

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
— — — ★ — — —

Quản Thái Hà

LÝ THUYẾT VÀ ỨNG DỤNG CỦA CHẠP
LIÊN KẾT VỚI BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN HARTLEY

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2026

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
— — — ★ — — —

Quản Thái Hà

LÝ THUYẾT VÀ ỨNG DỤNG CỦA CHẬP
LIÊN KẾT VỚI BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN HARTLEY

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

- GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh
- PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn

Hà Nội - 2026

Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án

- [CT1] N.M. Tuan, B.T. Giang, and Q.T. Ha (2025), “New Convolutions for the Hartley Integral Transform Imbedded in the Banach Algebras and Convolution-type Integral Equations”, *Demonstratio Mathematica* vol. 58 (1), pp. 20240087. DOI: 10.1515/dema-2024 0087. url: <https://doi.org/10.1515/dema-2024 0087>.
- [CT2] V.T. Dung, and Q.T. Ha (2021), “Approximate Solution for Integral Equations Involving Linear Toeplitz plus Hankel Parts”, *Computational and Applied Mathematics* vol. 40 (5), pp. 172. DOI: 10.1007/s40314-021-01558-8. url: <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01558-8>.

Mở đầu

1 Đặt vấn đề

Các phép biến đổi tích phân đã có lịch sử lâu đời, được ghi nhận xuất hiện từ thế kỷ XVIII. Trải qua hơn hai thế kỷ phát triển, các phép biến đổi tích phân trở thành một công cụ giải tích cơ bản và không thể thiếu trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Có thể kể đến vai trò của biến đổi Laplace trong điều khiển học, biến đổi Mellin trong lý thuyết số, biến đổi Radon trong xử lý ảnh y học, biến đổi Fourier (FT) trong xử lý tín hiệu số. Xem [28, 45, 67, 93].

Bên cạnh đó, tích chập ra đời một cách tự nhiên cùng với các phép biến đổi tích phân, khi các nhà khoa học đi tìm lời giải cho các bài toán trong các lĩnh vực vật lý và toán học. Tích chập đã có rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật khác nhau. Tích chập được sử dụng để định nghĩa đạo hàm phân thứ, ứng dụng cho việc tính toán tích phân xác định, mô hình hóa hiện tượng khuếch tán bất thường, và nhiều ứng dụng khác. Từ sự phát triển của lý thuyết các không gian hàm kiểm thử và các không gian phân phối, tích chập trở thành công cụ không thể thiếu trong lý thuyết hệ tuyến tính bất biến theo thời gian (LTI), mở ra một công cụ hiệu quả cho việc phân tích và thiết kế các bộ lọc, cũng như các hệ thống xử lý tín hiệu số. Ngày nay, với sự bùng nổ của công nghệ máy tính và các thuật toán xử lý tín hiệu, xử lý ảnh, tích chập trở thành một công cụ hiệu quả cho các tác vụ làm mờ, làm sắc nét, phát hiện biên và trích xuất đặc trưng. Xem [17, 23, 31, 39, 62].

Biến đổi Hartley

Biến đổi Hartley (HT) là một phép biến đổi tích phân quan trọng được sử dụng nhiều trong các lĩnh vực xử lý tín hiệu vật lý thực. Biến đổi Hartley có mối liên hệ gần gũi với FT, nhưng cũng mang những đặc điểm riêng và độc đáo. Nguồn gốc của HT bắt nguồn từ công trình của R.V.L. Hartley vào năm 1942, khi ông đề xuất một phép biến đổi tích phân có khả năng xử lý tín hiệu thực mà không sử dụng đến số phức. Khác với FT truyền thống, khi sử dụng hàm nhân mũ phức $e^{-i\omega t}$, Hartley đã sử dụng nhân tích phân là hàm $\text{cas}(\mathbf{x}) = \cos(\mathbf{x}) + \sin(\mathbf{x})$ (viết tắt của “cosine-and-sine”). Sự ra đời của HT xuất phát từ mong muốn tối ưu hóa việc tính toán cho các tín hiệu vật lý thực, vốn không cần đến sự tính toán phức tạp trên miền số phức [67].

Biến đổi Hartley đã và đang thu hút được sự quan tâm nghiên cứu từ cộng đồng các nhà khoa học, với những nghiên cứu tập trung vào việc tối ưu hóa tính toán và mở rộng ứng dụng. Trong lĩnh vực tối ưu hóa thuật toán, H.V. Sorensen và cộng sự đã nghiên cứu so sánh hiệu quả tính toán giữa các thuật toán FHT và các thuật toán FFT trong trường hợp dữ liệu thực [76]. Tiếp đó, P. Duhamel và M. Vetterli đã nghiên cứu về hiệu quả tính toán và các thuật toán tối ưu cho DHT [30]. Bên cạnh đó, HT cũng được mở rộng ứng dụng sang không gian nhiều chiều, R.N. Bracewell và cộng sự đã nghiên cứu phát triển HT trên không gian hai chiều và các thuật toán nhanh [20], mở rộng ứng dụng HT sang lĩnh vực xử lý ảnh và xử lý dữ liệu nhiều chiều. Về ứng dụng chuyên ngành, F. Vatansever nghiên cứu ứng dụng HT để phân tích tín hiệu trong các hệ thống điện [42, 43]. N.L. Mohan và L.A. Babu

đã nghiên cứu ứng dụng HT hai chiều trong xử lý tín hiệu địa chấn [57]. Ngoài ra, HT còn thể hiện tiềm năng ứng dụng trong công nghệ hiện đại như học sâu và xử lý ảnh y tế. H. Zhang và J. Ma đã đề xuất phương pháp Hartley Spectral Pooling cho học sâu, tận dụng ưu thế hoạt động trên miền số thực của HT để tăng hiệu suất tính toán [95]. Gần đây, Rani và cộng sự (2024) [71], Ma và cộng sự (2021) [56], Coutinho và cộng sự (2021) [26] cũng đã công bố một số công trình nghiên cứu về ứng dụng HT trong các lĩnh vực xử lý ảnh y tế, thu thập dữ liệu hiệu quả trong chụp ảnh đơn điểm và nén ảnh.

Trong nước, N.X. Thảo, T. Tuấn, N.M. Khoa, N.M. Tuấn cũng đã công bố nhiều công trình nghiên cứu về các phép biến đổi tích phân suy rộng, ứng dụng cho giải các phương trình tích phân. Trong một số công trình nghiên cứu của họ, HT có thể được định nghĩa mới, hoặc được đề cập đến như một trường hợp đặc biệt của một phép biến đổi tích phân dạng Fourier (FTT) khác, hoặc cũng có thể được sử dụng kết hợp với các FTT khác. Xem [12, 86, 87, 47].

Phương trình tích phân với nhân dạng Toeplitz + Hankel

Trong quá trình nghiên cứu các bài toán phức tạp trong vật lý và kỹ thuật, các nhà nghiên cứu đã nhận thấy một số bài toán có thể được đưa về dạng IE với nhân có cấu trúc Toeplitz + Hankel (TPH), là sự kết hợp của nhân Toeplitz và nhân Hankel. Sự phát triển mạnh mẽ của lý thuyết toán tử trong thế kỷ 20, đặc biệt là lý thuyết về toán tử Toeplitz và toán tử Hankel trên các không gian hàm, đã cung cấp các phương pháp giải tích để nghiên cứu về loại phương trình này. Sự hiểu biết sâu sắc hơn về cấu trúc và tính chất của IE có nhân dạng TPH đã mở ra tiềm năng khám phá ứng dụng mới trong các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Cấu trúc đặc biệt của ma trận TPH (khi IE được rời rạc hóa) cũng đã thúc đẩy việc phát triển các thuật toán số để giải các IE có nhân dạng TPH. Các thuật toán này thường sử dụng các thuật toán FFT để tối ưu hóa hiệu suất tính toán. Song song với việc nghiên cứu và phát triển ứng dụng, nghiên cứu lý thuyết cũng tiếp tục được phát triển, tập trung vào các khía cạnh trừu tượng hơn của IE có nhân dạng TPH, bao gồm tính giải được, lý thuyết phổ, các phương pháp giải tích, và mối liên hệ của chúng với các lĩnh vực toán học khác.

Phương trình tích phân có nhân dạng Toeplitz và Hankel đã được nghiên cứu và đóng góp từ nhiều nhà khoa học. I. Gohberg và S. Goldberg, các nhà toán học nổi tiếng với những công trình nghiên cứu về lý thuyết toán tử, đã nghiên cứu về toán tử Toeplitz và Hankel, và những công trình của họ trở thành cơ sở nền tảng cho việc nghiên cứu các IE có nhân dạng TPH. Cuốn sách “*Basic Operator Theory*” của các tác giả này được xem là một tài liệu tham khảo kinh điển về lĩnh vực này. Bên cạnh đó, A. Böttcher và B. Silbermann đã có những đóng góp quan trọng về phân tích toán tử, phân tích ma trận Toeplitz và Hankel, bao gồm lý thuyết phổ, tính khả nghịch của toán tử và các phương pháp số giải phương trình Toeplitz và Hankel. Các công trình của họ được tổng hợp lại trong cuốn sách “*Analysis of Toeplitz Operators*”, và được ghi nhận là một tài liệu chuyên khảo kinh điển. M.G. Krein là một trong những nhà toán học lớn nhất của thế kỷ 20, với những đóng góp quan trọng trong lý thuyết toán tử và giải tích hàm. Các công trình của ông có ảnh hưởng sâu rộng đến nhiều lĩnh vực, đặc biệt là về lý thuyết phương trình TPH, điển hình trong số đó là các công trình về lý thuyết thác triển toán tử và các bài toán moment liên quan đến ma trận Toeplitz dương, lý thuyết phương trình Wiener-Hopf liên quan đến dạng liên tục của phương trình Toeplitz [35], lý thuyết phổ và đại số Krein liên quan đến phân tích dạng tiệm cận của định thức Toeplitz. H. Widom cũng đã có những đóng góp đáng kể trong việc

nghiên cứu lý thuyết về định thức Toeplitz và dạng tiệm cận của nó, liên quan mật thiết đến việc giải phương trình Toeplitz và TPH [91, 92]. N. Levinson đã phát triển một thuật toán đệ quy để giải hiệu quả các hệ phương trình Toeplitz phát sinh từ bài toán lọc Wiener (1947, [53]). K. Rost và G. Heinig cũng đã nghiên cứu và phát triển các thuật toán nhanh để giải các hệ phương trình tuyến tính với ma trận TPH [40]. G. Strang đã nghiên cứu mối liên hệ giữa ma trận TPH với những bài toán trong các lĩnh vực vật lý và kỹ thuật, đặc biệt là trong lĩnh vực xử lý tín hiệu và giải các phương trình đạo hàm riêng bằng phương pháp sai phân [78]. J.N. Tsitsiklis và B.C. Levy đã nghiên cứu các phương trình TPH và khảo sát tổng quan các phương pháp lý thuyết và phương pháp số để giải phương trình TPH cho trường hợp phương trình đặt chỉnh [82].

Trong nước, các tác giả N.X. Thảo [79], N.M. Tuấn [11, 84, 85], T. Tuấn [88], N.M. Khoa [80], L.T. Minh [38] cũng đã công bố nhiều công trình liên quan đến IE có cấu trúc dạng Toeplitz và Hankel. Các công trình của họ tập trung vào việc sử dụng các công cụ giải tích để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các lớp phương trình TPH khác nhau. Các phương pháp họ đưa ra thường là xây dựng các tích chập liên kết với các FTT, đặc biệt là tích chập liên kết với HT, để giải các lớp phương trình này.

Những kết quả về ứng dụng của tích chập Hartley suy rộng trong thời gian qua đã cho thấy đây là một công cụ đặc biệt phù hợp để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các IE có cấu trúc TPH, điều mà các phương pháp giải tích khác thường gặp nhiều khó khăn. Việc nghiên cứu loại IE này trở thành động lực mạnh mẽ thúc đẩy sự phát triển của các tích chập suy rộng liên quan đến phép HT.

Trên cơ sở những phân tích trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu là “**Lý thuyết và ứng dụng của tích chập liên kết với biến đổi tích phân Hartley**”, nhằm góp phần xây dựng một cách có hệ thống cơ sở lý thuyết cho HT, cũng như khai thác những ưu thế và tiềm năng ứng dụng của HT.

2 Mục tiêu nghiên cứu của luận án

Luận án nghiên cứu phát triển cơ sở lý thuyết cho HT, nhằm đóng góp vào việc xây dựng một hệ thống cơ sở lý thuyết đầy đủ và chặt chẽ cho HT, cũng như khám phá tiềm năng ứng dụng của chúng. Luận án cũng nghiên cứu các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án tập trung vào xây dựng các tích chập mới liên quan đến HT và HT hữu hạn, đồng thời thiết lập và chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa, bất đẳng thức Young. Trên cơ sở các phép tích chập liên quan đến HT, luận án nghiên cứu xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, nhằm mở rộng phạm vi nghiên cứu về không gian hàm $L^1(\mathbb{R}^n)$ và các tích chập của chúng.

Luận án cũng nghiên cứu các phương pháp để giải phương trình tích phân Fredholm (FIE) cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, trên cơ sở những lớp tích chập liên quan đến HT. Cụ thể, luận án nghiên cứu các phương pháp giải đúng phương trình tích phân Fredholm loại II (FIE-II), đồng thời, nghiên cứu áp dụng các phương pháp và thuật toán hiệu chỉnh để giải gần đúng phương trình tích phân Fredholm loại I (FIE-I), đây vốn là bài toán đặt không chỉnh khó giải và thường không có phương pháp giải tích để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng.

3 Đóng góp của luận án

Luận án nghiên cứu các phép biến đổi HT và HT hữu hạn, phát triển và hệ thống hóa các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án cũng đề xuất một số lớp tích chập mới liên kết với HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, bao gồm bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Hơn nữa, trên cơ sở các tích chập đã đề xuất, luận án xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH, bao gồm FIE-II với nhân dạng TPH và FIE-II với nhân dạng TPH dịch chuyển. Luận án cũng nghiên cứu một số lớp FIE-II trên miền vô hạn, như phương trình tích chập liên kết với HT, phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển, phương trình tích chập với nhân tích phân liên kết với hàm Hermite. Luận án đã đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các lớp phương trình tích phân này, nhờ sử dụng các phép tích chập liên kết với các HT và HT hữu hạn đã xây dựng.

Luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm phương pháp chỉnh lập song song, FBSM và FBFSM. Đây vốn là những bài toán đặt không chỉnh khó giải và thường không có phương pháp giải tích để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng, nhưng lại rất phổ biến và có ý nghĩa trong thực tế.

4 Cấu trúc của luận án

Luận án trình bày cơ sở lý thuyết và các kết quả mà luận án đã đạt được.

Chương 1 của luận án trình bày một số kết quả đã biết trong giải tích hàm, giải tích Fourier, giải tích đa trị, lý thuyết toán tử đơn điệu, giải tích lồi, là cơ sở lý thuyết cho các chương sau.

Chương 2 của luận án trình bày cơ sở lý thuyết của các phép HT và HT hữu hạn, các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án cũng đề xuất một số lớp tích chập liên quan đến HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Hơn nữa, trên cơ sở các tích chập đã xây dựng, luận án trình bày kết quả xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Chương 3 của luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT hữu hạn, bao gồm FIE-II với nhân dạng TPH và FIE-II với nhân dạng TPH dịch chuyển. Luận án cũng nghiên cứu một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm các phương pháp chỉnh lập song song, FBSM và FBFSM. Hơn nữa, luận án còn nghiên cứu một số lớp FIE-II trên miền vô hạn và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các lớp phương trình này, nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT, bao gồm phương trình tích chập liên kết với HT, phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển, phương trình tích chập với nhân tích phân liên kết với hàm Hermite.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này của luận án trình bày một số khái niệm và kết quả đã biết của giải tích hàm, giải tích Fourier, giải tích đa trị, lý thuyết toán tử đơn điệu, giải tích lồi, là cơ sở lý thuyết cho các chương sau. Cụ thể, luận án trình bày cơ sở lý thuyết của giải tích Fourier, lý thuyết toán tử đơn điệu, bài toán đặt chỉnh, bài toán đặt không chỉnh, bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP), bài toán bao hàm thức biến phân (VInP), phương trình tích phân Fredholm (FIE). Hơn nữa, luận án trình bày một số phương pháp chỉnh lặp song song để giải gần đúng hệ phương trình toán tử chứa toán tử đơn điệu. Đồng thời, luận án cũng trình bày các phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (FBSM) và chỉnh lặp tiến-lùi-tiến (FBFSM) để giải gần đúng VInP liên kết với toán tử đơn điệu.

Nội dung của chương này được viết dựa trên các tài liệu [1, 2, 3, 5, 15, 34, 63, 66, 77].

1.1 Phương pháp chỉnh lặp song song giải hệ các phương trình đặt không chỉnh

Xét hệ phương trình toán tử

$$\mathcal{A}_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

trong đó $\mathcal{A}_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là các toán tử có thể phi tuyến đã biết, xác định trên toàn không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$; hàm $x \in \mathbb{H}$ là ẩn cần tìm.

Bài toán (1.1) là bài toán đặt không chỉnh khó giải. Để giải bài toán này, ta có thể sử dụng các kỹ thuật hiệu chỉnh để đưa bài toán (1.1) về bài toán đặt chỉnh.

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{A}_i(x) + \alpha_n x = 0, \quad (1.2)$$

trong đó $(\alpha_n), n \geq 0$ là các tham số hiệu chỉnh.

Định lý 1.1 và Định lý 1.2 là kết quả từ phương pháp chỉnh lặp ẩn và hiện song song.

Định lý 1.1 ([8], Định lý 2.1) Cho (α_n) và (γ_n) là hai dãy số nguyên dương thỏa mãn các điều kiện:

$$(C1) \quad \alpha_n \rightarrow 0, \gamma_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty,$$

$$(C2) \quad \frac{\gamma_n |\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_n^2} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty,$$

$$(C3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = +\infty.$$

Giả sử nghiệm xấp xỉ thứ n là x_n đã biết. Còn x_{n+1} được xác định từ hệ thức

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i(x_n^i) + \left(\frac{\alpha_n}{N} + \gamma_n\right) x_n^i = \gamma_n x_n, & i = 1, 2, \dots, N \\ x_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n^i, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\quad (1.4)$$

Khi đó, quá trình chỉnh lặp song song hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $x^\dagger$ của hệ (1.1).

Định lý 1.2 ([8], Định lý 2.2) Giả sử các dãy (α_n) và (γ_n) thỏa mãn các điều kiện trong định lý 1.1, và thỏa mãn thêm điều kiện:

$$(C4) \quad \frac{Nc + \alpha_n}{\gamma_n} \leq q \leq 1, n \geq 0.$$

Hơn nữa, giả sử $\alpha_n \gamma_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow \infty$. Khi đó, quá trình chỉnh lặp song song

$$\begin{cases} z_{n,i}^{k+1} := z_n - \frac{1}{\gamma_n} [\mathcal{A}_i(z_{n,i}^k) + \frac{\alpha_n}{N} z_{n,i}^k], & z_{n,i}^0 := z_n & k = 0, 1, \dots, m-1 \\ z_{n+1} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{n,i}^m & & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

hội tụ về nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của hệ (1.1).

1.2 Phương pháp chỉnh lặp giải bài toán bao hàm thức biến phân

1.2.1 Bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng

Xét bài toán bao hàm thức biến phân (VInP) có cấu trúc tổng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$:

$$\text{Tìm } u^* \in \mathbb{H} \text{ thỏa mãn } 0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})u^*, \quad (1.5)$$

trong đó, $\mathcal{A} : \mathbb{H} \rightarrow 2^{\mathbb{H}}$ là toán tử đa trị đơn điệu cực đại, $\mathcal{B} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là toán tử đơn trị đơn điệu và liên tục Lipschitz. Ký hiệu $\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}(0)$ là tập nghiệm của bài toán (1.5). Ta luôn giả thiết tập nghiệm $\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ là khác rỗng.

Để giải bài toán (1.5) và đồng thời chọn một nghiệm đặc biệt của nó, ta đi đến việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) hai cấp (BVIP) sau:

$$\text{Tìm } u^* \in \text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \text{ thỏa mãn } \langle \mathcal{F}u^*, u - u^* \rangle \geq 0, \forall u \in \text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B}). \quad (1.6)$$

trong đó $\mathcal{F} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là toán tử đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz. Với các giả thiết này, và vì $\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ là một tập lồi, đóng, không rỗng, bài toán (1.6) có nghiệm duy nhất. Trong trường hợp đặc biệt, khi $\mathcal{F} = \mathcal{I} - g$, trong đó $g \in \mathbb{H}$ là cho trước, thì nghiệm duy nhất của bài toán (1.6) chính là hình chiếu metric của g lên tập $\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, tức là $u^* = P_{\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})}(g)$, và nếu $g = 0$ thì $u^\dagger := u^*$ là nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán (1.5).

Cùng với bài toán (1.5), ta xét VInP hiệu chỉnh:

$$\text{Tìm } u^* \in \mathbb{H} \text{ thỏa mãn } 0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})u^* + \alpha \mathcal{F}u^*, \quad (1.7)$$

với tham số hiệu chỉnh $\alpha > 0$. Nghiệm của bài toán (1.7), ký hiệu là u_α , tồn tại và duy nhất.

1.2.2 Phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi và chỉnh lặp tiến-lùi-tiến giải gần đúng bài toán bao hàm thức biến phân

Định lý 1.3 dưới đây cho thấy, với những điều kiện về độ dài bước λ_n và các tham số hiệu chỉnh α_n mà định lý đưa ra, phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (FBSM) hội tụ.

Định lý 1.3 ([41], Định lý 1) Cho $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu cực đại, $\mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu và $L_{\mathcal{B}}$ -liên tục Lipschitz, $\mathcal{F}$ là toán tử γ -đơn điệu mạnh và $L_{\mathcal{F}}$ -liên tục Lipschitz. Cho (λ_n) và (α_n) là các dãy số không âm thỏa mãn các điều kiện:

$$(C1) \quad 0 < \lambda_n < \frac{2(\gamma-l)\alpha_n}{(L_{\mathcal{B}}+L_{\mathcal{F}}\alpha_n)^2}, \text{ trong đó } 0 < l < \min\{\gamma, 1\};$$

$$(C2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0;$$

$$(C3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n = +\infty;$$

$$(C4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_n - \lambda_{n-1}| + |\lambda_n \alpha_n - \lambda_{n-1} \alpha_{n-1}|}{\lambda_n^2 \alpha_n^2} = 0.$$

Khi đó, quá trình

$$u_{n+1} = J_{\lambda_n \mathcal{A}}(u_n - \lambda_n(\mathcal{B}u_n + \alpha_n \mathcal{F}u_n)), \quad u_0 \in \mathbb{H}$$

hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất $u^\dagger$ của bài toán BVIP (1.6).

Độ dài bước λ_n trong Định lý 1.3 phụ thuộc vào các tham số hiệu chỉnh α_n , điều đó hạn chế việc lựa chọn các tham số này. Hơn nữa, khi độ dài bước λ_n giảm dần, thuật toán có thể hội tụ chậm. Để khắc phục, ta có thể sử dụng phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi-tiến (FBFSM).

Định lý 1.4 ([41], Định lý 2) Cho $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu cực đại, $\mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu và $L_{\mathcal{B}}$ -liên tục Lipschitz, $\mathcal{F}$ là toán tử γ -đơn điệu mạnh và $L_{\mathcal{F}}$ -liên tục Lipschitz. Cho (λ_n) và (α_n) là các dãy số không âm thỏa mãn các điều kiện:

$$(C5) \quad \{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset \left(0, \frac{1}{L_{\mathcal{B}}}\right);$$

$$(C6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0;$$

$$(C7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty;$$

$$(C8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1})\alpha_n^{-2} = 0.$$

Khi đó, dãy u_n của quá trình

$$\begin{cases} v_n = J_{\lambda_n \mathcal{A}}(u_n - \lambda_n(\mathcal{B}u_n + \alpha_n \mathcal{F}u_n)) \\ u_{n+1} = v_n + \lambda_n(\mathcal{B}u_n - \mathcal{B}v_n), \quad u_0 \in \mathbb{H} \end{cases}$$

hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất $u^\dagger$ của bài toán BVIP (1.6).

Chương 2

Biến đổi Hartley và tích chập liên kết với biến đổi Hartley

Chương này của luận án nghiên cứu về cơ sở lý thuyết của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án cũng phát triển một số lớp tích chập mới liên kết với HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như các bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Trên cơ sở các lớp tích chập liên kết với HT, luận án nghiên cứu xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Nội dung của chương này được viết dựa trên các công trình [CT1, CT2] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án và các tài liệu [2, 17, 54, 83, 96].

2.1 Biến đổi Hartley hữu hạn

Định nghĩa 2.1 (Biến đổi Hartley hữu hạn) (i) Cho f là hàm khả tích Lebesgue trên $[-\pi, \pi]$. Biến đổi Hartley hữu hạn của f được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(n) &:= \mathcal{H}_1[f(x)](n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cas}(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \hat{f}_2(n) &:= \mathcal{H}_2[f(x)](n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cas}(-nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

(ii) Tổng

$$\mathcal{H}_f(x) = \hat{f}_1(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{f}_1(n) \operatorname{cas}(nx) + \hat{f}_2(n) \operatorname{cas}(-nx) \right] \quad (2.1)$$

được gọi là chuỗi Hartley của f trên $[-\pi, \pi]$. Các hệ số $\hat{f}_1(n), \hat{f}_2(n)$ được gọi là hệ số Hartley thứ n của các biến đổi $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ tương ứng.

2.1.1 Tích chập liên kết với biến đổi Hartley hữu hạn

Định lý 2.1 (Định lý tích chập cho $\mathcal{H}_1$) Cho f là hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ 2π , $h \in \mathbb{R}$ cố định. Hơn nữa, giả sử f, g khả tích Lebesgue trên $[-\pi, \pi]$. Khi đó, mỗi phép biến đổi tích phân dưới đây định nghĩa một tích chập liên kết với biến đổi Hartley $\mathcal{H}_1$. Hơn nữa, tương ứng với các

tích chập là các bất đẳng thức chuẩn và đẳng thức nhân tử hóa được thiết lập.

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x-u+h) + f(-x+u+h) + f(x+u-h) \right. \\ &\quad \left. - f(-x-u-h) \right] g(u) du, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g \right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g \right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_1(n) \hat{g}_1(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x+u+h) + f(-x-u+h) + f(x-u-h) \right. \\ &\quad \left. - f(-x+u-h) \right] g(u) du, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g \right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g \right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_1(n) \hat{g}_2(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(-x+u-h) + f(x-u-h) + f(-x-u+h) \right. \\ &\quad \left. + f(x+u+h) \right] g(u) du, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g \right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g \right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_2(n) \hat{g}_1(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(-x-u-h) + f(x+u-h) + f(-x+u+h) \right. \\ &\quad \left. - f(x-u+h) \right] g(u) du, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*} g \right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*} g \right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_2(n) \hat{g}_2(n).$$

2.2 Biến đổi Hartley

Định nghĩa 2.2 (Biến đổi Hartley) Các biến đổi Hartley của một hàm $f(\mathbf{x})$, ký hiệu là $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$, được định nghĩa theo các công thức

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1[f(\mathbf{x})](\omega) &:= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \text{cas}(\omega \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \omega \in \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{H}_2[f(\mathbf{x})](\omega) &:= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \text{cas}(-\omega \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \omega \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

khi tích phân về bên phải tồn tại.

2.3 Tích chập liên kết với biến đổi Hartley

Tương tự như định lý tích chập cho FT, định lý tích chập cho HT cho phép ta tính toán tích chập một cách hiệu quả hơn, bằng cách biến đổi các hàm sang miền tần số, thực hiện phép nhân thông thường, sau đó thực hiện phép biến đổi ngược.

2.3.1 Tích chập Hartley

Định lý 2.2 Cho $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ cố định. Mỗi phép biến đổi tích phân dưới đây định nghĩa một tích chập liên kết với phép biến đổi Hartley $\mathcal{H}_1$. Hơn nữa, tương ứng với mỗi tích chập là các bất đẳng thức chuẩn và đẳng thức nhân tử hóa được thiết lập.

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) \\ &\quad - f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right)(\omega) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) \\ &\quad - f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right)(\omega) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_2 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) \\ &\quad - f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\mathcal{H}_2 f)(\omega)(\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) \\ &\quad - f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*}^{\mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\mathcal{H}_2 f)(\omega)(\mathcal{H}_2 g)(\omega).$$

2.3.2 Tích chập Hartley liên kết với hàm Hermite

Với $\alpha \in \mathbb{N}^n$, đặt $N_\alpha := 2\|\Phi_\alpha\|_1 = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$.

Định lý 2.3 Cho $|\alpha| = r \pmod{4}$, với $r = 0, 1, 2, 3$. Cho $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mỗi phép biến đổi tích phân sau định nghĩa một tích chập Hartley của $\mathcal{H}_1$ liên kết với các hàm trọng Hermite. Hơn nữa, tương ứng với mỗi tích chập là các bất đẳng thức chuẩn và đẳng thức nhân tử hóa được thiết lập.

- Trường hợp $r = 0$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\nu) [\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \nu) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \nu) \\ &\quad + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nu) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \nu)] d\mathbf{u} d\nu, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g\right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g\right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \left[\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\left\| f \stackrel{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \stackrel{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g \right) (\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \left[\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\left\| f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1} \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1} \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \left[\Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\left\| f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha,*}^{\mathcal{H}_1} \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha,*}^{\mathcal{H}_1} \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega).$$

- Trường hợp $r = 1$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{\underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\left\| f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha,*}^{\mathcal{H}_1} \\ \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha,*}^{\mathcal{H}_1} \\ \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_1 f) (\omega) (\mathcal{H}_1 g) (\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right) (\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1}}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\left\| f \begin{smallmatrix} \Phi_\alpha, \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \begin{smallmatrix} \Phi_\alpha, \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right) (\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{\underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*}} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}} g \right) (\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega).$$

2.4 Bất đẳng thức tích chập dạng Young

Ta sử dụng ký hiệu tích chập $\otimes$ cho tất cả các tích chập từ (2.6) - (2.9), và sử dụng ký hiệu tích chập $\star$ cho các tích chập (2.10) - (2.17) để đơn giản hóa việc biểu diễn các công thức.

Định lý 2.4 (i) Các tích chập $\otimes$ là toán tử song tuyến tính giữa các không gian $L^s(\mathbb{R}^n)$ phù hợp, theo nghĩa: nếu $1 \leq p, q, r \leq \infty$ và thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, và nếu $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, thì ta có $\|f \otimes g\|_r \leq C_{\otimes} \|f\|_p \|g\|_q$, trong đó $C_{\otimes}$ là một hằng số dương.

(ii) Các tích chập $\star$ là toán tử song tuyến tính trên $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, cho $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì với mọi $s \geq 1$, ta có $\|f \star g\|_s \leq C_{\star} \|f\|_1 \|g\|_1$, trong đó $C_{\star}$ là một hằng số dương.

2.5 Đại số Wiener trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$

Đại số Wiener trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$ là một cấu trúc đại số Banach quan trọng trong giải tích điều hòa và lý thuyết đại số Banach. Nghiên cứu về đại số này giúp ta có một cái nhìn sâu sắc hơn về không gian các hàm thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, cũng như các phép tích chập của chúng.

Định lý 2.5 Không gian $X := L^1(\mathbb{R}^n)$ khi được trang bị một trong các tích chập từ (2.6) đến (2.9), và từ (2.10) đến (2.17), sẽ trở thành một đại số phức không có đơn vị (có thể không có tính chất kết hợp).

(i) Với các tích chập (2.6), (2.9), (2.10), (2.13), (2.14), (2.17), các đại số là giao hoán.

(ii) Với các tích chập (2.7), (2.8), (2.11), (2.12), (2.15), (2.16), các đại số là không giao hoán.

Định nghĩa 2.3 Đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$ được định nghĩa là không gian ảnh của HT trên không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$, trong đó phép nhân là phép nhân điểm của hai hàm tương ứng với phép tích chập Hartley trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, và được trang bị chuẩn cảm sinh là $\|\mathcal{H}_1(f)\|_{\mathbb{W}_{\mathcal{H}_1}} = \|f\|_1$. Cụ thể, ta có thể viết $\mathbb{W}_{\mathcal{H}_1} := \{\mathcal{H}_1(f) : f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$, được trang bị phép nhân là phép nhân điểm và chuẩn cảm sinh.

Định lý 2.6 Ta ký hiệu $\mathbb{W}_{\mathcal{H}_1}$ là không gian ảnh của biến đổi Hartley $\mathcal{H}_1$ trên không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$. Không gian $\mathbb{W}_{\mathcal{H}_1}$ khi được trang bị phép nhân là phép nhân hàm theo từng điểm và chuẩn cảm sinh $\|\mathcal{H}_1(f)\|_{\mathbb{W}_{\mathcal{H}_1}} = \|f\|_1$ là một đại số định chuẩn giao hoán.

Kết luận chương 2

Chương này của luận án nghiên cứu về cơ sở lý thuyết cho HT, hệ thống hóa và phát triển các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án đã giới thiệu một số lớp tích chập mới liên kết với HT và HT hữu hạn. Trên cơ sở đó, thiết lập các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Các phép tích chập này còn được sử dụng để xây dựng đại số Wiener trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, nhằm nghiên cứu sâu sắc hơn về không gian các hàm thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$ và các tích chập của chúng.

Chương 3

Ứng dụng biến đổi Hartley và tích chập Hartley giải phương trình tích phân

Chương này của luận án nghiên cứu về một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH trên miền hữu hạn và một số lớp FIE-II trên miền vô hạn, luận án đã đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT và HT hữu hạn. Hơn nữa, luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến.

Nội dung chương này được viết dựa trên các công trình [CT1, CT2] trong danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

3.1 Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(x) + \int_a^b [p(x-u) + q(x+u)]\varphi(u)du = f(x), \quad (3.1)$$

trong đó, tham số $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước; $a, b \in \mathbb{R}$ là các hằng số cố định; các hàm p, q và f đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm. Các hàm p, q là nhân Toeplitz và Henkel tương ứng.

Luận án nghiên cứu phương pháp giải phương trình tích phân (3.1) và phương trình tích phân dạng (3.1) cho trường hợp tổng quát hơn khi các nhân Toeplitz và Hankel có dịch chuyển. Ý tưởng là sử dụng các tích chập Hartley hữu hạn để đưa phương trình (3.1) về hệ hai phương trình đại số tuyến tính. Nghiệm nhận được từ hệ phương trình này thuộc không gian L^2 và được biểu diễn dưới dạng một chuỗi Hartley tường minh.

3.1.1 Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel dịch chuyển

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u-h_1) + q(x+u-h_2)]\varphi(u)du = f(x), \quad (3.2)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ cho trước; các hàm p, q và dữ liệu f đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, đặt

$$\begin{aligned} A(n) &:= \lambda + \text{cas}^-(h_1 n) \hat{p}_1(n) + \text{cas}(h_1 n) \hat{p}_2(n) + \text{cas}(h_2 n) \hat{q}_1(n) - \text{cas}^-(h_2 n) \hat{q}_2(n), \\ B(n) &:= \text{cas}(h_1 n) \hat{p}_1(n) - \text{cas}(h_1 n)^- \hat{p}_2(n) + \text{cas}^-(h_2 n) \hat{q}_1(n) + \text{cas}(h_2 n) \hat{q}_2(n), \\ D_1(n) &:= A^-(n) \hat{f}_1(n) - B(n) \hat{f}_2(n), \quad D_2(n) := A(n) \hat{f}_2(n) - B^-(n) \hat{f}_1(n), \\ D(n) &:= A(n) A^-(n) - B(n) B^-(n). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Định lý 3.1 Cho p, q là các hàm liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$, f là hàm bình phương khả tích.

(i) Nếu $\lambda \neq 0$, tồn tại một số nguyên K^* sao cho $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geq K^*$.

(ii) Nếu $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, thì phương trình (3.2) có nghiệm duy nhất trong $L^2[-\pi, \pi]$ với mọi $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Hơn nữa, nghiệm được xác định bởi công thức

$$\varphi(x) = \frac{D_1(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{D_1(n)}{D(n)} \text{cas}(nx) + \frac{D_2(n)}{D(n)} \text{cas}(-nx) \right]. \quad (3.4)$$

Trong trường hợp đặc biệt, cho các dịch chuyển $h_1 = h_2 = 0$, ta nhận được kết quả dưới đây cho phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel.

3.1.2 Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel

Xét phương trình tích phân

$$\lambda \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du = f(x), \quad (3.5)$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước; các hàm p, q và dữ liệu f đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, đặt

$$\begin{aligned} A(n) &:= \lambda + \hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n), \\ B(n) &:= \hat{p}_1(n) - \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n), \\ D_1(n) &:= A^-(n) \hat{f}_1(n) - B(n) \hat{f}_2(n), \quad D_2(n) := A(n) \hat{f}_2(n) - B^-(n) \hat{f}_1(n), \\ D(n) &:= A(n) A^-(n) - B(n) B^-(n). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Định lý 3.2 Cho p, q là các hàm liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$ và f là hàm bình phương khả tích.

(i) Nếu $\lambda \neq 0$, tồn tại một số nguyên K^* thỏa mãn $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geq K^*$.

(ii) Nếu $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, thì phương trình (3.5) có nghiệm duy nhất trong $L^2[-\pi, \pi]$ với mọi $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Hơn nữa, nghiệm được xác định bởi công thức

$$\varphi(x) = \frac{D_1(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{D_1(n)}{D(n)} \text{cas}(nx) + \frac{D_2(n)}{D(n)} \text{cas}(-nx) \right]. \quad (3.7)$$

3.2 Phương trình tích phân Fredholm loại I với phần tuyến tính Toeplitz + Hankel

Xét phương trình tích phân

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du = f(x), \quad (3.8)$$

trong đó, các hàm p, q và dữ liệu f đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Bài toán (3.8) là bài toán đặt không chỉnh. Để giải bài toán này, ta thường sử dụng các phương pháp hiệu chỉnh để đưa bài toán (3.8) về phương trình tích phân loại II

$$\alpha \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du = f(x), \quad (3.9)$$

trong đó, $\alpha > 0$ được gọi là tham số hiệu chỉnh.

Trong trường hợp dữ liệu $f(x)$ không được biết chính xác, ta chỉ biết dữ liệu này có mức nhiễu $\|f_\delta - f\|_2 \leq \delta$. Khi đó, cùng với phương trình (3.9), ta có thêm một phương trình nữa là

$$\alpha \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du = f_\delta(x). \quad (3.10)$$

Các bài toán (3.8) - (3.10) trên có thể được viết lại dưới dạng phương trình toán tử trong không gian Hilbert thực $L^2[-\pi, \pi]$ như sau:

$$\mathcal{K}\varphi = f, \quad (3.11)$$

$$(\mathcal{K} + \alpha \mathcal{I})\varphi = f, \quad (3.12)$$

$$(\mathcal{K} + \alpha \mathcal{I})\varphi = f_\delta, \quad (3.13)$$

trong đó, $(\mathcal{K}\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du$ và $\mathcal{I}$ là toán tử đồng nhất.

Ta đưa ra một số điều kiện để toán tử $\mathcal{K}$ là toán tử compact không âm.

Với mọi $n \geq 1$, đặt

$$E_n := \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n),$$

$$G_0 := \hat{p}_1(0) + \hat{q}_1(0),$$

$$G_n := \hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n),$$

$$H_n := \hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) + \hat{q}_2(n) - \hat{q}_1(n),$$

$$F_n := G_n H_n - E_n^2.$$

Bổ đề 3.1 Giả sử p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π và liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$; giả sử p là hàm chẵn. Khi đó, $\mathcal{K}$ là toán tử tuyến tính tự liên hợp compact trên $L^2[-\pi, \pi]$.

Hơn nữa, $\mathcal{K}$ là toán tử không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} G_0 & \geq 0 \\ G_n & \geq 0 \\ H_n & \geq 0 \\ F_n & \geq 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

với mọi $n \geq 1$.

Hệ quả 3.1 Giả sử p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π và liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$; giả sử p là hàm chẵn. Hơn nữa, giả sử rằng tất cả các hệ số Hartley của p và q là không âm. Khi đó, $\mathcal{K}$ là toán tử compact tự liên hợp không âm trên $L^2[-\pi, \pi]$ nếu

$$\hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) \geq \left\{ [\hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n)]^2 + [\hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n)]^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.15)$$

Bổ đề 3.2 Giả sử tất cả các điều kiện trong Bổ đề 3.1 được thỏa mãn và $\hat{p}_1(0) \geq 0$. Khi đó, tất cả các định thức $D(n)$ được định nghĩa trong (3.6) khác 0, vì vậy phương trình (3.10) có một nghiệm duy nhất cho bởi công thức (3.4).

Định lý 3.3 Giả sử p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π . Hơn nữa, giả sử rằng các hệ số Hartley của p và q thỏa mãn bất đẳng thức (3.14) và $\hat{p}_1(0) \geq 0$. Giả sử rằng phương trình (3.8) có nghiệm $\varphi^\dagger$, và nghiệm thỏa mãn điều kiện nguồn (source condition) $\varphi^\dagger \in \text{Im}(\mathcal{K}^\nu)$, với ν thỏa mãn $0 < \nu \leq 1$. Khi đó, nghiệm hiệu chỉnh $\varphi_{\alpha, \delta}$ được xác định trong công thức (3.4) hội tụ đến nghiệm chính xác $\varphi^\dagger$, và ta có ước lượng sai số

$$\|\varphi_{\alpha, \delta} - \varphi^\dagger\| \leq \delta/\alpha + c\alpha^\nu, \quad (3.16)$$

trong đó c là một hằng số dương. Trường hợp đặc biệt, nếu $\alpha = \delta^{1/(\nu+1)}$, thì ta có

$$\|\varphi_{\alpha, \delta} - \varphi^\dagger\| = O(\delta^{\nu/(\nu+1)}). \quad (3.17)$$

3.2.1 Phương pháp chỉnh lặp song song giải gần đúng hệ phương trình tích phân Fredholm loại I

Xét hệ phương trình tích phân Fredholm loại I (FIE-I) với phần tuyến tính Toeplitz + Hankel:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p_i(x-u) + q_i(x+u)] \varphi(u) du = f_i(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.18)$$

trong đó, các dữ liệu $f_i \in L^2[-\pi, \pi]$. Hệ (3.18) có thể viết lại dưới dạng toán tử như sau:

$$\mathcal{K}_i \varphi = f_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

trong đó, $(\mathcal{K}_i \varphi)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p_i(x-u) + q_i(x+u)] \varphi(u) du$.

Kết quả đạt được dưới đây cho trường hợp dữ liệu chính xác.

Định lý 3.4 *Giả sử tập S tất cả các nghiệm của hệ (3.18) không rỗng. Hơn nữa, giả thiết các nhân p_i và q_i , $i = 1, \dots, N$, thỏa mãn các điều kiện trong Bổ đề 3.14 và $\hat{p}_{i1}(0) \geq 0$, $i = 1, \dots, N$. Cho (α_n) và (γ_n) là hai dãy số dương được chọn trước thỏa mãn $\alpha_n \searrow 0$; $\gamma_n \nearrow \infty$; $\frac{\gamma_n(\alpha_n - \alpha_{n+1})}{\alpha_n^2} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = \infty$. Khi đó, quá trình song song*

$$\begin{cases} \mathcal{K}_i(\varphi_n^i) + \left(\frac{\alpha_n}{N} + \gamma_n\right) \varphi_n^i = \gamma_n \varphi_n + f_i, & i = 1, \dots, N \\ \varphi_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_n^i, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_n^i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ của (3.18).

Ta có kết quả sau cho trường hợp dữ liệu có nhiễu, tức là thay vì biết f_i chính xác, ta chỉ biết $f_{i,n}$ thỏa mãn $\|f_{i,n} - f_i\| \leq \delta_n$, $i = 1, \dots, N$, trong đó $\delta_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Định lý 3.5 *Với điều kiện như trong Định lý 3.4, nếu các dãy (α_n) , (γ_n) và mức nhiễu (δ_n) thỏa mãn các điều kiện $\alpha_n \gamma_n \geq N$, $\delta_n \gamma_n \leq M$, với M là một hằng số dương. Khi đó quá trình chỉnh lặp song song*

$$\begin{cases} \mathcal{K}_i(\varphi_n^i) + \left(\frac{\alpha_n}{N} + \gamma_n\right) \varphi_n^i = \gamma_n \varphi_n + f_{i,n}, & i = 1, \dots, N \\ \varphi_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_n^i, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_n^i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ của hệ (3.18).

3.2.2 Phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi và chỉnh lặp tiến-lùi-tiến giải gần đúng phương trình tích phân Fredholm loại I

Xét phương trình tích phân

$$\mathcal{K}\varphi + \mathcal{F}(\varphi) = f, \quad (3.23)$$

trong đó,

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du,$$

và toán tử phi tuyến

$$\mathcal{F}(\varphi)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}(x, u, \varphi(u)) du$$

là đơn điệu, liên tục Lipschitz từ $L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$.

Phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (FBSM) để giải gần đúng bài toán đặt không chỉnh (3.23).

Định lý 3.6 *Giả sử p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn chu kỳ 2π , liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$, và p là hàm chẵn. Giả sử rằng các hệ số Hartley của p và q thỏa mãn các bất đẳng thức (3.14)*

và $\hat{p}_1(0) \geq 0$, toán tử $\mathcal{F} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ là toán tử đơn điệu và liên tục $L_{\mathcal{F}}$ -Lipschitz. Hơn nữa, giả sử phương trình (3.23) là tương thích và các dãy tham số (α_n) , (λ_n) thỏa mãn các điều kiện sau:

$$(C1) \quad 0 < \lambda_n < \frac{\alpha_n}{4L_{\mathcal{F}}^2};$$

$$(C2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0;$$

$$(C3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n = +\infty;$$

$$(C4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|\lambda_n - \lambda_{n-1}| |\alpha_n - \alpha_{n-1}|}{\lambda_n^3 \alpha_n^2} + \frac{|\lambda_n - \lambda_{n-1}| + |\lambda_n \alpha_n - \lambda_{n-1} \alpha_{n-1}|}{\lambda_n^2 \alpha_n^2} \right) = 0.$$

Khi đó, xuất phát từ một điểm ban đầu nào đó $\varphi_0 \in L^2[-\pi, \pi]$, quá trình chỉnh lặp

$$\varphi_{n+1} + \lambda_n \mathcal{K} \varphi_{n+1} = (1 - \alpha_n \lambda_n) \varphi_n - \lambda_n \mathcal{F}(\varphi_n) + \lambda_n f \quad (3.24)$$

hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ khi $n \rightarrow \infty$.

Xét phương trình tích phân phi tuyến (3.23) với cùng giả thiết về các toán tử $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ và chọn $\mathcal{R} = \mathcal{I}$. Khi đó, phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi-tiến (FBFSM) sau hội tụ.

Định lý 3.7 Cho p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π , liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$, và p là hàm chẵn. Giả sử rằng các hệ số Hartley của p và q thỏa mãn các bất đẳng thức (3.14) và $\hat{p}_1(0) \geq 0$, toán tử $\mathcal{F} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ là toán tử đơn điệu và liên tục $L_{\mathcal{F}}$ -Lipschitz, phương trình (3.23) là tương thích và các dãy tham số (α_n) , (λ_n) thỏa mãn các điều kiện (C5) - (C8). Khi đó, xuất phát từ $\varphi_0 \in L^2[-\pi, \pi]$ bất kỳ, quá trình lặp

$$\begin{cases} \psi_n + \lambda_n \mathcal{K} \psi_n = (1 - \alpha_n \lambda_n) \varphi_n - \lambda_n \mathcal{F}(\varphi_n) + \lambda_n f \\ \varphi_{n+1} = \psi_n + \lambda_n [\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}(\psi_n)] \end{cases} \quad (3.25)$$

hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ khi $n \rightarrow \infty$.

3.3 Phương trình tích chập

3.3.1 Phương trình tích chập liên kết với biến đổi Hartley

Sử dụng các tích chập được ký hiệu $\otimes$ và $\star$ như trong phần 2.4, luận án nghiên cứu hai lớp phương trình tích chập sau:

$$\lambda \varphi(\mathbf{x}) + (k \otimes \varphi)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (3.26)$$

và

$$\lambda \varphi(\mathbf{x}) + (k \star \varphi)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (3.27)$$

trong đó, tham số $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước; các hàm k và f thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm được giả thiết thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Luận án trình bày phương pháp tìm nghiệm cho lớp phương trình (3.26), lớp phương trình (3.27) có thể được thực hiện theo cách tương tự.

Xét phương trình tích chập sau trong $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + \left(k \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1}}{*}} \varphi\right)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (3.28)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước; các hàm $k, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; và φ là ẩn hàm cần tìm.

Định lý 3.8 (i) Nếu phương trình (3.28) có nghiệm trong không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì điều kiện cần là $\mathcal{H}_1 f = 0$ khi $G = 0$. Giả sử điều kiện này được thỏa mãn và $\mathcal{H}_1 f / G \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, L^1 -nghiệm duy nhất được xác định bởi công thức

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{a.e}}{=} \mathcal{H}_1 [\mathcal{H}_1 f / G](\mathbf{x}). \quad (3.29)$$

(ii) Nếu $G(\omega) \neq 0$ với mọi $\omega \in \mathbb{R}^n$ và $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì phương trình (3.28) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$ và nghiệm được xác định bởi công thức (3.29).

(iii) Nếu $|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \{|\Phi_{\alpha}(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)|\}$, thì phương trình (3.28) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm của phương trình được xác định bởi công thức (3.29) và có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi.

3.3.2 Phương trình tích chập với nhân dịch chuyển

Cho các tập $\{\mathbf{h}_{ij}\} \subset \mathbb{R}^n$ cố định, $\{a_{ij}\} \subset \mathbb{R}$ và $\{k_{ij}\}$ là các hàm thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$. Đặt

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \sum_{j=1}^N \left[a_{1j} k_{1j}(\pm(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}_{1j})) + a_{2j} k_{2j}(\pm(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}_{2j})) \right. \\ \left. + a_{3j} k_{3j}(\pm(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}_{3j})) + a_{4j} k_{4j}(\pm(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}_{4j})) \right]. \quad (3.30)$$

Ký hiệu K_e và K_o là các phần chẵn và phần lẻ của hàm K , và được xác định như sau:

$$K_e(\mathbf{z}) := \frac{1}{2} [K(\mathbf{z}) + K(-\mathbf{z})], \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n, \\ K_o(\mathbf{z}) := \frac{1}{2} [K(\mathbf{z}) - K(-\mathbf{z})], \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{u})\varphi(\mathbf{u})d\mathbf{u} = f(\mathbf{x}), \quad (3.31)$$

trong đó, $\mathbf{h}_{1j}, \mathbf{h}_{2j}, \mathbf{h}_{3j}, \mathbf{h}_{4j} \in \mathbb{R}^n$, tham số $\lambda \in \mathbb{C}$ cố định cho trước; các hàm $\{k_{ij}\}$ và dữ liệu f thuộc L^1 (hoặc L^2) đã biết; và φ là ẩn hàm cần tìm.

3.3.2.1 Phương trình tích chập với nhân dịch chuyển

Luận án trình bày phương pháp giải phương trình (3.31) cho trường hợp nhân tích phân có dạng $K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = k(-(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}))$, các trường hợp tổng quát hơn được thực hiện theo cách tương tự.

Xét phương trình tích phân

$$\lambda \varphi(\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^n} k(-(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h})) \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f(\mathbf{x}), \quad (3.32)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ cho trước; hàm k và dữ liệu f thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Đặt

$$A_1(\omega) = \frac{-\sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e1}(\omega) - \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o1}(\omega)}{2}, \quad B_1(\omega) = \frac{\cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e1}(\omega) - \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o1}(\omega)}{2},$$

$$A_2(\omega) = \frac{\cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e2}(\omega) + \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o2}(\omega)}{2}, \quad B_2(\omega) = \frac{\sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e2}(\omega) - \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o2}(\omega)}{2},$$

$$D_1 = (\lambda + B_2)\hat{f}_1 - B_1\hat{f}_2, \quad D = (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - A_2B_1.$$

Định lý 3.9 (i) Nếu $D(\omega) \neq 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, hay

$$\lambda \neq \frac{1}{2} \left[-(A_1 + B_2)(\omega) \pm |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1)(\omega)|^{1/2} \right],$$

hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, và nếu $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì phương trình (3.32) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{a.e}}{=} \mathcal{H}_1 [D_1/D](\mathbf{x}). \quad (3.33)$$

(ii) Nếu

$$|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\{ \left[(A_1 + B_2)^2 + |A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1| \right](\omega) \right\}^{1/2},$$

thì phương trình (3.32) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm của phương trình này tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức (3.33) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

3.3.2.2 Phương trình tích chập với nhân dạng Toeplitz + Hankel dịch chuyển

Xét phương trình tích phân

$$\lambda \varphi(\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x} + \mathbf{h}_1 + \mathbf{u}) + q(\mathbf{x} + \mathbf{h}_2 - \mathbf{u}) \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f(\mathbf{x}), \quad (3.34)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$ và $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ cho trước; hàm k và dữ liệu f thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Đặt

$$\begin{aligned}
A_1(\omega) &= \frac{-\sin(\mathbf{h}_1\omega)\hat{p}_{e1}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_1\omega)\hat{p}_{o1}(\omega)}{2} + \frac{\cos(\mathbf{h}_2\omega)\hat{q}_{e1}(\omega) + \sin(\mathbf{h}_2\omega)\hat{q}_{o1}(\omega)}{2}, \\
B_1(\omega) &= \frac{\cos(\mathbf{h}_1\omega)\hat{p}_{e1}(\omega) + \sin(\mathbf{h}_1\omega)\hat{p}_{o1}(\omega)}{2} + \frac{-\sin(\mathbf{h}_2\omega)\hat{q}_{e1}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_2\omega)\hat{q}_{o1}(\omega)}{2}, \\
A_2(\omega) &= \frac{-\cos(\mathbf{h}_1\omega)\hat{p}_{e2}(\omega) + \sin(\mathbf{h}_1\omega)\hat{p}_{o2}(\omega)}{2} + \frac{\sin(\mathbf{h}_2\omega)\hat{q}_{e2}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_2\omega)\hat{q}_{o2}(\omega)}{2}, \\
B_2(\omega) &= \frac{\sin(\mathbf{h}_1\omega)\hat{p}_{e2}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_1\omega)\hat{p}_{o2}(\omega)}{2} + \frac{\cos(\mathbf{h}_2\omega)\hat{q}_{e2}(\omega) - \sin(\mathbf{h}_2\omega)\hat{q}_{o2}(\omega)}{2}, \\
D_1 &= (\lambda + B_2)\hat{f}_1 - B_1\hat{f}_2, \quad D = (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - A_2B_1.
\end{aligned}$$

Nếu $D(\omega) \neq 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, hay

$$\lambda \neq \frac{1}{2} \left[-(A_1 + B_2)(\omega) \pm |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1)(\omega)|^{1/2} \right]$$

hầu khắp nơi $\omega \in \mathbb{R}^n$, và nếu $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì nghiệm $\varphi(\mathbf{x})$ được xác định bởi công thức

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{a.e}}{=} \mathcal{H}_1 [D_1/D](\mathbf{x}). \quad (3.35)$$

Mặt khác, nếu

$$|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\{ [(A_1 + B_2)^2 + |A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1|](\omega) \right\}^{1/2},$$

thì do $D(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}^n$, phương trình (3.34) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$ và nghiệm tồn tại duy nhất được xác định bởi công thức (3.35) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

3.3.3 Phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite

Cho tập $\{a_{ij}\} \subset \mathbb{R}$, $\{k_{ij}\}$ là các hàm thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$ và $\{\Phi_{\alpha_{ij}}\}$ là tập các hàm Hermite. Đặt

$$\begin{aligned}
K(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nu) &:= \sum_{j=1}^N \left[a_{1j}k_{1j}(\mathbf{u})\Phi_{\alpha_{1j}}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \nu) + a_{2j}k_{2j}(\mathbf{u})\Phi_{\alpha_{2j}}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \nu) \right. \\
&\quad \left. + a_{3j}k_{3j}(\mathbf{u})\Phi_{\alpha_{3j}}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nu) + a_{4j}k_{4j}(\mathbf{u})\Phi_{\alpha_{4j}}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \nu) \right].
\end{aligned}$$

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nu)\varphi(\nu)d\mathbf{u}d\nu = f(\mathbf{x}), \quad (3.36)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước; dữ liệu f đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Lược án trình bày phương pháp giải phương trình (3.36) cho trường hợp nhân tích phân có dạng $K(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \nu) = k(\mathbf{u})\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \nu)$, trường hợp tổng quát được thực hiện theo cách tương tự.

Xét phương trình tích phân

$$\lambda \varphi(\mathbf{x}) + \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{u}) \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}) d\mathbf{u} d\mathbf{v} = f(\mathbf{x}), \quad (3.37)$$

trong đó $|\alpha| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ đã cho, hàm k và dữ liệu f thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Đặt

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha} \hat{k}_1 + \Phi_{\alpha} \hat{k}_2), & B_1 &= \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha} \hat{k}_1 - \Phi_{\alpha} \hat{k}_2), \\ A_2 &= \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha} \hat{k}_2 - \Phi_{\alpha} \hat{k}_1), & B_2 &= -\frac{1}{4}(\Phi_{\alpha} \hat{k}_2 + \Phi_{\alpha} \hat{k}_1), \\ D_1 &= (\lambda + B_2) \hat{f}_1 - A_2 \hat{f}_2, & D &= (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - B_1 A_2. \end{aligned}$$

Định lý 3.10 (i) Nếu $D(\omega) \neq 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, hay

$$\lambda \neq \frac{1}{2} \left[-(A_1 + B_2)(\omega) \pm \left| (A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1)(\omega) \right|^{1/2} \right]$$

hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, và nếu $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì phương trình (3.37) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \mathcal{H}_1 [D_1/D](\mathbf{x}). \quad (3.38)$$

(ii) Nếu

$$|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\{ \left[(A_1 + B_2)^2 + \left| A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1 \right| \right](\omega) \right\}^{1/2},$$

thì phương trình (3.37) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm của phương trình này tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức (3.38) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Kết luận chương 3

Sau đây là một số kết quả chính nhận được từ chương 3.

Giải đúng FIE-II: Luận án đã nghiên cứu một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn, bao gồm FIE-II với nhân dạng TPH dịch chuyển, FIE-II với nhân dạng TPH. Luận án cũng nghiên cứu một số lớp FIE-II trên miền vô hạn và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT, bao gồm phương trình tích chập liên kết với HT, phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển và phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite.

Giải gần đúng FIE-I: Luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm các phương pháp chỉnh lập song song, FBSM và FBFSM. Trên mỗi bước lặp, các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn được sử dụng như một công cụ để chuyển FIE-II với nhân dạng TPH về hệ phương trình đại số tuyến tính. Quá trình này cho phép tìm nghiệm gần đúng của FIE-I với phần tuyến tính TPH một cách hiệu quả và ổn định.

Kết luận

1 Đóng góp của luận án

Luận án nghiên cứu về HT và các tích chập liên quan đến HT, trên cơ sở đó, khám phá tiềm năng ứng dụng của chúng trong việc giải FIE. Luận án cũng nghiên cứu các phương pháp để giải đúng một số lớp FIE-II, cũng như giải gần đúng một số lớp FIE-I cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến. Dưới đây là những đóng góp chính của luận án.

Phát triển cơ sở lý thuyết cho HT:

Luận án hệ thống hóa và phát triển các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án đề xuất một số lớp tích chập mới liên quan đến HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Đặc biệt, các tích chập mới này còn được sử dụng để xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, nhằm mở rộng phạm vi nghiên cứu về không gian hàm $L^1(\mathbb{R}^n)$ và các tích chập của chúng.

Giải đúng FIE-II:

Luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II trên miền hữu hạn và một số lớp FIE-II trên miền vô hạn. Luận án đã đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các lớp phương trình này. Kết quả đạt được nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT và HT hữu hạn.

Giải gần đúng FIE-I:

Luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm các phương pháp chỉnh lập song song, FBSM và FBFSM. Các kết quả đạt được của luận án cho thấy sự phù hợp và hiệu quả trong việc ứng dụng phép HT và các tích chập liên kết với HT để giải FIE-I với phần tuyến tính TPH.

2 Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Dưới đây là một số hướng nghiên cứu tiếp theo của luận án.

Nghiên cứu lý thuyết toán học:

- Nghiên cứu các tính chất toán học của các FTT trên các không gian trừu tượng, như các không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$; các không gian hàm kiểm thử, bao gồm không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ và không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; các không gian phân phối, bao gồm không gian các hàm suy rộng $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (*generalized functions*) và không gian phân phối ôn hòa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (*tempered distributions*); và không gian Schauder. Mặc dù đã có nhiều công trình nghiên cứu về các phép biến đổi tích phân như LCT, OLCT trên các không gian hàm này, nhưng mức độ hoàn thiện vẫn còn hạn chế đáng kể so với FT.
- Nghiên cứu các dạng tổng quát của các FTT nhằm tăng tính linh hoạt trong việc ứng dụng các FTT trong thực tiễn.

Nghiên cứu phát triển thuật toán:

- Nghiên cứu phát triển các thuật toán để tính toán hiệu quả với HT nói riêng và các FTT nói chung, nhằm tối ưu hiệu suất tính toán trên các thiết bị có kiến trúc phần cứng khác nhau (CPU, GPU, FPGA) và cho các dữ liệu có kích thước khác nhau.
- Nghiên cứu phát triển thuật toán trên không gian nhiều chiều. Nghiên cứu phát triển các thuật toán thưa để xử lý hiệu quả tín hiệu thưa, giúp giảm thời gian tính toán khi các tín hiệu có nhiều giá trị bằng 0.

Nghiên cứu ứng dụng:

- Nghiên cứu phát triển ứng dụng của các FTT cho các lĩnh vực như toán ứng dụng, xử lý tín hiệu, xử lý ảnh và video, quang học, mật mã học và học máy.
- Nghiên cứu các phương pháp giải phương trình tích phân với nhân dạng TPH, sử dụng các phương pháp trong lý thuyết toán tử, các phương pháp lặp, các kỹ thuật hiệu chỉnh.
- Tiếp tục nghiên cứu ứng dụng HT để giải gần đúng FIE-I có nhân dạng TPH theo hướng tiếp cận dựa trên lý thuyết tối ưu hai cấp.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Phạm Kỳ Anh và Nguyễn Bường (2007), *Bài toán đặt không chỉnh*, Hà Nội: Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [2] Nguyễn Minh Tuấn (2016), *Biến đổi Tích phân dạng Fourier và Phương trình Tích phân dạng Chập*, Hà Nội: Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, ISBN: 978-604-949-570-5.
- [3] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và Giải tích hàm*, Tái bản lần thứ 5, có chỉnh lý, Hà Nội: Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

Tiếng Anh

- [4] Achieser, N.I. (1992), *Theory of Approximation*, New York: Dover Publications, ISBN: 978-0486671291.
- [5] Adams, R.A. and Fournier, J.J.F. (2003), *Sobolev Spaces*, 2nd, vol. 140, Elsevier/Academic Press, ISBN: 978-0120441434.
- [6] Alber, Y. and Ryazantseva, I. (2006), *Nonlinear Ill-posed Problems of Monotone Type*, Dordrecht, The Netherlands: Springer, ISBN: 1402043953.
- [7] Anh, P.K., Castro, L.P., Thao, P.T., and Tuan, N.M. (2017), “Two New Convolutions for the Fractional Fourier Transform”, *Wireless Personal Communications* vol. 92 (2), pp. 623–637.
- [8] Anh, P.K. and Chung, C.V. (2009), “Parallel Iterative Regularization Methods for Solving Systems of Ill-Posed Equations”, *Applied Mathematics and Computation* vol. 212 (2), pp. 542–550, ISSN: 0096-3003.
- [9] Anh, P.K. and Hai, T.N. (2023), “On Regularized Forward-Backward Dynamical Systems Associated with Structured Monotone Inclusions”, *Vietnam Journal of Mathematics* vol. 51, pp. 545–562.
- [10] Anh, P.K. and Hai, T.N. (2025), “A Simple Regularized Forward-Backward-Forward Dynamical System for Structured Monotone Inclusions”, *Computational and Applied Mathematics* vol. 44, pp. 1–20.
- [11] Anh, P.K., Tuan, N.M., and Tuan, P.D. (2013), “The finite Hartley new convolutions and solvability of the integral equations with Toeplitz plus Hankel kernels”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* vol. 397, pp. 537–549.
- [12] Anh, P.T.V. and Thao, N.X. (2015), “Integral Transforms of Hartley–Fourier Cosine Polycorrelation Type”, *Applicable Analysis* vol. 94, pp. 1749–1765.
- [13] Atkinson, K.E. (1997), *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, vol. 4, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, ISBN: 978-0521588701.

- [14] Banerjea, S. and Mandal, B.N. (2023), *Integral Equations and Integral Transforms*, 1st ed., Singapore: Springer, ISBN: 978-981-99-6359-1.
- [15] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L. (2017), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2nd ed., CMS Books in Mathematics, Cham, Switzerland: Springer, ISBN: 978-3-319-48310-4.
- [16] Bitsadze, Andrei Vasilievich (1995), *Integral Equations of the First Kind*, Singapore: World Scientific, ISBN: 978-981-02-1234-6.
- [17] Böttcher, A., Karlovich, Y.I., and Spitkovsky, I.M. (2002), *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*, vol. 131, Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser, ISBN: 3-7643-6672-9.
- [18] Bracewell, R.N. (1986), “Aspects of the Hartley Transform”, *Proceedings of the IEEE* vol. 74 (9), pp. 1283–1287.
- [19] Bracewell, R.N. (1986), *The Hartley Transform*, vol. 19, Oxford Engineering Science Series, New York: Oxford University Press, ISBN: 0195039696.
- [20] Bracewell, R.N., Buneman, O., Hao, H., and Villasenor, J. (1986), “Fast Two-Dimensional Hartley Transform”, *Proceedings of the IEEE* vol. 74, pp. 1282–1283.
- [21] Brézis, H. (2011), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer.
- [22] Britvina, L.E. (2007), “Generalized Convolutions for the Hankel Transform and Related Integral Operators”, *Mathematische Nachrichten* vol. 280 (9-10), pp. 962–970.
- [23] Campos, R.G. (2019), *The XFT Quadrature in Discrete Fourier Analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Cham, Switzerland: Birkhäuser, ISBN: 978-3-030-13422-8.
- [24] Castro, L.P., Guerra, R.C., and Tuan, N.M. (2020), “New Convolutions and Their Applicability to Integral Equations of Wiener-Hopf plus Hankel Type”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* vol. 43 (7), pp. 4835–4846.
- [25] Castro, L.P., Silva, A.S., and Saitoh, S. (2014), “A Reproducing Kernel Hilbert Space Constructive Approximation for Integral Equations with Toeplitz and Hankel Kernels”, *Libertas Mathematica (New Series)* vol. 34 (1), pp. 1–22.
- [26] Coutinho, A.M.P.G., Coutinho, P.M.M., Costa, J.M.M., Silva, J.V.A.M., and Nogueira, F.J.P. (2021), “A novel Image Compression Method Based on Discrete Hartley Transform and Principal Component Analysis”, *Alexandria Engineering Journal* vol. 60 (4), pp. 4025–4037.
- [27] Dales, H.G., Aiena, P., Eschmeier, J., Laursen, K.B., and Willis, G.A. (2003), *An Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis*, vol. 57, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge: Cambridge University Press.
- [28] Debnath, L. and Bhatta, D. (2024), *Integral Transforms and Their Applications*, 3rd ed., New York: Routledge, ISBN: 978-1-032-91748-1.

- [29] Didenko, V.D. and Silbermann, B. (2016), “Generalized Inverses and Solution of Equations with Toeplitz plus Hankel Operators”, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* vol. 22 (2), pp. 645–667.
- [30] Duhamel, P. and Vetterli, M. (1987), “Improved Fourier and Hartley Transform Algorithms: Application to Cyclic Convolution of Real Data”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* vol. 35, pp. 818–824.
- [31] Easton, R.L. (2010), *Fourier Methods in Imaging*, The Wiley-IS & T Imaging Science and Technology Series, New Jersey: John Wiley & Sons, ISBN: 978-0-470-68983-7.
- [32] Feldman, I., Gohberg, I., and Krupnik, N. (2000), “Convolution Equations on Finite Intervals and Factorization of Matrix Functions”, *Integral Equation Operator Theory* vol. 36, pp. 201–211.
- [33] Gelman, L., Sanderson, M., and Thompson, C. (2003), “Signal Recognition: Fourier Transform vs. Hartley Transform”, *Pattern Recognition* vol. 36 (12), pp. 2849–2853.
- [34] Goebel, K. and Kirk, W.A. (1990), *Topics in Metric Fixed Point Theory*, vol. 28, Cambridge Studies in Advanced Math. Cambridge: Cambridge University Press.
- [35] Gohberg, I. and Krein, M.G. (1960), “Systems of Integral Equations on a Half-line with Kernels Depending on the Difference of Arguments”,
- [36] Groetsch, C. W. (2007), “Integral Equations of the First Kind, Inverse Problems and Regularization: A Crash Course”, *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 73, p. 012001.
- [37] Guo, D., Lakshmikantham, V., and Liu, X. (1999), *Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces*, vol. 478, Mathematics and Its Applications, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, ISBN: 978-0-7923-5593-3.
- [38] Ha, Q.T. and Minh, L.T. (2025), “Convolution of the Hartley Transform with an Extended Kernel and the Toeplitz plus Hankel Integral Equation”, *Journal of Applied Mathematics and Informatics* vol. 43 (2), pp. 367–380.
- [39] Ha, Q.T., Minh, L.T., and Tuan, N.M. (2019), “Convolution for the Offset Linear Canonical Transform with Gaussian Weight and Its Application”, *VNU Journal of Science: Mathematics - Physics* vol. 35 (1), pp. 47–54.
- [40] Heinig, G. and Rost, K. (2003), “New Fast Algorithms for Toeplitz plus Hankel Matrices”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* vol. 25 (3), pp. 842–857.
- [41] Hieu, D.V., Anh, P.K., Muu, L.D., and Strodiot, J.J. (2022), “Iterative Regularization Methods with New Stepsize Rules for Solving Variational Inclusions”, *Journal of Applied Mathematics and Computing* vol. 68, pp. 571–599.
- [42] Jinsheng, N., Dingbo, C., and Jiancheng, L. (1993), “A Fast Hartley Transform Techniques of Computing Stokes Formula”, *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, pp. 3–10.
- [43] Jinsheng, N., Jiancheng, L., and Dingbo, C. (1998), “Application of the Hartley Transform in the Computation of the Geoid in China”, *Geospatial Information Science* vol. 1, pp. 43–49.

- [44] Kaltenbacher, B., Neubauer, A., and Scherzer, O. (2008), *Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems*, Berlin: Walter de Gruyter.
- [45] Kammler, D.W. (2016), *A First Course in Fourier Analysis*, 3rd ed., Cambridge: Cambridge University Press, ISBN: 978-1-107-11116-2.
- [46] Kanwal, R.P. (2013), *Linear Integral Equations: Theory and Technique*, 2nd ed., Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Massachusetts: Birkhäuser, ISBN: 978-1-4614-9333-3.
- [47] Khoa, N.M. (2023), “On the Polyconvolution Operator with a Trigonometric Weight Function for the Hartley Integral Transforms and Applications”, *Integral Transforms and Special Functions* vol. 34, pp. 861–877.
- [48] Krein, M.G. (1958), “Integral Equations on a Half-line with Kernel Depending upon the Difference of the Arguments”, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* vol. 13 (5), pp. 3–120.
- [49] Krein, S.G., Rutman, M.A., Milman, D.P., Smulian, V.L., and Naimark, M.A. (1972), *Functional Analysis*, Groningen, The Netherlands: Wolters-Noordhoff Publishing.
- [50] Kress, R. (2014), *Linear Integral Equations*, 3rd ed., vol. 82, Applied Mathematical Sciences, Cham, Switzerland: Springer-Verlag, ISBN: 978-3-319-02604-0.
- [51] Ku, T.K. and Kuo, C.C.J. (1993), “Preconditioned Iterative Methods for Solving Toeplitz plus Hankel Systems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis* vol. 30 (3), pp. 824–845.
- [52] Lerer, L., Olshevsky, V., and Spitkovsky, I.M., eds., *Convolution Equations and Singular Integral Operators: Selected Papers*, vol. 206, Operator Theory: Advances and Applications, Basel, Switzerland: Birkhäuser Basel, ISBN: 978-3-7643-8955-0.
- [53] Levinson, N. (1947), “The Wiener RMS Error Criterion in Filter Design and Prediction”, *Journal of Mathematics and Physics* vol. 25 (4), pp. 261–278.
- [54] Liflyand, A., Samko, S., and Trigub, R.M. (2012), “The Wiener Algebra of Absolutely Convergent Fourier Integrals: An Overview”, *Analysis and Mathematical Physics* vol. 2 (1), pp. 1–68.
- [55] Liu, F. and Nashed, M.Z. (1998), “Regularization of Nonlinear Ill-Posed Variational Inequalities and Convergence Rates”, *Set-Valued Analysis* vol. 6, pp. 313–344.
- [56] Ma, Y., Zhou, W., Wang, Y., Wang, H., and Cheng, J. (2021), “The Single-Pixel Imaging Using Discrete Hartley Transform for High-Resolution and Efficient Data Acquisition”, *Optics and Lasers in Engineering* vol. 141, p. 106560.
- [57] Mohan, N.L. and Babu, L.A. (1994), “A Note on 2-D Hartley Transform”, *Geophysics* vol. 59, pp. 1150–1155.
- [58] Nair, M.T. (2009), *Linear Operator Equations, Approximation and Regularization*, World Scientific.
- [59] Nair, M.T. and Pereverzev, S.V. (2007), “Regularized Collocation Method for Fredholm Integral Equations of the First Kind”, *Journal of Complex* vol. 23, pp. 454–467.
- [60] Ng, M.K. (1994), “Fast Iterative Methods for Solving Toeplitz-plus-Hankel Least Squares Problems”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis* vol. 2, pp. 154–170.

- [61] Nolasco, A.P. and Castro, L.P. (2007), “A Duduchava-Saginashvili’s Type Theory for Wiener-Hopf plus Hankel Operators”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* vol. 331 (1), pp. 329–341.
- [62] Olson, T. (2017), *Applied Fourier Analysis: From Signal Processing to Medical Imaging*, 2nd ed., Applied and Numerical Harmonic Analysis, Cham, Switzerland: Birkhäuser, ISBN: 978-1-4939-7393-4.
- [63] Osgood, B.G. (2019), *Lectures on the Fourier Transform and Its Applications*, 1st ed., Graduate Studies in Mathematics, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, ISBN: 978-1-4704-4191-3.
- [64] Peyré, G. (2020), *The Discrete Algebra of the Fourier Transform*.
- [65] Pipkin, A.C. (1991), *A Course on Integral Equations*, vol. 81, Applied Mathematical Sciences, New York, NY: Springer-Verlag, ISBN: 978-0-387-97557-3.
- [66] Plonka, G., Potts, D., Steidl, G., and Tasche, M. (2023), *Numerical Fourier Analysis*, 2nd ed., Applied and Numerical Harmonic Analysis, Cham, Switzerland: Birkhäuser, ISBN: 978-3-030-04305-6.
- [67] Poularikas, A.D. (2018), *The Transforms and Applications Handbook*, 3rd ed., Florida: CRC Press, ISBN: 978-1-4200-6652-4.
- [68] Precup, R. (2002), *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Singapore: World Scientific, ISBN: 978-981-02-4852-9.
- [69] Prüss, J. (2012), *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Modern Birkhäuser Classics, Basel, Switzerland: Springer Basel, ISBN: 978-3-0348-0498-1.
- [70] Rajavel, P. (2010), “Directional Hartley Transform and Content Based Image Retrieval”, *Signal Processing* vol. 90 (4), pp. 1267–1278.
- [71] Rani, S., Singh, S., and Sharma, S. (2024), “An Efficient Image Security Model Using Discrete Hartley Transform and Fractional Wavelet Transform for Medical Image Applications”, *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*.
- [72] Rudin, W. (1991), *Functional Analysis*, Second edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, New York: McGraw-Hill, ISBN: 0070542368.
- [73] Sacks, P. (2017), *Techniques of Functional Analysis for Differential and Integral Equations*, Academic Press International Edition, London, UK: Academic Press, ISBN: 978-0-12-810500-9.
- [74] Sakhnovich, L.A. (2012), *Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals*, 2nd ed., vol. 222, Operator Theory: Advances and Applications, New York: Birkhäuser, ISBN: 978-3-0348-0346-6.
- [75] Scharf, L. and Friedlander, B. (2001), “Toeplitz and Hankel Kernels for Estimating Time-varying Spectra of Discrete-time Random Processes”, *IEEE Transactions on Signal Processing* vol. 49 (1), pp. 179–189.

- [76] Sorensen, H.V., Jones, D.L., Heideman, M.T., and Burrus, S.K. (1985), “On Computing the Discrete Hartley Transform”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* vol. 33, pp. 1231–1238.
- [77] Stein, E.M. and Shakarchi, R. (2011), *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, vol. 4, Princeton Lectures in Analysis, New Jersey: Princeton University Press, ISBN: 978-0-691-11387-6.
- [78] Strang, G. and MacNamara, S. (2014), “Functions of Difference Matrices Are Toeplitz Plus Hankel”, *SIAM Review* vol. 56, pp. 525–546.
- [79] Thao, N.X, Tuan, V.K., and Hong, N.T. (2008), “Generalized Convolution Transforms and Toeplitz Plus Hankel Integral Equations”, *Fractional Calculus and Applied Analysis* vol. 11, pp. 153–174.
- [80] Thao, N.X., Khoa, N.M., and Anh, P.T.V. (2014), “Polyconvolution and the Toeplitz plus Hankel Integral Equation”, *Electronic Journal of Differential Equations*, pp. 1–14.
- [81] Titchmarsh, E.C. (1986), *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 3rd ed., New York: Chelsea Publishing Co., ISBN: 0828403244.
- [82] Tsitsiklis, J.N. and Levy, B.C. (1981), “Integral Equations and Resolvents of Toeplitz Plus Hankel Kernels”, *Technical Report LIDS-P-1170, Laboratory for Information and Decision Systems, M.I.T., silver ed.*
- [83] Tuan, N.M. (2015), “An Approach for Developing Fourier Convolutions and Applications”, *Current Trends in Analysis and Its Applications*, ed. by M.V. Ruzhansky and Z. Zhunussova, Cham, Switzerland: Birkhäuser, pp. 289–297.
- [84] Tuan, N.M. and Huyen, N.T.T. (2010), “The Solvability and Explicit Solutions of Two Integral Equations via Generalized Convolutions”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* vol. 369, pp. 712–718.
- [85] Tuan, N.M. and Tuan, P.D. (2009), “Generalized Convolutions Relative to the Hartley Transforms with Applications”, *Scientiae Mathematicae Japonicae* vol. e-2009 (4), pp. 77–89.
- [86] Tuan, T. (2022), “Operational Properties of the Hartley Convolution and Its Applications”, *Mediterranean Journal of Mathematics* vol. 19.
- [87] Tuan, T. (2022), “Some Results of Watson and Plancherel-type Integral Transforms Related to the Hartley, Fourier Convolutions and Applications”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* vol. 45, pp. 11158–11180.
- [88] Tuan, T., Hoang, P.V., and Hong, N.T. (2018), “Integral Equation of Toeplitz plus Hankel’s Type and Parabolic Equation Related to the Kontorovich-Lebedev-Fourier Generalized Convolutions”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* vol. 41, pp. 8171–8181.
- [89] Volchkov, V.V. (2003), *Integral Geometry and Convolution Equations*, Utrecht, The Netherlands: VSP, ISBN: 978-9067643712.
- [90] Wazwaz, A.M. (2011), *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*, 1st ed., New York: Springer, ISBN: 978-3-642-21448-6.

- [91] Widom, H. (1961), “On the Continuous Invertibility of a Class of Operators”, *Transactions of the American Mathematical Society* vol. 100 (2), pp. 313–322.
- [92] Widom, H. (1974), “Asymptotic Behavior of Block Toeplitz Matrices and Determinants”, *Advances in Mathematics* vol. 13 (3), pp. 284–322.
- [93] Zayed, A.I. (2024), *Fractional Integral Transforms: Theory and Applications*, 1st ed., Florida: CRC Press, ISBN: 978-0-367-54387-7.
- [94] Zemyan, A. (2012), *The Classical Theory of Integral Equations: A Concise Introduction*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Massachusetts: Birkhäuser, ISBN: 978-0-8176-8344-9.
- [95] Zhang, H. and Ma, J. (2020), “Hartley Spectral Pooling for Deep Learning”, *SIAM Transactions on Applied Mathematics* vol. 1 (3), pp. 518–529.
- [96] Zygmund, A. (2002), *Trigonometric Series*, 3rd ed., Cambridge Mathematical Library, Volumes I & II combined, with a Foreword by Robert Fefferman, Cambridge: Cambridge University Press, ISBN: 0521890535.