

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

PHAN QUANG TUYỂN

TÍNH TOÁN SỐ MŨ LYAPUNOV CHO
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ VÀ
PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN ẨN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2026

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học
Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS. TSKH. Vũ Hoàng Linh

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ họp tại
Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội
vào hồi ... giờ ... ngày ... tháng ... năm 2026

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Mở đầu

Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Để nghiên cứu tính ổn định của hệ tuyến tính, các khái niệm khác nhau về phổ như phổ Lyapunov, phổ Bohl, và phổ Sacker-Sell trong nhiều năm qua đã được nghiên cứu, bắt đầu từ luận án của A. M. Lyapunov về số mũ đặc trưng (phương pháp thứ nhất Lyapunov) cho hệ phương trình vi phân được công bố năm 1892. Tiếp theo các ý tưởng từ luận án của Lyapunov, số mũ Lyapunov cùng với lý thuyết ổn định của nó đã được phát triển bởi nhiều tác giả khác như Perron, Bohl, Bylov, Izobov, Millionshchikov, ...

Số mũ Lyapunov, hay số mũ đặc trưng Lyapunov, mô tả tốc độ tăng trưởng của nghiệm của các phương trình vi phân (PTVP) tuyến tính với hệ số phụ thuộc thời gian và bằng cách tuyến tính hóa theo các quỹ đạo nghiệm để xác định tốc độ hội tụ hoặc phân kỳ của các quỹ đạo gần đó đối với các PTVP dạng phi tuyến. Các khái niệm cùng các tính chất của số mũ đặc trưng Lyapunov, cũng như sự ổn định của số mũ Lyapunov được trình bày trong sách chuyên khảo của Adrianova, và cuốn sách này được sử dụng như một phần giới thiệu để tiếp cận về việc sử dụng số mũ Lyapunov trong lý thuyết ổn định.

Trái ngược với sự phát triển mạnh mẽ của các kết quả về lý thuyết, các phương pháp số nhằm tính toán số mũ Lyapunov cũng như các khoảng phổ Lyapunov và phổ Sacker-Sell chỉ mới được quan tâm nghiên cứu trong thời gian tương đối gần đây. Trong một loạt các công trình của mình, Dieci và Van Vleck đã giả thiết tính chất tách được tích phân của ma trận nghiệm cơ bản để đảm bảo tính ổn định khi xấp xỉ các số mũ Lyapunov. Đặc biệt hơn, các tác giả đã chỉ ra rằng nếu hệ tam giác trên có đường chéo với tính chất tách được tích phân, thì đường chéo này có thể sử dụng để xấp xỉ số mũ cũng như khoảng phổ Lyapunov.

Tổng quát hóa một số các kết quả về lý thuyết từ PTVP thường tới phương trình vi phân đại số (PTVPĐS), chỉ gần đây lý thuyết phổ mới được mở rộng từ PTVP tới PTVPĐS. Với cách tiếp cận dựa vào các phép biến đổi thích hợp PTVPĐS chỉ số 1 được đưa về dạng không có tính lạ, nhóm tác giả Vũ Hoàng Linh và Volker Mehrmann đã mở rộng các khái niệm về số mũ, khoảng phổ Lyapunov, Bohl và Sacker-Sell cho PTVPĐS tuyến tính không có tính lạ có dạng:

$$E(t)x'(t) = A(t)x(t), \quad x \in \mathbb{I} = [t_0, \infty), \quad (1)$$

trong đó $E(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix}$, còn $E_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{a \times m})$, và $A_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{(m-a) \times m})$ là các ma trận hạng đủ theo hàng.

Bằng việc sử dụng phép biến đổi phù hợp để đưa PTVPDS không có tính lậ về PTVP căn bản dạng ẩn, các tác giả Vũ Hoàng Linh và Volker Mehrmann đã phát triển các phương pháp QR từ PTVP cho việc tính toán các đoạn phổ của PTVPDS. Hơn nữa, các tác giả cũng đã trình bày một phân tích về nhiễu và phân tích sai số để chứng minh cho độ tin cậy của các thuật toán đưa ra.

Trong khi đó, PTVPDS xuất hiện trong thực tế như các mô hình của hệ cơ học, hệ mạch điện, phản ứng hóa học và nhiều mô hình khác đều được mô hình hóa dưới phương trình dạng phi tuyến. Do vậy, trong luận án này, chúng tôi mong muốn nghiên cứu mở rộng các khái niệm về số mũ Lyapunov cũng như phương pháp số cho việc tính toán các số mũ Lyapunov cho hệ PTVPDS nửa tuyến tính có dạng

$$E(t)x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{I}, \quad (2)$$

trong đó $\mathbb{I} = [0, \infty)$, $x : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, và $f = f(t, x) : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ là các hàm đủ trơn với các đạo hàm riêng bị chặn. Ma trận E được giả thiết là suy biến và có hạng hằng với mọi $t \geq 0$.

Chuyển sang hệ rời rạc theo thời gian, các kết quả về lý thuyết số mũ cho hệ phương trình sai phân (PTSP) thường dạng

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

trong đó $(A(n))_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy các ma trận khả nghịch, bị chặn có cỡ $m \times m$ sao cho $(A^{-1}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ bị chặn, cũng đã được nghiên cứu bởi Adam Czornik và các cộng sự. Các tác giả đã sử dụng số mũ Lyapunov để đặc trưng cho tính ổn định mũ và tốc độ tăng trưởng theo nghiệm của hệ trên.

Trong những năm gần đây, các nhà nghiên cứu đã có những sự quan tâm lớn đến phương trình sai phân suy biến (PTSPSB) (hay còn gọi là hệ mô tả, PTSP ẩn) do chúng có nhiều ứng dụng trong thực tế, chẳng hạn như mô hình động học Leontiev của ngành kinh tế đa thành phần, mô hình tăng trưởng dân số Leslie, hay các bài toán điều khiển tối ưu của hệ rời rạc suy biến Xét hệ PTSPSB có dạng sau

$$E(n)x(n+1) = A(n)x(n) + q(n), \quad n \in \mathbb{N}(n_0), \quad (4)$$

trong đó $E(n), A(n) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $q(n) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{N}(n_0)$ kí hiệu các số nguyên lớn hơn hoặc bằng số nguyên cho trước n_0 , và $E(n)$ được giả thiết là suy biến với mọi $n \geq n_0$. Lý thuyết ổn định và số mũ của hệ sai phân suy biến mới được nghiên cứu gần đây và các công trình liên quan đến nó thì vẫn còn hạn chế. Tuy nhiên, theo hiểu biết của chúng tôi thì lý thuyết về số mũ Lyapunov cho hệ PTSP suy biến vẫn chưa được phát triển đầy đủ mặc dù lý thuyết về số mũ Lyapunov tương ứng cho PTVPDS đã được nghiên cứu khá đầy đủ. Trong luận án này, chúng tôi thiết lập một số kết quả cho lý thuyết về số mũ Lyapunov cho PTSPSB (4) được đưa về dạng không có tính lậ.

Song song với lý thuyết về các số mũ Lyapunov, các kết quả về phương pháp số để xấp xỉ số mũ Lyapunov, đoạn phổ Sacker-Sell cho hệ liên tục như PTVP thường và PTVPDS đã được nghiên cứu. Các tác giả Dieci và Van Vleck đã bước đầu nghiên cứu về tính toán số mũ Lyapunov cho hệ động lực rời rạc. Vì vậy,

trong luận án này, chúng tôi đề xuất hướng tiếp cận dựa trên chỉ số lạ, theo đó bài toán (4) được biến đổi về dạng không có tính lạ. Nhờ đó, có thể áp dụng hiệu quả phương pháp QR để tính toán xấp xỉ các số mũ Lyapunov và khoảng phổ cho hệ sai phân ẩn suy biến. Hơn nữa, chúng ta thấy rằng hệ sai phân suy biến xuất hiện một cách tự nhiên khi ta rời rạc PTVPDS (1) bởi một phương pháp số, ví dụ như việc áp dụng phương pháp Euler hiện với bước lưới đều h cho (1) ta thu được hệ sai phân ẩn. Trong luận án này, chúng tôi cũng xét mối liên hệ giữa số mũ Lyapunov của hệ PTVPDS và hệ rời rạc tương ứng của nó sẽ như thế nào khi bước lưới h tiến tới 0.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu việc tính toán số mũ và khoảng phổ của hệ PTVPDS và hệ PTSP ẩn như sau.

1. Bài toán 1 nghiên cứu việc tính toán xấp xỉ số mũ Lyapunov của hệ PTVPDS nửa tuyến tính dạng (2) bằng phương pháp QR rời rạc và liên tục, trong đó việc giải PTVPDS được thực hiện bằng nhiều phương pháp số khác nhau. Sau đó, chúng tôi đưa ra việc phân tích sai số của việc tính toán số mũ Lyapunov để thể hiện độ tin cậy của thuật toán.
2. Bài toán 2 nghiên cứu số mũ Lyapunov với các tính chất của nó như tính chính quy, tính ổn định cho hệ (4) được biến đổi về dạng không có tính lạ.
3. Bài toán 3 nghiên cứu việc tính toán xấp xỉ số mũ và khoảng phổ của hệ sai phân ẩn (4) được cho dưới dạng không có tính lạ. Hơn nữa, chúng ta thấy rằng hệ sai phân suy biến xuất hiện một cách tự nhiên khi ta rời rạc hóa PTVPDS bởi một phương pháp số, ví dụ như việc áp dụng phương pháp Euler hiện với bước lưới đều h cho bài toán (2) ta thu được hệ sai phân ẩn. Sau đó, ta sẽ nghiên cứu mối liên hệ giữa số mũ Lyapunov của phương trình vi phân đại số và hệ rời rạc tương ứng của nó khi bước lưới h tiến tới 0.

Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu dựa trên phân tích lý thuyết kết hợp thử nghiệm số bao gồm

1. Phương pháp tách/phân rã hệ ẩn dựa trên lý thuyết chỉ số lạ/chỉ số tractability.
2. Phương pháp nghiên cứu số mũ cho hệ thường của Lyapunov.
3. Phương pháp QR để xấp xỉ số.
4. Giải số PTVPDS bằng các phương pháp nhúng với ước lượng sai số và chiến lược chọn bước lưới tự động.

Bố cục của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các công trình của tác giả, và danh mục tài liệu tham khảo, luận án được chia thành bốn chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương 2. Tính toán số mũ Lyapunov cho hệ phương trình vi phân đại số nửa tuyến tính

Chương 3. Số mũ Lyapunov của hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính

Chương 4. Tính toán số mũ Lyapunov cho hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính

Các kết quả của luận án này được lấy từ 3 bài báo trong danh mục công trình khoa học của tác giả, và cũng đã được báo cáo tại:

1. Xêmina của bộ môn Toán học tính toán và Toán ứng dụng, Khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. Hội nghị Khoa học Khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, 10-2024.
3. Hội thảo “Dynamical systems and related topics” tại Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán (VIASM), 03/01/2023 - 06/01/2023.
4. Hội thảo “2024 International Conference on Dynamical systems and related topics”, Đà Nẵng, 29/01/2024-02/02/2024.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Lý thuyết số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân thường và phương trình vi phân đại số tuyến tính

1.1.1. Lý thuyết số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân thường

Xét hệ tuyến tính

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad A \in \mathcal{C}[t_0, \infty), \quad (1.1)$$

trong đó A là ma trận hệ số liên tục và bị chặn đều theo t : $\sup_t \|A(t)\| < \infty$. Ma trận nghiệm cơ bản của hệ (1.1), ký hiệu là X , là ma trận mà các cột của nó là n nghiệm độc lập tuyến tính $x_1(t), \dots, x_n(t)$ của hệ (1.1). Để định nghĩa phổ theo số mũ Lyapunov, cho X là ma trận nghiệm cơ bản của hệ (1.1), ta đưa ra các giá trị

$$\lambda_i = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Xe_i\|, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

trong đó e_i ký hiệu của vectơ đơn vị thứ i . Khi tổng $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ đạt giá trị nhỏ nhất đối với tất cả các ma trận nghiệm cơ bản, thì λ_i được gọi là các số mũ Lyapunov hay các số mũ đặc trưng Lyapunov của hệ, và ma trận nghiệm cơ bản tương ứng được gọi là một cơ sở chuẩn tắc. Với giả thiết ma trận hệ số A bị chặn thì các số mũ Lyapunov là hữu hạn.

Ta có định nghĩa cổ điển về phổ Lyapunov theo định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.1.1. Một tập các số mũ đặc trưng khác nhau của các nghiệm được gọi là phổ.

1.1.2. Số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân đại số tuyến tính

Xét hệ PTVPĐS tuyến tính được biến đổi về dạng không có tính lạ như sau

$$E(t)x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{I}, \quad (1.3)$$

trong đó

$$E(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix},$$

$E_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{d \times m})$ và $A_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{(m-d) \times m})$ là các ma trận hạng đủ theo hàng. Hơn nữa, ma trận

$$\bar{E}(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

là không suy biến với mọi $t \in \mathbb{I}$.

Đầu tiên, chúng ta định nghĩa về ma trận nghiệm cơ bản.

Định nghĩa 1.1.2. Một hàm ma trận $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m \times d})$ được gọi là ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu của (1.3) nếu mỗi cột của nó là một nghiệm của hệ (1.3) và $\text{rank} X(t) = d$, với mọi $t \geq 0$.

Tiếp theo, ta định nghĩa về số mũ Lyapunov như sau.

Định nghĩa 1.1.3. Cho một ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu X của một hệ PTVPDS không có tính lạ dạng (1.3), chúng ta đưa ra các giá trị

$$\lambda_i^u = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|X(t)e_i\|, \quad \lambda_i^l = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|X(t)e_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, d,$$

trong đó e_i ký hiệu là vectơ đơn vị chuẩn thứ i . Các cột của một ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu có dạng một cơ sở chuẩn tắc nếu như tổng $\sum_{i=1}^d \lambda_i^u$ là nhỏ nhất. Các số λ_i^u , $i = 1, 2, \dots, d$, tương ứng với nghiệm $X(t)e_i$ thuộc một cơ sở chuẩn tắc được gọi là số mũ Lyapunov (hay số mũ Lyapunov trên). Tập các số mũ Lyapunov được gọi là phổ Lyapunov của PTVPDS (1.3).

1.2. Phương pháp số giải phương trình vi phân đại số phi tuyến

Xét bài toán giá trị ban đầu PTVPDS phi tuyến có cấu trúc dạng

$$\begin{aligned} f(t, x(t), E(t)x'(t)) &= 0, \\ g(t, x(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

trên một đoạn $I = [t_0, T] \in \mathbb{R}$, trong đó $x \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^m)$, $E \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^{m_1 \times m})$ và một điều kiện ban đầu tương thích $x(t_0) = x_0$.

Chúng ta cũng giả sử rằng $f = f(t, u, v) : I \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ và $g = g(t, u) : I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m_2}$, $m_1 + m_2 = m$, là các hàm đủ trơn với các đạo hàm riêng bị chặn. Hơn nữa, nghiệm duy nhất của bài toán (1.5) tồn tại và

$$\begin{bmatrix} f_v E \\ g_u \end{bmatrix} \text{ là không suy biến dọc theo nghiệm chính xác } x(t). \quad (1.6)$$

Tận dụng cấu trúc của bài toán, Vũ Hoàng Linh và Nguyễn Duy Trường đã đề xuất biến đổi bài toán (1.5) về dạng

$$\begin{aligned} f(t, x(t), (Ex)'(t) - E'(t)x(t)) &= 0, \\ g(t, x(t)) &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

có cùng tập nghiệm nhưng có cấu trúc tương đương với hệ PTVPDS nửa hiện chỉ số 1. Từ đó, các tác giả đã xây dựng các phương pháp Runge-Kutta nửa hiện và phương pháp Runge-Kutta ẩn để giải bài toán PTVPDS (1.5) mà vẫn bảo toàn được cấp chính xác.

1.2.1. Phương pháp Runge-Kutta nửa hiện (HERK)

1.2.2. Phương pháp Runge-Kutta với kiểm soát sai số và lựa chọn bước lưới

1.2.3. Phương pháp Runge-Kutta ẩn với đường chéo đơn dạng hiện (ESDIRK)

1.3. Phân tích QR của ma trận

Phân tích QR của một ma trận $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ với $m \geq n$ là việc phân tách A thành tích $A = QR$. Trong phân tích QR đầy đủ, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ là một ma trận trực giao và $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là một ma trận tam giác trên (hình thang trên).

Xét $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($m \geq n$) là ma trận hạng đủ với hạng n . Sự tồn tại của phân tích QR được cho bởi định lý sau

Định lý 1.3.1. *Mọi ma trận $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($m \geq n$) có một phân tích QR đầy đủ, và như vậy nó cũng có phân tích QR thu gọn.*

Trong khi đó điều kiện để phân tích QR là duy nhất thì ta cần ma trận A là hạng đủ theo cột.

Định lý 1.3.2. *Mỗi ma trận $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ($m \geq n$) với hạng đủ theo cột có một phân tích QR rút gọn duy nhất $A = \hat{Q}\hat{R}$ với các phần tử trên đường chéo của $\hat{R}$ là dương.*

Trong trường hợp ma trận A có các phần tử là hàm số theo biến t , ta xét bài toán thiết lập các điều kiện đủ để một ma trận hàm trơn $A(t)$ tồn tại phân tích QR dưới dạng $A(t) = Q(t)R(t)$, đồng thời đảm bảo tính trơn của các thành phần Q và R theo biến t . Bài toán dẫn đến việc phân tích QR cho ma trận hàm $A(t)$ xuất phát từ việc tính toán các số mũ Lyapunov, trong đó ma trận A thường đóng vai trò là nghiệm cơ bản của một hệ PTVP tuyến tính và được giả thiết có hạng đủ với mọi t . Dieci và Eirola đã đưa ra điều kiện đủ cho việc phân tích trơn của một ma trận hàm.

Mệnh đề 1.3.1. *Bất kì ma trận hạng đủ theo cột $A \in \mathcal{C}^k$ có một phân tích QR sao cho $A = QR$ với $Q, R, \in \mathcal{C}^k$.*

Chương 2

Tính toán số mũ Lyapunov cho hệ phương trình vi phân đại số nửa tuyến tính

Trong chương này, chúng tôi sẽ xây dựng và nghiên cứu các phương pháp số để tính toán các số mũ Lyapunov cho các PTVPĐS nửa tuyến tính có dạng

$$E(t)x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{I} = [0, \infty), \quad (2.1)$$

trong đó $x : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, và $f = f(t, x) : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ là các hàm đủ trơn với các đạo hàm riêng bị chặn. Ma trận E được giả thiết là suy biến, nhưng có hạng hằng với mọi $t \geq 0$. Chúng ta cũng giả sử rằng bài toán giá trị ban đầu cho PTVPĐS (2.1) với một điều kiện ban đầu tương thích $x(0) = x_0$ sẽ có một nghiệm duy nhất đủ trơn trên $\mathbb{I}$.

2.1. Số mũ Lyapunov cho hệ phương trình vi phân đại số nửa tuyến tính

Xét hệ PTVPĐS (2.1) dưới dạng không có tính lạ và xét bài toán biến phân tuyến tính dọc theo một nghiệm cụ thể $x^*(t)$

$$E(t)y'(t) = A(t)y(t), \quad t \in \mathbb{I}, \quad (2.2)$$

trong đó

$$E(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*) = \begin{bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix},$$

và $E_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{d \times m})$ và $A_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{(m-d) \times m})$ là các ma trận hạng đủ theo hàng. Giả thiết không có tính lạ nghĩa là ma trận

$$\bar{E}(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

là không suy biến với mọi $t \in \mathbb{I}$.

Với một quỹ đạo nghiệm đã được xác định $x^*(t)$, chúng ta xét hệ biến phân tuyến tính (2.2). Như vậy, với ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu $Y(t)$, ma trận

$$\Lambda = \limsup_{t \rightarrow \infty} \Lambda_{x_0}(t) := \limsup_{t \rightarrow \infty} (Y^\top(t)Y(t))^{\frac{1}{2t}} \quad (2.4)$$

được xác định tốt dưới một số giả thiết về tính bị chặn và nó là một ma trận đối xứng xác định dương. Nếu chúng ta ký hiệu $\{p_i, \mu_i\}$ là các vectơ riêng và giá trị riêng của Λ sao cho $\Lambda p_i = \mu_i p_i$, và $p_i^\top \Lambda p_i = \mu_i$, thì các số mũ Lyapunov tương ứng với quỹ đạo $x^*(t)$ của (2.1) được cho bởi

$$\lambda_i = \ln(\mu_i) = \ln \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \langle Y(t)p_i, Y(t)p_i \rangle \right)^{\frac{1}{2t}} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|Y(t)p_i\|, \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.5)$$

trong đó $\langle x, y \rangle = x^\top y$ và $\|x\| := \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.

2.2. Phương pháp Runge-Kutta với ước lượng sai số và lựa chọn bước lưới

Để tính toán các số mũ Lyapunov, chúng ta cần tiến hành tích phân đồng thời cả hai hệ PTVPDS (2.1) và (2.2) trên cùng một phương pháp số. Cụ thể, hệ (2.1) được giải với một điều kiện ban đầu tương thích để xác định nghiệm $x(t)$. Song song với quá trình đó, các hệ số của ma trận $A(t)$ trong hệ (2.2) sẽ được xác định. Sau đó, chúng tôi xấp xỉ các số mũ Lyapunov của hệ PTVPDS tuyến tính (2.2). Trong mục này, để tích phân số, chúng tôi sử dụng phương pháp Runge-Kutta nhúng với kiểm soát sai số và lựa chọn các bước lưới phù hợp một cách tự động theo một giới hạn sai số cho trước. Nhằm tối ưu hóa hiệu quả tính toán và giảm thiểu chi phí thực hiện, chúng tôi giới thiệu các phương pháp Runge-Kutta nửa hiện (HERK) và các phương pháp Runge-Kutta ẩn đường chéo đơn dạng hiện (ESDIRK).

2.3. Các phương pháp QR

2.3.1. Phương pháp QR rời rạc

Đầu tiên, ta lựa chọn một bước lưới ban đầu h_0 và cho ma trận ban đầu Y_0 xác định tại thời điểm t_0 của hệ tuyến tính hóa (2.2). Thực hiện phân tích QR: $Y_0 = Q(t_0)R(t_0)$, trong đó $R(t_0)$ có các phần tử trên đường chéo là dương.

Với $j = 1, 2, \dots, N$, giả sử $Y(t, t_{j-1})$ là nghiệm số của BTGTĐ

$$\begin{aligned} E(t)Y'(t, t_{j-1}) &= A(t)Y(t, t_{j-1}), \\ Y(t_{j-1}, t_{j-1}) &= Q(t_{j-1}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Tại bước thứ j , ta tiếp tục thực hiện phân tích QR

$$Y(t_j, t_{j-1}) = Q(t_j)R(t_j, t_{j-1}), \quad (2.7)$$

trong đó $R(t_j, t_{j-1})$ có các phần tử trên đường chéo dương nhằm đảm bảo tính duy nhất của phân tích. Từ đó, thu được phân tích QR của $Y(t_j)$ dưới dạng $Y(t_j) = Q(t_j)R(t_j)$, trong đó

$$R(t_j) = R(t_j, t_{j-1})R(t_{j-1}, t_{j-2}) \dots R(t_2, t_1)R(t_1, t_0)R(t_0). \quad (2.8)$$

Dựa trên kết quả này, các số mũ Lyapunov trên được xấp xỉ bởi

$$\lambda_i^u = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln (R(t)_{ii}), \quad i = 1, 2, \dots, d, \quad (2.9)$$

trong đó $R(t)_{ii}$ là phần tử đường chéo thứ i của $R(t)$ và được xấp xỉ bởi $\ln (R(t_j)_{ii}) = \sum_{l=1}^j \ln(R(t_l, t_{l-1})_{ii})$. Công thức cho các xấp xỉ của các giá trị λ_i^l được xác định tương tự như vậy. Thuật toán QR rời rạc được cho bởi dạng mã giả như sau.

Thuật toán 2.3.1. Đầu vào: Cho PTVPĐS (2.1) trên một đoạn $[0, T]$, với điều kiện ban đầu tương thích $x(t_0) = x_0$, $Y_0 \in \mathbb{R}^{m \times p}$, sai số cho trước TOL , và một bước lưới cho trước h_0 , $\tau \in [0, T]$.

Đầu ra: Các số mũ Lyapunov xấp xỉ λ_i^u , λ_i^l , $i = 1, 2, \dots, p \leq d$.

Khởi tạo:

- Đặt $t_0 := 0$, và thực hiện phân tích QR $Y(t_0) = Q_0 R_0$, trong đó R_0 có các phần tử trên đường chéo dương.
- Đặt $\lambda_i(t_0) := 0$ và $s_i(t_0) := 0$ với $i = 1, \dots, p$ để tính toán tổng trong công thức (2.9).

Trong khi $t_j < T$

1. Nếu $t_{j+1} = t_j + h_j > T$, thì $h_j = T - t_j$;
2. Giải BTGTBĐ (2.1) và hệ biến phân tuyến tính (2.6) trên cùng các nấc. Ký hiệu nghiệm số được tính toán tại thời điểm $t = t_{j+1}$ là $\bar{x}_{j+1}$, $\bar{Y}_{j+1}$ của phương pháp có cấp chính xác là 5 và $\tilde{x}_{j+1}$, $\tilde{Y}_{j+1}$ của phương pháp có cấp chính xác là 4.
3. Tính

$$error = \max_{1 \leq i \leq m} \frac{|(\bar{x}_{j+1})_i - (\tilde{x}_{j+1})_i|}{(1 + |(\bar{x}_{j+1})_i|)}, \quad \text{và} \quad h_{new} = \text{frac}.h_j \left(\frac{TOL}{error} \right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

4. Nếu $error \leq TOL$ (bước đi được chấp nhận), thì tiến hành phân tích QR $\bar{Y}_{j+1} = Q_{j+1} R_{j+1}$ để xác định thành phần R_{j+1} với các phần tử trên đường chéo là dương.

Sau đó ta cập nhật các số mũ Lyapunov:

$$t_{j+1} = t_j + h_j; \quad Y(t_{j+1}) = Q_{j+1}; \quad x(t_{j+1}) = \bar{x}_{j+1};$$

$$s_i(t_{j+1}) = s_i(t_j) + \ln(R_{j+1})_{ii} \text{ và } \lambda_i(t_{j+1}) = \frac{1}{t_{j+1}} s_i(t_{j+1}), \text{ với } i = 1, 2, \dots, p.$$

Nếu cần ta kiểm tra tính chất tách được tích phân bằng cách sử dụng $\{s_i\}_{i=1}^p$.

Cài đặt $h_{j+1} = \min\{h_{new}, \alpha_2 h_j\}$ và đi đến đoạn tiếp theo.

Ngược lại, cài đặt $h_j = \max\{h_{new}, \alpha_1 h_j\}$ (bước lưới được điều chỉnh) và quay lại bước thứ 2.

5. Tính $s_i(t_{j+1}) = s_i(t_j) + \ln(R_{j+1})_{ii}$, $\lambda_i(t_{j+1}) = \frac{1}{t_{j+1}} s_i(t_{j+1})$.

Cập nhật $\min_{\tau \leq t \leq t_{j+1}} \lambda_i(t)$ và $\max_{\tau \leq t \leq t_{j+1}} \lambda_i(t)$.

2.3.2. Phương pháp QR liên tục

Lấy đạo hàm $Y = QR$ và thay biểu thức này vào hệ PTVPĐS tuyến tính hóa của hệ (2.1), ta thu được

$$EQ' + EQR'R^{-1} = AQ. \quad (2.10)$$

Lưu ý rằng phương trình đại số của (2.10) thỏa mãn $A_2 Q = \mathbf{0}$. Lấy đạo hàm của biểu thức này ta được $A_2' Q + A_2 Q' = \mathbf{0}$; kết hợp với phương trình (2.10) dẫn đến hệ

$$\bar{E}(Q' + QR'R^{-1}) = \bar{A}Q, \quad (2.11)$$

trong đó

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ -A_2' \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Tiếp theo, ta thiết lập công thức để biểu diễn cho $Q^\top Q'$. Các tác giả Linh và Mehrmann đã chỉ ra rằng tồn tại một hàm ma trận hạng đủ theo cột, bị chặn $P \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{m \times p})$, và một hàm ma trận tam giác trên không suy biến $\mathcal{E} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}^{p \times p})$ sao cho

$$P^\top \bar{E} = \mathcal{E} Q^\top \quad (2.13)$$

thỏa mãn. Hơn nữa, nếu áp dụng điều kiện chuẩn hoá $P^\top P = I_p$ và các phần tử trên đường chéo của $\mathcal{E}$ là dương, thì P và $\mathcal{E}$ sẽ được xác định duy nhất. Bằng việc nhân (2.11) từ bên trái bởi ma trận $P^\top$ được định nghĩa ở (2.13), ta thu được

$$\mathcal{E} Q^\top Q' + \mathcal{E} R'R^{-1} = P^\top \bar{A}Q.$$

Đặt $B := R'R^{-1}$, $S(Q) := [s_{i,j}(Q)] = Q^\top Q'$, và $K := P^\top \bar{A}Q$, điều này kéo theo $S(Q) = \mathcal{E}^{-1}K - B$. Do $S(Q)$ là ma trận phản đối xứng và B là ma trận tam giác trên, nên phần tam giác dưới chật của ma trận $S(Q)$ trùng với phần tam giác dưới chật của ma trận $W := [w_{i,j}] = \mathcal{E}^{-1}K$, ký hiệu là $low(W)$. Do đó, ta có biểu diễn $S(Q) = low(W) - [low(W)]^\top$, hay các phần tử s_{ij} của ma trận $S(Q)$ được xác định bởi

$$s_{i,j} = \begin{cases} w_{i,j}, & i > j, \\ 0, & i = j, \\ -w_{i,j}, & i < j, \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq p. \quad (2.14)$$

Như vậy, Q được xác định bằng việc giải BTGTBD cho hệ PTVPDS không có tính lạ dạng

$$EQ' = -EQ(W - S(Q)) + AQ. \quad (2.15)$$

Bằng cách đặt $\mathcal{A} := K - \mathcal{E}S(Q) = P^\top \bar{A}Q - \mathcal{E}Q^\top Q'$, PTVP cho thành phần R được thiết lập dưới dạng phương trình ma trận tam giác trên có cỡ $p \times p$

$$\mathcal{E}R' = \mathcal{A}R, \text{ hay tương đương với } R' = BR. \quad (2.16)$$

Do hệ (2.16) là tam giác trên và các phần tử đường chéo của $S(Q)$ bằng 0, hệ PTVP vô hướng được xác định như sau

$$r'_{i,i} = w_{i,i}r_{i,i}, \quad (2.17)$$

trong đó $w_{i,i}$, $i = 1, \dots, p$ là phần tử đường chéo thứ i của ma trận W . Các đại lượng này được xác định thông qua các hàm phụ $\phi_i(t)$ bằng cách giải BTGTBD

$$\phi'_i(t) = w_{i,i}(t), \quad \phi_i(t_0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, p). \quad (2.18)$$

Cuối cùng, các hàm $\lambda_i(t)$ được xác định bởi

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{t}\phi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.19)$$

và các giới hạn của chúng khi $t \rightarrow \infty$ được xấp xỉ.

Để tóm tắt các bước đã mô tả ở trên, chúng tôi đã đưa ra thuật toán QR liên tục như sau.

Thuật toán 2.3.2. Đầu vào: Cho PTVPDS (2.1) trên một đoạn $[0, T]$, với điều kiện ban đầu tương thích $x(t_0) = x_0$, và $Q_0 = Q(t_0)$ là một giá trị ban đầu của (2.15), sai số cho trước TOL , và một bước lưới ban đầu h_0 , H đủ lớn, $H \in (0, T)$.

Đầu ra: Các số mũ Lyapunov xấp xỉ λ_i^u , λ_i^l , $i = 1, 2, \dots, p$.

Khởi tạo:

- Đặt $j = 0$, $t_0 := 0$. Tính $P(t_0)$, $\mathcal{E}(t_0)$, và $K(t_0)$ như trong công thức (2.13).
- Tính $W(t_0)$ theo công thức $\mathcal{E}(t_0)W(t_0) = K(t_0)$.
- Đặt $\lambda_i(t_0) := 0$ và $\phi_i(t_0) := 0$ với $i = 1, \dots, p$.

Trong khi $t_j < T$

1. Nếu $t_{j+1} = t_j + h_j > T$, thì $h_j = T - t_j$;
2. Giải BTGTBD cho PTVPDS (2.13) và hệ (2.15) trên cùng các nấc để tính $x(t_{j+1})$ và $Q(t_{j+1})$ trên $[t_j, t_{j+1}]$. Ký hiệu các nghiệm số tính toán tại $t = t_{j+1}$ là $\bar{x}_{j+1}$, $\bar{Q}_{j+1}$ của phương pháp có cấp chính xác là 5 và $\tilde{x}_{j+1}$, $\tilde{Q}_{j+1}$ của phương pháp có cấp chính xác là 4.

3. Tính

$$error = \max_{1 \leq i \leq d} \frac{|(\bar{x}_{j+1})_i - (\tilde{x}_{j+1})_i|}{(1 + |(\bar{x}_{j+1})_i|)} \quad \text{và} \quad h_{new} = \text{frac}.h_j \left(\frac{TOL}{error} \right)^{\frac{1}{p+1}};$$

4. Nếu $error \leq TOL$ (Bước đi được chấp nhận) thì ta trực giao hóa lại thành phần $Q(t_{j+1})$ của (2.15) bởi: $\bar{Q}_{j+1} = Q_{j+1}R_{j+1}$ để tìm R_{j+1} với các phần tử trên đường chéo dương.

Sau đó chúng ta cập nhật các số mũ Lyapunov:

$$t_{j+1} = t_j + h_j; x(t_{j+1}) = \bar{x}_{j+1} \text{ và } Q(t_{j+1}) = Q_{j+1};$$

Tính $P(t_{j+1})$, $\mathcal{E}(t_{j+1})$, $K(t_{j+1})$ và giải $W(t_{j+1})$;

Tính $\phi_i(t_{j+1})$ và $\lambda_i(t_{j+1})$, với $i = 1, 2, \dots, p$ như trong công thức (2.18) and (2.19).

Tính chất tách được tích phân có thể được kiểm tra bằng việc tính các sai phân Steklov $\Psi_i(t, H)$, $i = 1, \dots, p-1$;

Cài đặt $h_{j+1} = \min\{h_{new}, \alpha_2 h_j\}$ và đi đến đoạn tiếp theo.

Ngược lại, cài đặt $h_j = \max\{h_{new}, \alpha_1 h_j\}$ (bước lười sẽ được điều chỉnh) và quay lại bước 2.

5. Cập nhật $\min_{\tau \leq t \leq t_{j+1}} \lambda_i(t)$ và $\max_{\tau \leq t \leq t_{j+1}} \lambda_i(t)$.

2.4. Phân tích sai số

2.4.1. Phân tích sai số của các phương pháp QR cho phương trình vi phân đại số tuyến tính

Phân tích sai số cho các số mũ Lyapunov được kết hợp thành hai phần: phân tích sai số ngược và phân tích sai số thuận. Bởi vì nguồn sai số chính của các phương pháp QR là sai số đến từ việc tích phân số, nên theo các giả thiết được đặt ra trong phân tích sai số ngược và sai số thuận, có thể kết luận rằng sai số của các số mũ Lyapunov có cùng độ lớn như sai số địa phương. Cụ thể, khi sử dụng một phương pháp số có cấp chính xác là p và chỉ xét các sai số rời rạc hóa đến từ việc tích phân số, sai số của các số mũ Lyapunov thu được trong cả hai phương pháp QR (rời rạc và liên tục) có độ lớn là $\mathcal{O}(h^p)$.

2.4.2. Phân tích sai số của phép tuyến tính hóa

Xét bài toán nửa tuyến tính

$$E(t)x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.20)$$

với quỹ đạo nghiệm $x(t) = \phi(t, x_0)$. Để tính toán các số mũ Lyapunov của (2.20), ta xét bài toán biến phân tuyến tính

$$E(t)X'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t, x_0))X(t), \text{ nghĩa là, } E(t)X'(t) = A(t)X(t), \quad (2.21)$$

với điều kiện ban đầu X_0 .

Dựa trên các phân tích QR chính xác cho bài toán (2.21), ta thiết lập được một dãy $\{t_j\}$ sao cho

$$X(t_j) = Q(t_j)R(t_j, t_{j-1}) \dots R(t_2, t_1)R(t_1, t_0)R_0. \quad (2.22)$$

Trong thực hành tính toán, chúng ta có một nghiệm xấp xỉ $\psi_h(t, x_0)$ thay vì nghiệm chính xác $\phi(t, x_0)$. Do đó, chúng ta phải xấp xỉ các số mũ Lyapunov của bài toán

$$E(\tau)Y'(\tau) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \psi_h(\tau, x_0))Y(\tau), \text{ nghĩa là, } E(\tau)Y'(\tau) = \tilde{A}(\tau)Y(\tau), \quad (2.23)$$

và theo các phân tích QR chính xác của bài toán (2.23), chúng ta sẽ tìm được một dãy $\{\tau_j\}$ sao cho

$$Y(\tau_j) = U(\tau_j)V(\tau_j, \tau_{j-1}) \dots V(\tau_2, \tau_1)V(\tau_1, \tau_0)V_0. \quad (2.24)$$

Giả sử rằng tồn tại các hàm đơn điệu trơn $\omega_j(t)$ sao cho

$$\omega_j(t_j) = \tau_j, \quad \omega_j(t_{j+1}) = \tau_{j+1},$$

và định nghĩa $\omega(t) = \omega_j(t)$ với mọi $t \in [t_j, t_{j+1})$. Hơn nữa, giả sử rằng với mọi $t \geq 0$, tồn tại các hằng số $\varepsilon > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} (a) \quad & |\omega(t) - t| \leq \delta, \\ (b) \quad & \|\psi_h(\omega(t), x_0) - \phi(t, x_0)\| \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Bên cạnh các sai số phát sinh từ quá trình phân tích sai số thuận và ngược cho hệ PTVPĐS tuyến tính, một nguồn sai số khác cần được xem xét là sự sai khác giữa hai hệ tuyến tính (2.21) và (2.23). Điều này đòi hỏi việc thực hiện các đánh giá so sánh giữa hai ma trận hệ số A và $\tilde{A}$. Để giải quyết vấn đề này, ta thu được kết quả sau đây.

Định lý 2.4.1. *Giả sử rằng (2.25) được thỏa mãn và các đạo hàm cấp hai f_{xt} và f_{xx} tồn tại và liên tục. Khi đó, ta có ước lượng sau*

$$\|\tilde{A}(\tau) - A(t)\| \leq M\delta + N\varepsilon, \quad (2.26)$$

trong đó M và N lần lượt là các cận trên của các đạo hàm cấp hai f_{xt} và f_{xx} .

Từ tính bị chặn được thiết lập trong công thức (2.26), kết hợp với tính ổn định của các số mũ Lyapunov, có thể suy ra rằng khi đại lượng $M\delta + N\varepsilon$ đủ nhỏ và đều theo t , các số mũ Lyapunov cho các hệ (2.21) và (2.23) sẽ xấp xỉ gần nhau.

2.5. Thử nghiệm số

Trong mục này, chúng tôi thực hiện một số thử nghiệm số đối với cả thuật toán QR liên tục và rời rạc sử dụng phương pháp Dormand-Prince và các phương pháp ESDIRK như đã mô tả trong Mục 2.3.

Kết luận chương

Trong chương này, chúng tôi đã đề xuất một lớp phương pháp tính toán số mũ Lyapunov cho các hệ PTVPĐS nửa tuyến tính, dựa trên việc kết hợp phân tích QR với các phương pháp tích phân số kiểu Runge-Kutta. Việc kiểm soát sai số trong quá trình tích phân đồng thời cả PTVPĐS nửa tuyến tính và hệ tuyến tính hóa tương ứng được thực hiện bằng cách sử dụng các cặp nhúng, chẳng hạn như các phương pháp Dormand-Prince và ESDIRK. Trên cơ sở đó, chúng tôi đã thiết lập và phân tích sai số đối với việc xấp xỉ số mũ Lyapunov bằng cả phương pháp QR rời rạc và liên tục, qua đó chỉ ra rằng sai số của các số mũ Lyapunov về bản chất được kiểm soát bởi sai số tích phân địa phương. Cuối cùng, các thử nghiệm số đã minh chứng cho tính hiệu quả của các phương pháp QR và tính đúng đắn của phân tích sai số.

Chương 3

Số mũ Lyapunov của hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính

Trong chương này, chúng tôi xây dựng lý thuyết số mũ Lyapunov cho PTSPSB tuyến tính có dạng

$$E(n)x(n+1) = A(n)x(n) + f(n), \quad n \geq n_0, \quad (3.1)$$

trong đó $E(n), A(n) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $E(n)$ là một ma trận suy biến và có hạng hằng, nghĩa là, $\text{rank}(E(n)) = d < m$ với mọi $n \geq n_0$, $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n_0 \in \mathbb{Z}$.

3.1. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính

3.1.1. Khái niệm chỉ số

Không mất tính tổng quát, giả sử hệ (3.1) được cho dưới dạng

$$\begin{bmatrix} E_1(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x(n+1) = \begin{bmatrix} A_1(n) \\ A_2(n) \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}, \quad n \geq n_0. \quad (3.2)$$

Định nghĩa 3.1.1. Hệ PTSPSB (3.1) được gọi là có chỉ số lậ bằng không nếu ma trận $\begin{bmatrix} E_1(n) \\ A_2(n+1) \end{bmatrix}$ không suy biến với mọi $n \geq n_0$.

Chúng ta cũng nói rằng hệ (3.1) là không có tính lậ. Dạng (3.2) được gọi là dạng không có tính lậ. Mối liên hệ giữa chỉ số lậ và chỉ số 1 được cho bởi mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.1.1. Hệ (3.1) là không có tính lậ khi và chỉ khi hệ đó có chỉ số 1.

3.1.2. Tính giải được của hệ phương trình sai phân suy biến dưới dạng không có tính lạ

Xét BTGTBD cho hệ (3.1) được cho dưới dạng không có tính lạ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_1(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x(n+1) &= \begin{bmatrix} A_1(n) \\ A_2(n) \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} f_1(n) \\ f_2(n) \end{bmatrix}, \\ x(0) &= x_0, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Định nghĩa 3.1.2. Một dãy $\{x(n)\}_{n \geq 0}$ được gọi là nghiệm của hệ (3.3) nếu nó thỏa mãn (3.3) với mọi $n \geq 0$. Một vectơ ban đầu x_0 được gọi là tương thích với (3.3) nếu BTGTBD (3.3) có ít nhất một nghiệm.

Dưới giả thiết rằng hệ có dạng không có tính lạ, hệ PTSPSB (3.3) được phân rã thành hai phần: một phương trình sai phân và một ràng buộc đại số. Bằng việc dịch chuyển chỉ số $n \rightarrow n+1$ trong phương trình đại số, ta thu được PTSP ở dạng hiện

$$x(n+1) = \begin{bmatrix} E_1(n) \\ A_2(n+1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_1(n) \\ 0 \end{bmatrix} x(n) + \begin{bmatrix} E_1(n) \\ A_2(n+1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(n) \\ -f_2(n+1) \end{bmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (3.4)$$

Một dãy $\{x(n)\}_{n \geq 0}$, $x(n) \in \mathbb{R}^m$ là một nghiệm của (3.3) khi và chỉ khi dãy này thỏa mãn (3.4) với mọi $n \geq 0$ cũng như điều kiện ban đầu tương thích

$$0 = A_2(0)x_0 + f_2(0). \quad (3.5)$$

Định lý 3.1.1. Giả sử rằng hệ PTSPSB (3.3) là không có tính lạ và một điều kiện ban đầu tương thích x_0 , tức là nó thỏa mãn (3.5). Khi đó, BTGTBD (3.3) có nghiệm duy nhất và có thể tính toán một cách tường minh bởi phép truy hồi theo công thức (3.4).

3.2. Số mũ Lyapunov cho hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính

3.2.1. Số mũ Lyapunov và phổ Lyapunov

Xét hệ không có tính lạ dạng thuần nhất

$$\begin{bmatrix} E_1(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x(n+1) = \begin{bmatrix} A_1(n) \\ A_2(n) \end{bmatrix} x(n), \quad n \geq 0. \quad (3.6)$$

Định nghĩa 3.2.1. Một dãy ma trận $\{X(n)\}_{n \geq 0}$, $X(n) \in \mathbb{R}^{m \times d}$, $d \leq d \leq m$ được gọi là ma trận nghiệm cơ bản của (3.6) nếu mỗi cột của ma trận, nghĩa là, $\{X(n)e_i\}_{n \geq 0}$

là một nghiệm của (3.6), trong đó e_i , $1 \leq i \leq d$ là các vectơ cơ sở chuẩn trong $\mathbb{R}^d$, và $\text{rank}(X(n)) = d$ với mọi $n \geq 0$. Một ma trận nghiệm cơ bản được gọi là tối thiểu nếu $\hat{d} = d$.

Với một ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu $\{X(n)\}$ của hệ PTSPSB (3.6), chúng tôi đưa ra các giá trị

$$\lambda_i^u = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|X(n)e_i\|, \quad \lambda_i^l = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \|X(n)e_i\|, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (3.7)$$

Định nghĩa 3.2.2. Ta nói các cột của một ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu tạo thành một cơ sở chuẩn tắc nếu $\sum_{i=1}^d \lambda_i^u$ là nhỏ nhất. Các số λ_i^u , $1 \leq i \leq d$ tương ứng với một cơ sở chuẩn tắc được gọi là số mũ đặc trưng Lyapunov của hệ (3.6). Tập các số mũ Lyapunov (tính cả bội gồm các số mũ Lyapunov bằng nhau) được gọi là phổ Lyapunov của hệ (3.6).

Giả sử các số mũ Lyapunov được cho theo thứ tự giảm dần $\lambda_1^u \geq \lambda_2^u \geq \dots \geq \lambda_d^u$.

Bổ đề sau đây chỉ ra sự tồn tại của một phép biến đổi tương đương động lượng bởi các ma trận trực giao, qua đó đưa hệ ban đầu về một hệ phương trình sai phân dạng tam giác trên.

Bổ đề 3.2.1. Xét một hệ PTSPSB không có tính lạ dạng (3.6) và một ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu $X(n)$. Khi đó, tồn tại hai dãy các ma trận trực giao $U(n)$, $V(n) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sao cho việc đổi biến

$$X(n) = V(n) \begin{bmatrix} Z(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

trong đó $Z(n) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ là ma trận tam giác trên có các phần tử trên đường chéo là số dương, và nhân cả hai vế của phương trình (3.6) từ bên trái bởi ma trận $U^\top(n)$ dẫn đến hệ

$$\mathcal{E}(n)Z(n+1) = \mathcal{A}(n)Z(n), \quad (3.9)$$

trong đó $\mathcal{E}(n) = U_1^\top(n)E(n)V_1(n+1)$, $\mathcal{A}(n) = U_1^\top(n)A(n)V_1(n)$ là các ma trận tam giác trên và không suy biến, và $U_1(n)$, $V_1(n)$ là d cột đầu tiên của các ma trận $U(n)$, $V(n)$ tương ứng.

Nhân cả hai vế của phương trình (3.9) từ bên trái bởi ma trận $\mathcal{E}^{-1}(n)$, ta thu được

$$Z(n+1) = \mathcal{E}^{-1}(n)\mathcal{A}(n)Z(n). \quad (3.10)$$

Mệnh đề 3.2.1. Giả sử rằng ma trận $\mathcal{E}^{-1}(n)\mathcal{A}(n)$ là bị chặn đều với mọi $n \geq 0$. Bất đẳng thức

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^u \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |\det(Y(n, 0))|,$$

thỏa mãn với các số mũ Lyapunov của hệ (3.6), trong đó $Y(n, 0)$ là ma trận chuyển của (3.10) được cho bởi

$$Y(n, 0) = \prod_{k=0}^{n-1} \mathcal{E}^{-1}(k)\mathcal{A}(k).$$

Bổ đề 3.2.2. Xét hệ PTSPSB không có tính lạ (3.6), tồn tại một ma trận hàm trực giao $\hat{Q}(n) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sao cho với việc đổi biến $x(n) = \hat{Q}(n-1)\hat{x}(n)$, ta thu được hệ biến đổi sau

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_{11}(n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \hat{x}(n+1) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11}(n) & \hat{A}_{12}(n) \\ \hat{A}_{21}(n) & \hat{A}_{22}(n) \end{bmatrix} \hat{x}(n), \quad n \geq 0. \quad (3.11)$$

Hơn nữa, hệ (3.11) vẫn có dạng không có tính lạ và như vậy các ma trận $\hat{E}_{11}(n)$ và $\hat{A}_{22}(n)$ là không suy biến.

Nếu ta phân rã nghiệm $\hat{x}(n) = [\hat{x}_1^\top(n), \hat{x}_2^\top(n)]^\top$, thì kết hợp với phương trình (3.11), ta nhận được PTSP dưới dạng căn bản

$$\hat{E}_{11}(n)\hat{x}_1(n+1) = \hat{A}_S(n)\hat{x}_1(n), \quad (3.12)$$

trong đó $\hat{A}_S(n) = \hat{A}_{11}(n) - \hat{A}_{12}(n)\hat{A}_{22}^{-1}(n)\hat{A}_{21}(n)$. Từ đó, ta sẽ có một PTSP dưới dạng hiện

$$\hat{x}_1(n+1) = \hat{E}_{11}^{-1}(n)\hat{A}_S(n)\hat{x}_1(n). \quad (3.13)$$

Mệnh đề 3.2.2. Hệ PTSPSB không có tính lạ (3.6) có ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu với hạng d khi và chỉ khi ma trận $A(n)$ trong (3.6) là không suy biến với mọi $n \geq 0$.

Để mà có các số mũ Lyapunov hữu hạn được định nghĩa tốt của hệ (3.6), chúng ta luôn giả sử rằng

Giả thiết 3.2.1. Hệ PTSPSB (3.6) là không có tính lạ và ma trận hệ số $A(n)$ là không suy biến với mọi $n \geq 0$.

Giả thiết 3.2.2. Đối với hệ PTSP nửa ẩn (3.11), ma trận $\hat{E}_{11}^{-1}(n)\hat{A}_S(n)$ và nghịch đảo của nó bị chặn đều với mọi $n \geq 0$.

Định lý 3.2.1. Giả sử rằng hệ PTSPSB (3.6) và hệ PTSPSB nửa ẩn (3.11) thỏa mãn các Giả thiết 3.2.1 và 3.2.2. Cho $\lambda^u(\hat{A}_{22}^{-1}(n)\hat{A}_{21}(n))$ là số mũ Lyapunov trên của ma trận hàm $\hat{A}_{22}^{-1}(n)\hat{A}_{21}(n)$. Nếu điều kiện

$$\lambda^u(\hat{A}_{22}^{-1}(n)\hat{A}_{21}(n)) \leq 0 \quad (3.14)$$

thỏa mãn, thì phổ Lyapunov của hệ (3.11) và phổ của PTSP dạng căn bản (3.12) trùng nhau và phổ này bao gồm nhiều nhất d số hữu hạn.

3.2.2. Hệ liên hợp và tính chính quy theo nghĩa Lyapunov

Định nghĩa 3.2.3. Hệ

$$E^\top(n-1)y(n) = A^\top(n)y(n+1), \quad n \geq 1, \quad (3.15)$$

được gọi là hệ liên hợp của hệ (3.6).

Mệnh đề 3.2.3. Cho hệ (3.6) là không có tính lạ. Khi đó, hệ liên hợp tương ứng (3.15) cũng không có tính lạ (xét theo chiều lùi).

Định nghĩa 3.2.4. Hệ PTSPSB không có tính lạ (3.6) với một ma trận không suy biến $A(n)$ được gọi là chính quy theo nghĩa Lyapunov nếu đẳng thức sau thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^u = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\det(Y(n, 0))|,$$

trong đó $Y(n, 0)$ là ma trận chuyển của (3.10).

Mệnh đề 3.2.4. Xét hệ PTSPSB (3.11) và giả sử các Giả thiết 3.2.1, 3.2.2, và điều kiện (3.14) thỏa mãn. Khi đó, hệ (3.11) là chính quy theo nghĩa Lyapunov khi và chỉ khi PTSP tương ứng (3.12) là chính quy theo nghĩa Lyapunov.

Tính chính quy của PTSPSB còn có thể được xác định thông qua việc đánh giá tính chính quy theo nghĩa Perron. Cho $-\mu_i^u$ là các số mũ Lyapunov trên của hệ liên hợp (3.15) theo thứ tự tăng dần.

Định lý 3.2.2. Xét hệ PTSPSB (3.11) và giả sử các Giả thiết 3.2.1, 3.2.2, và điều kiện (3.14) thỏa mãn. Giả sử thêm các điều kiện

$$\lambda^u(\hat{A}_{12}(n)\hat{A}_{22}^{-1}(n)) \leq 0, \quad \lambda^u(\hat{E}_{11}(n)) \leq 0, \quad \lambda^u(\hat{E}_{11}^{-1}(n)) \leq 0 \quad (3.16)$$

thỏa mãn. Hệ (3.11) là chính quy khi và chỉ khi đồng nhất thức Perron

$$\lambda_i^u - \mu_i^u = 0, \quad i = 1, \dots, d,$$

thỏa mãn. Trong trường hợp này, hệ liên hợp (3.15) cũng là chính quy.

3.3. Sự ổn định của các số mũ Lyapunov

3.3.1. Bài toán nhiều hai vế

Xét hệ PTSPSB không có tính lạ (3.6) ứng với nhiều có cấu trúc

$$\left(\begin{bmatrix} E_1(n) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1(n) \\ F_2(n) \end{bmatrix} \right) x(n+1) = \left(\begin{bmatrix} A_1(n) \\ A_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(n) \\ B_2(n) \end{bmatrix} \right) x(n), \quad n \geq 0, \quad (3.17)$$

trong đó $F_1(n)$, $B_1(n)$, $F_2(n)$, và $B_2(n)$ có các cỡ thích hợp và chúng bị chặn đều với mọi $n \geq 0$.

Tổng quát, với các nhiễu rất nhỏ có thể phá hủy tính chất không có tính lạ hay tính giải được của các hệ. Bởi lí do đó, chúng ta luôn giả sử rằng nhiễu $F(n)$ là chấp nhận được theo nghĩa, nó đảm bảo cấu trúc $F_2(n) = 0$, và $\text{rank}(E_1(n) + F_1(n)) = \text{rank}(E_1(n)) = d$ với mọi $n \geq 0$.

Bằng việc sử dụng phép biến đổi trực giao được giới thiệu trong Bổ đề 3.2.2 cho phương trình (3.17), ta có

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_{11}(n) + \hat{F}_{11}(n) & \hat{F}_{12}(n) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(n+1) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11}(n) + \hat{B}_{11}(n) & \hat{A}_{12}(n) + \hat{B}_{12}(n) \\ \hat{A}_{21}(n) + \hat{B}_{21}(n) & \hat{A}_{22}(n) + \hat{B}_{22}(n) \end{bmatrix} \hat{x}(n), \quad (3.18)$$

trong đó $\begin{bmatrix} \hat{F}_{11}(n) & \hat{F}_{12}(n) \end{bmatrix} = F_1(n)Q(n)$ và $\begin{bmatrix} \hat{B}_{11}(n) & \hat{B}_{12}(n) \\ \hat{B}_{21}(n) & \hat{B}_{22}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(n) \\ B_2(n) \end{bmatrix} Q(n-1)$.

Để mà phân tích tính chất tiệm cận của nghiệm cũng như sự ổn định của các số mũ Lyapunov của hệ có nhiều (3.17), chúng ta cần thêm một số giả thiết về nhiều.

Giả thiết 3.3.1. Nhiều $F(n)$ là chấp nhận được và thỏa mãn

$$\sup_{n \geq 0} \|\hat{E}_{11}^{-1}(n)\hat{F}_{11}(n)\| < 1.$$

Giả thiết 3.3.2. Các nhiều $F(n), B(n)$ đủ nhỏ và Giả thiết 3.3.1 cũng như điều kiện

$$\sup_{n \geq 0} \|\hat{A}_{22}^{-1}(n+1)\tilde{B}_{22}(n+1)\| < 1$$

thỏa mãn, trong đó

$$\tilde{B}_{22}(n+1) = \left[\hat{B}_{22}(n+1) - (\hat{A}_{21}(n+1) + \hat{B}_{21}(n+1)) (\hat{E}_{11}(n) + \hat{F}_{11}(n))^{-1} \hat{F}_{12}(n) \right].$$

Bổ đề 3.3.1. Xét một hệ PTSPSB không có tính lạ dạng (3.6) sao cho trong dạng biến đổi (3.18) các ma trận khối $\hat{E}_{11}(n)$ và $\hat{A}_{22}(n)$ có nghịch đảo bị chặn. Nếu $F(n)$ và $B(n)$ là các nhiều nhỏ thỏa mãn các Giả thiết 3.3.1 và 3.3.2 thì hệ nhiều (3.18) có cấu trúc không có tính lạ.

Tính ổn định của số mũ Lyapunov cho hệ (3.11) được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 3.3.1. Các số mũ Lyapunov trên được xếp theo thứ tự $\lambda_1^u \leq \lambda_2^u \leq \dots \leq \lambda_d^u$ của hệ (3.11) được gọi là ổn định nếu với bất kỳ $\varepsilon > 0$, luôn tồn tại $\delta > 0$ sao cho các điều kiện $\sup_{n \geq 0} \|F(n)\| < \delta$ và $\sup_{n \geq 0} \|B(n)\| < \delta$ kéo theo hệ nhiều (3.18) vẫn giữ được cấu trúc không có tính lạ và

$$|\lambda_i^u - \gamma_i^u| < \varepsilon, \quad \text{với mọi } i = 1, 2, \dots, d,$$

trong đó γ_i^u là các số mũ Lyapunov trên được sắp thứ tự của hệ nhiều (3.18).

3.3.2. Tính chất tách được tích phân

Định nghĩa 3.3.2. Một ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu cho hệ (3.6) (hoặc hệ (3.11)) được gọi là tách được tích phân nếu với $i = 1, 2, \dots, d-1$ luôn tồn tại các hằng số $\gamma > 0$ và $a > 1$ sao cho

$$\frac{\|X(k)e_i\|}{\|X(j)e_i\|} \cdot \frac{\|X(j)e_{i+1}\|}{\|X(k)e_{i+1}\|} \geq \gamma a^{(k-j)},$$

với mọi $k > j \geq 0$. Nếu một hệ PTSPSB có một ma trận nghiệm cơ bản tối thiểu tách được tích phân thì ta nói rằng nó có tính chất tách được tích phân.

Định lý chính cho sự ổn định của các số mũ Lyapunov dựa trên việc giả thiết hệ có tính chất tách được tích phân.

Định lý 3.3.1. Xét hệ PTSPSB (3.11) và giả sử rằng các Giả thiết 3.2.1 và 3.2.2 thỏa mãn. Giả sử thêm rằng

$$\hat{A}_{22}^{-1}(n)\hat{A}_{21}(n), \hat{A}_{12}(n)\hat{A}_{22}^{-1}(n), \hat{E}_{11}(n), \hat{E}_{11}^{-1}(n) (\hat{A}_{11}(n) - \hat{A}_{12}(n)\hat{A}_{22}^{-1}(n)\hat{A}_{21}(n)) \quad (3.19)$$

bị chặn đều với mọi $n \geq 0$. Khi đó, nếu hệ (3.11) có d số mũ Lyapunov khác nhau thì chúng ổn định khi và chỉ khi hệ thừa nhận tính chất tách được tích phân.

Kết luận chương

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày về các số mũ Lyapunov và phổ Lyapunov cho PTSPSB tuyến tính. Đầu tiên, chúng tôi thiết lập mối liên hệ giữa các khái niệm chỉ số, đồng thời chỉ ra sự tồn tại và duy nhất của nghiệm đối với các PTSPSB không có tính lạ. Tiếp theo, thông qua việc sử dụng các phép biến đổi trực giao, hệ PTSPSB ban đầu được đưa về dạng nửa ẩn; từ đó, chúng tôi chỉ ra được các số mũ Lyapunov của một hệ PTSPSB trùng với các số mũ của PTSP dưới dạng căn bản tương ứng. Đồng thời, chúng tôi cũng xác định các điều kiện cần thiết để đảm bảo sự tồn tại của các số mũ Lyapunov hữu hạn. Bên cạnh đó, phương trình liên hợp của một PTSPSB cũng được giới thiệu, và chúng tôi chứng minh rằng phương trình liên hợp của PTSP căn bản tương đương với PTSP căn bản của hệ liên hợp PTSPSB. Cuối cùng, với các giả thiết về tính bị chặn của các ma trận hệ số, chúng tôi chứng minh rằng tính tách được tích phân là điều kiện cần và đủ cho sự ổn định của các số mũ Lyapunov trong trường hợp các số mũ Lyapunov khác nhau.

Chương 4

Tính toán số mũ Lyapunov cho hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu xây dựng thuật toán để xấp xỉ các số mũ Lyapunov của hệ PTSPSB tuyến tính

$$E(n)x(n+1) = A(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_{n_0}, \quad (4.1)$$

đã được đề cập trong Chương 3.

Ý tưởng chính là biến đổi bài toán (4.1) về dạng không có tính lạ

$$\begin{bmatrix} E_1(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x(n+1) = \begin{bmatrix} A_1(n) \\ A_2(n) \end{bmatrix} x(n), \quad n \geq 0 \quad (4.2)$$

và sau đó áp dụng phương pháp số để giải.

4.1. Phương pháp QR cho phương trình sai phân suy biến tuyến tính

4.1.1. Thuật toán QR

Giả sử ma trận ban đầu $X_0 \in \mathbb{R}^{m \times d}$ có các cột trực chuẩn, tức là, $X_0^\top X_0 = I$ đã được cho sao cho $X(0) = X_0$ thỏa mãn điều kiện ban đầu tương thích $A_2(0)X(0) = 0$.

Cho $n = 0, 1, \dots, N$, ta xác định các dãy $\{\bar{X}(n)\}$ như sau. Đặt $\bar{Q}(0) = X_0$. Với mỗi n , giải hệ phương trình ma trận tuyến tính

$$E(n)\bar{X}(n+1) = A(n)\bar{X}(n), \quad \text{trong đó } \bar{X}(n) = \bar{Q}(n). \quad (4.3)$$

Bằng cách dịch chuyển ma trận khối dưới, phương trình (4.3) có thể viết lại thành

$$\begin{bmatrix} E_1(n) \\ A_2(n+1) \end{bmatrix} \bar{X}(n+1) = \begin{bmatrix} A_1(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{X}(n). \quad (4.4)$$

Đặt

$$\bar{E}(n) = \begin{bmatrix} E_1(n) \\ A_2(n+1) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}(n) = \begin{bmatrix} A_1(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Từ (4.4), ta thu được

$$\bar{X}(n+1) = \bar{E}^{-1}(n) \bar{A}(n) \bar{X}(n) = \bar{E}^{-1}(n) \bar{A}(n) \bar{Q}(n). \quad (4.5)$$

Để duy trì tính trực chuẩn của các ma trận nghiệm cơ bản, ta thực hiện phân tích QR

$$\bar{X}(n+1) = \bar{Q}(n+1) \bar{R}(n), \quad (4.6)$$

trong đó $\bar{R}(n)$ có các phần tử trên đường chéo là dương.

Như vậy, ma trận nghiệm cơ bản $X(n+1)$ có thể được biểu diễn

$$X(n+1) = \bar{Q}(n+1) \bar{R}(n) \bar{R}(n-1) \cdots \bar{R}(0). \quad (4.7)$$

Chúng ta định nghĩa $R(n+1) = \bar{R}(n)R(n)$, trong đó $R(0) = I_d$. Suy ra, ta có biểu diễn $X(n+1) = \bar{Q}(n+1)R(n+1)$ là một phân tích QR của ma trận nghiệm cơ bản. Các số mũ Lyapunov trên của (4.2) được tính toán theo công thức

$$\begin{aligned} \lambda_i^u &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left((\bar{R}(n-1))_{ii} (\bar{R}(n-2))_{ii} \cdots (\bar{R}(0))_{ii} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left((\bar{R}(k))_{ii} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Do đó, thuật toán QR được tóm tắt như sau.

Thuật toán 4.1.1. Phương pháp QR tính toán các số mũ Lyapunov

Đầu vào: Một cặp các dãy ma trận $E(n)$, $A(n)$ trong (4.1), N , N_0 là các số đủ lớn.

Đầu ra: Các giá trị xấp xỉ cho λ_i^u , $i = 1, \dots, d$.

Khởi tạo: Cài đặt $n = 0$, $\lambda_i(0) = 0$, $s_i(0) = 0$. Tính toán ma trận ban đầu $X_0 \in \mathbb{R}^{m \times d}$.

Trong khi $n < N$

1. Nếu $E(n)$, $A(n)$ không có dạng như trong (4.2), tính ma trận $W(n)$ và các ma trận hệ số biến đổi.
2. Giải nghiệm $\bar{X}(n+1)$ theo (4.3).
3. Tính toán phân tích QR theo $\bar{X}(n+1) = \bar{Q}(n+1) \bar{R}(n)$ và thiết lập $\bar{X}(n+1) = \bar{Q}(n+1)$.

4. Cập nhật $s_i(n+1) = s_i(n) + \ln(\bar{R}(n))_{ii}$ và $\lambda_i(n+1) = \frac{1}{n+1}s_i(n+1)$, $i = 1, \dots, d$.
5. Tính toán các giá trị trung bình Steklov tương ứng để kiểm tra tính chất tách được tích phân (nếu cần thiết).
6. Cập nhật $\min_{N_0 \leq n \leq N} \lambda_i(n+1)$ và $\max_{N_0 \leq n \leq N} \lambda_i(n+1)$, $i = 1, \dots, d$.
7. $n := n + 1$.

4.1.2. Phân tích sai số

Trong phép phân tích này, chúng tôi chỉ tập trung vào các sai số đến từ:

1. Sai số phát sinh trong quá trình tính toán biến đổi hệ về dạng không có tính lạ, tức là sai số khi xác định các ma trận hệ số $E_1(n)$, $A_1(n)$, $A_2(n)$ trong phương trình (4.2);
2. Sai số xuất hiện khi giải hệ phương trình tuyến tính (4.3) để tính $\bar{X}(n+1)$;

Ý tưởng chính trong phân tích của chúng tôi là quy bài toán nhiều cho hệ PTSPSB tuyến tính không có tính lạ (4.2) về PTSP dạng căn bản tương ứng có cùng số mũ Lyapunov.

Trước tiên, xét hệ PTSP dạng căn bản (3.13)

$$\hat{x}_1(n+1) = \mathcal{A}(n)\hat{x}_1(n), \quad n \geq 0, \quad (4.9)$$

trong đó $\mathcal{A}(n) = \hat{E}_{11}^{-1}(n)\hat{A}_S(n)$ là ma trận không suy biến với mọi $n \geq 0$. Tiếp theo, ta xét hệ nhiều (3.18), sử dụng một phép đổi biến $x(n) = P(n)y(n)$ như trong Bổ đề 3.2.2, ta thu được

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_{11}(n) + \hat{F}_{11}(n) & \hat{F}_{12}(n) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} y(n+1) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11}(n) + \hat{B}_{11}(n) & \hat{A}_{12}(n) + \hat{B}_{12}(n) \\ \hat{A}_{21}(n) + \hat{B}_{21}(n) & \hat{A}_{22}(n) + \hat{B}_{22}(n) \end{bmatrix} y(n), \quad (4.10)$$

trong đó

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_{11}(n) & \hat{F}_{12}(n) \end{bmatrix} = F_1(n)P(n+1) \text{ và } \begin{bmatrix} \hat{B}_{11}(n) & \hat{B}_{12}(n) \\ \hat{B}_{21}(n) & \hat{B}_{22}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(n) \\ B_2(n) \end{bmatrix} P(n).$$

Giả thiết 4.1.1. Giả sử rằng tồn tại các hằng số dương M_i , $i = 1, \dots, 6$, và một số δ đủ nhỏ sao cho

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 0} \|\hat{E}_{11}(n)\| &\leq M_1, & \sup_{n \geq 0} \|\hat{E}_{11}^{-1}(n)\| &\leq M_2, \\ \sup_{n \geq 0} \left\| \hat{E}_{11}^{-1}(n) (\hat{A}_{11}(n) - \hat{A}_{12}(n)\hat{A}_{22}^{-1}(n)\hat{A}_{21}(n)) \right\| &\leq M_3, \\ \sup_{n \geq 0} \|\hat{A}_{22}^{-1}(n)\| &\leq M_4, & \sup_{n \geq 0} \|\hat{A}_{22}^{-1}(n)\hat{A}_{21}(n)\| &\leq M_5, \\ \sup_{n \geq 0} \|\hat{A}_{12}(n)\hat{A}_{22}^{-1}(n)\| &\leq M_6, & \sup_{n \geq 0} \|F_1(n)\| &\leq \delta, & \sup_{n \geq 0} \|B(n)\| &\leq \delta. \end{aligned}$$

Để đưa ra các chặn trên cho nhiều, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 4.1.1. *Xét một hệ PTSPSB tuyến tính không có tính lạ (3.11), và hệ nhiễu (4.10) tương ứng, trong đó Giả thiết 4.1.1 thỏa mãn. Nếu*

$$\delta < \min\{(M_2 + M_4 + M_2M_5)^{-1}, M_4^{-1}\}$$

thì hệ chịu nhiễu (4.10) vẫn có dạng không có tính lạ và ta có các ước lượng

$$\left\| \left(\hat{A}_{22}(n) + \hat{B}_{22}(n) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{M_4}{1 - M_4\delta} \text{ và}$$

$$\left\| \left[\hat{E}_{11}(n) + \hat{F}_{11}(n) - \hat{B}_{12}(n) \left[\hat{A}_{22}(n+1) + \hat{B}_{22}(n+1) \right]^{-1} \left[\hat{A}_{21}(n+1) + \hat{B}_{21}(n+1) \right] \right]^{-1} \right\| \leq \frac{M_2(1 - M_4\delta)}{1 - \delta(M_2 + M_4 + M_2M_5\delta)}.$$

Mệnh đề dưới đây thiết lập bài toán PTSP dưới dạng căn bản của hệ chịu nhiễu (4.10).

Mệnh đề 4.1.1. *Dưới Giả thiết 4.1.1 và δ thỏa mãn điều kiện trong Bổ đề 4.1.1, phương trình căn bản của hệ PTSPSB chịu nhiễu (4.10) được viết lại dưới dạng*

$$y_1(n+1) = (\mathcal{A}(n) + \mathcal{F}(n))y_1(n), \quad n \geq 0, \quad (4.11)$$

trong đó thành phần nhiễu thỏa mãn $\|\mathcal{F}(n)\| \leq N_2(\delta)\delta$, $N_2(\delta)$ là một hàm bị chặn của δ .

Giả sử cho trước ma trận trực giao ban đầu $\hat{Q}(0)$ và ma trận tam giác trên $\hat{R}(0)$. Ta xác định dãy các ma trận trực giao $\{\hat{Q}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ và dãy các ma trận tam giác trên với các phần tử trên đường chéo là dương $\{\hat{R}(n)\}_{n=1}^{\infty}$ thông qua phép đổi biến $\hat{x}_1(n) = \hat{Q}(n)v(n)$. Khi đó, hệ (4.9) được chuyển về dạng tam giác trên $v(n+1) = \hat{R}(n)v(n)$ và

$$\hat{Q}(n+1)\hat{R}(n) = \mathcal{A}(n)\hat{Q}(n). \quad (4.12)$$

Từ đó, suy ra

$$\mathcal{A}(n)\mathcal{A}(n-1)\cdots\mathcal{A}(0)\hat{Q}(0) = \hat{Q}(n+1)\hat{R}(n)\cdots\hat{R}(0).$$

Áp dụng cách làm tương tự cho hệ (4.11) với ma trận khả nghịch $\mathcal{A}(n) + \mathcal{F}(n)$ với mọi $n \geq 0$. Thực hiện phép đổi biến $y_1(n) = \tilde{Q}(n)u(n)$, và ta thu được hệ $u(n+1) = \tilde{R}(n)u(n)$, và

$$\tilde{Q}(n+1)\tilde{R}(n) = [\mathcal{A}(n) + \mathcal{F}(n)]\tilde{Q}(n), \quad (4.13)$$

trong đó ma trận $\tilde{Q}(n)$ là trực giao và ma trận $\tilde{R}(n)$ là tam giác trên với các phần tử trên đường chéo là dương.

Nếu $\tilde{Q}(0) = \hat{Q}(0)$, thì ta có mối liên hệ

$$\hat{Q}(n+1)\hat{R}(n)\cdots\hat{R}(0) = \tilde{Q}(n+1)[\tilde{R}(n) + \mathcal{E}(n)]\cdots[\tilde{R}(0) + \mathcal{E}(0)], \quad (4.14)$$

trong đó $\mathcal{E}(j) = -\tilde{Q}^\top(j+1)\mathcal{F}(j)\tilde{Q}(j)$, $j = 0, \dots, n$.

Tiếp theo, ta thực hiện phân tích QR của tích các ma trận chịu nhiễu

$$[\tilde{R}(n) + \mathcal{E}(n)]\cdots[\tilde{R}(0) + \mathcal{E}(0)] = Q(n+1)U(n+1), \quad (4.15)$$

trong đó ma trận tam giác trên $U(n)$ có các phần tử trên đường chéo dương. Khi đó, nhờ tính duy nhất của phân tích QR đối với một ma trận khả nghịch, ta thu được $\hat{Q}(n+1) = \tilde{Q}(n+1)Q(n+1)$, và

$$\|\hat{Q}(n+1) - \tilde{Q}(n+1)\| = \|\tilde{Q}(n+1)(I - Q(n+1))\| = \|I - Q(n+1)\|.$$

Do đó, sai số toàn cục của thành phần trực giao trong phân tích QR là nhỏ nếu dãy ma trận $\{Q(n)\}_{n=1}^\infty$ là gần đều tới ma trận đơn vị.

Để có được các chặn trên một cách tường minh cho các số mũ Lyapunov tính toán của hệ PTSPSB (4.2), chúng ta cần giả thiết sau.

Giả thiết 4.1.2. 1. $\sup_n \frac{\|\mathcal{E}(n)\|}{|(\tilde{R}(n))_{ii}|} = \mathcal{O}(\delta)$ với δ đủ nhỏ, $1 \leq i \leq d$.

2. $\frac{|(\tilde{R}(n))_{rs}|}{|(\tilde{R}(n))_{ii}|}$ bị chặn đều với mọi $i \leq r, s \leq d$.

Nếu Giả thiết 4.1.2 thỏa mãn thì tính bị chặn theo điểm của $Q(n) - I$ sẽ thỏa mãn

$$\sup_n |(Q(n) - I)_{ij}| \leq \rho_{ij} = \mathcal{O}(\delta). \quad (4.16)$$

Giả sử λ_i và μ_i là các số mũ Lyapunov chính xác và xấp xỉ thứ i tương ứng với $1 \leq i \leq d$. Suy ra, ta có

$$\lambda_i = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln((\hat{R}(k))_{ii}), \quad \mu_i = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln((\tilde{R}(k))_{ii}), \quad 1 \leq i \leq d. \quad (4.17)$$

Cuối cùng, chúng ta thu được một cận trên cho sai số giữa các số mũ Lyapunov trong hệ (4.9) và hệ (4.11).

Định lý 4.1.1. Xét các hệ (4.9) và (4.11) với các số mũ Lyapunov tương ứng là λ_i và μ_i , $1 \leq i \leq d$, và giả sử rằng hệ không có nhiễu (4.9) là tách được tích phân. Nếu Giả thiết 4.1.1 và Giả thiết 4.1.2 thỏa mãn, thì với δ đủ nhỏ, hệ chịu nhiễu (4.11) vẫn có tính chất tách được tích phân. Hơn nữa, sai số giữa số mũ Lyapunov chính xác và xấp xỉ thỏa mãn ước lượng sau:

$$\begin{aligned} |\lambda_i - \mu_i| \leq & \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left| \frac{(\mathcal{E}(k))_{ii}}{(\tilde{R}(k))_{ii}} \right| + \sum_{r,s} \rho_{ri} \rho_{si} \left| \frac{(\tilde{R}(k) + \mathcal{E}(k))_{rs}}{(\tilde{R}(k))_{ii}} \right| \right. \\ & \left. + \sum_r \rho_{ri} \left| \frac{(\tilde{R}(k) + \mathcal{E}(k))_{ri} + (\tilde{R}(k) + \mathcal{E}(k))_{ir}}{(\tilde{R}(k))_{ii}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Hệ quả 4.1.1. Nếu δ là đủ nhỏ, và tất cả các giả thiết của Định lý 4.1.1 thỏa mãn, thì ta có

$$|\lambda_i - \mu_i| = \mathcal{O}(\delta), \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

4.2. Số mũ Lyapunov của hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính thu được bằng phương pháp rời rạc hóa

Xét một hệ PTVPDS tuyến tính (4.1) với các hệ số đủ trơn. Với một bước lưới cho trước $h > 0$, áp dụng sơ đồ Euler hiện cho phương trình (4.1) tại các thời điểm rời rạc $t_n = t_0 + nh$, với các số nguyên $n = 0, 1, \dots$, thu được

$$E(t_n) \frac{x(n+1) - x(n)}{h} = A(t_n)x(n), \quad n \geq 0, \quad (4.18)$$

phương trình này tương đương với

$$\hat{E}(n)x(n+1) = \hat{A}(n)x(n), \quad (4.19)$$

trong đó $\hat{E}(n) = E(t_n)$, $\hat{A}(n) = E(t_n) + hA(t_n)$, và $x(n) \approx x(t_n)$. Bằng việc nhân cả hai vế của phương trình (4.1) với một ma trận không suy biến thích hợp $P(t)$ từ bên trái, chúng ta thu được một PTVPDS dạng biến đổi

$$\begin{bmatrix} E_1(t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x'(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix} x(t), \quad t \geq t_0. \quad (4.20)$$

Nhân cả hai vế của phương trình (4.19) bởi ma trận $P(t_n)$, ta được

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1(n) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x(n+1) = \begin{bmatrix} \hat{E}_1(n) + h\hat{A}_1(n) \\ \hat{A}_2(n) \end{bmatrix} x(n), \quad n \geq 0, \quad (4.21)$$

trong đó $\hat{E}_1(n) = E_1(t_n)$, $\begin{bmatrix} \hat{A}_1(n) \\ \hat{A}_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(t_n) \\ A_2(t_n) \end{bmatrix}$.

Như vậy, không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử hệ (4.1) được cho dưới dạng không có tính lạ (4.20).

Định nghĩa 4.2.1. PTVPDS tuyến tính không có tính lạ (4.20) được gọi là không có tính lạ vững nếu ma trận $\bar{E}(t) = \begin{bmatrix} E_1(t) \\ A_2(t) \end{bmatrix}$ có nghịch đảo bị chặn với mọi $t \geq t_0$, nghĩa là, ma trận $\bar{E}(t)$ không suy biến và ma trận nghịch đảo tương ứng của nó bị chặn đều với $t \geq t_0$.

Bổ đề 4.2.1. Sơ đồ Euler hiện áp dụng cho PTVPDS không có tính lạ vững (4.20) sẽ sinh ra một hệ PTSPSB tuyến tính không có tính lạ (4.21).

Đặt $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$ là các số mũ Lyapunov chính xác của PTVPDS (4.20) và $\{\mu_i\}_{i=1}^d$ là số mũ Lyapunov của PTSPSB (4.21).

Định lý 4.2.1. *Xét PTVPDS không có tính lậ vững (4.20) và hệ rời rạc hóa tương ứng của nó (4.21). Nếu hệ (4.20) là tách được tích phân, thì chúng ta có ước lượng*

$$|\lambda_i - \mu_i| = \mathcal{O}(h),$$

với bước lưới h đủ nhỏ.

4.3. Thử nghiệm số

Trong phần này, chúng tôi trình bày ba ví dụ để minh họa các kết quả lý thuyết của phần trước. Ở ví dụ đầu tiên, chúng tôi xấp xỉ các số mũ Lyapunov của một hệ PTSP bằng thuật toán QR. Trong ví dụ thứ hai và thứ ba, chúng tôi xây dựng một PTSPSB từ một hệ PTVPDS không có tính lậ qua sơ đồ Euler hiện với các bước lưới khác nhau nhưng cố định. Mặc dù trong thực tế tính toán chúng ta hầu như không sử dụng sơ đồ hiện cho việc giải số các PTVPDS và xấp xỉ phổ của chúng, mục đích của chúng tôi ở đây là minh họa phương pháp QR và các kết quả trong phần 4.2. Cuối cùng, chúng tôi so sánh các số mũ Lyapunov tính toán của hệ PTSPSB với các số mũ Lyapunov của hệ PTVPDS ban đầu để đánh giá độ tin cậy của phương pháp.

Kết luận chương

Trong chương này, chúng tôi đã đề xuất và nghiên cứu phương pháp số dựa trên phân tích QR để tính các số mũ Lyapunov của các PTSPSB tuyến tính. Phương pháp này được áp dụng cho PTSPSB đã được biến đổi về dạng không có tính lậ. Ở mỗi bước thời gian, ta cần phải giải hệ tuyến tính và thực hiện trực giao hóa lại nghiệm bởi một phép phân tích QR. Trong phân tích sai số, một phép đổi biến trực giao được sử dụng để biến đổi PTSPSB tuyến tính không lậ ban đầu thành dạng khối, từ đó rút ra được một PTSP dạng căn bản. Cách thiết lập này cho phép chúng tôi thu được một cận trên của sai số cho các số mũ Lyapunov được tính toán.

Chúng tôi cũng đã nghiên cứu mối quan hệ giữa phổ của một PTVPDS và PTSPSB thu được từ việc rời rạc hóa thông qua phương pháp Euler hiện. Dưới các giả thiết phù hợp, chúng tôi cũng đã chứng minh rằng các số mũ Lyapunov của PTSPSB hội tụ về các số mũ của hệ PTVPDS ban đầu khi bước lưới tiến tới 0. Các thử nghiệm số được thực hiện để minh họa cho các kết quả lý thuyết.

Kết luận và kiến nghị

Kết quả đạt được của luận án

Luận án đề xuất phương pháp QR bao gồm QR rời rạc và QR liên tục kết hợp với phương pháp kiểm soát sai số và lựa chọn bước đi như HERK và ESDIRK để xấp xỉ số mũ Lyapunov của PTVPDS dạng nửa tuyến tính. Luận án cũng đã nghiên cứu lý thuyết, các tính chất, và phương pháp số để tính toán các số mũ cũng như khoảng phổ Lyapunov của hệ PTSPSB.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Mở rộng các khái niệm về số mũ Lyapunov cho hệ PTVPDS nửa tuyến tính. Đưa ra thuật toán QR kết hợp phương pháp HERK và ESDIRK một cách chi tiết, sau đó là phân tích sai số của việc tính toán số mũ Lyapunov theo phương pháp số. Một số thử nghiệm số đã được đưa ra và so sánh tính hiệu quả của các phương pháp số.
2. Xây dựng lý thuyết và các tính chất của số mũ Lyapunov cho hệ PTSPSB chỉ số 1 được biến đổi về dạng không có tính lạ.
3. Sử dụng phương pháp QR để tính toán xấp xỉ số mũ và khoảng phổ Lyapunov của PTSPSB không có tính lạ. Thực hiện phân tích sai số để thể hiện tính hiệu quả của thuật toán. Tiếp theo, chứng minh được số mũ Lyapunov của PTSPSB thu được qua một phép rời rạc hoá dạng hiện sẽ tiến tới số mũ của PTVPDS ban đầu khi bước lưới h tiến tới 0. Cuối cùng, một số thử nghiệm số đưa ra để minh họa cho các kết quả lý thuyết.

Một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

1. Mở rộng các phương pháp số cho PTVPDS dạng tổng quát. Nghiên cứu thêm về phương pháp số để giải phương trình phi tuyến cho thành phần trực giao Q phát sinh trong quá trình sử dụng thuật toán QR liên tục kết hợp với phương pháp ESDIRK.
2. Mở rộng việc tính toán các số mũ Lyapunov cho hệ PTSPSB dạng nửa tuyến tính và hệ PTSPSB chuyển mạch.
3. Tính toán số mũ Bohl, phổ Sacker-Sell cho các hệ PTVPDS phi tuyến dạng tổng quát có chỉ số 1, PTSPSB phi tuyến có chỉ số 1.

Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

1. Danh mục công trình khoa học đã được công bố

[CT1] Linh V.H., Truong N.D., and Tuyen P.Q. (2025), "On computation of Lyapunov exponents by QR methods with error control for semi-linear DAEs", *DAE panel* 3, 22 pages, <https://doi.org/10.52825/dae-p.v3i.2632>

[CT2] Hoang L.H., Linh V.H., and Tuyen P.Q. (2026), "On Lyapunov exponents of linear singular systems of difference equations", *Vietnam J. Math.* 54, pp. 381–403.

2. Danh mục công trình khoa học đang gửi đăng

[CT3] Hoang L.H., Linh V.H., and Tuyen P.Q. (2025), "Computation of Lyapunov exponents for linear singular systems of difference equations", *Under review*.