

THÔNG TIN VỀ LUẬN ÁN TIẾN SĨ

1. Họ và tên nghiên cứu sinh: Ngô Thị Thương
2. Giới tính: Nữ
3. Ngày sinh: 22/01/1991
4. Nơi sinh: Hưng Yên
5. Quyết định công nhận nghiên cứu sinh: Quyết định số 3484/QĐ-ĐHKHTN ngày 15/12/2021 của Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN.
6. Các thay đổi trong quá trình đào tạo (nếu có): Quyết định số 4955/QĐ-ĐHKHTN ngày 26/12/2023 của Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN.
7. Tên đề tài luận án: Các phương pháp quán tính hữu hiệu giải một số lớp bài toán cân bằng và ứng dụng.
8. Chuyên ngành: Toán ứng dụng
9. Mã số: 9460112.01.
10. Cán bộ hướng dẫn khoa học: HDC: GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh
HDP: TS. Nguyễn Thế Vinh
11. Tóm tắt các kết quả mới của luận án:

Mục đích và đối tượng nghiên cứu của luận án

- Mục đích nghiên cứu: Luận án nghiên cứu và đề xuất một số phương pháp hữu hiệu giải bài toán cân bằng và bất đẳng thức biến phân.
- Đối tượng nghiên cứu: bài toán cân bằng $EP(f, C)$ và bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(F, C).

Các phương pháp nghiên cứu đã sử dụng

Phương pháp nghiên cứu là sử dụng các kết quả cơ bản của giải tích lồi, các thuật toán tối ưu, thuật toán phân rã, thuật toán chiếu giải bài toán bất đẳng thức biến phân kết hợp với kỹ thuật hiệu chỉnh, quán tính và xấp xỉ gắn kết để xây dựng các thuật toán mới hữu hiệu giải bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân.

Các kết quả chính

- Dựa trên phương pháp chiếu kiểu dưới đạo hàm được Santos và Scheimberg (Optimization, 2017) xem xét, chúng tôi đề xuất một số thuật toán phân rã kiểu Tseng để giải các bài toán cân bằng có song hàm được phân rã thành tổng của hai song hàm trong không gian Hilbert. Chúng tôi thiết lập sự hội tụ yếu và mạnh của thuật toán đề xuất theo các giả thiết cơ bản.

- Chúng tôi đề xuất phương pháp chiếu một bước giải bài toán cân bằng giả đơn điệu cho bởi tổng của hai hàm song hàm trong không gian Hilbert. So với các phương pháp phân rã hiện có, thuật toán của chúng tôi đơn giản hơn vì chỉ cần một phép chiếu lên tập chấp nhận được tại mỗi lần lặp. Theo các giả thiết cơ bản, tính hội tụ yếu của thuật toán mới đã được thiết lập. Bên cạnh đó, chúng tôi trình bày một kết quả hội tụ mạnh của phiên bản hiện chỉnh của phương pháp đề xuất.
- Bằng cách kết hợp kỹ thuật quán tính và phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với một chiến lược mới về lựa chọn cỡ bước, chúng tôi đề xuất phương pháp kiểu đạo hàm tăng cường mới giải các bài toán cân bằng giả đơn điệu trong không gian Hilbert thực. Phương pháp của chúng tôi được thiết kế sao cho dãy cỡ bước tăng dần sau một số hữu hạn lần lặp. Điều này khiến phương pháp của chúng tôi khác biệt với hầu hết các phương pháp kiểu đạo hàm tăng cường đã có cho các bài toán cân bằng. Sự hội tụ yếu và mạnh của các thuật toán mới theo các giả thiết cơ bản đã được thiết lập.
- Chúng tôi đã đề xuất một phiên bản nói lỏng của phương pháp chiếu đạo hàm cho các bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh được có tập chấp nhận được là tập mức dưới của một hàm lồi (có thể không khả vi). Thuật toán của chúng tôi có thể được triển khai dễ dàng vì ở mỗi lần lặp, chỉ yêu cầu một phép chiếu lên nửa không gian chứa tập chấp nhận được và một lần tính giá trị của ánh xạ. Với các giả thiết cơ bản, chúng tôi thiết lập được sự hội tụ mạnh của thuật toán đề xuất. Kết quả số và so sánh cho bài toán khử mờ ảnh cho thấy phương pháp của chúng tôi có thể vượt trội hơn các thuật toán liên quan trong tài liệu.

Kết luận: Luận án đề xuất một số phương pháp giải bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và ứng dụng trong khử mờ ảnh và một số ví dụ thực tế. Kết quả chính của luận án bao gồm:

- Đề xuất một số thuật toán phân rã kiểu Tseng để giải các bài toán cân bằng có song hàm được phân rã thành tổng của hai song hàm trong không gian Hilbert.
- Đề xuất phương pháp chiếu một bước giải bài toán cân bằng giả đơn điệu cho bởi tổng của hai hàm song hàm trong không gian Hilbert.
- Đề xuất phương pháp kiểu đạo hàm tăng cường mới giải các bài toán cân bằng giả đơn điệu trong không gian Hilbert thực.
- Đề xuất một phiên bản nói lỏng của phương pháp chiếu đạo hàm cho các bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh và ứng dụng trong khử mờ ảnh.

12. Các hướng nghiên cứu tiếp theo:

- Nghiên cứu phát triển các thuật toán tối ưu giải bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân trên không gian không có cấu trúc tuyến tính, như đa tạp Hadamard và đa tạp Riemann.
- Nghiên cứu phát triển các thuật toán giải bài toán cân bằng ngẫu nhiên, bất đẳng thức biến phân ngẫu nhiên.

13. Các công trình công bố liên quan đến luận án:

[1] Vinh N.T., Thuong N.T. (2022), A relaxed version of the gradient projection method for variational inequalities with applications, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. Vol. 67 (1), pp. 73-89, DOI: 10.24193/subbmath.2022.1.06s.

[2] Anh P.K., Thuong N.T., Vinh N.T. (2024), Tseng-type splitting projection algorithms for equilibrium problems in Hilbert spaces, Optimization, Vol. 74 (8), pp. 1969-1998, DOI: 10.1080/02331934.2024.2341943.

[3] Thuong N.T., Vinh N.T. (2024), Convergence of one-step projection methods for equilibrium problems given by a sum of two bifunctions, Vietnam J. Math. Vol 54, pp. 523-547, DOI: 10.1007/s10013-024-00717-8.

[4] Anh P.K., Thuong N.T., Vinh N.T. (2026), Novel subgradient extragradient methods for equilibrium problems in Hilbert spaces, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. DOI: 10.1016/j.cnsns.2026.109777.

TM. Tập thể hướng dẫn
(Ký và ghi rõ họ tên)

Hà Nội, ngày 10 tháng 06 năm 2026
Nghiên cứu sinh
(Ký và ghi rõ họ tên)

INFORMATION ON DOCTORAL THESIS

1. Full name: Ngo Thi Thuong
2. Sex: Female
3. Date of birth: 22/01/1991
4. Place of birth: Hung Yen
5. Admission decision number 3484/QĐ-ĐHKHTN dated 15/12/2021 by the Rector of the University of Science, Vietnam National University, Hanoi.
6. Changes in academic process: Decision No. 4955/QĐ-DHKHTN dated December 26, 2023, issued by the Rector of the University of Science, Vietnam National University, Hanoi. Accordingly, the standard training duration for the doctoral program in Probability and Statistics has been adjusted from 3 years to 4 years for QH.2018 to QH.2021.
7. Official thesis title
Effective inertial methods for solving certain classes of equilibrium problems and its applications
8. Major: Applied Mathematics
9. Code: 9460112.01
10. Supervisors:
 - Prof. Dr. Sc. Pham Ky Anh, VNU University of Science
 - Dr. Nguyen The Vinh, University of Transport and Communications
11. Summary of the new findings of the thesis

Research purpose: The thesis studies and proposes some effective methods to solve equilibrium problems and variational inequalities.

Research objective: The equilibrium problem $EP(f, C)$ and the variational inequality problem $VIP(F, C)$.

Research methods: The research method uses basic results from convex analysis, optimization algorithms, splitting algorithms, and projection algorithms to solve variational inequality problems, combined with regularize, inertial and viscosity techniques to develop new, effective algorithms for equilibrium and variational inequality problems.

Major results:

- We are based on the subgradient-type projection method considered by Santos and Scheimberg (Optimization, 2017), we propose some Tseng-type splitting algorithms for solving equilibrium problems whose bifunction is decomposed into the sum of two bifunctions in Hilbert spaces. We establish the weak and strong convergence of the proposed algorithm under standard assumptions.

- We proposed a one-step projection method for solving a pseudomonotone equilibrium problem given by a sum of two bifunctions in Hilbert spaces. Compared with the existing splitting methods, our algorithm is simpler as it only requires one projection onto the feasible set at each iteration. Under standard assumptions, the weak convergence of the new algorithm is established. Besides, we present a strong convergence result of a regularized version of the proposed method.
- By combining the inertial technique and subgradient extragradient method with a new strategy of stepsize selection, we propose a novel extragradient-type method to solve pseudomonotone equilibrium problems in real Hilbert spaces. Our method is designed such that the stepsize sequence is increasing after a finite number of iterations. This distinguishes our method from most other extragradient-type methods for equilibrium problems. The weak and strong convergence of new algorithms under standard assumptions is established.
- We proposed a relaxed version of the gradient projection method for strongly monotone variational inequalities defined on a level set of a (possibly non-differentiable) convex function. Our algorithm can be implemented easily since it computes on every iteration one projection onto some half-space containing the feasible set and only one value of the underlying mapping. Under standard conditions, we establish the strong convergence of the proposed algorithm. Numerical results and comparisons for the image deblurring problem show that our method can outperform related algorithms in the literature.

Conclusions: The thesis proposed some methods for equilibrium problems, variational inequality problems, and applications in image deblurring, and some practical examples. Main results of the thesis:

- Proposing some Tseng-type splitting algorithms for solving equilibrium problems whose bifunction is decomposed into the sum of two bifunctions in Hilbert spaces.
- Proposing a one-step projection method for solving a pseudomonotone equilibrium problem given by a sum of two bifunctions in Hilbert spaces.
- Proposing a novel extragradient-type method to solve pseudomonotone equilibrium problems in real Hilbert spaces.
- Proposing a relaxed version of the gradient projection method for strongly monotone variational inequalities defined on a level set of a (possibly non-differentiable) convex function apply it to the image deblurring problem.

12. Futher research directions

- Conduct research on and develop optimization algorithms for solving equilibrium and variational inequality problems in nonlinearly structured spaces, including Hadamard manifolds and Riemannian manifolds.
- Conduct research on and develop algorithms for solving stochastic equilibrium problems and stochastic variational inequality problems.

13. Thesis-related publications

[1] Vinh N.T., Thuong N.T. (2022), A relaxed version of the gradient projection method for variational inequalities with applications, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.* Vol. 67 (1), pp. 73-89, DOI: 10.24193/subbmath.2022.1.06s.

[2] Anh P.K., Thuong N.T., Vinh N.T. (2024), Tseng-type splitting projection algorithms for equilibrium problems in Hilbert spaces, *Optimization*, Vol. 74 (8), pp. 1969-1998, DOI: 10.1080/02331934.2024.2341943.

[3] Thuong N.T., Vinh N.T. (2024), Convergence of one-step projection methods for equilibrium problems given by a sum of two bifunctions, *Vietnam J. Math.* Vol 54, pp. 523-547, DOI: 10.1007/s10013-024-00717-8.

[4] Anh P.K., Thuong N.T., Vinh N.T. (2026), Novel subgradient extragradient methods for equilibrium problems in Hilbert spaces, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. DOI: 10.1016/j.cnsns.2026.109777.

Date: 10/06/2026

On behalf of academic supervisors

PhD. Student