ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

BÙI KHÁNH HẰNG

LUẬT SỐ LỚN CHO DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN KẾT ÂM VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và thống kê toán học
Mã số: 9460112.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội, 2026

Công trình được hoàn thành tại:

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

1. **PGS. TS. Tạ Công Sơn**
2. **PGS. TS. Trần Mạnh Cường**

Phản biện 1: GS. TSKH. Đoàn Thái Sơn

Nơi công tác: Viện Toán học - Viện Hàn lâm KH&CN VN

Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Thanh Diệu

Nơi công tác: Trường Đại học Vinh

Phản biện 3: PGS. TS. Trần Văn Long

Nơi công tác: Trường Đại học Giao thông vận tải

Luận án đã được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN

Vào hồi ... giờ ... phút, ngày ... tháng ... năm 2026

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam

- Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Chien T.V., Hang B.K., Lien B.T.T. (2023), "Strong laws of large numbers for weighted sums of Hilbert-valued coordinatewise PNQD random variables with applications", *VNU Journal of Science: Mathematics–Physics* Vol. 39 (3), pp. 45-56.

[2] Son T.C., Cuong T.M., Hang B.K., Dung L.V. (2024), "On the Baum–Katz theorem for randomly weighted sums of negatively associated random variables with general normalizing sequences and applications in some random design regression models", *Statistical Papers* Vol. 65, pp. 1869-1900.

[3] Cuong T.M., Chien T.V., Hang B.K. (2024), "On the convergence for randomly weighted sums of Hilbert-valued coordinatewise pairwise NQD random variables", *Acta Mathematica Vietnamica* Vol. 49, pp. 265-281.

[4] Son T.C., Cuong T.M., Dung L.V., Hang B.K. (2025), "The Marcinkiewicz laws for weighted sums of heavy-tail random variables and applications to the Value-at-Risk estimators and semiparametric regression models", *Methodology and Computing in Applied Probability* Vol. 27 (74), pp. 1-32.

GIỚI THIỆU

1. Lí do lựa chọn đề tài

Các định lý hội tụ là một trong những nền tảng quan trọng của lý thuyết xác suất, đóng vai trò then chốt trong nhiều lĩnh vực khoa học và ứng dụng thực tiễn. Chúng được xem là những viên ngọc của lý thuyết xác suất bởi các định lý này không chỉ là công cụ nghiên cứu lý thuyết mà còn là cơ sở cho các ứng dụng trong thống kê sinh học, y học, kinh tế và nhiều ngành khác. Đặc biệt, Luật số lớn là một trong những định lý hội tụ nổi bật nhất, liên quan đến sự hội tụ của trung bình mẫu. Nội dung này được xây dựng và phát triển bởi các nhà toán học vĩ đại như Kolmogorov, Khinchin, Chebyshev và nhiều tác giả khác. Khi nghiên cứu các định lý giới hạn dạng luật số lớn, nhiều dạng hội tụ đã được xét: hội tụ theo xác suất, hội tụ hầu chắc chắn, hội tụ đầy đủ. Luật yếu số lớn (định lý hội tụ theo xác suất) được Bernoulli thiết lập năm 1713. Sau đó, kết quả này được Poisson, Chebyshev, Markov, Liapunov mở rộng. Tuy nhiên, phải đến năm 1909 định lý hội tụ hầu chắc chắn (Luật mạnh số lớn) mới được Borel phát hiện. Tiếp đến, Kolmogorov đã phát triển kết quả của Borel vào năm 1926, thường gọi là Luật số lớn Kolmogorov. Đồng thời, Kolmogorov cũng chỉ ra rằng: Nếu $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối thì điều kiện cần và đủ để $\frac{S_n - n\mu}{n}$ hội tụ hầu chắc chắn về 0 là mômen tuyệt đối cấp một hữu hạn $E|X| < \infty$, trong đó $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, EX = \mu$. Marcinkiewicz và Zygmund đã mở rộng kết quả này (thường gọi là Luật số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund) với mômen bậc cao hơn. Năm 1947, Hsu và Robbins đã đưa ra khái niệm hội tụ đầy đủ, kết hợp với Bổ đề Borel-Cantelli, sự hội tụ đầy đủ suy ra sự hội tụ hầu chắc chắn, nhưng điều ngược lại không phải lúc nào cũng đúng. Vậy dưới những điều kiện nào thì $\frac{S_n - n\mu}{n}$ hội tụ đầy đủ về 0? Trường hợp $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, Hsu và Robbins đã chỉ ra điều kiện đủ là $EX^2 < \infty$ và sau đó Erdös đã chỉ ra chiều ngược lại. Nhóm tác giả Baum và Katz tiếp tục mở rộng kết quả Hsu-Robbins-Erdös cho dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối để đưa ra tốc độ hội tụ cho Luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund thông qua sự hội tụ đầy đủ: Với $r > 1$, $1 \leq p < 2$, $EX = 0$ và $E|X|^{rp} < \infty$ khi và chỉ khi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\big(|S_n - n\mu| > \varepsilon n^{1/p}\big) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.$$

Các kết quả này tiếp tục được mở rộng theo các hướng khác nhau, chẳng hạn mở rộng cho các tổng trung bình trượt được nghiên cứu bởi Li và các công sự; một số mở rộng với các điều kiện mômen bậc cao hơn, có thể kể đến như Lanzinger, Gut và Stadtmüller, Sung, v.v. Một số khác tập trung vào sự hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên trong không gian Banach, điển hình là các công trình của Ahmed và cộng sự, Hu và cộng sự, Sung, Wang và cộng sự, v.v.

Ở một khía cạnh khác, để phù hợp với các cấu trúc dữ liệu phức tạp, nhiều nhà nghiên cứu gần đây đã mở rộng và phát triển các khái niệm về dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc, chẳng hạn như phụ thuộc góc phần tư âm (negatively quadrant dependent, NQD), phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp (pairwise negatively quadrant dependent, PNQD), phụ thuộc liên kết âm (negative association, NA), phụ thuộc trực giao âm (negatively orthant dependent, NOD), phụ thuộc cộng tính âm (negatively superadditive dependent, NSD), dãy hiệu martingale, v.v. Trong đó, dãy biến ngẫu nhiên độc lập là một trường hợp đặc biệt của cả dãy NA và PNQD, và một dãy NA luôn là một dãy PNQD, nhưng điều ngược lại thì không đúng. Do đó, việc mở rộng các kết quả từ dãy biến ngẫu nhiên độc lập sang dãy NA hoặc sang dãy PNQD là một hướng nghiên cứu rất tiềm năng, có ý nghĩa cả về lý thuyết lẫn ứng dụng.

Năm 2011, Sung đã đưa ra kết quả về sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối. Cụ thể, ông đã chứng minh rằng với $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối và $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một dãy hằng số thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{\alpha} = O(n)$ với $1 < \alpha \leq 2$. Nếu

$$EX = 0 \quad \text{và} \quad \begin{cases} E|X|^{\alpha} < \infty, & \text{với } \alpha > \gamma, \\ E|X|^{\alpha}\log(1+|X|) < \infty, & \text{với } \alpha = \gamma, \\ E|X|^{\gamma} < \infty, & \text{với } \alpha < \gamma, \end{cases}$$

thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}X_i\Big| > \varepsilon n^{1/\alpha}\log^{1/\gamma}(n)\Big) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0, \tag{1}$$

trong đó $\gamma > 0$. Kết quả trong công bố năm 2014 của Chen và Sung cũng chỉ ra khi $\alpha < \gamma$ thì điều kiện $E|X|^{\gamma} < \infty$ là tối ưu, còn khi $\alpha > \gamma$ thì $E\big(|X|^{\alpha}\log^{1-\alpha/\gamma}(|X|+2)\big) < \infty$ là điều kiện gần như tối ưu để thiết lập kết quả (1). Góp phần vào chuỗi nghiên cứu trên, năm 2019, sử dụng tính chất của hàm biến đổi chính quy, nhóm tác giả Anh đã đưa ra điều kiện cần và đủ để thiết lập sự hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}X_i\Big| > \varepsilon n^{1/\alpha}\ell^{\#}(n^{1/\alpha})\Big) < \infty \text{ với mọi } \varepsilon > 0, \tag{2}$$

cho một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối $\{X, X_n, n \geq 1\}$, trong đó $\ell^{\#}(\cdot)$ là liên hợp de Bruijn của hàm biến đổi chậm $\ell(\cdot)$ xác định trên tập $[A, \infty)$ với $A > 0$. Lấy $\ell(x) = \log^{-1/\gamma}(x), x \geq 2$ thì $\ell^{\#}(x) = \log^{1/\gamma}(x), x \geq 2$, ta thu được điều kiện mômen tối ưu cho kết quả (1). Lấy $\ell(x) = 1$ thì $\ell^{\#}(x) = 1$, ta thu được Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Đặc biệt, tại thời điểm ấy, kết quả (2) vẫn là mới ngay cả khi dãy biến ngẫu nhiên là độc lập cùng phân phối.

Xuất phát từ các kết quả trên, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là liệu các kết quả này có thể làm tổng quát hơn được không, chẳng hạn như thay điều kiện dãy trọng số tất định bằng dãy trọng số ngẫu nhiên hoặc thay dãy chuẩn hóa $b_n = n^{1/\alpha}\ell^{\#}(n^{1/\alpha})$ hoặc $b_n = n^{1/\alpha}\log^{1/\gamma}(n)$ bằng một lớp hàm $\phi(n)$ tổng quát hơn. Ngoài ra, liệu các định lý hội tụ tương tự có thể được thiết lập cho các cấu trúc phụ thuộc khác ngoài liên kết âm hay không. Mặc dù đã có nhiều công trình nghiên cứu nhưng việc mở rộng các định lý hội tụ cho tổng có trọng số của dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc vẫn còn nhiều thách thức. Điều này đã tạo động lực để chúng tôi tìm kiếm các điều kiện tổng quát để nghiên cứu Luật số lớn thông qua sự hội tụ đầy đủ của dãy biến ngẫu nhiên có cấu trúc phụ thuộc với dãy hàm chuẩn hóa tổng quát.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu lý thuyết của luận án là tìm các điều kiện để thiết lập sự hội tụ đầy đủ có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} (w_i X_i - a_i) \Big| > \varepsilon b_n \Big) < \infty,$$

hoặc

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P\Big(\Big| \sum_{i=1}^{n} (w_i X_i - a_i) \Big| > \varepsilon b_n \Big) < \infty,$$

cho dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc $\{X_n, n \ge 1\}$, trong đó $\varepsilon > 0$, α là một hằng số, $\{w_n, n \ge 1\}$ là một dãy trọng số (ngẫu nhiên hoặc tất định), $\{a_n, n \ge 1\}$ là một dãy số thực và $\{b_n, n \ge 1\}$ là một dãy số thực dương không giảm. Bên cạnh đó, mục tiêu ứng dụng của luận án là áp dụng các kết quả lý thuyết vào một số mô hình thống kê (mô hình hồi quy, V-thống kê, ...) khi mà giả thiết về tính độc lập của các quan sát không được thỏa mãn.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị thực và dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị trên không gian Hilbert.

4. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của luận án là các định lý hội tụ cho dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị thực và dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị trên không gian Hilbert.

5. Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng các kỹ thuật của giải tích và xác suất để chứng minh các định lý hội tụ. Ngoài ra, chúng tôi cũng sử dụng các kết quả và bất đẳng thức quan trọng khác như bổ đề Borel-Catelli, bất đẳng thức cực đại Kolmogorov, bất đẳng thức cực đại Rosenthal, bất đẳng thức C_r, bất đẳng thức mômen, v.v.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Kết quả của luận án góp phần làm phong phú thêm các kết quả về sự hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc trong không gian thực và không gian Hilbert.

Luận án có thể được sử dụng để tham khảo trong các nghiên cứu liên quan của sinh viên và các nhà khoa học trong lĩnh vực lý thuyết xác suất và thống kê toán học.

7. Cấu trúc luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo, luận án được trình bày trong 4 chương:

- **Chương 1** nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích và xác suất.
- **Chương 2** trình bày về luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.
- **Chương 3** trình bày về luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng.
- **Chương 4** trình bày về luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp.

Luận án được viết dựa trên 04 bài báo đã công bố.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương 1 sẽ lần lượt nhắc lại một số kiến thức cơ bản của lớp hàm biến đổi chính quy, véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Hilbert, một số dạng phụ thuộc và hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên.

1.1 Hàm biến đổi chính quy

Định nghĩa 1.1 (Hàm biến đổi chính quy) Cho $f(\cdot)$ là một hàm dương đo được, xác định trên $[A, \infty)$ với $A > 0$ và thỏa mãn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\rho, \quad \forall\ \lambda > 0.$$

Khi đó f được gọi là hàm biến đổi chính quy (tại vô cùng) với chỉ số ρ. Khi $\rho = 0$ ta nói f là một hàm biến đổi chậm (tại vô cùng).

Kí hiệu $\mathcal{RV}_\rho$ là lớp các hàm biến đổi chính quy với chỉ số ρ, $\mathcal{SV}$ là lớp các hàm biến đổi chậm.

Định lý 1.5 (Định lý Karamata) Cho $f \in \mathcal{RV}_\rho$, bị chặn địa phương trên $[A, \infty)$. Khi đó:

(i) Với $\sigma \geq -(\rho+1)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sigma+1} f(x)}{\int_a^x t^\sigma f(t)dt} = \sigma + \rho + 1$,

(ii) Với $\sigma < -(\rho+1)$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sigma+1} f(x)}{\int_x^\infty t^\sigma f(t)dt} = -(\sigma + \rho + 1)$.

(Với $\sigma = -(\rho+1)$, kết quả trên vẫn đúng nếu tích phân $\int_x^\infty t^{-(\rho+1)} f(t)dt < \infty$.)

Định nghĩa 1.8 (Liên hợp de Bruijn) Cho $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm. Khi đó tồn tại duy nhất (theo nghĩa tương đương tiệm cận) một hàm biến đổi chậm $\ell^\#(\cdot)$ thỏa mãn

$$\lim_{x\to\infty} \ell(x)\ell^\#\big(x\ell(x)\big) = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\infty} \ell^\#(x)\ell\big(x\ell^\#(x)\big) = 1.$$

Khi đó, $\ell^\#$ được gọi là liên hợp de Bruijn của ℓ và $(\ell, \ell^\#)$ được gọi là một cặp liên hợp.

1.2 Véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert

Nếu không nói gì thêm, ta luôn xét $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert thực tách được với chuẩn $\|.\|$ được sinh bởi tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và $\{e_j, j \in B\}$ là một cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{H}$, B là một tập chỉ số.

Định nghĩa 1.11 (Véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị) Ánh xạ $X : \Omega \to \mathbb{H}$ được gọi là một véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ (hoặc véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị), nếu

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{H}) : X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \ : \ X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}.$$

Định nghĩa 1.17 (Kỳ vọng của véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị) Cho X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị và giả sử $E\|X\| < \infty$. Kỳ vọng của X, kí hiệu là $E(X)$ (hoặc EX), được định nghĩa bởi tích phân Bochner $E(X) = \int_\Omega X dP$.

1.3 Một số dạng phụ thuộc của dãy biến ngẫu nhiên

Định nghĩa 1.21 (Phụ thuộc góc phần tư âm) Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là phụ thuộc góc phần tư âm (NQD) nếu với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có:

$$P(X \le x,\ Y \le y) \ \le \ P(X \le x)P(Y \le y).$$

Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \ge 1\}$ được gọi là phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp (pairwise negatively quadrant dependent, PNQD) nếu X_i và X_j là NQD với mọi $i, j \in \mathbb{N},\ i \ne j$.

Mệnh đề 1.22 Cho $\{X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD nhận giá trị thực và $\{f_n, n \ge 1\}$ là một dãy các hàm không giảm (hoặc không tăng), trong đó $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Khi đó $\{f_n(X_n), n \ge 1\}$ cũng là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD.

Định nghĩa 1.26 (Liên kết âm) Một họ các biến ngẫu nhiên $\{X_1, \ldots, X_n\}$ được gọi là liên kết âm (NA) nếu với mọi tập con rời nhau $A, B \subset \{1, \ldots, n\}$ và với mọi hàm thực không giảm theo từng tọa độ f trên $\mathbb{R}^{|A|}$ và g trên $\mathbb{R}^{|B|}$,

$$\mathrm{Cov}(f(X_k, k \in A), g(X_k, k \in B)) \le 0, \tag{1.7}$$

trong đó giả thiết hàm hiệp phương sai Cov (covariance) tồn tại, kí hiệu $|A|$ là lực lượng của tập hợp A. Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \ge 1\}$ được gọi là NA nếu mọi dãy con hữu hạn của nó là NA.

Hệ quả 1.32 Cho $\{X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Khi đó với mọi $a_n, b_n \in \mathbb{R},\ a_n \le b_n$, dãy biến ngẫu nhiên $Y_n = f_n(X_n)$ trong đó,

$$f_n(x) = a_n I_{(-\infty, a_n)}(x) + x I_{[a_n, b_n]}(x) + b_n I_{(b_n, \infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

là liên kết âm.

Phần tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra khái niệm và một vài tính chất cơ bản của dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ. Cho X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị, kí hiệu $X^j := \langle X, e_j \rangle$. Khi đó $X = \sum\limits_{j \in B} \langle X, e_j \rangle e_j = \sum\limits_{j \in B} X^j e_j$.

Định nghĩa 1.36 (PNQD theo tọa độ) Một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là PNQD theo tọa độ nếu với mọi $j \in B$, dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n^j, n \geq 1\}$ là PNQD.

Mệnh đề 1.39 Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ thỏa mãn mỗi tọa độ X^j không âm và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực không âm PNQD. Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là độc lập. Khi đó $\{X_nY_n, n \geq 1\}$ cũng là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ.

1.4 Một số dạng hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên

Cho X là một biến ngẫu nhiên và $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Định nghĩa 1.40 (Các dạng hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên thực)

i) (*Hội tụ theo xác suất*) Ta nói X_n hội tụ theo xác suất đến biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{P} X$, nếu với mọi $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

ii) (*Hội tụ hầu chắc chắn*) Ta nói X_n hội tụ hầu chắc chắn đến biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{h.c.c.} X$, nếu $P(\{\omega \in \Omega \ : \ \lim\limits_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\}) = 1$.

iii) (*Hội tụ đầy đủ*) Ta nói X_n hội tụ đầy đủ đến biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{c.c.} X$, nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \quad$ với mọi $\varepsilon > 0$.

Mối quan hệ giữa ba dạng hội tụ này được thể hiện qua sơ đồ dưới đây:

$$X_n \xrightarrow{c.c.} X \implies X_n \xrightarrow{h.c.c.} X \implies X_n \xrightarrow{P} X.$$

Các dạng hội tụ của dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Hilbert cũng được định nghĩa tương tự như đối với dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực.

Chương 2

Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm

Chương 2 thiết lập các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát. Nội dung này được viết dựa trên công trình số [**2**] trong **Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án**.

2.1 Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm

Dựa trên lớp hàm ϕ trong bài báo của Jaite, chúng tôi lần lượt xét các lớp hàm $\boldsymbol{\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}_r}$ và $\boldsymbol{\mathcal{L}^{\beta}_{r,\kappa}}$ như sau:

Lớp $\boldsymbol{\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}}$ gồm tất cả các hàm ϕ thỏa mãn các điều kiện sau:

(iv) $\phi(x)$ là một hàm tăng chặt trên $[0,+\infty)$ và nhận giá trị trên $[0,\infty)$,

(v) Tồn tại hằng số dương a, b và số nguyên dương n_0 thỏa mãn,

$$\phi^{\alpha}(s)\int_s^{\infty}\frac{x^{r-1}dx}{\phi^{\alpha}(x)} \le aR(s)+b, \quad s>n_0,$$

trong đó $r\ge 1, \alpha\in(1,2]$, $R=R(x)$ là hàm tăng chặt xác định trên $(0,+\infty)$ và nhận giá trị trên $(0,+\infty)$. Khi $R(s)=s^r$, lớp $\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$ được kí hiệu bởi $\boldsymbol{\mathcal{K}^{\alpha}_{r}}$.

Lớp $\boldsymbol{\mathcal{H}_r}$ gồm tất cả các hàm ϕ thỏa mãn các điều kiện sau:

(vi) Tồn tại N sao cho $\dfrac{\phi(2x)}{\phi(x)} \le N$ với mọi $x>0$,

(vii) Tồn tại hằng số dương c, d và số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $s>n_0$,

$$\phi(s)\int_1^{s}\frac{x^{r-1}dx}{\phi(x)} \le cs^r+d, \quad r\ge 1.$$

Khi $\alpha>2$, xét lớp $\boldsymbol{\mathcal{L}^{\beta}_{r,\kappa}}$ (trong đó $\beta,\kappa,r>0$), gồm tất cả các hàm ϕ thỏa mãn điều kiện:

(viii) Tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $s>n_0$,

$$\phi^{\beta}(s)\int_1^{s}\frac{x^{r-1}dx}{\phi^{\beta}(x)} \ge \frac{s^r}{\kappa} \quad \text{với mọi} \quad s>n_0.$$

Kết quả dưới đây đưa ra các điều kiện để thiết lập định lý hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy hàm chuẩn hóa thuộc lớp $\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$.

Định lý 2.4 Cho $r \geq 1$, $\alpha \in (1,2]$, $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối, $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}|^{\alpha}) = O(n). \tag{2.2}$$

Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là độc lập. Nếu tồn tại $\phi \in \mathcal{K}_{r,R}^{\alpha}$ sao cho $E(\phi^{-1}(|X|))^r < \infty$ và $E[R(\phi^{-1}(|X|))] < \infty$, thì với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i I_{(|X_i|\leq\phi(n))}))\Big| > \varepsilon\phi(n)\Big) < \infty. \tag{2.3}$$

Định lý dưới đây được xem là định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát.

Định lý 2.9 Cho $r \geq 1$, $1 < \alpha \leq 2$, $\phi \in \mathcal{K}_r^{\alpha} \cap \mathcal{H}_r$, $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối. Khi đó các khẳng định sau là tương đương.

(1) Biến ngẫu nhiên X thỏa mãn

$$EX = 0 \ \text{ khi } \ \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\phi(n)} \neq 0, \quad E(\phi^{-1}(|X|))^r < \infty. \tag{2.9}$$

(2) Với mọi mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ thỏa mãn điều kiện (2.2) và độc lập với dãy $\{X_n, n \geq 1\}$, với $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} A_{ni}X_i\Big| > \varepsilon\phi(n)\Big) < \infty. \tag{2.10}$$

Khi $\alpha > 2$, chúng tôi tiếp tục thiết lập định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát.

Định lý 2.11 Cho $r \geq 1$, $2(r-\kappa) > \beta$, $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2(r-1)\beta}{2(r-\kappa)-\beta}\right\}$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với $E(|X|^2) < \infty$, $\phi \in \mathcal{K}_r^{\alpha} \cap \mathcal{H}_r \cap \mathcal{L}_{r,\kappa}^{\beta}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương.

(1) Biến ngẫu nhiên X thỏa mãn

$$EX = 0, \quad E(\phi^{-1}(|X|))^r < \infty.$$

(2) Với $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng thỏa mãn (2.2) và độc lập với $\{X_n, n \geq 1\}$, với $\varepsilon > 0$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} A_{ni}X_i\Big| > \varepsilon\phi(n)\Big) < \infty.$$

Chú ý 2.12 *Dựa trên chứng minh của* ***Định lý 2.4*** *và* ***Định lý 2.11****, ta có thể kết luận rằng khẳng định (2.3) trong* ***Định lý 2.4*** *vẫn đúng khi* $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2(r-1)\beta}{2(r-\kappa)-\beta}\right\}$, $r \geq 1$, $2(r-\kappa) > \beta$ *và điều kiện bổ sung* $\phi \in \mathcal{K}_r^\alpha \cap \mathcal{L}_{r,\kappa}^\beta$.

Chú ý 2.15 *Do đó, trong phần ứng dụng thống kê dưới đây, chúng tôi sẽ thay giả thiết "dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối" bằng giả thiết "một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng, bị chặn ngẫu nhiên bởi một biến ngẫu nhiên".*

2.2 Ứng dụng trong mô hình hồi quy

2.2.1 Ước lượng vững trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn

Xét mô hình hồi quy tuyến tính đơn với thiết kế ngẫu nhiên như sau

$$Y_{nj} = a + bX_{nj} + \varepsilon_{nj}, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{2.22}$$

trong đó, a và b là các tham số chưa biết, $\{X_{nj}, n \geq 1, 1 \leq j \leq n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng và bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X, các sai số ngẫu nhiên $\{\varepsilon_{nj}, n \geq 1, 1 \leq j \leq n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng với kỳ vọng bằng 0, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên ε và độc lập với $\{X_{nj}, n \geq 1, 1 \leq j \leq n\}$.

Đặt

$$\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_{nk}, \ \overline{Y}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} Y_{nk}, \ S_n^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_{nk} - \overline{X}_n)^2, \ \ n \geq 1.$$

Khi đó, ước lượng bình phương tối thiểu cho b và a tương ứng là

$$\hat{b}_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(Y_{nk} - \overline{Y}_n)(X_{nk} - \overline{X}_n)}{S_n^2}, \quad \hat{a}_n = \overline{Y}_n - \hat{b}_n\overline{X}_n. \tag{2.23}$$

Kết quả dưới đây chỉ ra tốc độ hội tụ của ước lượng vững mạnh[1] của $\hat{a}_n$ và $\hat{b}_n$.

Định lý 2.17 Trong mô hình (2.22), giả sử $E(|X|^{\max\{4,\alpha\}}) < \infty$ và $E\varepsilon = 0$. Nếu tồn tại $\phi \in \mathcal{K}_2^\alpha \cap \mathcal{H}_2$ với $1 < \alpha \leq 2$ hoặc $\phi \in \mathcal{K}_2^\alpha \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{L}_{2,\kappa}^\beta$ với $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2\beta}{2(2-\kappa)-\beta}\right\}$, $2(2-\kappa) > \beta$, sao cho

$$E((\phi^{-1}(|\varepsilon|))^2) < \infty,$$

thì

$$\frac{n}{\phi(n)}(\hat{b}_n - b) \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi} \ \ n \to \infty, \tag{2.24}$$

và

$$\frac{n}{\phi(n)}(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi} \ \ n \to \infty. \tag{2.25}$$

[1] Ở đây, sự hội tụ được hiểu theo nghĩa hội tụ hầu chắc chắn.

2.2.2 Ước lượng vững trong mô hình hồi quy phi tham số

Xét mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên

$$Y_{ni} = f(X_{ni}) + \varepsilon_{ni}, \quad 1 \le i \le n, \tag{2.35}$$

trong đó X_{ni} là các điểm thiết kế ngẫu nhiên nhận giá trị trong tập compact $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^d$, ε_{ni} là các sai số ngẫu nhiên. Ước lượng phi tham số cho $f(x)$ được xác định bởi

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) Y_{ni},$$

trong đó $W_{ni}(x) = W_{ni}(x, X_{n1}, \ldots, X_{nn})$ là các hàm trọng số ngẫu nhiên phụ thuộc vào x, $X_{ni}, \ldots, X_{nn}$. Trong mục này, chúng tôi sẽ thiết lập ước lượng vững đầy đủ[2] cho $\hat{f}_n(x)$ trong mô hình (2.35) với sai số là các biến ngẫu nhiên liên kết âm. Với $x \in \mathbf{A}$ bất kỳ, giả sử hàm trọng số ngẫu nhiên $W_{ni}(x)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(A_1) $\Big|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) - 1\Big| \xrightarrow{c.c.} 0$,

(A_2) $\sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)| \le M$ hầu chắc chắn,

(A_3) $\sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)|.|f(X_{ni}) - f(x)| I_{(\|X_{ni}-x\|>a)} \xrightarrow{c.c.} 0$ với $a > 0$ bất kỳ.

Dựa trên các điều kiện $(A_1) - (A_3)$, chúng tôi đưa ra kết quả về tính vững đầy đủ cho ước lượng hồi quy phi tham số $f(x)$.

Định lý 2.19 Trong mô hình (2.35), giả sử $\{\varepsilon_{ni}, n \ge 1, 1 \le i \le n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng với kỳ vọng 0, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên ε và $\{W_{ni}(x), i \le 1 \le n, n \ge 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng và độc lập với $\{\varepsilon_{ni}, n \ge 1, 1 \le i \le n\}$. Nếu tồn tại $\phi \in \mathcal{K}_2^\alpha \cap \mathcal{H}_2$ với $1 < \alpha \le 2$ hoặc $\phi \in \mathcal{K}_2^\alpha \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{L}_{2,\kappa}^\beta$ với $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2\beta}{2(2-\kappa)-\beta}\right\}$ và $2(2-\kappa) > \beta$, sao cho

$$E((\phi^{-1}(|\varepsilon|))^2) < \infty,$$

và với mọi $x \in \mathbf{A}$,

$$\sum_{i=1}^{n} E(W_{ni}^\alpha(x)) = O(n/\phi^\alpha(n)).$$

Khi đó với mọi $x \in c(f)$,

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{c.c.} f(x) \quad \text{khi } n \to \infty,$$

trong đó $c(f)$ là tập hợp tất cả các điểm liên tục của hàm $f(x)$ trên $\mathbf{A}$.

[2] Ở đây, sự hội tụ được hiểu theo nghĩa hội tụ đầy đủ.

2.3 Mô phỏng

Ví dụ 2.21 Xét mô hình hồi quy tuyến tính

$$Y_{ni} = a + bX_{ni} + \varepsilon_{ni}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

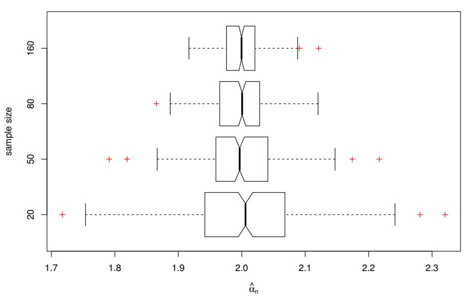
Giả sử $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng có phân phối đều liên tục trên tập $[0, 1]$, $\{Y_{nj}, n \geq 1, 1 \leq j \leq n\}$ là một mảng biến quan sát, $(\varepsilon_{ni}, 1 \leq i \leq n)$ là một véctơ liên kết âm với mỗi $n \geq 3$ và có mômen hữu hạn mọi cấp.
Lấy $\frac{1}{2} < p < 1$, $\alpha > \frac{2}{2p-1}$ và $\ell(x) = 1$, áp dụng Hệ quả 2.18 ta được

$$n^{1-p}(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{c.c.} 0 \text{ và } n^{1-p}(\hat{b}_n - b) \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

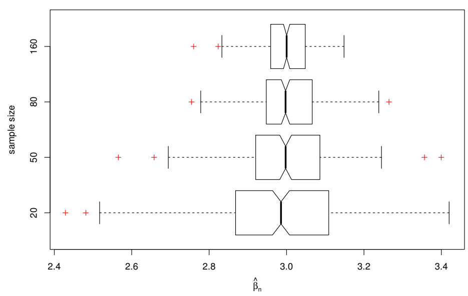
Lấy $a = 2$, $b = 3$ và kích thước mẫu n lần lượt là 20, 50, 80 và 160.

Bảng 2.1: Trung bình và RMSE của $\hat{a}_n$ và $\hat{b}_n$

n	a	Trung bình của $\hat{a}_n$	RMSE của $\hat{a}_n$	b	Trung bình của $\hat{b}_n$	RMSE của $\hat{b}_n$
20	2	2.01	0.092	3	2.99	0.176
50	2	2.00	0.059	3	3.00	0.114
80	2	2.00	0.043	3	3.00	0.083
160	2	2.00	0.033	3	3.00	0.066



(a) Hình 2.2: Boxplot của $\hat{a}_n$



(b) Hình 2.3: Boxplot của $\hat{b}_n$

Tiếp đến, chúng tôi thực hiện mô phỏng để nghiên cứu tính vững đầy đủ cho ước lượng có trọng số của hàm $f(x)$ trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên theo Phương pháp lân cận gần nhất (*The nearest neighbor estimate*).

Ví dụ 2.23 Xét mô hình hồi quy phi tham số

$$Y_{ni} = f(X_{ni}) + \varepsilon_{ni}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

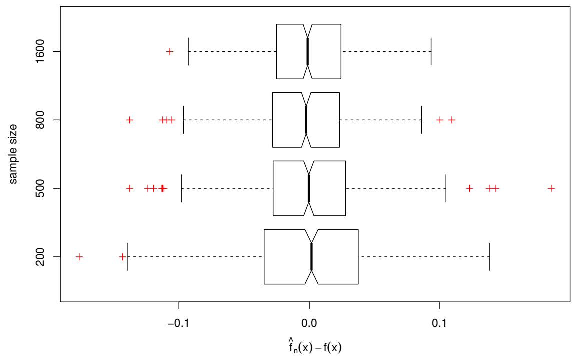
trong đó $f(x)$ là một hàm liên tục chưa biết trên tập $[0, 1]$, $\{\varepsilon_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ được cho trong Ví dụ 2.21.

Giả sử $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng có phân phối đều liên tục trên $[0, 1]$. Với $x \in [0, 1]$ bất kỳ, gọi R_{ni} là hạng (*rank*) của $\|X_{ni} - x\|$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Ta xác định các hàm trọng số $W_{ni}(x), 1 \leq i \leq n$ theo Phương pháp lân cận gần nhất bởi $W_{ni}(x) = h_n^{-1} I_{(R_{ni} \leq h_n)}$.

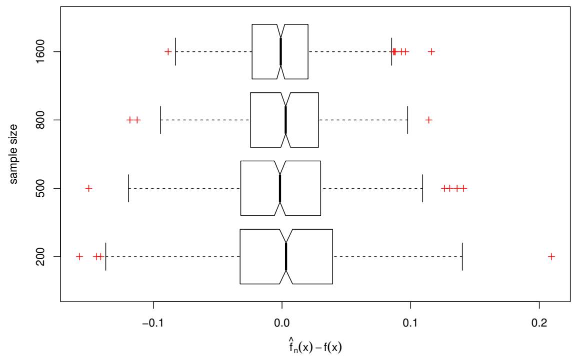
Do đó, đặt $p = 3/4$, $\alpha = 5$, $\ell(x) = 1$, $\lfloor n^{0.75} \rfloor$ là phần nguyên của $n^{0.75}$. Áp dụng Hệ quả 2.20 ta có với $x \in (0, 1)$ bất kỳ,

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{c.c.} f(x) \quad \text{khi } n \to \infty.$$

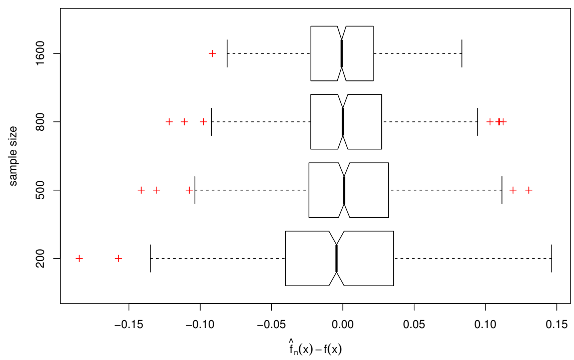
Lấy $f(x) = x^2$ nếu $x \in [0, 1]$ và $f(x) = 0$ nếu $x \notin [0, 1]$. Lấy kích thước mẫu n lần lượt là 200, 500, 800 và 1600.



(a) Hình 2.4: Boxplot của $\hat{f}_n(x) - f(x)$ tại $x = 0.1$



(b) Hình 2.5: Boxplot của $\hat{f}_n(x) - f(x)$ tại $x = 0.5$



(c) Hình 2.6: Boxplot của $\hat{f}_n(x) - f(x)$ tại $x = 0.9$

Bảng 2.2: Trung bình và RMSE của $\hat{f}_n(x)$

n	x	$f(x)$	Trung bình	RMSE
200	0.1	0.01	0.011	0.057
	0.5	0.25	0.253	0.054
	0.9	0.81	0.807	0.055
500	0.1	0.01	0.010	0.044
	0.5	0.25	0.248	0.045
	0.9	0.81	0.814	0.042
800	0.1	0.01	0.007	0.038
	0.5	0.25	0.251	0.039
	0.9	0.81	0.811	0.039
1600	0.1	0.01	0.009	0.033
	0.5	0.25	0.250	0.032
	0.9	0.81	0.810	0.031

Chương 3

Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng

Chương 3 sẽ trình bày Luật số lớn Marcinkiewicz cho tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng. Nội dung Chương 3 của luận án được viết dựa trên công trình số [4] trong **Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án**.

3.1 Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng

Luật yếu số lớn

Định lý 3.1 Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X sao cho $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$, trong đó $0 < r < 2$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{c_{nk}, 1 \leq k \leq m_n, n \geq 1\}$ là một mảng tam giác số thực thỏa mãn $m_n \nearrow \infty$, $\sup\limits_{1\leq k\leq n} c_{nk} \to 0$ khi $n \to \infty$ và

$$\sum_{k=1}^{m_n} |c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) = o(1). \tag{3.2}$$

Nếu $0 < r < 1$ thì

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Nếu $r = 1$ thì

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}(X_k - E(X_k I_{(|c_{nk}X_k|\leq 1)})) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.4}$$

Nếu $1 < r < 2$ thì

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}(X_k - EX_k) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.5}$$

Trường hợp $0 < r < 1$, giả thiết $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm có thể bỏ qua.

Hệ quả 3.2 Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với kỳ vọng 0, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thỏa mãn $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$, trong đó $1 < r < 2$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n \geq 1\}$ là một dãy số thực dương. Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$P\Big(\frac{1}{a_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{C_\varepsilon n\ell(a_n)}{a_n^r},$$

trong đó C_ε là một hằng số dương phụ thuộc ε.
Ngoài ra, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ell(a_n)}{a_n^r} = 0, \tag{3.11}$$

thì

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n\to\infty. \tag{3.12}$$

Hệ quả dưới đây chỉ ra rằng (3.11) là điều kiện tối ưu của dãy chuẩn hóa để có kết quả (3.12) trong trường hợp dãy biến ngẫu nhiên là độc lập cùng phân phối.

Hệ quả 3.4 Cho $\{X_n, n\ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với kỳ vọng 0 thỏa mãn $P(|X|>x)\asymp x^{-r}\ell(x)$, trong đó $1<r<2$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n\ge 1\}$ là một dãy số thực dương. Khi đó,

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n\to\infty \tag{3.14}$$

khi và chỉ khi

$$\frac{n\ell(a_n)}{a_n^r} \to 0 \quad \text{khi } n\to\infty. \tag{3.15}$$

Luật mạnh số lớn

Phần tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu tốc độ hội tụ của luật mạnh số lớn thông qua sự hội tụ đầy đủ của luật số lớn Baum–Katz cho tổng trọng số tất định của các biến ngẫu nhiên liên kết âm đuôi nặng với dãy chuẩn hóa tổng quát.

Định lý 3.5 Cho $\{X, X_n, n\ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X sao cho

$$P(|X|>x)\asymp x^{-r}\ell(x), \quad 0<r<2, \tag{3.17}$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n\ge 1\}$ là một dãy số thực dương thỏa mãn

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}a_n^{-r}\ell(a_n) < \infty, \tag{3.18}$$

trong đó $1\le\alpha\le 2$ và $\{c_{ni}, n\ge 1, 1\le i\le n\}$ là một mảng số thực thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} |c_{ni}|^s = O(n) \quad \text{với} \quad s>r. \tag{3.19}$$

Khi đó với mọi $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k} c_{ni}\big(X_i - E(X_i I_{(|X_i|\le a_n)})\big)\Big| > \varepsilon a_n\Big) < \infty. \tag{3.20}$$

Ngoài ra nếu $1 < r < 2$ và $E(X_n) = 0$ với mọi $n \geq 1$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=1}^{k} c_{ni}X_i| > \varepsilon a_n\Big) < \infty \quad \text{với mọi} \quad \varepsilon > 0. \tag{3.21}$$

Trường hợp $0 < r \leq 1$, giả thiết $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm có thể lược bỏ.

Định lý sau đây chỉ ra (3.18) là điều kiện tối ưu của dãy chuẩn hóa để có kết quả (3.21) đối với dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối.

Định lý 3.8 Cho $1 \leq \alpha \leq 2$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với kỳ vọng 0 thỏa mãn (3.17) với $1 < r < 2$. Giả sử $\{a_n, n \geq 1\}$ là một dãy không giảm các số thực dương thỏa mãn $a_{2n} = O(a_n)$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương.

(i) Dãy $\{a_n, n \geq 1\}$ thỏa mãn

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} a_n^{-r} \ell(a_n) < \infty.$$

(ii) Với mọi mảng hằng số $\{c_{ni}, n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ thỏa mãn (3.19), ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} c_{ni}X_i\Big| > \varepsilon a_n\Big) < \infty \quad \text{với mọi} \quad \varepsilon > 0.$$

3.2 Ứng dụng

3.2.1 Ước lượng vững trong mô hình Value-at-Risk

Mô hình Value-at-Risk (VaR) là một công cụ thống kê đo lường mức độ rủi ro tài chính của một công ty hoặc một danh mục đầu tư. Giả sử X là một biến ngẫu nhiên mà chúng ta quan tâm có hàm phân phối $F(x) = P(X \leq x)$. Cho trước $a \in (0, 1)$, giá trị rủi ro VaR với độ tin cậy $1 - a$ được định nghĩa như sau

$$VaR_a(X) := \inf\{x : F(x) \geq 1 - a\}.$$

Giá trị rủi ro điều kiện $cVaR$ với độ tin cậy $1 - a$ là kỳ vọng có điều kiện

$$cVaR_a(X) := E(X \mid X \geq VaR_a(X)).$$

Kí hiệu $\theta^* = cVaR_a(X)$ và $h_a(X, x) = x + a^{-1}[X - x]^+$. Khi đó,

$$\theta^* = \inf_{x\in\mathbb{R}} E(h_a(X, x)).$$

Nhóm tác giả Rochafellar và Uryasev, Trindade và cộng sự đã đưa ra ước lượng cho $cVaR_a(X)$ là

$$\hat{\theta}_n = \inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_a(X_i, x).$$

Ước lượng vững cho θ^* đã được nghiên cứu trên nhiều mẫu khác nhau: Trindade và cộng sự xây dựng cho mẫu độc lập cùng phân phối, Luo và Yang đưa ra ước lượng vững mạnh và tiệm cận chuẩn cho mẫu ρ-mixing và gần đây, Wu và Wang nghiên cứu đối với mẫu m-END cùng phân phối. Tiếp nối các hướng nghiên cứu này, chúng tôi sẽ nghiên cứu ước lượng vững cho θ^* đối với mẫu đuôi nặng.

Định lý 3.12 Giả sử $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với kỳ vọng 0 sao cho $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$, trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm và $1 < r < 2$.

Khi đó với mọi dãy hằng số $\{a_n, n \geq 1\}$ thỏa mãn (3.11), ta có

$$\frac{n}{a_n}\left(\hat{\theta}_n - \theta^*\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

3.2.2 Ước lượng vững trong mô hình hồi quy bán tham số

Xét mô hình hồi quy bán tham số

$$y_{ni} = \gamma x_{ni} + g(t_{ni}) + \varepsilon_{ni},\ 1 \leq i \leq n, \tag{3.33}$$

trong đó $g(t)$ là một hàm chưa biết xác định trên tập compact $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ và γ là một tham số chưa biết, y_{ni} là biến phản hồi thứ i của quan sát x_{ni} và t_{ni}, x_{ni} và t_{ni} không ngẫu nhiên, ε_{ni} là các sai số ngẫu nhiên. Giả sử $\{\varepsilon_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ có cùng phân phối với $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ với mỗi $n \geq 1$.

Năm 2003, nhóm tác giả Pan đã đưa ra ước lượng có trọng số cho γ và $g(t)$ như sau:

$$\hat{\gamma}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}\widetilde{y}_{ni}}{S_n^2}, \quad \hat{g}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)(y_{ni} - \hat{\gamma}_n x_{ni}), \tag{3.34}$$

trong đó $w_{ni}(t) = w_{ni}(t, t_{n1}, \ldots, t_{nn})$ là các hàm trọng số đo được và

$$\widetilde{x}_{ni} = x_{ni} - \sum_{k=1}^{n} w_{nk}(t_{ni})x_{nk}, \quad \widetilde{y}_i = y_{ni} - \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t_{ni})y_{ni}, \quad S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}^2.$$

Để thiết lập sự hội tụ cho các ước lượng $\hat{\gamma}_n$ và $\hat{g}_n(t)$, chúng ta cần một số giả thiết dưới đây:

(H_1) $g(t)$ là một hàm Lipschitz trên $\mathbf{A}$, tức là tồn tại $K > 0$ sao cho

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq K|t_1 - t_2| \quad \text{với mọi} \quad t_1, t_2 \in \mathbf{A},$$

(H_2) $n = O(S_n^2)$,

(H_3) Tồn tại $1 < r < 2$, $0 < \delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2r}$ và một dãy số dương $\{h_n, n \geq 1\}$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{h_n}{n^{1-\delta}} = 0$, $\max_{1\leq i\leq n} |x_{ni}| = O(n^\delta)$ và với mọi $t \in \mathbf{A}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |w_{ni}(t)| I_{(\|t-t_{ni}\|>\frac{h_n}{n})} = O(h_n/n),$$

(H_4) Với mọi $t \in \mathbf{A}$, $w_{ni} \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ và $\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t) = 1$,

(H_5) $\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{n} w_{nk}(t_{ni}) = O(1)$.

Với các giả thiết $(H_1) - (H_5)$, chúng tôi sẽ chỉ ra $\hat{\gamma}_n$ và $\hat{g}_n$ là các ước lượng vững cho tham số γ và hàm $g(t)$ trong mô hình hồi quy bán tham số bằng cách áp dụng Định lý 3.1.

Định lý 3.14 Giả sử mô hình (3.33) thỏa mãn điều kiện $(H_1) - (H_5)$ và $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với kỳ vọng 0, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên ε thỏa mãn

$$P(|\varepsilon| > x) \asymp x^{-r}\ell(x),$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm và $1 < r < 2$, khi đó

$$n^\delta (\hat{\gamma}_n - \gamma) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.35}$$

Ngoài ra, nếu với mọi $t \in \mathbf{A}$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} |w_{ni}(t)|^r \ell(|w_{ni}(t)|^{-1}) = o(1),$$

thì

$$\hat{g}_n(t) \xrightarrow{P} g(t) \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.36}$$

Chương 4

Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert

Chương 4 nghiên cứu sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số (ngẫu nhiên và tất định) của dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp theo tọa độ. Nội dung của hai mục này lần lượt được viết dựa trên công trình số [**3**] và số [**1**] trong **Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án**.

4.1 Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert

Chúng tôi tiếp tục phát triển các kỹ thuật của Jajte (2003), xét các hàm ϕ thỏa mãn các điều kiện sau:

(K_1) ϕ là một hàm tăng chặt trên $[s, \infty)$, nhận giá trị trên $[0, \infty)$ và $\sup\limits_{n\geq 1} \frac{\phi(n+1)}{\phi(n)} < \infty$,

(K_2) $\phi(s) \int\limits_1^s \frac{x^{r-1}}{\phi(x)} dx \leq Cs^r$,

(K_3) $\phi^2(s) \int\limits_s^\infty \frac{x^{r-1}}{\phi^2(x)} dx \leq Cs^r$,

(K_4) $\phi^2(s) \int\limits_s^\infty \frac{x^{r-1}\log_+^2(x)}{\phi^2(x)} dx \leq Cs^r \log_+^2(s)$.

Ở đây và trong toàn Mục **4.1**, chúng tôi đều xét $r \geq 1$, $s > 0$ và $\log_+(x) = \max\{1, \log_2 x\}$.

Định lý 4.2 Cho $1 \leq r \leq 2$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ và cùng phân phối, $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực PNQD theo hàng thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^n E(A_{ni})^2 = O(n). \tag{4.1}$$

Giả sử $\{X, X_n, n \geq 1\}$ và $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là độc lập. Nếu tồn tại ϕ thỏa mãn điều kiện $(K_1) - (K_3)$ sao cho $\sum\limits_{j\in B} E(\phi^{-1}(|X^j|))^r < \infty$, thì với mọi $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\Big\| \sum_{i=1}^n (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i))\Big\| \geq \varepsilon\phi(n)\Big) < \infty.$$

Định lý 4.4 Cho $1 \le r \le 2$ và $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ và cùng phân phối, $\{A_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực PNQD theo hàng thỏa mãn (4.1).

Giả sử $\{X, X_n, n \ge 1\}$ và $\{A_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ là độc lập. Nếu tồn tại hàm ϕ thỏa mãn các điều kiện (K_1, K_2, K_4) sao cho

$$\sum_{j \in B} E\Big((\phi^{-1}(|X^j|))^r \log_+^2(\phi^{-1}(|X^j|))\Big) < \infty, \tag{4.7}$$

thì với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1 \le k \le n} \Big\| \sum_{i=1}^{k} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i)) \Big\| \ge \varepsilon \phi(n)\Big) < \infty. \tag{4.8}$$

Trường hợp riêng, khi $r = 2$ ta có

$$\frac{\max_{1 \le k \le n} \Big\| \sum_{i=1}^{k} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i)) \Big\|}{\phi(n)} \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

4.2 Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert với phân phối đuôi nặng

Ở phần này, chúng tôi nghiên cứu luật mạnh số lớn cho tổng trọng số tất định của dãy véctơ ngẫu nhiên $\{X_n, n \ge 1\}$ nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ thỏa mãn phân phối đuôi nặng

$$\sum_{j \in B} P\left(|X_n^j| > x\right) \asymp x^{-\alpha}\ell(x), \quad \alpha \in (1, 2),\ n \ge 1,$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm.

Kết quả dưới đây được xem là luật mạnh số lớn cho tổng trọng số tất định của dãy vectơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với phân phối đuôi nặng.

Định lý 4.8 Cho $\{X_n, n \ge 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với kỳ vọng bằng 0 thỏa mãn với mỗi $n \ge 1$,

$$\sum_{j \in B} P\left(|X_n^j| > x\right) \asymp x^{-\alpha}\ell(x), \quad \alpha \in (1, 2),\ n \ge 1,$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n \ge 1\}$ và $\{b_n, n \ge 1\}$ là các dãy hằng số dương thỏa mãn $0 < b_n \nearrow \infty$. Đặt $c_n = \dfrac{b_n}{a_n \log_+ n}$ với $n \ge 1$. Giả sử

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-\alpha}\ell(c_n) < \infty. \tag{4.11}$$

Khi đó,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Lấy $b_n = n^\alpha \ell(n)$ với $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm và thay dãy số dương $\{a_n, n \geq 1\}$ bởi một mảng số dương $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ thỏa mãn một vài điều kiện nhất định, ta thu được sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số tất định của dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ.

Định lý 4.11 Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với kỳ vọng 0 và $E\big(X_n^j\big)^2 = \big(\sigma_n^j\big)^2 < \infty$ với mỗi $n \geq 1, j \in B$. Cho $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng số dương thỏa mãn $a_{ni}^2 \leq C a_{ii}^2$ với mỗi $n \geq 1, 1 \leq i \leq n$. Với $\alpha > 1/2$, giả sử

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B}\frac{a_{ii}^2\big(\sigma_i^j\big)^2}{i^{2\alpha-1}\ell^2(i)} < \infty, \tag{4.22}$$

trong đó $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm. Khi đó,

$$\frac{1}{n^\alpha \ell(n)}\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

4.3 Sự hội tụ của thống kê von Mises suy biến

Trong phần này, chúng tôi áp dụng các kết quả về sự hội tụ của dãy véctơ ngẫu nhiên trong không gian Hilbret đã thiết lập ở hai phần trước để nghiên cứu sự hội tụ của thống kê von Mises (một dạng phi tuyến) với dữ liệu nhận giá trị thực.

Trước hết, chúng tôi sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản về thống kê von Mises (V-thống kê). Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ và $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm đối xứng, đo được. Khi đó, V-thống kê (bậc 2 có trọng số) được định nghĩa bởi

$$V_n = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ni} A_{nj} h(X_i, X_j),$$

với hạt nhân (*kernel*) h và $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên theo hàng nhận giá trị thực. Trường hợp đặc biệt, khi các trọng số $A_{ni} = \frac{1}{n}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ ta thu được

$$V_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} h\left(X_i, X_j\right),$$

là một V-thống kê với hạt nhân h. Thống kê von Mises được gọi là *suy biến* nếu $E(h(x, X_i)) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ngoài ra, chúng ta giả sử thêm rằng h liên tục Lipschitz và xác định dương, tức là với mọi $c_1, \ldots, c_n, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_i c_j h(x_i, x_j) \geq 0.$$

Bằng cách áp dụng Định lý 4.4 và Định lý 4.11, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ cho sự hội tụ đầy đủ của thống kê von Mises suy biến đối với giá trị thực độc lập từng cặp.

Định lý 4.12 Cho $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực độc lập từng cặp và cùng phân phối với kỳ vọng 0, $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên PNQD theo hàng thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} E(A_{ni})^2 = O(n)$ (4.1). Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là độc lập. Cho h là hàm liên tục Lipschitz xác định dương thỏa mãn

$$E\left|h\left(X, X\right)\right| < \infty.$$

Khi đó

$$\frac{1}{n^2 \log_+^4(n)} \max_{1 \leq k \leq n} V_k \xrightarrow{c.c.} 0 \text{ khi } \ n \to \infty.$$

Định lý 4.13 Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực độc lập từng cặp với kỳ vọng bằng 0. Cho $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng số dương sao cho $a_{ni}^2 \leq C a_{ii}^2$ với mỗi $1 \leq i \leq n, n \geq 1, j \in B$. Với $\alpha > 1/2$, giả sử hạt nhân h của V-thống kê là một hàm liên tục Lipschitz xác định dương thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}^2}{i^{2\alpha-1}} E\left|h(X_i, X_i)\right| < \infty.$$

Khi đó,

$$V_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ni} a_{nj} h(X_i, X_j) \xrightarrow{c.c.} 0 \qquad \text{khi } n \to \infty.$$

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Luận án tập trung nghiên cứu Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên có cấu trúc phụ thuộc (liên kết âm, phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp) thông qua sự hội tụ đầy đủ. Những kết quả này không chỉ tổng quát các kết quả đã công bố mà còn có thể ứng dụng vào việc nghiên cứu một số mô hình thống kê.

Các đóng góp chính của luận án được tóm tắt dưới đây:

- Thiết lập các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát. Ngoài ra, dựa trên các kết quả vừa thiết lập, luận án đưa ra tốc độ hội tụ của các ước lượng vững đầy đủ trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn và trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên.

- Thiết lập Luật số lớn Marcinkiewicz (cả Luật yếu số lớn và Luật mạnh số lớn) cho tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng với dãy chuẩn hóa tổng quát. Đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối hoặc dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối, chúng tôi đưa ra được điều kiện cần và đủ của dãy chuẩn hóa để thiết lập Luật số lớn dạng Marcinkiewiczc-Zygmund. Ngoài ra, chúng tôi sử dụng những kết quả này để đưa ra ước lượng vững cho giá trị rủi ro có điều kiện $cVaR$ và nghiên cứu tính vững của các ước lượng trong mô hình hồi quy bán tham số với các sai số đuôi nặng.

- Thiết lập Luật mạnh số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert, phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp theo tọa độ thông qua sự hội tụ đầy đủ và áp dụng các kết quả này để đưa ra các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của thống kê von Mises suy biến với dữ liệu thực độc lập từng cặp.

Kiến nghị

Trong quá trình nghiên cứu các vấn đề của luận án, chúng tôi đã nghĩ đến một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Nghiên cứu các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của dãy biến ngẫu nhiên có cấu trúc phụ thuộc khác (END, WOD, . . .).

- Nghiên cứu các mô hình thống kê với dữ liệu có cấu trúc phụ thuộc.