

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Ngô Thị Thương

CÁC PHƯƠNG PHÁP QUÁN TÍNH HỮU HIỆU  
GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG  
VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành : Toán ứng dụng  
Mã số : 9460112.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2026

Công trình được hoàn thành tại:  
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên  
Đại học Quốc gia Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học:

1. GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh
2. TS. Nguyễn Thế Vinh

Phản biện 1: GS. TS. Đặng Quang Á  
Viện Công nghệ Thông tin - Viện Hàn lâm KH&CN VN  
Phản biện 2: PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm  
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2  
Phản biện 3: PGS. TS. Trần Đình Kế  
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ họp tại  
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN  
Vào hồi 14 giờ 00 phút, ngày 21 tháng 08 năm 2026

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

1. Thư viện Quốc gia Việt Nam
2. Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội

**DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA LUẬN ÁN**

- [1 ] Vinh N.T., Thuong N.T. (2022), “A relaxed version of the gradient projection method for variational inequalities with applications”, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. Vol. 67 (1), pp. 73-89.  
DOI: 10.24193/subbmath.2022.1.06s.
  
- [2 ] Anh P.K., Thuong N.T., Vinh N.T. (2024), “Tseng-type splitting projection algorithms for equilibrium problems in Hilbert spaces”, Optimization, Vol. 74 (8), pp. 1969-1998.  
DOI: 10.1080/02331934.2024.2341943.
  
- [3 ] Thuong N.T., Vinh N.T. (2024), “Convergence of one-step projection methods for equilibrium problems given by a sum of two bifunctions”, Vietnam J. Math. Vol. 54, pp. 523-547,  
DOI: 10.1007/s10013-024-00717-8.
  
- [4 ] Anh P.K., Thuong N.T., Vinh N.T. (2026), “Novel subgradient extragradient methods for equilibrium problems in Hilbert spaces”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.  
DOI: 10.1016/j.cnsns.2026.109777.

# Mở đầu

Thuật ngữ “**bài toán cân bằng**” (*EP-Equilibrium problems*), ký hiệu  $EP(f, C)$ , được biết đến trong các công trình của L.D. Muu và W. Oettli (1992), E. Blum và W. Oettli (1994), và được phát biểu như dưới đây.

**Bài toán 0.1 (EP - Equilibrium problems)** Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}$  và  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là một song hàm thỏa mãn  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$  (song hàm  $f$  còn được gọi là song hàm cân bằng). Bài toán  $EP(f, C)$  được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (1)$$

Trong trường hợp  $f(x, y) := \langle Fx, y - x \rangle$ , với  $F : C \rightarrow \mathcal{H}$  là một ánh xạ, bài toán cân bằng trở thành **bài toán bất đẳng thức biến phân** (*VIP- Variational inequality problems*), ký hiệu  $VIP(F, C)$ , được phát biểu như sau:

**Bài toán 0.2 (VIP- Variational inequality problems)**

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle Fx^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (2)$$

trong đó  $C$  là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}$  và  $F : C \rightarrow \mathcal{H}$  là ánh xạ đã cho.

**Phương pháp điểm gần kề** xây dựng một dãy nghiệm bằng cách giải tại mỗi vòng lặp một *bài toán cân bằng hiệu chỉnh*. Tại bước lặp  $k$ , giả sử đã biết  $x^k$ , xấp xỉ tiếp theo được xác định bởi  $x^{k+1} = J_\lambda^f(x^k)$ , với

$$J_\lambda^f(x) = \left\{ z \in \mathcal{H} : f(z, y) + \frac{1}{\lambda} \langle y - z, z - x \rangle \geq 0, \forall y \in C \right\}, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (3)$$

trong đó  $J_\lambda^f$  là *giải thức* của song hàm  $f$  ứng với tham số  $\lambda > 0$ . Một hướng tiếp cận khác là sử dụng *phép chiếu tổng quát*. Tại bước lặp thứ  $k$ , giả sử biết  $x^k$ , ta tính xấp xỉ tiếp theo  $x^{k+1} = U_\lambda^f(x^k)$ , trong đó,  $U_\lambda^f$  là *ánh xạ nghiệm* của song hàm  $f$  với tham số  $\lambda > 0$ , được cho bởi

$$U_\lambda^f(x) = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right\}. \quad (4)$$

Theo hướng tiếp cận này, các tác giả A.S. Antipin (1995) và L.D. Muu và T.D. Quoc (2008)) đã đề xuất **phương pháp đạo hàm tăng cường**. Gần đây, nhằm cải thiện tốc độ hội tụ của các phương pháp lặp, *kỹ thuật quán tính* đã được đưa vào sử dụng. Một trong những kết quả đáng chú ý nhất là **phương pháp lặp Mann quán tính** do P.E. Maingé (2007) đề xuất cho bài toán tìm điểm bất động của các ánh xạ tựa không giãn. Tiếp nối hướng tiếp cận này, một số tác giả như D.V. Hieu (2019), H.u. Rehman và cộng sự (2020), N.T. Vinh và L.D. Muu (2019) đã đề xuất các **phương pháp đạo hàm tăng cường quán tính** cho bài toán cân bằng. Tuy nhiên, các thuật toán này thường yêu cầu cỡ bước phải *phụ thuộc vào hằng số Lipschitz* hoặc *giảm dần về 0* theo thời gian lặp, điều này có thể làm giảm đáng kể tốc độ hội tụ. Ngoài ra, để đạt được sự hội tụ mạnh, người ta cần một số kỹ thuật bổ sung, chẳng hạn như *kỹ thuật hiệu chỉnh*, *kỹ thuật xấp xỉ gần kết (viscosity)*, *kỹ thuật gắn kết-lai ghép*, *kỹ thuật thu hẹp*. Một hướng tiếp cận khác là sử dụng *dưới vi phân*, *dưới vi phân xấp xỉ* của song hàm  $f$ . Theo hướng này, lớp các **phương pháp dưới đạo hàm** đã được đề xuất bởi các tác giả như P.S.M. Santos (2011), P.N. Anh (2013), vv.

Một trong những ý tưởng để giảm chi phí tính toán cho các bài toán phụ là *phân rã* song hàm  $f$  ban đầu thành tổng của hai hoặc nhiều song hàm thành phần. Năm 2009, để giải bài toán cân bằng  $EP(f, C)$  với  $f = f_1 + f_2$ , Moudafi (2009) đã đề xuất **thuật toán điểm gần kề phân rã giải bài toán cân bằng**. Sau đó, một số tác giả đã kết hợp *phương pháp phân rã* với *phương pháp đạo hàm tăng cường*, từ đó xây dựng các **thuật toán kiểu đạo hàm tăng cường phân rã** nhằm giải các bài toán cân bằng giả đơn điệu và giả đơn điệu mạnh. Theo hướng tiếp cận sử dụng phương pháp dưới đạo hàm, nhóm tác giả Đức và Thanh (2021) đã đề xuất **phương pháp dưới đạo hàm phân rã**. Năm 2017, D.V. Hieu và cộng sự đã đề xuất **phương pháp phân rã kiểu chiếu song song** giải bài toán (1). Tuy nhiên, các tác giả vẫn chưa thiết lập được dạng tuần tự của phương pháp và để lại dưới dạng bài toán mở. Chúng tôi thấy rằng, cho đến nay các phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng cũng chưa có thuật toán nào kết hợp yếu tố quán tính nhằm tăng tốc thuật toán. Thực tế đó đã nảy sinh vấn đề sau:

**Vấn đề thứ nhất** là đề xuất, nghiên cứu và cải tiến các phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng, với mục tiêu không chỉ đạt được sự hội tụ mạnh mà còn nâng cao hiệu quả tính toán. Đặc biệt, việc kết hợp yếu tố quán tính vào phương pháp phân rã được xem như một hướng tiếp cận mới, cho phép vừa khai thác hiệu quả cấu trúc đặc biệt của song hàm thành phần, vừa gia tăng hiệu quả tính toán thông qua việc tận dụng thông tin từ các bước lặp trước đó, đồng thời có thể kết hợp với các kỹ thuật hiệu chỉnh, xấp xỉ gần kết và một phép chiếu.

Ngoài ra, cỡ bước của các thuật toán lặp cũng là một trong những yếu tố ảnh hưởng đến tốc độ và hiệu quả của thuật toán. Để không phải sử dụng hằng số Lipschitz của song hàm, Yang và Liu (2020) đã đề xuất **thuật toán kiểu dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tự thích nghi** với dãy cỡ bước  $\{\lambda_k\}$  đơn điệu giảm dần về 0. Tuy nhiên, điều này cũng ảnh hưởng đến tốc độ hội tụ của thuật toán. Vì vậy, chúng tôi đặt ra một vấn đề mới cần giải quyết như sau:

**Vấn đề thứ hai** hướng tới việc xây dựng các phương pháp đạo hàm tăng cường

với chiến lược điều chỉnh cỡ bước tự thích nghi, trong đó cỡ bước có thể được gia tăng một cách có kiểm soát sau một số lần lặp nhằm cải thiện hiệu quả tính toán và giúp thuật toán thoát khỏi các vùng hội tụ chậm. Việc gia tăng cỡ bước này không có nghĩa tăng vô hạn gây phân kỳ, mà được thiết kế dựa trên các điều kiện thích hợp để vẫn đảm bảo tính ổn định và hội tụ của phương pháp.

**Phương pháp chiếu** được biết đến như là một trong những phương pháp đơn giản và hiệu quả nhất để giải bài toán bất đẳng thức biến phân. Ý tưởng chính của phương pháp này xuất phát từ mối liên hệ sau:  $x^*$  là nghiệm của bài toán VI( $F, C$ ) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ  $\Phi(x) := P_C(x - \lambda Fx)$  với  $\lambda > 0$ . Do đó, ta có thể sử dụng phương pháp lặp để giải bài toán (2). Trong một kết quả gần đây, Malitsky (2015) đã kết hợp *phương pháp một lần chiếu* với *phép phản xạ* để thu được **phương pháp chiếu phản xạ**. Để giảm nhẹ giả thiết về tính đơn điệu mạnh, Korpelevich (1976) đề xuất **phương pháp đạo hàm tăng cường**, trong đó tại mỗi bước lặp thuật toán đòi hỏi thêm một phép chiếu lên tập ràng buộc. Popov, Censor, vv. đã đưa ra các phiên bản cải biên nhằm giảm số lần chiếu hoặc số lần tính giá trị của toán tử. Ở Việt Nam, bài toán bất đẳng thức biến phân đã được nghiên cứu mạnh trong vài năm gần đây. Tuy nhiên, các kết quả nghiên cứu trong nước về vấn đề này chưa nhiều và các kết quả thu được còn một số hạn chế như tính nhiều phép chiếu trên mỗi bước lặp, cỡ bước phụ thuộc vào hằng số Lipschitz, các điều kiện đặt lên toán tử còn khá chặt, vv. Thực tế đó đã đặt ra vấn đề cần cải tiến hơn nữa các phương pháp đã có về cả mặt tính toán lẫn các điều kiện hội tụ của thuật toán. Một cách tự nhiên, chúng tôi quan tâm đến những vấn đề tiếp theo cần nghiên cứu như sau:

Trên cơ sở cùng hướng tới mục tiêu tăng hiệu quả tính toán thông qua việc giảm chi phí mỗi bước lặp và đồng thời cải thiện tốc độ hội tụ, **vấn đề thứ ba tập trung vào việc nghiên cứu và đề xuất thuật toán chiếu dưới đạo hàm dạng nói lỏng nhằm giải bài toán bất đẳng thức biến phân**, với mục tiêu tiếp tục giảm gánh nặng tính toán tại mỗi bước lặp nhưng vẫn đảm bảo tính ổn định và hội tụ của thuật toán. Các thuật toán được đề xuất không chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn được *ứng dụng vào bài toán khôi phục ảnh*, qua đó minh họa rõ ràng hiệu quả tính toán và tính khả thi của phương pháp trong các bài toán thực tiễn có quy mô lớn.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các công trình đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương. Các kết quả chính được tập trung trong các Chương 2 và Chương 3.

**Chương 1** Kiến thức chuẩn bị.

**Chương 2** Một số phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng.

**Chương 3** Phương pháp chiếu đạo hàm cho bất đẳng thức biến phân và phương pháp dưới đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng.

Trong luận án này, các thí nghiệm số được thực hiện trên phần mềm MATLAB R2022b chạy trên máy tính để bàn với bộ xử lý Intel(R) Core(TM) i5-1035G1 CPU @ 1.00GHz 1.19GHz, RAM 4.00 GB.

Các kết quả của luận án này đã được công bố trong 04 bài báo trong danh mục công trình khoa học và cũng được báo cáo tại một số hội thảo và hội nghị về toán ứng dụng và tối ưu hóa.

# Chương 1

## Kiến thức chuẩn bị

### 1.1. Một số công cụ của giải tích lồi và lý thuyết toán tử trong không gian Hilbert

Một không gian vectơ thực  $\mathcal{H}$  được trang bị tích vô hướng  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  và đầy đủ đối với chuẩn

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

được gọi là *không gian Hilbert thực*. Từ nay về sau, ta luôn ký hiệu  $\mathcal{H}$  là không gian Hilbert thực. Ký hiệu  $\omega_w(x^k)$  là tập tất cả các điểm tụ yếu của  $\{x^k\}$ , tức là

$$\omega_w(x^k) := \{x \in \mathcal{H} : x^{k_j} \rightharpoonup x \text{ với một dãy con } \{k_j\} \text{ của } \{k\}\}.$$

#### 1.1.1. Toán tử chiếu và các tính chất hình học

**Định nghĩa 1.1** Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó, ánh xạ

$$P_C : \mathcal{H} \rightarrow C \\ x \mapsto \operatorname{argmin}\{\|y - x\| : y \in C\}$$

được gọi là *phép chiếu* từ  $\mathcal{H}$  lên  $C$ . Phần tử  $P_C(x) \in C$  được gọi là hình chiếu của  $x$  lên  $C$  và  $\|x - P_C(x)\|$  chính là khoảng cách từ  $x$  tới  $C$ .

**Mệnh đề 1.1.** Cho  $C \subseteq \mathcal{H}$  là tập lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó,

- (1) Với mọi  $x \in \mathcal{H}$ ,  $P_C(x)$  luôn tồn tại duy nhất, đồng thời  $x^0 = P_C(x)$  khi và chỉ khi

$$\langle x - x^0, y - x^0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C;$$

- (2) Ánh xạ  $P_C$  có tính chất không giãn vững (hoặc 1-đơn điệu mạnh ngược), tức là,

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle x - y, P_C(x) - P_C(y) \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H};$$

(3)  $P_C$  là ánh xạ không giãn, tức là

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{H};$$

$$(4) \|P_C(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}, y \in C.$$

### 1.1.2. Dưới đạo hàm, nón pháp tuyến và bài toán tối ưu lồi

**Định nghĩa 1.3** Cho  $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $x^0 \in \mathcal{H}$ . Nếu tập

$$\partial g(x^0) := \{w \in \mathcal{H} : \langle w, y - x^0 \rangle \leq g(y) - g(x^0) \quad \forall y \in \mathcal{H}\}$$

khác rỗng thì  $g$  được gọi là *khả dưới vi phân* tại  $x^0$ ,  $\partial g(x^0)$  được gọi là *dưới vi phân*, mỗi vectơ  $w$  thuộc  $\partial g(x^0)$  được gọi là *dưới đạo hàm* của  $g$  tại  $x^0$ . Hàm  $g$  được gọi là *khả dưới vi phân* trên một tập nếu nó khả dưới vi phân tại mọi điểm thuộc tập đó.

**Định nghĩa 1.4** Cho song hàm  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in \mathcal{H}$ . Dưới vi phân đường chéo  $\partial_2 f : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$  của song hàm  $f$  tại  $x \in \mathcal{H}$  được xác định bởi

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x, x) &:= \{u \in \mathcal{H} : f(x, y) \geq \langle u, y - x \rangle + f(x, x) \quad \forall y \in \mathcal{H}\} \\ &= \{u \in \mathcal{H} : f(x, y) \geq \langle u, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

**Bổ đề 1.1.** Cho  $C$  là tập lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert  $\mathcal{H}$  và  $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  là hàm lồi, nửa liên tục dưới, chính thường. Giả sử  $g$  liên tục tại một điểm nào đó của  $C$  hoặc tồn tại một điểm trong của  $C$  mà  $g$  là hữu hạn. Khi đó,  $x^*$  là nghiệm của bài toán tối ưu lồi  $\min \{g(x) : x \in C\}$  khi và chỉ khi  $0 \in \partial g(x^*) + N_C(x^*)$ .

Tiếp theo, luận án liệt kê một số bổ đề về dãy số, cần thiết cho việc chứng minh kết quả ở các chương tiếp theo.

### 1.1.3. Toán tử đơn điệu, giả đơn điệu và các tính chất cơ bản

**Định nghĩa 1.7** Ánh xạ  $F : C \rightarrow \mathcal{H}$  được gọi là

1.  *$\gamma$ -đơn điệu mạnh* trên  $C$  nếu tồn tại hằng số  $\gamma > 0$  sao cho với mọi  $x, y \in C$ ,

$$\langle Fx - Fy, x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2;$$

2. *đơn điệu* trên  $C$  nếu với mọi  $x, y \in C$ ,

$$\langle Fx - Fy, x - y \rangle \geq 0;$$

3.  $\gamma$ -giả đơn điệu mạnh trên  $C$  nếu tồn tại hằng số  $\gamma > 0$  sao cho với mọi  $x, y \in C$ ,

$$\langle Fy, x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle Fx, x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2;$$

4. giả đơn điệu trên  $C$  nếu với mọi  $x, y \in C$ ,

$$\langle Fy, x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle Fx, x - y \rangle \geq 0;$$

5.  $L$ -liên tục Lipschitz trên  $C$  nếu với mọi  $x, y \in C$ , tồn tại  $L \geq 0$  sao cho

$$\|Fx - Fy\| \leq L\|x - y\|.$$

Trong trường hợp  $L = 1$ , ánh xạ  $F$  được gọi là *không giãn* và nếu  $L \in [0, 1)$ ,  $F$  được gọi là *ánh xạ co*.

**Bổ đề 1.8.** Giả sử  $F$  là toán tử thỏa mãn tính chất  $L$ -liên tục Lipschitz và  $\eta$ -đơn điệu mạnh và  $\mu$  là hằng số sao cho  $\mu \in (0, \frac{2\eta}{L^2})$ . Lấy  $T^\mu = P_C(I - \mu F)$  (hoặc  $I - \mu F$ ), trong đó  $I$  là toán tử đơn vị trên  $\mathcal{H}$ . Khi đó,  $T^\mu$  là ánh xạ co với hệ số  $1 - \tau$ , trong đó  $\tau = \frac{1}{2}\mu(2\eta - \mu L^2)$ .

## 1.2. Bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân

### 1.2.1. Bài toán bất đẳng thức biến phân

Cho ánh xạ  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $C$  là tập con, lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}$ . Bài toán bất đẳng thức biến phân, ký hiệu  $\text{VIP}(F, C)$ , được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle Fx^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (1.7)$$

Ký hiệu  $\text{Sol}(F, C)$  là tập nghiệm của  $\text{VIP}(F, C)$ .

### 1.2.2. Bài toán cân bằng và các bài toán liên quan

Bài toán cân bằng, ký hiệu  $\text{EP}(f, C)$ , được phát biểu như sau

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (1.8)$$

trong đó  $C$  là tập con, lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}$  và  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm thỏa mãn  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ . Tập nghiệm của bài toán (1.8) được ký hiệu bởi  $\text{Sol}(f, C)$ , tức là

$$\text{Sol}(f, C) := \{x^* \in C : f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C\}. \quad (1.9)$$

Dễ thấy bài toán bất đẳng thức biến phân chính là trường hợp riêng của  $\text{EP}(f, C)$  với  $f(x, y) := \langle Fx, y - x \rangle$ . Chú ý rằng bản thân bài toán bất đẳng thức biến phân cũng đã bao hàm một loạt các bài toán khác như:

- **Bài toán tối ưu**

Xét bài toán tối ưu tổng quát sau:

$$\min\{g(x) : x \in C\}, \quad (1.10)$$

trong đó  $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm khả vi. Đặt  $F(x) := \nabla g(x)$  với mọi  $x$ .

- **Bài toán bù phi tuyến**

Bài toán bù phi tuyến của  $F$  trên  $C$ , ký hiệu  $\text{NCP}(F, C)$ , được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } Fx^* \in C^* \text{ và } \langle Fx^*, x^* \rangle = 0, \quad (1.11)$$

trong đó  $C \subset \mathcal{H}$  là một nón lồi, đóng và

$$C^* := \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C\}$$

là nón đối ngẫu của  $C$ .

- **Bài toán điểm bất động**

Cho ánh xạ  $T : C \rightarrow C$ . Bài toán điểm bất động của ánh xạ  $T$  trên  $C$ , ký hiệu  $\text{FP}(T, C)$ , được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } Tx^* = x^*. \quad (1.12)$$

**Định lý 1.7.** *Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là một tập lồi, đóng,  $F : C \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\lambda > 0$ . Khi đó,  $x^*$  là nghiệm của (1.7) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ*

$$\begin{aligned} \Phi : C &\rightarrow C \\ x &\mapsto P_C(x - \lambda Fx). \end{aligned}$$

Từ Định lý 1.7 suy ra  $\Phi$  đóng vai trò là ánh xạ nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân, theo nghĩa, bất cứ điểm bất động nào của  $\Phi$  cũng sẽ là nghiệm của bài toán  $\text{VIP}(F, C)$ . Tương tự, ta có thể xây dựng một ánh xạ nghiệm cho bài toán cân bằng.

**Định lý 1.8.** *Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập lồi, đóng, có miền trong khác rỗng,  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng trên  $C$  thỏa mãn điều kiện: với mọi  $x \in C$ , hàm số  $f(x, \cdot)$  lồi, khả dưới vi phân trên  $C$ . Giả sử  $\lambda > 0$ . Khi đó,  $x^*$  là nghiệm của bài toán  $\text{EP}(f, C)$  khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ*

$$\begin{aligned} U_\lambda : C &\rightarrow C \\ x &\mapsto \operatorname{argmin} \left\{ \lambda f(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\}. \end{aligned}$$

### 1.2.3. Sự tồn tại duy nhất nghiệm

**Định nghĩa 1.8** Song hàm  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  được gọi là

1.  $\gamma$ -đơn điệu mạnh trên  $C$  nếu tồn tại hằng số  $\gamma > 0$  sao cho với mọi  $x, y \in C$ , ta có

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\gamma \|x - y\|^2;$$

2. đơn điệu trên  $C$  nếu với mọi  $x, y \in C$ , ta có

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0;$$

3.  $\gamma$ -giả đơn điệu mạnh trên  $C$  nếu tồn tại hằng số  $\gamma > 0$  sao cho với mọi  $x, y \in C$ ,

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq -\gamma \|x - y\|^2;$$

4. giả đơn điệu trên  $C$  nếu với mọi  $x, y \in C$ , ta có

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0;$$

5. para-đơn điệu nếu  $f$  đơn điệu và điều kiện sau được thỏa mãn

$$x \in \text{Sol}(f, C), y \in C, f(x, y) = f(y, x) = 0 \Rightarrow y \in \text{Sol}(f, C);$$

6. thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo Mastroeni, nếu tồn tại hai hằng số  $c_1, c_2 > 0$  sao cho với mọi  $x, y, z \in C$ , ta có

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|x - y\|^2 - c_2 \|y - z\|^2.$$

**Định lý 1.9.** Cho  $C$  là một tập con lồi, compact, khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}$  và song hàm cân bằng  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  có các tính chất

(i)  $f(., y)$  nửa liên tục trên với mọi  $y \in C$ .

(ii)  $f(x, .)$  lồi với mọi  $x \in C$ .

Khi đó, bài toán  $\text{EP}(f, C)$  có nghiệm.

**Định lý 1.11.** Cho  $C$  là tập lồi, đóng, khác rỗng và  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng.

(i) Nếu  $f$  đơn điệu chặt trên  $C$ , thì bài toán cân bằng  $\text{EP}(f, C)$  có nhiều nhất một nghiệm.

(ii) Nếu  $f(., y)$  nửa liên tục trên với mọi  $y \in C$ ,  $f(x, .)$  lồi, nửa liên tục dưới với mọi  $x \in C$  và  $f$  đơn điệu mạnh trên  $C$ , thì bài toán  $\text{EP}(f, C)$  có duy nhất một nghiệm.

### 1.3. Một số mô hình toán học liên quan đến bài toán cân bằng

#### 1.3.1. Bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác

Đầu những năm 1950, Nash đưa ra khái niệm “*điểm cân bằng Nash*” trong trò chơi không hợp tác. Cân bằng Nash đạt được khi không một người chơi nào có thể tăng được lợi ích bằng cách thay đổi chiến lược của mình trong khi các đối thủ khác vẫn giữ nguyên chiến lược của họ. Một cách tổng quát, giả sử có  $n$  người tham gia một trò chơi không hợp tác. Người chơi thứ  $i$  có tập chiến lược là  $C_i$  và có hàm lợi ích là  $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$  với  $C = C_1 \times \dots \times C_n$ . Mục tiêu của mỗi người chơi là tìm kiếm một chiến lược cho riêng mình để tối đa hóa lợi ích  $f_i$ . Điểm  $x^* \in C$  được gọi là *điểm cân bằng Nash* nếu với mọi  $y = (y_1, \dots, y_n) \in C$ ,

$$f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

#### 1.3.2. Bài toán điểm yên ngựa

Cho  $A \subseteq \mathcal{H}, B \subseteq \mathcal{H}$  và  $L : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ . Bài toán điểm yên ngựa, ký hiệu  $SP(L, A, B)$ , là bài toán tìm  $(x^*, y^*) \in A \times B$  sao cho

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad \forall (x, y) \in A \times B.$$

## Chương 2

# Một số phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng

### 2.1. Phương pháp chiếu phân rã kiểu Tseng

#### 2.1.1. Mô hình bài toán và các giả thiết

Ta xét bài toán  $EP(f, C)$  với  $f := f_1 + f_2$ , trong đó  $f, f_i : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  là các song hàm cân bằng. Để nghiên cứu các thuật toán lặp cho bài toán  $EP(f, C)$  trong không gian vô hạn chiều, các điều kiện sau đây sẽ được sử dụng trong các phần tiếp theo:

(A1)  $f$  đơn điệu trên  $C$ ;

(A1')  $f$  giả đơn điệu trên  $C$ ;

(A1'')  $f$  giả đơn điệu mạnh trên  $C$ ;

(A2)  $f(., y)$  nửa liên tục trên yếu.

(A3)  $f_i(x, .)$  lồi và nửa liên tục dưới ( $i = 1, 2$ );

(A4)  $f$  thỏa mãn điều kiện para-đơn điệu;

(A5) Dưới vi phân đường chéo  $\partial_2 f_i$  bị chặn trên tập bị chặn ( $i = 1, 2$ );

(A6)  $\text{Sol}(f, C) \neq \emptyset$ .

#### 2.1.2. Xây dựng thuật toán và phân tích hội tụ

Trong phần này, chúng tôi trình bày ba thuật toán chiếu phân rã kiểu Tseng để giải bài toán cân bằng (1.8). Thuật toán đầu tiên được mô tả như dưới đây.

---

**Thuật toán 2.1 (Thuật toán chiếu phân rã kiểu Tseng tuần tự [iTSM])**

---

**Khởi tạo:** Chọn hai dãy số dương  $\{\beta_k\}$  và  $\{\varepsilon_k\}$  sao cho

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty. \quad (2.1)$$

Chọn các điểm  $x^0, x^1 \in C$  tùy ý và tham số  $\theta \in [0, 1)$ . Đặt  $k = 1$ .

**Bước lặp:** Với  $k \geq 1$ , từ  $x^{k-1}$  và  $x^k$ , chọn  $\alpha_k$  sao cho  $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$ , trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\varepsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \frac{\varepsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } x^k = x^{k-1}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Tính  $v^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1})$  và  $w^k = P_C(v^k)$ .

Chọn  $u_1(w^k) \in \partial f_1(w^k, w^k)$ ,  $u_2(w^k) \in \partial f_2(w^k, w^k)$ , và tính

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(w^k)\|, \|u_2(w^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}, \quad (2.3)$$

$$y^k = P_C(w^k - 2\lambda_k u_1(w^k)), \quad (2.4)$$

$$x^{k+1} = y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k)). \quad (2.5)$$

**Điều kiện dừng:** Nếu  $x^{k+1} = v^k$  và  $y^k = w^k$ , thì thuật toán dừng. Ngược lại, đặt  $k := k + 1$  và quay lại **Bước lặp**.

---

**Sự hội tụ yếu.** Định lý sau đây khẳng định tính hội tụ yếu của Thuật toán 2.1.

**Định lý 2.1.** Cho  $\{x^k\}$  là dãy sinh bởi Thuật toán 2.1. Giả sử rằng các giả thiết (A1'), (A2)–(A6) được thỏa mãn. Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  hội tụ yếu tới một phần tử của tập nghiệm  $\text{Sol}(f, C)$ .

**Định lý 2.2.** Giả sử các giả thiết (A1), (A3), (A5) và (A6) được thỏa mãn. Khi đó, dãy ergodic  $\{z^k\}$  hội tụ yếu tới một phần tử của  $\text{Sol}(f, C)$ .

**Sự hội tụ mạnh.** Các định lý sau đây khẳng định tính hội tụ mạnh của Thuật toán 2.1.

**Định lý 2.3.** Giả sử các giả thiết của Định lý 2.1 thỏa mãn và  $\text{intSol}(f, C) \neq \emptyset$ . Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới một nghiệm của bài toán EP( $f, C$ ).

**Định lý 2.4.** Giả sử rằng các giả thiết (A1''), (A3) và (A5)–(A6) thỏa mãn. Khi đó, hai dãy  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của EP( $f, C$ ).

Tiếp theo, chúng tôi trình bày hai biến thể của Thuật toán 2.1.

---

### Thuật toán 2.2 (Thuật toán phân rã kiểu dưới đạo hàm đạo hàm tăng cường [SESM])

---

**Khởi tạo:** Chọn tùy ý các điểm  $x^0, x^1 \in C$ ,  $\theta \in [0, 1)$  và đặt  $k = 1$ .

**Bước lặp:** Với mỗi  $k \geq 1$ , từ các điểm  $x^{k-1}$  và  $x^k$  ( $k \geq 1$ ), chọn  $\alpha_k$  sao cho  $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$ , trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\varepsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \frac{\varepsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } x^k = x^{k-1}. \end{cases}$$

và tính  $w^k = P_C(x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}))$ . Lấy  $u_1(w^k) \in \partial f_1(w^k, w^k)$ ,  $u_2(w^k) \in \partial f_2(w^k, w^k)$  và tính

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(w^k)\|, \|u_2(w^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}$$

$$\begin{aligned} y^k &= P_C(w^k - 2\lambda_k u_1(w^k)), \\ x^{k+1} &= P_{T_k}(y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k))), \end{aligned}$$

trong đó  $T_k := \{z \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k u_1(w^k) - y^k, z - y^k \rangle \leq 0\}$ .

**Điều kiện dừng:** Nếu  $x^{k+1} = y^k = w^k$ , thì thuật toán dừng. Ngược lại, đặt  $k := k + 1$  và quay lại **Bước lặp**.

---



---

### Thuật toán 2.3 (Thuật toán phân rã đạo hàm tăng cường kiểu Tseng [TESM])

---

**Khởi tạo:** Chọn các điểm  $x^0, x^1 \in C$ ,  $\theta \in [0, 1)$  và đặt  $k = 1$ .

**Bước lặp:** Từ  $x^{k-1}$  và  $x^k$  ( $k \geq 1$ ), chọn  $\alpha_k$  sao cho  $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$ , trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\varepsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \frac{\varepsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } x^k = x^{k-1}. \end{cases}$$

Tính  $w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1})$ . Lấy  $u_1(x^k) \in \partial f_1(x^k, x^k)$ ,  $u_2(x^k) \in \partial f_2(x^k, x^k)$  và tính

$$\begin{aligned} \eta_k &= \max\{1, \|u_1(x^k)\|, \|u_2(x^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}, \\ y^k &= P_C(w^k - 2\lambda_k u_1(x^k)), \\ x^{k+1} &= P_C(y^k - \lambda_k(u_2(x^k) - u_1(x^k))). \end{aligned}$$

**Điều kiện dừng:** Nếu  $\|x^{k+1} - y^k\| + \|w^k - x^k\| + \|y^k - w^k\| = 0$  thì dừng thuật toán và  $x^k$  là nghiệm. Ngược lại, đặt  $k := k + 1$  và quay lại **Bước lặp**.

---

### 2.1.3. Thử nghiệm số và ứng dụng

Trong phần này, chúng tôi áp dụng các Thuật toán 2.1, 2.2 và 2.3 để giải một bài toán cân bằng phát sinh từ *mô hình cân bằng Nash–Cournot trong thị trường điện*. Chúng tôi sử dụng hàm chi phí là một hàm lồi nhưng không trơn. Do đó, bài toán cân bằng thu được không thể chuyển về bài toán bất đẳng thức biến phân. Đồng thời, chúng tôi tiến hành so sánh hiệu suất của các thuật toán đề xuất với một số các thuật toán đã có. Ngoài ra, chúng tôi áp dụng các Thuật toán 2.1, 2.2 và 2.3 cho *bất đẳng thức biến phân hỗn hợp*.

## 2.2. Phương pháp phân rã một phép chiếu

### 2.2.1. Động lực xây dựng phương pháp phân rã một phép chiếu

Trong nhiều ứng dụng thực tế, khi tập chấp nhận được có cấu trúc phức tạp hoặc khi bài toán con liên quan đến song hàm có độ phức tạp cao, chi phí tính toán của các phương pháp phải thực hiện nhiều bước chiếu hoặc giải nhiều bài toán con tại mỗi vòng lặp thường trở thành nút thắt chính. Xuất phát từ thực tế đó, phương pháp một phép chiếu được đề xuất với mục tiêu giảm đáng kể chi phí trên mỗi vòng lặp bằng cách xây dựng một công thức cập nhật chỉ sử dụng một phép chiếu duy nhất, trong đó kết hợp kỹ thuật quán tính và hiệu chỉnh, qua đó vẫn bảo đảm hội tụ dưới các giả thiết thích hợp, đồng thời tạo ra một khuôn khổ thuật toán gọn nhẹ, linh hoạt, phù hợp cho thực nghiệm tính toán.

### 2.2.2. Xây dựng thuật toán và phân tích hội tụ

Thuật toán phân rã một phép chiếu mà chúng tôi đề xuất được thiết kế như sau:

---

**Thuật toán 2.4** (Thuật toán phân rã một phép chiếu giải bài toán cân bằng [oPSM])

---

**Khởi tạo:** Chọn hai dãy số tham số  $\{\varepsilon_k\}$  và  $\{\beta_k\}$  thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty. \quad (2.54)$$

Chọn tùy ý các điểm  $x^1, y^0, y^1 \in C$ ,  $\theta \in [0, 1)$  và đặt  $k = 1$ .

**Bước lặp:** Từ  $x^k, y^{k-1}$  và  $y^k$  ( $k \geq 1$ ), chọn  $\alpha_k$  sao cho  $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$ , trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\varepsilon_k}{\|y^k - y^{k-1}\|}, \frac{\varepsilon_k}{\|y^k - y^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } y^k \neq y^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } y^k = y^{k-1}. \end{cases} \quad (2.55)$$

---

**Thuật toán 2.4 (Thuật toán phân rã một phép chiếu giải bài toán cân bằng [oPSM])**

---

Tính  $w^k = y^k + \alpha_k(y^k - y^{k-1})$ . Lấy  $u_1(x^k) \in \partial f_1(x^k, x^k)$ ,  $u_2(x^k) \in \partial f_2(x^k, x^k)$ , tính

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(x^k)\|, \|u_2(x^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}, \quad (2.56)$$

$$x^{k+1} = P_C(w^k - \lambda_k u_1(x^k)), \quad (2.57)$$

$$y^{k+1} = x^{k+1} - \lambda_k u_2(x^k). \quad (2.58)$$

**Điều kiện dừng:** Nếu  $\|x^k - x^{k+1}\| + \|y^{k+1} - w^k\| = 0$ , thì dừng thuật toán. Ngược lại, đặt  $k := k + 1$  và quay lại **Bước lặp**.

---

**Định lý 2.5.** *Giả sử rằng các điều kiện (A1'), (A2)–(A6) được thỏa mãn. Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.4 hội tụ yếu đến một điểm thuộc tập nghiệm  $\text{Sol}(f, C)$ .*

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra thuật toán chiếu phân rã hiệu chỉnh giải bài toán (1.8). Cấu trúc của thuật toán được xây dựng như sau: Chọn các dãy số dương  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\gamma_k\}$  và  $\{\varepsilon_k\}$  thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty, \quad (2.95)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_k}{\beta_k} = 0. \quad (2.96)$$

Ta tiến hành các bước lặp như sau:

---

**Thuật toán 2.5 (Thuật toán một phép chiếu phân rã hiệu chỉnh giải bài toán cân bằng [roPSM])**

---

**Khởi tạo:** Chọn tùy ý các điểm  $x^1, y^0, y^1 \in C$ ,  $\theta \in [0, 1)$  và đặt  $k = 1$ .

**Bước lặp:** Từ  $x^k, y^{k-1}$  và  $y^k$  ( $k \geq 1$ ), chọn  $\alpha_k$  sao cho  $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$ , trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\varepsilon_k}{\|y^k - y^{k-1}\|}, \frac{\varepsilon_k}{\|y^k - y^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } y^k \neq y^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } y^k = y^{k-1}. \end{cases} \quad (2.97)$$


---

---

## Thuật toán 2.5 Thuật toán một phép chiếu phân rã hiệu chỉnh giải bài toán cân bằng [roPSM]

---

Tính  $w^k = (1 - \gamma_k)y^k + \alpha_k(y^k - y^{k-1})$ . Lấy  $u_1(x^k) \in \partial f_1(x^k, x^k)$ ,  $u_2(x^k) \in \partial f_2(x^k, x^k)$  và tính

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(x^k)\|, \|u_2(x^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k} \quad (2.98)$$

và

$$x^{k+1} = P_C(w^k - \lambda_k u_1(x^k)) \quad (2.99)$$

$$y^{k+1} = x^{k+1} - \lambda_k u_2(x^k). \quad (2.100)$$

**Điều kiện dừng:** Nếu  $\|x^k - x^{k+1}\| + \|y^{k+1} - w^k\| = 0$ , thì dừng thuật toán. Ngược lại, đặt  $k := k + 1$  và quay lại **Bước lặp**.

---

Ta có kết quả hội tụ mạnh sau đây.

**Định lý 2.6.** *Cho dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.5 và các điều kiện (A1'), (A2)–(A6) được thỏa mãn. Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  hội tụ mạnh tới nghiệm có chuẩn nhỏ nhất  $z = P_{\text{Sol}(f,C)}(0)$ .*

### 2.2.3. Thử nghiệm số và so sánh

Trong phần này, chúng tôi sẽ áp dụng Thuật toán 2.4 để giải bài toán cân bằng phát sinh từ mô hình cân bằng Nash–Cournot trong thị trường điện. Ngoài ra, chúng tôi cũng áp dụng Thuật toán 2.5 cho một ví dụ trong không gian vô hạn chiều. Trong cả hai ví dụ, chúng tôi đều tiến hành so sánh hiệu suất với một số thuật toán đã có.

## Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã đề xuất một số thuật toán chiếu phân rã để giải bài toán cân bằng. Các song hàm được phân rã thành tổng hai song hàm đơn giản hơn. Khi đó, thay vì giải các bài toán quy hoạch lồi tổng quát với các song hàm thành phần như đã được áp dụng trong các thuật toán phân rã đã có, thuật toán của chúng tôi chỉ sử dụng các phép chiếu, đồng thời chúng tôi kết hợp sử dụng các kỹ thuật quán tính và hiệu chỉnh nhằm tăng tốc độ hội tụ của thuật toán và thu được sự hội tụ mạnh của các thuật toán đề xuất. Chúng tôi đã tiến hành một vài thử nghiệm số và so sánh sơ bộ với một số thuật toán khác. Kết quả cho thấy, trong một số ví dụ cụ thể, thuật toán mới tỏ ra ưu việt hơn so với các thuật toán được đề xuất trước đó.

## Chương 3

# Phương pháp dưới đạo hàm, dưới đạo hàm tăng cường cho bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng

### 3.1. Phương pháp chiếu đạo hàm cho bất đẳng thức biến phân

#### 3.1.1. Xây dựng thuật toán chiếu đạo hàm nổi lỏng

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán bất đẳng thức biến phân (1.7), trong đó tập chấp nhận  $C$  được biểu diễn dưới dạng tập mức dưới của một hàm lồi

$$C = \{x \in \mathcal{H} : c(x) \leq 0\}. \quad (3.1)$$

với  $c : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm lồi, nửa liên tục dưới. Chúng tôi cần một số các giả thiết cơ bản cho bài toán VIP( $F, C$ ) (1.7) sau:

- (B1)  $\text{Sol}(F, C) \neq \emptyset$ ;
- (B2) Ánh xạ  $F$  đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz với hằng số  $L$ ;
- (B3)  $\partial c$  bị chặn trên tập bị chặn.

Thuật toán chiếu đạo hàm nổi lỏng cho bất đẳng thức biến phân được thiết kế như sau:

---

**Thuật toán 3.1 (Thuật toán chiếu đạo hàm nổi lờng [IGPM])**

---

**Bước 0 (Khởi tạo):** Chọn các điểm bắt đầu  $x^0, x^1 \in C$ ,  $\theta \in [0, 1)$  và hai dãy số thực dương  $\{\beta_k\}$ ,  $\{\varepsilon_k\}$  thỏa mãn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = +\infty, \quad \varepsilon_k = o(\beta_k), \quad (3.2)$$

trong đó  $\varepsilon_k = o(\beta_k)$  là vô cùng bé cấp cao hơn  $\{\beta_k\}$ . Đặt  $k := 1$ .

**Bước 1:** Với  $x^{k-1}$  và  $x^k$  ( $k \geq 1$ ), chọn  $\alpha_k$  sao cho

$$\alpha_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\varepsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } x^k = x^{k-1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Tính  $w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1})$  và lấy  $\xi^k \in \partial c(w^k)$ . Xây dựng nửa không gian

$$C_k = \{x \in \mathcal{H} : c(w^k) + \langle \xi^k, x - w^k \rangle \leq 0\}, \quad (3.4)$$

và tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(w^k - \beta_k Fw^k). \quad (3.5)$$

**Bước 2:** Nếu  $x^{k+1} = w^k$  thì dừng. Ngược lại, đặt  $k := k + 1$  và quay lại **Bước 1**.

---

### 3.1.2. Phân tích sự hội tụ

**Định lý 3.1.** *Giả sử các điều kiện (B1)–(B3) được thỏa mãn. Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 3.1 hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân (1.7).*

### 3.1.3. Thử nghiệm số và ứng dụng

Trong phần này, chúng tôi đưa ra thử nghiệm số nhằm minh họa hiệu quả của thuật toán đề xuất thông qua bài toán khôi phục ảnh.

## 3.2. Phương pháp dưới đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán cân bằng được phát biểu như sau

$$\text{Tìm điểm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (3.35)$$

trong đó  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng. Để nghiên cứu các thuật toán và kết quả thử nghiệm số của bài toán cân bằng (3.35), chúng tôi sử dụng các giả thiết sau

- (C1)  $f$  giả đơn điệu trên  $C$ ;
- (C2) Với mỗi  $y \in C$ , ánh xạ  $f(\cdot, y)$  là nửa liên tục trên yếu trên  $C$ ;
- (C3) Với mỗi  $x \in C$ , ánh xạ  $f(x, \cdot)$  là lồi và nửa liên tục dưới trên  $C$ ;
- (C4) Tồn tại các hằng số dương  $c_1$  và  $c_2$  sao cho điều kiện kiểu Lipschitz sau được thỏa mãn

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|x - y\|^2 - c_2 \|y - z\|^2 \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}; \quad (3.36)$$

- (C5)  $\text{Sol}(f, C) \neq \emptyset$ .

### 3.2.1. Thuật toán với cỡ bước tăng

Chúng tôi xây dựng một thuật toán mới 3.4 nhằm giải quyết bài toán cân bằng với song hàm giả đơn điệu.

---

#### Thuật toán 3.4 Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tăng [NISEM]

---

**Khởi tạo:** Chọn các tham số  $\lambda_1 > 0$ ,  $0 < \mu_1 < \mu_0 < \sigma < 1/2$ ,  $\theta \in [0, 1)$ . Chọn các dãy tham số  $\{\varepsilon_k\}, \{\xi_k\} \subset [0, \infty)$  thỏa mãn  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k < \infty$ . Chọn các điểm khởi tạo  $x^0, x^1 \in C$  và đặt  $k = 1$ .

**Bước 1:** Từ các điểm  $x^{k-1}$  và  $x^k$  ( $k \geq 1$ ), chọn  $\alpha_k$  sao cho  $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$ , với

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\xi_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \\ y^k = \underset{y \in C}{\text{argmin}} \left\{ \lambda_k f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}. \end{cases}$$

Nếu  $y^k = w^k$  thì  $x^k$  là nghiệm, dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển **Bước 2**.

**Bước 2:** Lấy  $\zeta^k \in \partial(f(w^k, \cdot))(y^k)$  sao cho  $w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k \in N_C(y^k)$ . Tính

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \underset{y \in T_k}{\text{argmin}} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}, \\ \eta_k &= f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1}), \quad \delta_k = \|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2, \end{aligned}$$

trong đó, nửa không gian  $T_k$  có cấu trúc như sau

$$T_k = \{x \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k, x - y^k \rangle \leq 0\}.$$


---

---

**Thuật toán 3.4 Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tăng [NISEM]**

---

Cập nhật cỡ bước  $\lambda_k$  theo công thức

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\delta_k}{\eta_k}, & \text{nếu } \eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k, \\ (1 + \varepsilon_k) \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases} \quad (3.37)$$

Đặt  $k := k + 1$ , và quay lại **Bước 1**.

---

Bổ đề sau đưa ra các tính chất của dãy cỡ bước được xác định trong Thuật toán 3.4.

**Bổ đề 3.5.** *Giả sử  $\{\lambda_k\}$  là dãy cỡ bước tạo bởi Thuật toán 3.4. Khi đó, ta có các khẳng định sau*

- (i) *Với mọi  $k \geq 2$ , ta có  $\lambda_k \geq \lambda_{\min} := \min \left\{ \frac{\mu_1}{\max\{c_1, c_2\}}, \lambda_1 \right\} > 0$ ;*
- (ii) *Dãy  $\{\lambda_k\}$  hội tụ;*
- (iii) *Tồn tại số nguyên dương  $k_0$  sao cho  $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$  với mọi  $k \geq k_0$ .*

**Định lý 3.2.** *Cho  $C$  là một tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}$ , và  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng thỏa mãn các điều kiện (C1)–(C5). Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 3.4 hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán cân bằng  $EP(f, C)$ .*

### 3.2.2. Biền thể quán tính và xấp xỉ gắn kết

Chúng tôi đề xuất một cách lựa chọn khác cho tham số  $\theta$  trong Thuật toán 3.4 như sau:

---

**Thuật toán 3.5 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính với cỡ bước tăng [SEMNS])**

---

**Khởi tạo:** Chọn các tham số  $\lambda_1 > 0$ ,  $0 < \mu_1 < \mu_0 < \sigma < 1/2$ ,  $\theta \in [0, \frac{1}{\sqrt{\tau}})$ ,  $\tau \geq 1$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Chọn các dãy tham số  $\{\varepsilon_k\}$  thỏa mãn  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ . Chọn các

điểm khởi tạo  $x^0, x^1 \in C$  và đặt  $k = 1$ .

**Bước 1:** Từ các điểm  $x^{k-1}$  và  $x^k$  ( $k \geq 1$ ), tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \theta(x^k - x^{k-1}), \\ y^k = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda_k f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}. \end{cases}$$

Nếu  $y^k = w^k$  thì  $x^k$  là nghiệm, dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển **Bước 2**.

---

---

**Thuật toán 3.5 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính với cỡ bước tăng [SEMNS])**

---

**Bước 2:** Lấy  $\zeta^k \in \partial(f(w^k, \cdot))(y^k)$  sao cho  $w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k \in N_C(y^k)$ . Xét nửa không gian có cấu trúc như sau

$$T_k = \{x \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k, x - y^k \rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$\begin{aligned} z^k &= \operatorname{argmin}_{y \in T_k} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}, \\ x^{k+1} &= (1 - \alpha)w^k + \alpha z^k, \\ \eta_k &= f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1}). \quad \delta_k = \|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2, \end{aligned} \tag{3.56}$$

Cập nhật cỡ bước  $\lambda_k$  theo công thức

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\delta_k}{\eta_k}, & \text{nếu } \eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k, \\ (1 + \varepsilon_k) \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt  $k := k + 1$ , và quay lại **Bước 1**.

---

**Định lý 3.3.** Cho  $C$  là một tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}$ , và  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng thỏa mãn các điều kiện (C1)–(C5). Nếu điều kiện sau được thỏa mãn

$$\alpha \in \left( 0, \frac{\sqrt{\tau} \theta^2 - (\tau + 1) \theta + \sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau} \theta^2 - (\tau + 1) \theta + \sqrt{\tau} + \theta(1 + \theta)} \right),$$

thì dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 3.5 hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán cân bằng  $\text{EP}(f, C)$ .

---

**Thuật toán 3.6 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kiểu gắn kết với cỡ bước tăng [VSEM])**

---

**Khởi tạo:** Chọn một ánh xạ co  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  (tức là, tồn tại hằng số  $\alpha \in (0, 1)$  sao cho  $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$  với mọi  $x, y \in \mathcal{H}$ ). Chọn các tham số  $\lambda_1 > 0$ ,  $0 < \mu_1 < \mu_0 < \sigma < 1/2$ ,  $\theta \in [0, 1)$ . Chọn các dãy tham số  $\{\varepsilon_k\}, \{\xi_k\}, \{\alpha_k\} \subset [0, \infty)$  thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k}{\alpha_k} = 0.$$

Chọn các điểm khởi tạo  $x^0, x^1 \in C$  và đặt  $k = 1$ .

---

---

**Thuật toán 3.6** (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kiểu gắn kết với cỡ bước tăng [VSEM])

---

**Bước 1:** Từ các điểm  $x^{k-1}$  và  $x^k$  ( $k \geq 1$ ), chọn  $\theta_k$  sao cho  $0 \leq \theta_k \leq \bar{\theta}_k$ , trong đó

$$\bar{\theta}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\xi_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}), \\ y^k = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda_k f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}. \end{cases}$$

Nếu  $y^k = w^k$  thì  $x^k$  là nghiệm, dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển **Bước 2**.

**Bước 2:** Lấy  $\zeta^k \in \partial(f(w^k, \cdot))(y^k)$  sao cho  $w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k \in N_C(y^k)$ . Tính

$$\begin{aligned} z^k &= \operatorname{argmin}_{y \in T_k} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}, \\ x^{k+1} &= \alpha_k \varphi(w^k) + (1 - \alpha_k) z^k, \\ \eta_k &= f(w^k, z^k) - f(w^k, y^k) - f(y^k, z^k), \quad \delta_k = \|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - z^k\|^2, \end{aligned}$$

trong đó nửa không gian  $T_k$  có cấu trúc như sau

$$T_k = \{x \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k, x - y^k \rangle \leq 0\}.$$

Cập nhật cỡ bước  $\lambda_k$  theo công thức

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\delta_k}{\eta_k}, & \text{nếu } \eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k, \\ (1 + \varepsilon_k) \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt  $k := k + 1$ , và quay lại **Bước 1**.

---

Sự hội tụ mạnh của Thuật toán 3.6 được khẳng định trong định lý sau.

**Định lý 3.4.** Với các giả thiết (C1)–(C5), dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 3.6 hội tụ mạnh tới một phần tử của tập nghiệm  $\operatorname{Sol}(f, C)$ .

### 3.2.3. Ứng dụng cho bất đẳng thức biến phân

Ở phần cuối của mục này, chúng tôi xét ứng dụng của thuật toán trên cho bài toán bất đẳng thức biến phân (1.7). Để đưa bài toán (1.7) về dạng bài toán cân bằng, với mỗi cặp  $x, y \in \mathcal{H}$ , ta định nghĩa song hàm cân bằng  $f$  như sau:

$$f(x, y) := \langle Ax, y - x \rangle. \quad (3.83)$$

Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

- (D1)  $F$  giả đơn điệu  $C$ ;
- (D2)  $F$  là ánh xạ  $F$ -hemi-liên tục, nghĩa là với mọi  $y \in C$ , hàm  $x \mapsto \langle F(x), x - y \rangle$  là nửa liên tục dưới yếu trên  $C$  (hoặc tương đương,  $x \mapsto \langle F(x), y - x \rangle$  là nửa liên tục trên yếu trên  $C$ );
- (D3)  $F$  liên tục Lipschitz trên  $C$  với hằng số Lipschitz  $L$ ;
- (D4)  $\text{Sol}(F, C) \neq \emptyset$ .

---

**Thuật toán 3.7 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tăng cho bài toán bất đẳng thức biến phân)**

---

**Khởi tạo:** Chọn các tham số  $\lambda_0 > 0$ ,  $0 < \mu_1 < \mu_0 < \sigma < 1/2$ ,  $\theta \in [0, 1)$ . Chọn các dãy tham số  $\{\varepsilon_k\}, \{\xi_k\} \subset [0, \infty)$  thỏa mãn  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k < \infty$ . Chọn các điểm khởi tạo  $x^0, x^1 \in C$  và đặt  $k = 1$ .

**Bước 1:** Từ các điểm  $x^{k-1}$  và  $x^k$  ( $k \geq 1$ ), chọn  $\alpha_k$  sao cho  $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$ , trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\xi_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \\ y^k = P_C(w^k - \lambda_k F w^k). \end{cases}$$

Nếu  $y^k = w^k$ , thì  $x^k$  là nghiệm, dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển **Bước 2**.

**Bước 2:** Xét nửa không gian  $T_k$  có cấu trúc như sau

$$T_k = \{x \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k F w^k - y^k, x - y^k \rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= P_{T_k}(w^k - F y^k), \\ \eta_k &= \langle F w^k - F y^k, x^{k+1} - y^k \rangle, \quad \delta_k = \|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

Cập nhật cỡ bước  $\lambda_k$  theo công thức

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\delta_k}{\eta_k}, & \text{nếu } \eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k, \\ (1 + \varepsilon_k) \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt  $k := k + 1$ , và quay lại **Bước 1**.

---

Kết quả sau đây là hệ quả trực tiếp của Định lý 3.2.

**Hệ quả 3.1.** *Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}$ , và  $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện (D1)–(D4). Giả sử rằng  $\{x^k\}, \{y^k\}$  là hai dãy sinh bởi Thuật toán 3.7. Khi đó, cả hai dãy  $\{x^k\}$  và  $\{y^k\}$  đều hội tụ yếu về cùng một điểm  $x^* \in \text{Sol}(F, C)$ .*

### 3.2.4. Thử nghiệm số và ứng dụng

Trong mục này, chúng tôi áp dụng các Thuật toán 3.4 (NISEM), 3.5 (SEMNS) và 3.6 (VSEM) giải gần đúng bài toán cân bằng và tiến hành so sánh với các thuật toán đã có.

## Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đề xuất thuật toán chiếu dưới đạo hàm cho bài toán bất đẳng thức biến phân với tập chấp nhận được được cho dưới dạng là một tập mức dưới của một hàm lồi nhưng không nhất thiết khả vi. Một ứng dụng của thuật toán trong việc khử mờ ảnh cũng đã được trình bày. Ở phần cuối, chúng tôi trình bày các thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tăng giải bài toán cân bằng. Hơn nữa, một ứng dụng của thuật toán cho bài toán bất đẳng thức biến phân cũng đã được trình bày. Chúng tôi đưa ra các ví dụ số để minh họa hiệu quả của các thuật toán được đề xuất và tiến hành so sánh hiệu suất của chúng với các thuật toán trước đó.

# KẾT LUẬN

Luận án đề xuất một số phương pháp giải bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và ứng dụng trong khử mờ ảnh và một số ví dụ thực tế.

**Những kết quả chính đã đạt được trong luận án bao gồm:**

1. Đề xuất một số **thuật toán phân rã kiểu Tseng** để giải các bài toán cân bằng mà song hàm có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai song hàm thành phần trong không gian Hilbert thực;
2. Đề xuất **thuật toán một phép chiếu phân rã** giải bài toán cân bằng giả đơn điệu cho bởi tổng của hai hàm song hàm trong không gian Hilbert thực;
3. Bằng cách kết hợp kỹ thuật quán tính và phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với một chiến lược mới về lựa chọn cỡ bước, chúng tôi đề xuất một **phương pháp đạo hàm tăng cường mới** để giải các bài toán cân bằng giả đơn điệu trong không gian Hilbert thực;
4. Đề xuất **thuật toán chiếu dưới đạo hàm** cho bài toán bất đẳng thức biến phân với tập chấp nhận được là tập mức dưới của một hàm lồi không nhất thiết khả vi, và ứng dụng thuật toán trong việc khử mờ ảnh.

**Một số hướng nghiên cứu tiếp theo:**

1. Nghiên cứu phát triển các thuật toán tối ưu giải bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân trên không gian không có cấu trúc tuyến tính, như đa tạp Hadamard và đa tạp Riemann;
2. Nghiên cứu phát triển các thuật toán giải bài toán cân bằng ngẫu nhiên, bất đẳng thức biến phân ngẫu nhiên.