{O}$ là một miền bị chặn thuộc $\mathbb{R}^3$ với biên trơn $\partial\mathcal{O}$. Ta nghiên cứu phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên 3 chiều có dạng

$$\begin{cases} d(u - \alpha^2\Delta u) + [-\nu\Delta u + & (u\cdot\nabla)u + \nabla p]dt \\ & = udW(t) + 1_{\mathcal{O}_0}Xdt, \quad x \in \mathcal{O}, t > 0, \\ \nabla\cdot u = 0 & x \in \mathcal{O}, t > 0, \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\mathcal{O}, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathcal{O}, \end{cases} \tag{3.6}$$

với $\mathcal{O}_0$ is là một tập con mở của $\mathcal{O}$ với biên trơn, $1_{\mathcal{O}_0}$ là một hàm đặc trưng của nó và $u = u(t,x)$ là một điều khiển tương thích với bộ lọc tự nhiên $\{\mathcal{F}_t\}$

và $W(t)$ là một quá trình Wiener có dạng

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j e_j(x) W_j(t), \quad t \geq 0, \xi \in \mathcal{O},$$

với μ_j là các số thực, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(\mathcal{O})$, $\{e_j\} \subset C^2(\overline{\mathcal{O}})$, và $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ là một chuyển động Brown độc lập trong không gian xác suất $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}\}$ thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |e_j|_{\infty}^2 < \infty,$$

ở đây $|\cdot|_{\infty}$ là kí hiệu của chuẩn trong $L^{\infty}(\mathcal{O})$.

3.3.2. Sự ổn định của hệ phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên

Trong mục này, chúng tôi xét hệ phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên không điều khiển

$$d(u + \alpha^2 Au) + [\nu Au + Bu]dt = udW(t). \tag{3.7}$$

Chúng ta thấy rằng 0 là một nghiệm của phương trình (3.7).

Định lí 3.5. *Giả sử điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\nu\lambda_1 > \frac{1}{2(1+\alpha^2\lambda_1)} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |e_j|_{\infty}^2. \tag{3.8}$$

Khi đó với mỗi $u_0 \in V$ cho trước, nghiệm u tương ứng của phương trình (3.7) *với giá trị ban đầu u_0 hội tụ đến* 0 *theo tốc độ mũ của bình phương trung bình, tức là, tồn tại một số $a > 0$ thỏa mãn*

$$\mathbb{E}\|u(t)\|_V^2 \leq \|u_0\|_V^2 e^{-at}, \quad \text{với mọi } t \geq 0.$$

3.3.3. Ổn định hóa bằng điều khiển có giá bên trong miền

Ta định nghĩa các tập hợp

$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \backslash \overline{\mathcal{O}_0},$$
$$\mathcal{V}_1 = \big\{ y \in (C_0^{\infty}(\mathcal{O}_1))^3 \; : \; \nabla \cdot y = 0 \big\}.$$

Kí hiệu H_1 là bao đóng của $\mathcal{V}_1$ trong $(L^2(\mathcal{O}))^3$, và V_1 là bao đóng $\mathcal{V}_1$ trong $(H_0^1(\mathcal{O}))^3$, với chuẩn $|\cdot|_1$ và $\|\cdot\|_1$, tương ứng.

Đặt A_1 là toán tử Stokes được định nghĩa trên $\mathcal{O}_1$. Ta kí hiệu $\lambda_1^*(\mathcal{O}_1)$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử A_1:

Xét điều khiển có dạng

$$X = -\eta u, \ \eta > 0, \tag{3.9}$$

và hệ điều khiển có dạng

$$\begin{cases} d(u + \alpha^2 Au) + [\nu Au + Bu]dt + \eta P(1_{\mathcal{O}_0} u)dt = P(udW) \\ u(0) = u_0 \in V. \end{cases}$$

Định lí 3.6. *Giả sử rằng*

$$\nu\lambda_1^*(\mathcal{O}_1) > \frac{1}{2(1+\alpha^2\lambda_1)} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 |e_j|_\infty^2. \tag{3.10}$$

Khi đó, với mỗi $u_0 \in V$ cho trước và $\eta \geq \eta_0$ đủ lớn nhưng độc lập với u_0, nghiệm tương ứng u của hệ điều khiển (3.6) *với điều khiển* (3.9) *thỏa mãn*

$$e^{\gamma t}\mathbb{E}\|u(t)\|_V^2 + \int_0^\infty e^{\gamma s}\mathbb{E}\|u(s)\|_V^2 ds \leq \ C\|u_0\|_V^2,$$

và

$$\lim_{t\to\infty} e^{\gamma t}\|u(t)\|_V^2 = 0, \mathbb{P} - \text{ hầu chắc chắn }, \tag{3.11}$$

với $\gamma > 0, C > 0$. Đặc biệt, phương trình (3.6) *được ổn định hóa từ $\mathcal{O}_0$.*

Nhận xét 3.1. Từ bất đẳng thức Poincaré, ta có

$$\lambda_1^*(\mathcal{O}_1) \geq C\left(\sup_{u_0\in\mathcal{O}_1} \operatorname{dist}(u_0, \partial\mathcal{O})\right)^{-2}.$$

Do đó $\lambda_1^*(\mathcal{O}_1)$ có thể lớn tùy ý nếu miền vành khăn $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}_0}$ là đủ mỏng. Nói chung, Định lí 3.6 có thể nói rằng sự ảnh hưởng của nhiễu ngẫu nhiên trong (3.6) có thể được bù đắp bởi điều khiển có giá bên trong miền với hỗ trợ đủ lớn.

Chương 4

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA HỆ KELVIN - VOIGT -BRINKMAN - FORCHHEIMER NGẪU NHIÊN

Nội dung của chương này được viết dựa trên các bài báo [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. Đặt bài toán

Ta xét hệ phương trình Kelvin - Voigt - Brinkman - Forchheimer ngẫu nhiên ba chiều

$$\begin{aligned}
&d(u-\alpha^2\Delta u)+[-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+f(x,u)+\nabla p]dt\\
&\qquad\qquad = g(x)dt+h(t,u)dW(t), x\in\mathcal{O}, t>0,\\
&\nabla\cdot u=0, \quad x\in\mathcal{O}, t>0,\\
&u(x,t)=0, \quad x\in\partial\mathcal{O}, t>0,\\
&u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\mathcal{O}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Để nghiên cứu bài toán trên, ta giả thiết

(K1) Miền $\mathcal{O}$ là một miền $\mathbb{R}^3$, thỏa mãn bất đẳng thức Poincaré tức là, tồn tại một hằng số $\lambda_1>0$ sao cho $\|\phi\|^2\geq\lambda_1|\phi|^2, \forall\phi\in H_0^1(\mathcal{O})$.

(K2) $f:\mathcal{O}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ là một hàm liên tục và $f(x,\cdot)\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ thỏa mãn các điều kiện sau

$$\begin{cases}
(1) f(x,u)\cdot u\geq\mu|u|^{p+1}-\psi_1(x),\\
(2) |f(x,u)|\leq\beta|u|^p+\psi_2(x),\\
(3) f'_u(x,u)v\cdot v\geq(-K+\kappa|u|^{p-1})|v|^2,
\end{cases}$$

với ψ_1,ψ_2 là các hàm không âm thỏa mãn $\psi_1\in L^1(\mathcal{O}), \psi_2\in L^{p^*}(\mathcal{O})$ với $p^*=(p+1)/p, K,\mu,\beta,\kappa$ là các hằng số dương, $p\geq 1$ và $u\cdot v$ là kí hiệu tích vô hướng của u và v trong $\mathbb{R}^3$.

(K3) $g\in V'$.

4.2. Tính ổn định mũ của nghiệm dừng

4.2.1. Ổn định mũ theo bình phương trung bình

Định nghĩa 4.1. Một hàm $u^* \in V \cap L^{p+1}(\mathcal{O})$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình

$$\nu Au + B(u,u) + f(x,u) = g, \tag{4.2}$$

nếu nó thỏa mãn

$$\nu((u^*,v)) + b(u^*,u^*,v) + \int_{\mathcal{O}} f(x,u^*)\cdot v dx = \langle g, v\rangle \tag{4.3}$$

với mọi hàm thử $v \in V \cap L^{p+1}(\mathcal{O})$.

Để nghiên cứu sự ổn định của nghiệm, chúng ta giả sử $h(t,u)$ thỏa mãn điều kiện (H3.1), (H3.2) và thỏa mãn thêm các điều kiện sau:

(**K4**) $h(t,u^*) = 0$ với mọi $t \geq 0$, và $\|h(t,u)\|^2_{L^2(K_0;H)} \leq \gamma(t)|u-u^*|^2, t \geq 0$, ở đây $\gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục, không âm và bị chặn thỏa mãn

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\gamma(s)-\gamma_0|ds = 0, \text{ với } \gamma_0 \text{ là một hằng số dương.}$$

Với những giả thiết này, ta thấy u^* cũng là nghiệm của phương trình (4.1).

Định lí 4.1. *Giả sử các điều kiện* (**K1**) – (**K4**) *được thỏa mãn và nếu*

$$\lambda_1\nu > K + C\lambda_1^{3/4}\left(\frac{\|g\|^2_{V'}}{\nu^2} + \frac{2\|\psi_1\|_{L^1}}{\nu}\right)^{1/2} + \frac{\gamma_0}{2}, \tag{4.4}$$

khi đó nghiệm yếu $u(t)$ của (4.1) *sẽ hội tụ theo tốc độ mũ đến nghiệm dừng u^* theo nghĩa bình phương trung bình. Tức là, tồn tại một số thực $a > 0$ và $T(a) > 0$ thỏa mãn*

$$\mathbb{E}\|u(t)-u^*\|^2_V \leq \mathbb{E}\|u(0)-u^*\|^2_V e^{-\frac{at}{2}}, \quad \text{với mọi } t \geq T(a).$$

4.2.2. Ổn định mũ hầu chắc chắn

Định lí 4.2. *Giả sử các điều kiện* (**K1**) – (**K4**) *và* (4.4) *được thỏa mãn khi đó nghiệm $u(t)$ của* (4.1) *sẽ hội tụ đến nghiệm dừng u^* theo tốc độ mũ hầu chắc chắn.*

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

1. Đối với hệ phương trình parabolic nửa tuyến tính suy biến ngẫu nhiên: Chứng minh được sự tồn tại của tập hút ngẫu nhiên trong không gian $L^p(\mathcal{O})$ và $\mathcal{D}_0^1(\mathcal{O},\sigma)$. Chứng minh được sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm dừng của phương trình tất định. Nghiên cứu sự ảnh hưởng của nhiễu ngẫu nhiên tới tính ổn định của nghiệm dừng. Từ đó ổn định hóa nghiệm dừng trong trường hợp không ổn định.

2. Đối với hệ phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên ba chiều: Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm. Chứng minh được sự tồn tại, tính duy nhất và tính ổn định của nghiệm dừng trong trường hợp tất định. Chứng minh được tính ổn định mũ của nghiệm dừng của phương trình tất định theo bình phương trung bình và hầu chắc chắn do sự ảnh hưởng của nhiễu nhẫu nhiên. Từ đó, ổn định hóa nghiệm dừng bằng điều khiển có giá bên trong miền trong miền trong trường hợp không ổn định.

3. Đối với hệ phương trình Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer ngẫu nhiên ba chiều: Chứng minh được tính ổn định theo bình phương trung bình và ổn định hầu chắc chắn của nghiệm dừng của phương trình tất định do sự ảnh hưởng của nhiễu ngẫu nhiên.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở cần tiếp tục nghiên cứu như:

- Đánh giá số chiều Hausdorff của tập hút ngẫu nhiên của hệ phương trình parabolic nửa tuyến tính.
- Nghiên cứu sự hội tụ của nghiệm đối với hệ phương trình Navier-Stokes-Voigt ngẫu nhiên khi α dần đến 0.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. C.T. Anh, T.Q. Bao and N.V. Thanh (2012), Regularity of random attractors for stochastic semilinear degenerate parabolic equations, *Elect. J. Differential Equations*, No. 207, 22 pp.

2. C.T. Anh and N.V. Thanh (2016), Asymptotic behavior of the stochastic Kelvin-Voigt-Brinkman-Forchheimer equations, *Stoch. Anal. Appl.*, 34 no. 3, 441-455

3. C.T. Anh and N.V. Thanh (2016), Stabilization of a class of semilinear degenerate parabolic equations by Ito noise, *Random Oper. Stoch. Equ.*, 24, no. 3, 147-155.

4. C.T. Anh and N.V. Thanh (2018), On the existence and long-time behavior of solutions to stochastic three-dimensional Navier-Stokes-Voigt equations. *Stochastics*, (2018), accepted.

5. N.V. Thanh (2018), Internal stabilization of stochastic 3D Navier-Stokes-Voigt equations with linearly multiplicative Gaussian noise, *submitted to Random Oper. Stoch. Equ.*

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
- Xemina tại Viện NCCC về Toán, Hà Nội, 21/12/2017;
- Hội nghị toàn quốc lần thứ V, "Xác suất – Thống kê: nghiên cứu, ứng dụng và giảng dạy", Đà Nẵng, 23-25/5/2015;
- Hội nghị toán học toàn quốc lần thứ 10, Nha Trang, 14-18/8/2018.