

THÔNG TIN VỀ LUẬN ÁN TIẾN SĨ

1. Họ và tên nghiên cứu sinh: Bùi Khánh Hằng
2. Giới tính: Nữ
3. Ngày sinh: 31/01/1993
4. Nơi sinh: Ninh Bình
5. Quyết định công nhận nghiên cứu sinh: **3613/QĐ-ĐHKHTN** ngày 30/11/2020
6. Các thay đổi trong quá trình đào tạo:
Quyết định số **4955/QĐ-ĐHKHTN** ngày 26/12/2023 của Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, thời gian đào tạo chuẩn của chương trình đào tạo tiến sĩ cho chuyên ngành Lý thuyết xác suất và thống kê toán học được điều chỉnh từ 3 năm lên thành 4 năm, áp dụng từ khóa QH.2018 đến QH.2021.
7. Tên đề tài luận án: **Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và ứng dụng**
8. Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và thống kê toán học
9. Mã số: 9460112.02
10. Cán bộ hướng dẫn khoa học:
 - HDC: PGS.TS. Tạ Công Sơn
Cơ quan công tác: Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQGHN
 - HDP: PGS.TS. Trần Mạnh Cường
Cơ quan công tác: Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQGHN
11. Tóm tắt các kết quả mới của luận án:
Mục đích và đối tượng nghiên cứu của luận án
 - Mục đích nghiên cứu: Luận án nghiên cứu sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số (bao gồm cả trọng số tất định và trọng số ngẫu nhiên) cho dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc và áp dụng các kết quả tìm được vào một số mô hình thống kê.
 - Đối tượng nghiên cứu: Dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị thực và nhận giá trị trên không gian Hilbert.

Các phương pháp nghiên cứu đã sử dụng

Luận án sử dụng các kỹ thuật của giải tích và xác suất để chứng minh các định lý hội tụ. Ngoài ra, chúng tôi cũng sử dụng các kết quả và bất đẳng thức quan trọng khác như bổ đề Borel-Catelli, bất đẳng thức cực đại Kolmogorov, bất đẳng thức cực đại Rosenthal, bất đẳng thức C_r , bất đẳng thức mômen, v.v.

Các kết quả của luận án

Luận án nghiên cứu sự hội tụ đầy đủ của tổng có trọng số (gồm trọng số tất định và trọng số ngẫu nhiên) của dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc và Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc. Những kết quả này không chỉ tổng quát các kết quả đã công bố mà còn có thể ứng dụng vào việc nghiên cứu một số mô hình thống kê quan trọng. Các đóng góp chính của luận án được tóm tắt dưới đây:

- Thiết lập các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát. Kết quả này không chỉ tổng quát một số kết quả đã biết mà còn có thể áp dụng cho một vài cấu trúc phụ thuộc khác (hiệu martingale, biến ngẫu nhiên phụ thuộc cộng tính âm (NSD), ...). Ngoài ra, dựa trên các kết quả vừa thiết lập, luận án đưa ra tốc độ hội tụ của các ước lượng vững đầy đủ trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn và trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên.
- Thiết lập Luật số lớn Marcinkiewicz (cả Luật yếu số lớn và Luật mạnh số lớn) cho tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng với dãy chuẩn hóa tổng quát. Đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối hoặc dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối, chúng tôi đưa ra được điều kiện cần và đủ của dãy chuẩn hóa để thiết lập Luật số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund. Ngoài ra, chúng tôi sử dụng những kết quả này để đưa ra ước lượng vững cho giá trị rủi ro có điều kiện (cVaR) và nghiên cứu tính vững của các ước lượng trong mô hình hồi quy bán tham số với các sai số đuôi nặng.
- Thiết lập Luật mạnh số lớn cho dãy vectơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert, phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp theo tọa độ thông qua sự hội tụ đầy đủ và

áp dụng các kết quả này để đưa ra các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của thống kê von Mises suy biến với dữ liệu thực độ lập từng cặp.

12. Các hướng nghiên cứu tiếp theo:

Trong quá trình nghiên cứu các vấn đề của luận án, chúng tôi đã nghĩ đến một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Nghiên cứu các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của dãy biến ngẫu nhiên có cấu trúc phụ thuộc khác (END, WOD, . . .).

- Nghiên cứu các mô hình thống kê với dữ liệu có cấu trúc phụ thuộc.

13. Các công trình công bố liên quan đến luận án:

[1] Ta Van Chien, Bui Khanh Hang, Bui Thi Thuy Lien (2023), “Strong Laws of Large Numbers for Weighted Sums of Hilbert-valued Coordinatewise PNQD Random Variables with Applications”, *VNU Journal of Science: Mathematics – Physics* Vol. 39 (3), pp. 45-56.

[2] Ta Cong Son, Tran Manh Cuong, Bui Khanh Hang, Le Van Dung (2024), “On the Baum–Katz theorem for randomly weighted sums of negatively associated random variables with general normalizing sequences and applications in some random design regression models”, *Statistical Papers* Vol. 65 (3), pp. 1869–1900.

[3] Tran Manh Cuong, Ta Van Chien, Bui Khanh Hang (2024), “On the Convergence for Randomly Weighted Sums of Hilbert-valued Coordinatewise Pairwise NQD Random Variables”, *Acta Mathematica Vietnamica* Vol. 49, pp. 265–281.

[4] Ta Cong Son, Tran Manh Cuong, Le Van Dung, Bui Khanh Hang (2024), “The Marcinkiewicz laws for weighted sums of heavy-tail random variables and applications to the Value-at-Risk estimators and semiparametric regression models”, *Methodology and Computing in Applied Probability* Vol. 27 (4), pp. 1-32.

Hà Nội, ngày tháng năm 202...

TM. Tập thể hướng dẫn

(Ký và ghi rõ họ tên)

Nghiên cứu sinh

(Ký và ghi rõ họ tên)

Tạ Công Sơn

Bùi Khánh Hằng

INFORMATION ON DOCTORAL THESIS

1. Full name: Bui Khanh Hang
2. Sex: Female
3. Date of birth: 31/01/1993
4. Place of birth: Ninh Binh
5. Admission decision number: **3613/QĐ-ĐHKHTN** dated 30/11/2020.
6. Changes in academic process

Decision No. 4955/QĐ-DHKHTN dated December 26, 2023, issued by the Rector of the University of Science, Vietnam National University, Hanoi. Accordingly, the standard training duration for the doctoral program in Probability and Statistics has been adjusted from 3 years to 4 years for QH.2018 to QH.2021.

7. Official thesis title: :

Law of large numbers for sequences of negatively associated random variables and applications

8. Major: Probability and Statistics
9. Code: 9460112.02
10. Supervisors:
 - Assoc. Prof. Ta Cong Son, Address: VNU University of Science
 - Assoc. Prof. Tran Manh Cuong, Address: VNU University of Science

11. Summary of the new findings of the thesis

Thesis purpose and objectives

Research purpose: The thesis investigates the complete convergence of weighted sums (including both deterministic and random weights) for sequences of dependent random variables and applies the obtained results to several statistical models.

Research objective: Dependent sequences of real-valued random variables and Hilbert-space-valued random variables.

Research methods

We use techniques from analysis and probability to prove the limit theorems. Additionally, we use important lemmas and inequalities such as the Borel-Cantelli lemma,

Kolmogorov's maximal inequality, Rosenthal's maximal inequality, and moment inequalities, etc.

Major results and conclusions

The thesis investigates the complete convergence of weighted sums (including both deterministic and random weights) for sequences of dependent random variables and the law of large numbers for these sequences. These results not only generalize existing published findings but also find applications in the study of several important statistical models. The main contributions of the thesis are summarized as follows:

- Establishing conditions for the complete convergence of randomly weighted sums of negatively associated random variables and the Baum-Katz theorem for these sums with general normalizing sequences. These results generalize several known findings and are applicable to other dependence structures (such as martingale differences, negatively superadditive dependent (NSD) random variables, etc.). Furthermore, based on these established results, the thesis provides the rate of convergence for completely consistent estimates in simple linear regression models and non-parametric regression models with random designs.
- Establishing the Marcinkiewicz-type law of large numbers (including both the weak law of large numbers and the strong law of large numbers) for deterministically weighted sums of negatively associated random variables and heavy-tailed distributions with general normalizing sequences. For sequences of independent identically distributed or negatively associated identically distributed random variables, we provide necessary and sufficient conditions on the normalizing sequences to establish the Marcinkiewicz-Zygmund type law of large numbers. Additionally, we utilize these results to provide consistent estimates for conditional Value-at-Risk (cVaR) and study the consistency of estimates in semiparametric regression models with heavy-tailed errors.
- Establishing the strong law of large numbers for sequences of random vectors in Hilbert spaces that are coordinatewise pairwise negatively quadrant dependent, via complete convergence. These results are then applied to derive conditions for the

complete convergence of degenerate von Mises statistics with pairwise independent real data.

12. Further research directions

Throughout the course of this research, we have identified several directions for future study as follows:

- Investigating conditions for the complete convergence of sequences of random variables with other dependence structures (END, WOD, ...).
- Investigating statistical models with dependent structured data.

13. Thesis-related publications:

[1] Ta Van Chien, Bui Khanh Hang, Bui Thi Thuy Lien (2023), “Strong Laws of Large Numbers for Weighted Sums of Hilbert-valued Coordinatewise PNQD Random Variables with Applications”, *VNU Journal of Science: Mathematics – Physics* Vol. 39 (3), pp. 45-56.

[2] Ta Cong Son, Tran Manh Cuong, Bui Khanh Hang, Le Van Dung (2024), “On the Baum–Katz theorem for randomly weighted sums of negatively associated random variables with general normalizing sequences and applications in some random design regression models”, *Statistical Papers* Vol. 65 (3), pp. 1869–1900.

[3] Tran Manh Cuong, Ta Van Chien, Bui Khanh Hang (2024), “On the Convergence for Randomly Weighted Sums of Hilbert-valued Coordinatewise Pairwise NQD Random Variables”, *Acta Mathematica Vietnamica* Vol. 49, pp. 265–281.

[4] Ta Cong Son, Tran Manh Cuong, Le Van Dung, Bui Khanh Hang (2024), “The Marcinkiewicz laws for weighted sums of heavy-tail random variables and applications to the Value-at-Risk estimators and semiparametric regression models”, *Methodology and Computing in Applied Probability* Vol. 27 (4), pp. 1-32.

<p style="text-align: center;">On behalf of academic supervisors</p> <p style="text-align: center;">Ta Cong Son</p>	<p style="text-align: center;">Date:</p> <p style="text-align: center;">PhD. Student</p> <p style="text-align: center;">Bui Khanh Hang</p>
--	---