

THÔNG TIN VỀ LUẬN ÁN TIẾN SĨ

1. Họ và tên nghiên cứu sinh: Quản Thái Hà
2. Giới tính: Nam
3. Ngày sinh: 03/7/1980
4. Nơi sinh: Phú Thọ
5. Quyết định công nhận nghiên cứu sinh: 2741/QĐ-ĐHKHTN
6. Các thay đổi trong quá trình đào tạo (nếu có):
7. Tên đề tài luận án: **Lý thuyết và ứng dụng của chập liên kết với biến đổi tích phân Hartley**
8. Chuyên ngành: Toán ứng dụng
9. Mã số: 9460112.01
10. Cán bộ hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh và PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn
11. Tóm tắt các kết quả mới của luận án:

Luận án nghiên cứu về các phép biến đổi tích phân Hartley (*Hartley Transform* - HT) và các tích chập liên quan đến HT, nhằm đóng góp vào việc xây dựng cơ sở lý thuyết, cũng như khai thác tiềm năng ứng dụng của chúng. Luận án đi sâu vào nghiên cứu ứng dụng HT trong việc giải phương trình tích phân, đặc biệt là phương trình tích phân Fredholm (FIE) có nhân dạng Toeplitz + Hankel (*Toeplitz plus Hankel* - TPH). Luận án cũng nghiên cứu các phương pháp để giải đúng, giải gần đúng FIE với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến.

Trên cơ sở giải tích hàm, giải tích Fourier, luận án nghiên cứu hệ thống hóa và phát triển cơ sở lý thuyết cho các phép HT. Mục đích là để đóng góp vào việc xây dựng một hệ thống lý thuyết đầy đủ và chặt chẽ hơn cho HT.

- Lý thuyết toán tử: Nghiên cứu tính chất đẳng cấu và bảo toàn chuẩn (bảo toàn năng lượng). Tìm kiếm và phân tích các hàm cơ sở và hàm riêng.
- Mối quan hệ giữa miền ban đầu và miền biến đổi: Xác định mối quan hệ giữa các phép toán vi phân và tích phân trong miền ban đầu với các phép toán đại số và phép toán tích chập trong miền biến đổi. Thiết lập mối liên hệ giữa độ trơn của hàm trong miền ban đầu với tính suy giảm của hàm trong miền biến đổi.

- Các định lý nền tảng: Thiết lập các định lý tích chập, các bất đẳng thức chuẩn, các nguyên lý bất định.

Trên cơ sở lý thuyết toán tử đơn điệu, giải tích đa trị, giải tích lồi, luận án nghiên cứu các phương pháp được sử dụng trong các bài toán tối ưu, nhằm áp dụng và phát triển các phương pháp và thuật toán để giải phương trình tích phân cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến.

- Nghiên cứu các phương pháp lặp (*iterative methods*), các phương pháp chiếu (*projection methods*), các phương pháp phân rã (*splitting methods*) và các phương pháp hiệu chỉnh (*regularization methods*) để giải phương trình tích phân.

Trên cơ sở những ứng dụng của biến đổi Fourier (*Fourier Transform* - FT) và tích chập Fourier, luận án nghiên cứu khả năng ứng dụng của các HT, cũng như các tích chập liên quan đến chúng. Nghiên cứu những ưu thế mà các HT mang lại, so với FT.

Xuất phát từ nhu cầu tối ưu hóa hiệu suất tính toán trong xử lý tín hiệu thực, HT - một công cụ độc đáo hoạt động hoàn toàn trên miền số thực, đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Biến đổi Hartley có quan hệ gần gũi với biến đổi FT, trong khi FT sử dụng nhân tích phân là hàm mũ phức, HT sử dụng nhân tích phân là hàm cos (*cosine-and-sine*). Mặc dù FT đã có một hệ thống lý thuyết đồ sộ, giữ một vai trò không thể thiếu và là công cụ toán học nền tảng trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật, tính chất tự ngược và không cần sử dụng đến số phức của HT vẫn mang lại nhiều lợi ích cần nghiên cứu.

Luận án nghiên cứu về HT, hệ thống hóa và phát triển các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, trong đó, trọng tâm là nghiên cứu xây dựng các tích chập liên quan đến HT. Trên cơ sở đó, luận án khám phá tiềm năng ứng dụng của các tích chập này, đặc biệt trong việc giải phương trình tích phân Fredholm (FIE). Luận án tập trung vào nghiên cứu các phương pháp để giải phương trình tích phân Fredholm loại II (FIE-II), trường hợp đặc biệt là FIE-II với nhân dạng TPH, và phương trình tích phân Fredholm loại I (FIE-I) với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến.

Đóng góp chính của luận án bao gồm:

1. Hệ thống hóa và phát triển các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Xây dựng các tích chập liên kết với các HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa, bất đẳng thức Young; trên cơ sở đó, luận án xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Nghiên cứu một số lớp FIE-II và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho loại phương trình này, nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT. Cụ thể, luận án đã nghiên cứu và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH, nhờ sử dụng các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn, bao gồm FIE-II với nhân dạng TPH và FIE-II với nhân dạng TPH dịch chuyển. Luận án cũng nghiên cứu và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho một số lớp FIE-II trên miền vô hạn, nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT, bao gồm phương trình tích chập liên kết với HT, phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển và phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite.
4. Đề xuất áp dụng một số phương pháp hiệu chỉnh để giải gần đúng FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến. Cụ thể, luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lặp, kết hợp với các tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm các phương pháp chỉnh lặp song song, phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (FBSM) và phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi-tiến (FBFSM).

Kết quả của luận án góp phần làm phong phú thêm lý thuyết giải tích hàm và lý thuyết toán tử, cũng như mở ra tiềm năng ứng dụng mới và tối ưu hóa hiệu suất tính toán cho các bài toán trong khoa học và kỹ thuật, đặc biệt trong lĩnh vực xử lý dữ liệu thực.

12. Các hướng nghiên cứu tiếp theo:

Nghiên cứu lý thuyết toán học:

- Nghiên cứu các tính chất toán học của các FTT trên các không gian trừu tượng, như các không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$; các không gian hàm kiểm thử, bao gồm không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact $D(\mathbb{R}^n)$ và không gian Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$; các không gian phân phối, bao gồm không gian các hàm suy rộng $D'(\mathbb{R}^n)$ (*generalized functions*) và không gian phân phối ôn hòa $S'(\mathbb{R}^n)$ (*tempered distributions*); và không gian Schauder. Mặc dù đã có nhiều công trình nghiên

cứu về các phép biến đổi tích phân như LCT, OLCCT trên các không gian hàm này, nhưng mức độ hoàn thiện vẫn còn hạn chế đáng kể so với FT.

- Nghiên cứu các dạng tổng quát của các FTT nhằm tăng tính linh hoạt trong việc ứng dụng các FTT trong thực tiễn.

Nghiên cứu phát triển thuật toán:

- Nghiên cứu phát triển các thuật toán để tính toán hiệu quả với HT nói riêng và các FTT nói chung, nhằm tối ưu hiệu suất tính toán trên các thiết bị có kiến trúc phần cứng khác nhau (CPU, GPU, FPGA) và cho các dữ liệu có kích thước khác nhau.
- Nghiên cứu phát triển thuật toán trên không gian nhiều chiều. Nghiên cứu phát triển các thuật toán thừa để xử lý hiệu quả tín hiệu thừa, giúp giảm thời gian tính toán khi các tín hiệu có nhiều giá trị bằng 0.

Nghiên cứu ứng dụng:

- Nghiên cứu phát triển ứng dụng của các FTT cho các lĩnh vực như toán ứng dụng, xử lý tín hiệu, xử lý ảnh và video, quang học, mật mã học và học máy.
- Nghiên cứu các phương pháp giải phương trình tích phân với nhân dạng TPH, sử dụng các phương pháp trong lý thuyết toán tử, các phương pháp lặp, các kỹ thuật hiệu chỉnh.
- Tiếp tục nghiên cứu ứng dụng HT để giải gần đúng FIE-I có nhân dạng TPH theo hướng tiếp cận dựa trên lý thuyết tối ưu hai cấp.

13. Các công trình công bố liên quan đến luận án:

[CT1] N.M. Tuan, B.T. Giang, and Q.T. Ha (2025), “New Convolutions for the Hartley Integral Transform Imbedded in the Banach Algebras and Convolution-type Integral Equations”, *Demonstratio Mathematica* vol. 58 (1), pp. 20240087. DOI: <https://doi.org/10.1515/dema-2024-0087>.

[CT2] V.T. Dung, and Q.T. Ha (2021), “Approximate Solution for Integral Equations Involving Linear Toeplitz plus Hankel Parts”, *Computational and Applied Mathematics* vol. 40 (172). DOI: <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01558-8>.

TM. Tập thể hướng dẫn
(Ký và ghi rõ họ tên)

Hà Nội, ngày tháng năm
Nghiên cứu sinh
(Ký và ghi rõ họ tên)