

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**

**PHẠM MINH VƯƠNG**

**PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH VÀ ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN  
CỦA VỎ TRỐNG CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN THEO  
LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG TRƯỢT BẬC CAO**

Chuyên ngành: Cơ học vật rắn  
Mã số: 9440109.02

**DỰ THẢO TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ**

**Hà Nội - 2022**

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại Học Khoa Học  
Tự Nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Nguyễn Đình Đức**

Phản biện:.....

.....

Phản biện:.....

.....

Phản biện:.....

.....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp Đại học Quốc gia  
chấm luận án tiến sĩ họp tại .....vào  
hồi.....giờ.....ngày.....tháng.....năm.....

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội

## DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Dung, D.V., P.M. Vuong (2017), "Analytical investigation on buckling and postbuckling of FGM toroidal shell segment surrounded by elastic foundation in thermal environment and under external pressure using TSDT", *Acta Mechanica* Vol. 228 (10), pp. 3511-3531. (Springer, SCIE, IF = 2.698).

2. Nguyễn Đình Đức, Phạm Minh Vương. *Phân tích ổn định tĩnh của vỏ trống FGM dưới tác dụng của tải xoắn. Hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ X*. 2018. Hà Nội ngày 8-9/12/2017. Tập 3: Cơ học vật rắn. Quyển 1. Trang 300-306

3. Vuong, P.M., N.D. Duc (2018), "Nonlinear response and buckling analysis of eccentrically stiffened FGM toroidal shell segments in thermal environment", *Aerospace Science and Technology* Vol. 79, pp. 383-398. (Elsevier, SCI, IF = 5.107)

4. Phạm Minh Vương, Nguyễn Thị Nga (2018). *Phân tích ổn định của vỏ trống sandwich FGM chịu áp lực ngoài theo lý thuyết biến dạng trượt bậc ba. Hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ X*. Hà Nội ngày 8-9/12/2017. Tập 3: Cơ học vật rắn. Quyển 2. Trang 1479-1486.

5. Phạm Minh Vương and Nguyen Dinh Duc (2019). *Buckling and post-buckling of FGM toroidal shell segments loaded by axial compression using Reddy's third-order shear deformation theory. The 5th International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 5)*. Hanoi, October 11÷12, 2019. Trường Đại học Công nghệ, ĐHQGHN.

6. Vuong, P.M., N.D. Duc (2019), "Nonlinear Buckling and Postbuckling of a FGM Toroidal Shell Segment Under a Torsional Load in a Thermal Environment Within Reddy's Third-Order Shear

Deformation Shell Theory", *Mechanics of Composite Materials* Vol. 55 (4), pp. 467-482. (Springer, SCIE, IF = 1.333).

7. Vuong, P.M., N.D. Duc (2020), "Nonlinear vibration of FGM moderately thick toroidal shell segment within the framework of Reddy's third order-shear deformation shell theory", *International Journal of Mechanics and Materials in Design* Vol. 16 (2), pp. 245-264. (Springer, SCIE, IF = 4.011).

8. Vuong, P.M., N.D. Duc (2020), "Nonlinear static and dynamic stability of functionally graded toroidal shell segments under axial compression", *Thin-Walled Structures* Vol. 155, pp. 106973. (Elsevier, SCI, IF = 4.442).

9. Vuong, P.M., N.D. Duc (2020), "Nonlinear buckling and post-buckling behavior of shear deformable sandwich toroidal shell segments with functionally graded core subjected to axial compression and thermal loads", *Aerospace Science and Technology* Vol. 106, pp. 106084. (Elsevier, SCI, IF = 5.107).

10. Duc, N.D., P.M. Vuong (2022), "Nonlinear vibration response of shear deformable FGM sandwich toroidal shell segments", *Meccanica* Vol. 57 (5), pp. 1083-1103. (Springer, SCIE, IF = 2.258).

## MỞ ĐẦU

### Tính cấp thiết của đề tài

Vật liệu FGM với những ưu điểm nổi bật là khả năng kháng nhiệt xuất sắc và độ cứng rất cao nên là sự lựa chọn lý tưởng để sản xuất các kết cấu làm việc trong các điều kiện khắc nghiệt. Phần lớn những nghiên cứu phân tích ứng xử cơ học của các kết cấu tấm vỏ FGM sử dụng lý thuyết tấm vỏ mỏng. Những nghiên cứu sử dụng lý thuyết vỏ bậc cao còn ít. Với việc hạn chế giả thiết thì lý thuyết tấm vỏ bậc cao có thể cho ra các kết quả phân tích sát với thực tế hơn so với các kết quả được tìm ra bởi lý thuyết tấm vỏ mỏng. Vỏ trống là vỏ có hai độ cong  $a$  và  $R$ . Nếu cho độ cong lớn  $a \rightarrow 0$  thì vỏ trống trở thành vỏ trụ, một kết cấu phổ biến trong kỹ thuật. Do những khó khăn nhất định về mặt toán học, những bài toán phân tích kết cấu vỏ trống sử dụng lý thuyết vỏ bậc cao còn đang được bỏ ngỏ. Nếu giải được các bài toán này sẽ giúp ích phân tích ứng xử cơ học của vỏ trống dày giúp ích cho các nhà thiết kế. Vì vậy luận án lựa chọn đề tài “phân tích ổn định và động lực phi tuyến của vỏ trống có cơ tính biến thiên theo lý thuyết biến dạng trượt bậc cao”.

### Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung phân tích ổn định và dao động của kết cấu vỏ trống FGM có và không có gân gia cường dưới tác dụng của tải cơ hoặc tải nhiệt.

### Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy có tính đến tính phi tuyến hình học Von Karman để thiết lập phương trình cân bằng cũng như phương trình chuyển động cho vỏ trống. Phương pháp Galerkin được sử dụng để biến đổi hệ phương trình đạo hàm riêng về phương trình vi phân thường, sau đó xây dựng biểu thức của tải vòng và biểu thức tải – độ võng cho bài toán ổn định tĩnh. Trong bài toán phân tích động lực, hệ phương trình chuyển động được giải số bằng phương pháp Runge-Kutta. Tải tới hạn của bài toán ổn định động được tìm theo tiêu chuẩn ổn định động Budiansky-Roth.

### Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của nghiên cứu

Các kết quả nghiên cứu trong luận án có thể được sử dụng làm tham khảo trong tính toán thiết kế và kiểm nghiệm kết cấu. Đặc biệt

các công thức hiện của tải vòng và tần số dao động tự do có thể được sử dụng một cách tiện lợi cho các nhà thiết kế góp phần tạo ra các kết cấu hoạt động hiệu quả, an toàn và tin cậy. Về mặt học thuật, các kết quả tính toán trong luận án sử dụng tiếp cận giải tích cũng góp một phần nhỏ làm phong phú thêm kho tàng tri thức về phân tích kết cấu.

### **Cấu trúc của luận án**

Luận án bao gồm ba chương, trong đó chương 1 trình bày tổng quan về vấn đề nghiên cứu; chương 2 trình bày bài toán phân tích ổn định tĩnh; chương 3 trình bày bài toán ổn định động và dao động. Cuối cùng là kết luận, hướng phát triển của luận án.

## **CHƯƠNG 1 TỔNG QUAN**

### **1.1. Vật liệu FGM**

Vật liệu FGM có cấu tạo từ hai hay nhiều thành phần có cơ tính khác nhau. Hiện nay, loại vật liệu FGM được quan tâm nghiên cứu nhiều được cấu tạo từ hai thành phần là kim loại và gốm trong đó tỷ lệ thể tích của mỗi thành phần biến thiên liên tục từ mặt này sang mặt kia của thành kết cấu.

Tỷ phần thể tích của các vật liệu thành phần trong FGM phân bố liên tục theo một quy luật nào đó. Chúng có thể biến đổi liên tục theo một chiều (1D-FGM), hai chiều (2D-FGM) hoặc ba chiều (3D-FGM). Trong khuôn khổ luận án, chỉ xét loại vật liệu 1D-FGM, trong đó các đặc trưng của kim loại và gốm biến đổi theo một chiều từ mặt giàu kim loại sang mặt giàu gốm hoặc ngược lại. Theo các nghiên cứu đã được công bố, đối với loại vật liệu 1D-FGM, tỷ phần thể tích của kim loại và gốm có thể biến đổi theo quy luật hàm lũy thừa (P-FGM), hàm sigmoid (S-FGM) hoặc hàm mũ (E-FGM).

Vì các thành phần kim loại và gốm trong vật liệu FGM biến đổi liên tục nên tại một vị trí nào đó trong khối vật liệu FGM luôn có cả hai thành phần kim loại và gốm, các đặc trưng hiệu dụng của vật liệu FGM luôn phụ thuộc vào thuộc tính của cả hai thành phần vật liệu. Để xác định các đặc trưng hiệu dụng của vật liệu FGM theo các đặc trưng của các thành phần vật liệu, có một số mô hình thường được sử dụng là mô hình Voight, mô hình Mori-Tanaka, mô hình Reuss, mô hình

Hashin-Shtrikman, mô hình Tamura...Luận án sử dụng mô hình Voight để tính toán.

Hiện nay vật liệu FGM đã được sử dụng trong nhiều lĩnh vực như: công nghiệp hàng không vũ trụ, công nghiệp ô tô, quốc phòng, năng lượng, điện tử, y sinh, công nghiệp hàng hải...

Công nghệ chế tạo kết cấu FGM phức tạp, tùy thuộc vào độ dày của thành kết cấu mà lựa chọn cách sản xuất phù hợp. Có một số phương pháp chế tạo như phương pháp lắng đọng hơi, phương pháp luyện kim bột, phương pháp li tâm, phương pháp in 3D.

## **1.2. Các nghiên cứu về vật liệu FGM**

### **1.2.1. Phân tích tĩnh các kết cấu tấm vỏ FGM**

Bài toán phân tích tĩnh là bài toán tính toán ứng suất, biến dạng trong kết cấu. Bài toán này đã được mở rộng từ các kết cấu tấm và vỏ làm bằng vật liệu thuần nhất và vật liệu composite phân lớp sang các kết cấu tấm vỏ FGM.

### **1.2.2. Phân tích ổn định tĩnh các kết cấu tấm và vỏ FGM**

Ổn định của kết cấu chịu biến dạng là khả năng duy trì được trạng thái cân bằng ban đầu của kết cấu khi nó chịu kích động nhỏ, nếu khả năng đó mất đi thì kết cấu đó là không ổn định. Trạng thái ranh giới giữa trạng thái ổn định và trạng thái không ổn định được gọi là trạng thái tới hạn, tải trọng ứng với trạng thái này được gọi là tải tới hạn. Hai vấn đề chính được quan tâm nghiên cứu trong bài toán ổn định tĩnh là xác định tải tới hạn và xác định quan hệ tải – độ võng sau tới hạn giúp phân tích ứng xử của kết cấu ở giai đoạn sau khi tải tác dụng vượt quá giá trị tới hạn. Các bài toán phân tích ổn định của các kết cấu FGM như tấm, panel, vỏ trụ, vỏ nón, vỏ trống, vỏ cầu... đều đã được nghiên cứu. Phần lớn các nghiên cứu sử dụng lý thuyết vỏ mỏng. Các bài toán sử dụng lý thuyết vỏ bậc cao còn ít. Đặc biệt bài toán ổn định của vỏ trống sử dụng lý thuyết vỏ bậc cao chưa được nghiên cứu. Bài toán này sẽ được trình bày trong chương 2 của luận án.

### **1.2.3. Phân tích ổn định động các kết cấu tấm và vỏ FGM**

Dưới tác dụng của tải tăng theo thời gian, độ võng của kết cấu có biên độ biến đổi theo thời gian, nếu tại thời điểm nào đây biên độ của độ võng gia tăng đột ngột thì kết cấu được gọi là mất ổn định. Vấn đề thường được quan tâm trong bài toán ổn định động là xác định tải tới

hạn động lực. Trong các bài toán tải tăng theo thời gian, tiêu chuẩn Budiansky-Roth thường được sử dụng để xác định giá trị tải tới hạn cũng như thời gian kết cấu mất ổn định. Bài toán ổn định động của kết cấu vỏ trống FGM sử dụng lý thuyết vỏ mỏng đã được nghiên cứu. Tuy nhiên bài toán tương ứng sử dụng lý thuyết vỏ bậc cao còn đang bị bỏ ngỏ. Chương 3 của luận án sẽ đề cập đến bài toán này.

#### 1.2.4. Phân tích dao động của các kết cấu tấm vỏ FGM

Các vấn đề thường gặp trong phân tích dao động của các kết cấu FGM là xác định các đặc trưng dao động như tần số, tính toán đáp ứng của dao động cưỡng bức và các vấn đề liên quan đến cộng hưởng. Bài toán dao động của vỏ trống mỏng đã được nghiên cứu. Trong khi đó bài toán tương ứng cho vỏ trống dày cũng đang được bỏ ngỏ. Chương 3 của luận án sẽ trình bày nghiên cứu về bài toán này.

#### 1.3. Đánh giá chung về các kết quả đã đạt được và những vấn đề cần được phát triển

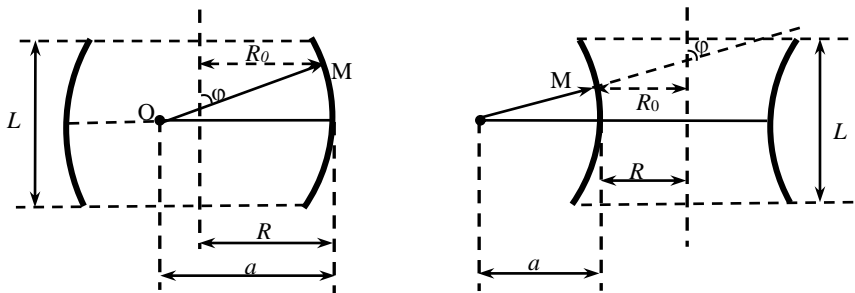
Các vấn đề về tĩnh và động của vỏ trống thuần nhất, vỏ trống FGM đều đã được các nhà khoa học nghiên cứu. Tuy nhiên các nghiên cứu này đều sử dụng lý thuyết vỏ mỏng. Còn thiếu vắng các nghiên cứu về vỏ trống dày sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.

## CHƯƠNG 2

### PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH TĨNH VỎ TRỐNG FGM

#### 2.1. Đặt vấn đề

#### 2.2. Các phương trình cơ bản



Hình 1.2

Khảo sát vỏ mỏng có độ dài  $L$ , bán kính đường tròn xích đạo  $R$ , bán kính lớn  $a$  như biểu diễn ở Hình 1.2.

Quy luật vật liệu

$$\begin{aligned} [E(z); \alpha(z); \rho(z)] &= [E_m; \alpha_m; \rho_m]V_m + [E_c; \alpha_c; \rho_c]V_c \\ V_c(z) &= \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^k; V_m(z) = 1 - V_c(z); k \geq 0; -h/2 \leq z \leq h/2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Quan hệ biến dạng – chuyển vị

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x^{(1)} + z^3k_x^{(3)}; \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + zk_y^{(1)} + z^3k_y^{(3)} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}^{(1)} + z^3k_{xy}^{(3)}; \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 + z^2k_{xz}^{(2)}; \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 + z^2k_{yz}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Quan hệ ứng suất – biến dạng

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (1+\nu)\alpha\Delta T \\ \varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - (1+\nu)\alpha\Delta T \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{pmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Hệ thức nội lực, nội lực bậc cao

$$\begin{aligned} (P_j, M_j, N_j) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_j(z^3, z, 1) dz; j = x, y \\ (P_{xy}, M_{xy}, N_{xy}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}(z^3, z, 1) dz \\ (R_j, Q_j) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{jz}(z^2, 1) dz; j = x, y \end{aligned} \quad (2.9)$$

Hệ phương trình cân bằng theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0; N_{xy,y} + N_{x,x} = 0 \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & Q_{x,x} + Q_{y,y} - 3c(R_{x,x} + R_{y,y}) + c(P_{x,xx} + 2P_{xy,xy} + P_{y,yy}) \\ & + N_x/a + N_y/R + N_y w_{,yy} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_x w_{,xx} \\ & + q - K_1 w + K_2 (w_{,xx} + w_{,yy}) = 0, c = 4 / (3h^2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$M_{x,x} + M_{y,y} - c(P_{x,x} + P_{y,y}) - Q_x + 3cR_x = 0 \quad (2.17)$$

$$M_{y,y} + M_{x,x} - c(P_{y,y} + P_{x,x}) - Q_y + 3cR_y = 0 \quad (2.18)$$

Đưa vào hàm ứng suất  $F(x,y)$  sao cho  $N_{xy} = -F_{,xy}$ ,  $N_y = F_{,xx}$ ,  $N_x = F_{,yy}$ , khi đó hệ phương trình cân bằng được biến đổi về dạng:

$$\begin{aligned} & A_1 \nabla (\phi_{y,y} + \phi_{x,x}) + A_2 (\nabla \nabla w) + F_{,yy}/a + F_{,xx}/R + \\ & F_{,yy} w_{,xx} + F_{,xx} w_{,yy} - 2F_{,xy} w_{,xy} - K_1 w + K_2 \nabla w + q = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & A_3 (\phi_{x,yy} - \nu \phi_{x,yy} + \nu \phi_{y,yx} + 2\phi_{x,xx} + \phi_{y,yy}) \\ & + A_4 (w_{,xyy} + w_{,xxy}) + A_5 (\phi_x + w_{,x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & A_3 (\phi_{x,xy} - \nu \phi_{y,xx} + \nu \phi_{x,xy} + \phi_{y,xx} + 2\phi_{y,yy}) \\ & + A_4 (w_{,xxy} + w_{,yyy}) + A_5 (\phi_y + w_{,y}) = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Phương trình tương thích biến dạng cho vỏ trống FGM là

$$\varepsilon_{y,xx}^0 + \varepsilon_{x,yy}^0 - \gamma_{xy,xy}^0 = (w_{,xy})^2 - w_{,xx} w_{,yy} - w_{,yy}/a - w_{,xx}/R \quad (2.24)$$

Có thể biến đổi về dạng

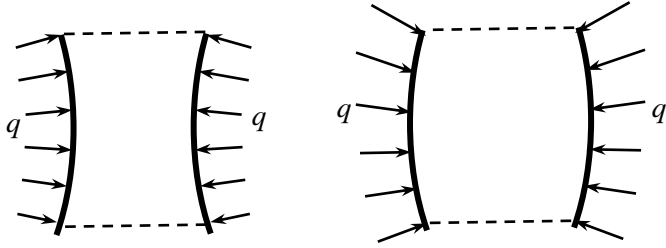
$$\nabla \nabla F = E_1 (w_{,xy})^2 - E_1 w_{,xx} w_{,yy} - \frac{E_1}{a} w_{,yy} - \frac{E_1}{R} w_{,xx} \quad (2.25)$$

Hệ bốn phương trình vi phân đạo hàm riêng (2.21-2.23, 2.25) với bốn hàm ẩn là các phương trình cơ bản được sử dụng để phân tích ổn định vỏ trống FGM theo lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Reddy.

## 2.3. Phân tích ổn định vỏ trống chịu áp lực ngoài

### 2.3.1. Phương pháp Galerkin

Xét vỏ trống tựa đơn ở hai đầu và chịu áp lực ngoài phân bố đều trên bề mặt vỏ với cường độ  $q$  (N/m<sup>2</sup>) (xem Hình 2.1).



**Hình 2.1.** Vò trống chịu tác dụng của áp lực ngoài

Điều kiện biên có dạng

$$w = 0, \phi_y = 0, N_{xy} = 0, N_x = 0, M_x = 0 \quad \text{tại } x = 0 \text{ và } x = L \quad (2.26)$$

Dạng nghiệm có dạng

$$w = W_0 + W_1 \sin Mx \sin Ny + W_2 \sin^2 Mx, \quad (2.27)$$

$$F = B_1^{(1)} \sin Mx \sin Ny + B_2^{(1)} \sin 3Mx \sin Ny \\ + B_3^{(1)} \cos 2Mx + B_4^{(1)} \cos 2Ny + \sigma_0 h x^2 / 2 \quad (2.31)$$

$$\phi_x = C_1^{(1)} W_1 \cos Mx \sin Ny + C_2^{(1)} W_2 \sin 2Mx \quad (2.32)$$

$$\phi_y = D_1^{(1)} W_1 \sin Mx \cos Ny \quad (2.33)$$

Trong đó  $M = \frac{m\pi}{L}$ ,  $N = \frac{n}{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $W_0, W_1, W_2$  là các hằng số, các hệ số  $B_i^{(1)}, C_i^{(1)}, D_i^{(1)}$  được biểu diễn qua  $W_0, W_1, W_2$ .

Thay các phương trình (2.27), (2.31-2.33) vào (2.21) và áp dụng phương pháp Galerkin ta thu được các tích phân Galerkin, sau đó biến đổi các tích phân này, kết hợp điều kiện chu vi kín, thu được biểu thức quan hệ tải – độ võng, tải vòng như sau:

$$q = \frac{H_4^{(1)}}{H_6^{(1)}} - \frac{2H_1^{(1)}}{H_6^{(1)}} W_2 - \frac{H_2^{(1)}}{H_6^{(1)}} W_2^2 \\ + \frac{1}{H_6^{(1)}} \left( H_5^{(1)} + \frac{K_1 E_1 R^2 N^4}{8(E_1 + K_1 R^2)} \right) \left( \frac{-H_3^{(1)} W_2}{H_1^{(1)} + H_2^{(1)} W_2} \right) \quad (2.41)$$

$$q_{buck} = \frac{H_4^{(1)}}{H_6^{(1)}} \quad (2.43)$$

Các biểu thức của tải vòng và tải – độ võng giúp phân tích ứng xử ổn định và sau ổn định của vỏ.

### 2.3.2. Khảo sát số

#### 2.3.2.1. Nghiên cứu so sánh

Khảo sát vỏ trống FGM có các tham số như sau:  $R = 0,5 \text{ m}$ ,  $a = 4R$ ,  $L = 2R$ ,  $E_m = 105,69 \text{ GPa}$ ,  $E_c = 168,08 \text{ GPa}$ ,  $\nu_m = \nu_c = 0,3$ ,  $k = 1$ ,  $K_1 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^3$ ,  $K_2 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ . Tải tới hạn được tính toán và so sánh với tài liệu [23] sử dụng lý thuyết vỏ mỏng.

**Bảng 2.1.** So sánh tải tới hạn  $q_{cr}$  (MPa)

$R/h$	Tài liệu [23]	Luận án	Sai số (%)
10	355,57(1,4) <sup>a</sup>	368,51(1,4)	3,64
30	30,373(1,6)	30,596(1,6)	0,73
50	10,362(1,7)	10,393(1,7)	0,3
100	2,670(1,10)	2,674(1,10)	0,14
200	0,895(1,14)	0,896(1,14)	0,05
500	0,4124(1,23)	0,4125(1,23)	0,01

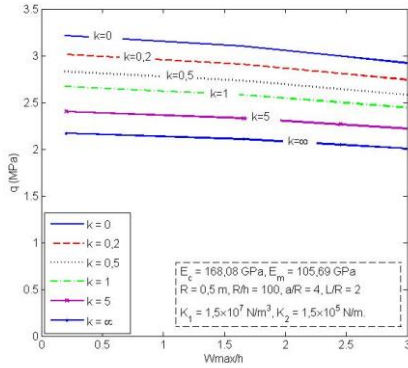
Thông tin trong Bảng 2.1 cho thấy kết quả tính toán trong luận án phù hợp tốt với tài liệu [23]. Phần trăm sai số giảm khi vỏ mỏng hơn.

#### 2.3.2.2. Khảo sát ổn định vỏ trống FGM

Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu đến ứng xử của vỏ trống FGM được minh họa trong Bảng 2.2 và trong Hình 2.2.

**Bảng 2.2.** Sự phụ thuộc của tải tới hạn  $q_{cr}$  (MPa) vào sự phân bố vật liệu

$k$	Vỏ trống lõm ( $a/R = 4$ )	Vỏ trống lồi ( $a/R = -4$ )
0	3,216 (1,10) <sup>a</sup>	1,513 (2,6)
0.5	2,831 (1,10)	1,379 (2,6)
1	2,670 (1,10)	1,331 (2,6)
5	2,402 (1,10)	1,263 (2,6)
$\infty$	2,170 (1,10)	1,174 (2,6)



**Hình 2.2.** Đồ thị  $q - w_{\max}/h$  của vỏ trống lồi khi hệ số  $k$  biến thiên

Thông tin trong Bảng 2.2 và Hình 2.2 cho thấy khả năng kháng vòng và khả năng mang tải sau vòng của vỏ tăng khi hệ số tỷ phần thể tích tăng.

## 2.4. Phân tích ổn định vỏ trống chịu tải xoắn

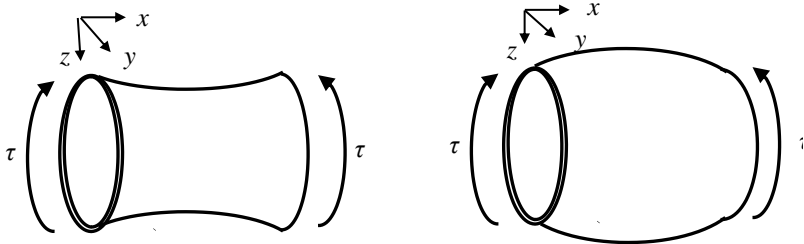
### 2.4.1. Phương pháp Galerkin

Xét vỏ trống FGM chịu tải xoắn cường độ  $\tau$ . Điều kiện biên có dạng:

$$w = 0, M_x = 0, N_{xy} = -th, \phi_y = 0 \quad \text{tại } x = 0 \text{ và } x = L \quad (2.44)$$

Dạng nghiệm hàm độ võng được chọn như sau:

$$w = W_0 + W_1 \sin Mx \sin N(y - \lambda x) + W_2 \sin^2 Mx \quad (2.45)$$



**Hình 2.14.** Vỏ trống chịu tải xoắn

Thực hiện những tính toán tương tự như bài toán ở mục 2.3, ta thu được biểu thức tải xoắn – độ võng và tải vòng như sau:

$$\tau = \frac{-1}{2hN^2\lambda} \left\{ \begin{array}{l} H_1^{(2)} + H_2^{(2)} \frac{-H_6^{(2)}W_1^2 - \frac{1}{2}K_1RN^2W_1^2}{H_5^{(2)} + H_7^{(2)}W_1^2 + K_1 + 4K_2M^2} \\ + H_3^{(2)}W_1^2 + H_4^{(2)} \left[ \frac{-H_6^{(2)}W_1^2 - \frac{1}{2}K_1RN^2W_1^2}{H_5^{(2)} + H_7^{(2)}W_1^2 + K_1 + 4K_2M^2} \right]^2 \\ - K_1 - K_2 (M^2 + N^2 + N^2\lambda^2) \end{array} \right\} \quad (2.59)$$

$$\tau_{buck} = \frac{1}{2hN^2\lambda} \left[ -H_1^{(2)} + K_1 + K_2 (M^2 + N^2 + N^2\lambda^2) \right] \quad (2.60)$$

Các biểu thức (2.59-2.60) giúp phân tích ứng xử ổn định của vỏ trống FGM chịu tải xoắn.

## 2.4.2. Khảo sát số

### 2.4.2.1. Nghiên cứu so sánh

Khảo sát vỏ trụ FGM (trường hợp đặc biệt của vỏ trống khi  $a \rightarrow \infty$ ), có các đặc trưng vật liệu như sau:  $E_m = 105,69$  GPa,  $E_c = 168,08$  GPa,  $\nu_m = \nu_c = 0,3$ ,  $k = 1$ ,  $h = 0,01$  m,  $L = 2R$ . Tải xoắn tới hạn được tính toán và được so sánh với các tài liệu [42] sử dụng phương pháp năng lượng và [65] sử dụng phương pháp nhiễu.

**Bảng 2.7.** So sánh tải xoắn tới hạn  $\tau_{cr}$ (MPa) cho vỏ trụ FGM

R/h	Tài liệu [84]	Tài liệu [48]	Luận án
500	25,93 (11; 0,20) <sup>a</sup>	25,58 (11; 0,30)	25,94 (13; 0,30)
400	34,44 (10; 0,21)	33,82 (12; 0,31)	34,35 (12; 0,31)
300	49,86 (9; 0,22)	48,61 (11; 0,33)	49,47 (11; 0,33)
200	83,67 (8; 0,24)	81,70 (19; 0,37)	83,44 (9; 0,34)

<sup>a</sup> Mode vòng ( $n, \lambda$ ),  $m = 1$

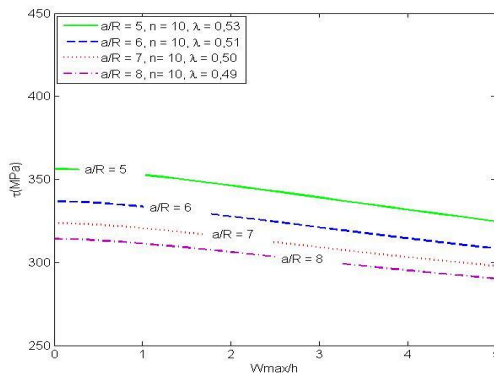
Thông tin trong Bảng 2.7 cho thấy các kết quả của tải xoắn tới hạn được tính toán trong luận án phù hợp tốt với các kết quả tương ứng trong các tài liệu tham khảo [48] và [84].

### 2.4.2.2. Khảo sát số

Ảnh hưởng của nền đàn hồi và tỷ số  $a/R$  đến sự ổn định của vỏ trống FGM chịu tải xoắn được trình bày trong Bảng 2.10 và trong Hình 2.20.

**Bảng 2.10.** Sự phụ thuộc của tải xoắn tới hạn vào nền đàn hồi và tỷ số  $a/R$

Tham số nền	$a/R = 5$	$a/R = 6$	$a/R = 7$
$K_1 = 0, K_2 = 0$	310,91	290,26	276,27
$K_1 = 1,5 \cdot 10^7; K_2 = 0$	318,56	298,24	284,47
$K_1 = 1,5 \cdot 10^7; K_2 = 1,5 \cdot 10^5$	356,24	336,80	323,60



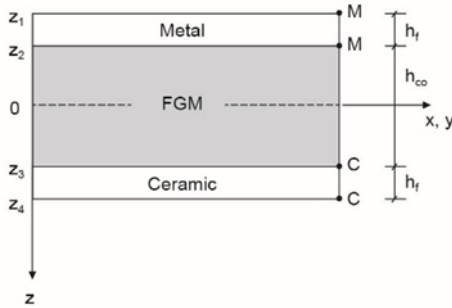
**Hình 2.22.** Đường cong  $\tau-w_{\max}/h$  của vỏ lõi khi tỷ số  $a/R$  biến thiên

Nhận xét : Vỏ càng lõi (tỷ số  $a/R$  càng nhỏ) thì khả năng kháng vòng cũng như khả năng mang tải sau vòng càng cao. Hơn thế nữa, nền đàn hồi có tác dụng làm gia tăng sự ổn định cho vỏ.

## 2.5. Phân tích ổn định vỏ trống sandwich có lõi FGM chịu tải nén dọc trục và tải nhiệt

### 2.5.1. Phương pháp Galerkin

Phần này khảo sát vỏ trống có ba lớp với tổng độ dày là  $h$ , trong đó lớp lõi có độ dày  $h_{co}$  làm bằng vật liệu FGM, hai lớp ngoài mỏng hơn với cùng độ dày  $h_f$  làm từ vật liệu thuần nhất. Lớp trong là gốm và lớp ngoài là kim loại. Mô hình vật liệu được mô tả như hình vẽ sau:



**Hình 2.26.** Mô hình vật liệu FGM sandwich

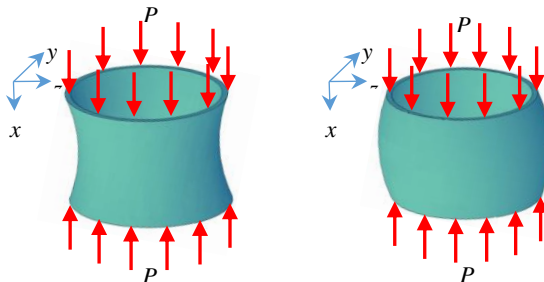
Quy luật vật liệu:

$$[E, \alpha] = [E_m, \alpha_m] + [E_{cm}, \alpha_{cm}] \cdot \begin{cases} 0 & ; z_1 \leq z \leq z_2 \\ \left( \frac{z - z_2}{z_3 - z_2} \right)^k & ; z_2 \leq z \leq z_3 \\ 1 & ; z_3 \leq z \leq z_4 \end{cases} \quad (2.61)$$

Phần này xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Vỏ chịu lực nén dọc trục (xem Hình 2.27). Điều kiện biên có dạng:

$$w = 0, M_x = 0, N_{xy} = 0, \phi_y = 0, N_x = -Ph, P_x = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = L \quad (2.62)$$



**Hình 2.27.** Vỏ trống chịu lực nén dọc trục

Trường hợp 2: vỏ bị chặn ở hai đầu và chịu tác dụng của tải nhiệt. Điều kiện biên có dạng:

$$w = 0, u = 0, \phi_y = 0, M_x = 0, N_x = N_{x0}, P_x = 0 \quad \text{tại } x = 0 \text{ và } x = L \quad (2.63)$$

Dạng nghiệm hàm độ võng được chọn cho cả hai trường hợp như sau:

$$w = W \sin Mx \sin Ny \quad (2.64)$$

Tiến hành các tính toán tương tự như trong mục 2.3 và 2.4, ta thu được biểu thức tải – độ võng và tải vòng cho hai trường hợp như sau:

$$P = \frac{H_1^{(3)} + H_2^{(3)}W^2 - K_1 - K_2(N^2 + M^2)}{(RN^2 - aM^2)} \frac{a}{h} \quad (2.70)$$

$$P_{buck} = \frac{H_1^{(3)} - K_1 - K_2(N^2 + M^2)}{(RN^2 - aM^2)} \frac{a}{h} \quad (2.71)$$

Trường hợp tải nhiệt

$$\Delta T = \frac{a + \nu R}{(RN^2 - aM^2)\Phi_{10}} \left[ H_1^{(3)} - K_1 - K_2(N^2 + M^2) \right] + \left( \frac{E_1 M^2}{8} + \frac{a + \nu R}{RN^2 - aM^2} H_2^{(3)} \right) \frac{W^2}{\Phi_{10}} \quad (2.78)$$

$$\Delta T_{buck} = \frac{a + \nu R}{(RN^2 - aM^2)\Phi_{10}} \left[ H_1^{(3)} - K_1 - K_2(M^2 + N^2) \right] \quad (2.79)$$

Các biểu thức trên giúp phân tích ứng xử ổn định của vỏ.

## 2.5.2. Khảo sát số

### 2.5.2.1. Nghiên cứu so sánh

So sánh tải nén dọc trục tới hạn với nghiên cứu [51] sử dụng lý thuyết vỏ mỏng, thực hiện cho vỏ trống làm bằng vật liệu thuần nhất có  $E = 70$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $h = 0,001$  m,  $L = R$ ,  $a/R = 10$ .

**Bảng 2.12.** So sánh tải nén tới hạn  $P_{cr}$  (MPa)

Bán kính $R$	Hutchinson [51]	Luận án	Sai số (%)
$R = 200h$	212,085	211,628	0,216

$R = 100h$	425,182	422,873	0,551
$R = 50h$	848,861	841,544	0,861

So sánh thứ hai thực hiện cho vỏ trụ FGM có các tham số vật liệu như sau:  $E_m = 207,79$  GPa,  $E_c = 322,27$  GPa,  $\alpha_m = 1,5321 \cdot 10^{-5}$  1/K,  $\alpha_c = 0,7474 \cdot 10^{-5}$  1/K,  $\nu_m = \nu_c = 0,3$ ,  $h = 0,001$  m,  $h_f = 0$  m,  $R = 400h$ ,  $T_{cr} = T_i + \Delta T_{cr}$ ,  $L = \sqrt{300Rh}$ ,  $T_i = 300$  K (nhiệt độ phòng). Tải nhiệt tới hạn được tính toán và được so sánh với các tài liệu [78] và [94] đều sử dụng lý thuyết vỏ mỏng. Kết quả so sánh được trình bày trong Bảng 2.13.

**Bảng 2.13.** So sánh tải nhiệt tới hạn  $T_{cr}$  (K)

Hệ số $k$	Shen [78]	Wu [94]	Luận án
0	477,63	502,43	502,19
0,2	450,84	471,99	471,79
0,5	432,20	450,77	450,60
1	418,46	435,06	434,91
2	407,98	423,00	422,85
3	399,01	417,78	417,64

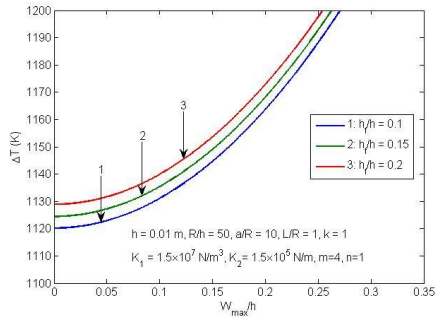
Rõ ràng, các kết quả tính toán của tải cơ và tải nhiệt tới hạn trong luận án phù hợp tốt với các kết quả đã được công bố.

#### 2.5.2.2. Kết quả số và thảo luận

Ảnh hưởng của tỷ số giữa độ dày lớp vỏ với tổng độ dày ( $h_f/h$ ) đến sự ổn định của vỏ được mô tả trong Bảng 2.14 và trong các Hình 2.28 và 2.29.

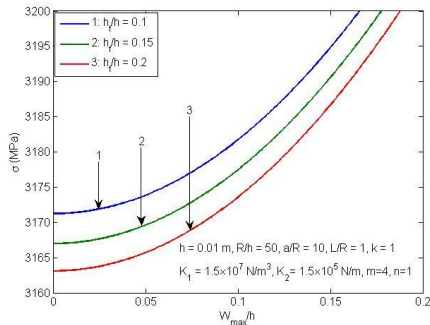
**Bảng 2.14.** Sự phụ thuộc của tải tới hạn vào tỷ số  $h_f/h$

Tỷ số $h_f/h$	$P_{cr}$ (MPa)		$\Delta T_{cr}$ (K)	
	Vỏ lõi	Vỏ lõm	Vỏ lõi	Vỏ lõm
$h_f/h = 0,1$	1922,56	3171,23	639,55	1120,17
$h_f/h = 0,15$	1918,30	3166,98	641,42	1124,45
$h_f/h = 0,2$	1914,40	3163,09	643,44	1128,89



**Hình 2.28.** Đường cong  $\Delta T - w_{\max}/h$  của vỏ trống lồi khi tỷ số  $h_f/h$  biến thiên

Nhận xét: Khả năng kháng vòng và khả năng mang tải sau vòng của vỏ trống FGM gia tăng khi tỷ số  $h_f/h$  giảm đối với trường hợp vỏ chịu tác dụng của tải cơ. Tuy nhiên, trường hợp vỏ chịu tác dụng của tải nhiệt thì xu hướng ngược lại.



**Hình 2.29.** Đường cong  $P - w_{\max}/h$  của vỏ trống lồi khi tỷ số  $h_f/h$  biến thiên

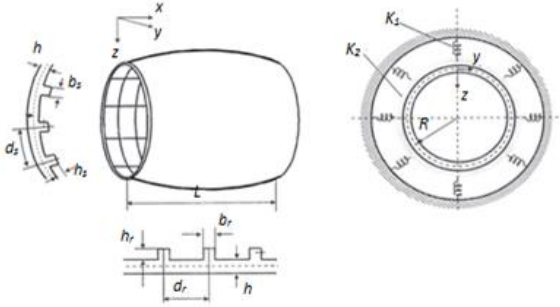
## 2.6. Phân tích ổn định vỏ trống FGM có gân gia cường chịu áp lực ngoài

### 2.6.1. Giới thiệu

### 2.6.2. Các phương trình cơ bản

Khảo sát vỏ trống độ dài  $L$ , bán kính xích đạo  $R$ , bán kính lớn  $a$ , độ dày  $h$ , được gia cường bởi một hệ thống  $n_s$  gân dọc và  $n_r$  gân vòng. Vỏ và gân được làm từ vật liệu FGM thỏa mãn sự liên tục tại chỗ tiếp

xúc. Gân được gia cường phía trong vỏ. Vỏ chịu tác dụng của áp lực ngoài phân bố đều trên bề mặt với cường độ  $q$  (N/m<sup>2</sup>).



**Hình 2.42.** Vỏ trống có gân gia cường

Các hệ thức biến dạng – chuyển vị, ứng suất – biến dạng, hệ phương trình cân bằng, phương trình tương thích biến dạng của vỏ có gân vẫn có dạng như vỏ không gân. Điểm khác là các thành phần nội lực được cộng thêm phần đóng góp của gân. Thực hiện các bước tính toán tương tự như đối với vỏ không gân ở mục 2.3, thu được hệ phương trình cân bằng cho vỏ có gân như sau:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} F_{,yy} + \frac{1}{R} F_{,xx} + a_{13} F_{,xxyy} + a_{12} F_{,yyyy} + a_{11} F_{,xxxx} + F_{,xx} w_{,yy} \\ & + F_{,yy} w_{,xx} - 2F_{,xy} w_{,xy} - K_1 w + K_2 (w_{,yy} + w_{,xx}) + a_{114} w_{,yy} \\ & + a_{113} w_{,xx} + a_{16} w_{,xyyy} + a_{15} w_{,yyyy} + a_{14} w_{,xxxx} + a_{112} \phi_{,y,y} \\ & + a_{111} \phi_{,x,x} + a_{110} \phi_{,y,yy} + a_{19} \phi_{,x,xy} + a_{18} \phi_{,y,yy} + a_{17} \phi_{,x,xx} + q = 0 \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\begin{aligned} & a_{21} F_{,xxx} + a_{22} F_{,xyy} + a_{23} w_{,xxx} + a_{24} w_{,xyy} + a_{29} w_{,x} \\ & + a_{28} \phi_{,x} + a_{27} \phi_{,y,yy} + a_{26} \phi_{,x,yy} + a_{25} \phi_{,x,xx} = 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} & a_{39} w_{,y} + a_{38} \phi_{,y} + a_{37} \phi_{,x,xy} + a_{36} \phi_{,y,xx} + a_{35} \phi_{,y,yy} \\ & + a_{34} w_{,xy} + a_{33} w_{,yyy} + a_{32} F_{,xxy} + a_{31} F_{,yyy} = 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned}
& a_{410}\phi_{y,yyx} + a_{49}\phi_{y,yyy} + a_{48}\phi_{x,xyy} + a_{47}\phi_{x,xxx} + a_{46}F_{,xyy} \\
& + a_{45}F_{,xxx} + a_{44}F_{,yyy} + a_{43}w_{,xyy} + a_{42}w_{,yyy} + a_{41}w_{,xxx} \quad (2.92) \\
& = -w_{,yy}/a - w_{,xx}/R - w_{,xx}w_{,yy} + w_{,xy}^2.
\end{aligned}$$

### 2.6.3. Biểu thức tải – độ võng và tải tới hạn

Nghiệm hàm độ võng vẫn có dạng như phương trình (2.27). Lặp lại quá trình tính toán tương tự như mục 2.3, ta thu được biểu thức tải – độ võng và tải vòng như sau:

$$q = \frac{-H_4^{(4)}}{H_8^{(4)}} - \frac{H_5^{(4)}}{H_8^{(4)}}W_2 - \frac{H_6^{(4)}}{H_8^{(4)}}W_2^2 + \frac{H_9^{(4)}}{H_8^{(4)}} \left( \frac{-H_3^{(4)}W_2}{H_1^{(4)} + H_2^{(4)}W_2} \right) \quad (2.104)$$

$$q_{buck} = \frac{-H_4^{(4)}}{H_8^{(4)}} \quad (2.105)$$

### 2.6.4. Khảo sát số

#### 2.6.4.1. Nghiên cứu so sánh

Xét vỏ trụ thuần nhất có các tham số vật liệu và tham số hình học như sau:  $E = 30.10^6$  Psi,  $\nu = 0,3$ ,  $h = 1$  in,  $R = 82,1693$  in,  $L = 372,97$  in,  $e_s = e_r = 1,653$  in,  $h_s = h_r = 2(e_r - h/2)$ ,  $d_s = 2\pi R/516$ ,  $d_r = L/n_r$ ,  $b_s = 0,1471d_s h/h_s$ ,  $b_r = 0,1471d_r h/h_r$ . Trong đó  $n_r = 373$ ,  $n_s = 516$  lần lượt là số gân vòng và số gân dọc. Tải tới hạn được so sánh với tài liệu [72, 77] sử dụng lý thuyết “layerwise shell theory” và “boundary layer theory”. Kết quả so sánh được trình bày trong Bảng 2.17.

**Bảng 2.17.** So sánh  $q_{cr}$  (Psi) cho vỏ trụ có gân gia cường

Số gân	Reddy [72]	Shen [77]	Luận án
$n_r = 0, n_s = 0$	93,5	100,7 (1,4) <sup>a</sup>	103,2686 (1,4)
$n_r = 0, n_s = 516$	94,7	102,2 (1,4)	104,4368 (1,4)
$n_r = 373, n_s = 0$	357,5	368,3 (1,3)	379,4192 (1,3)
$n_r = 373, n_s = 516$	365	374,1 (1,3)	386,9183 (1,3)

Nhận xét: Các kết quả tính toán trong luận án phù hợp tốt với các kết quả được công bố trong các nghiên cứu [72] và [77].

#### 2.6.4.2. Khảo sát số

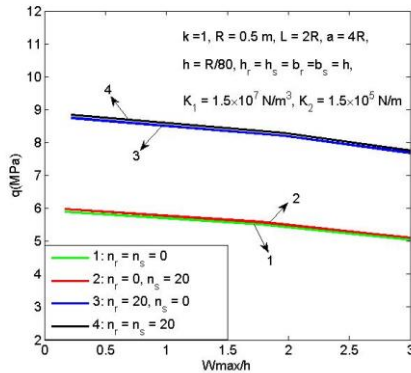
Ảnh hưởng của gân gia cường đến khả năng ổn định của vỏ trống FGM được minh họa trong Bảng 2.18 và trong Hình 2.43.

Nhận xét: Gân gia cường có tác dụng gia tăng sự ổn định của vỏ. Hơn thế nữa gân vòng đóng góp nhiều hơn gân dọc trong hiệu quả gia cường.

**Bảng 2.18.** Ảnh hưởng của gân gia cường đến tải tới hạn  $q_{cr}$  (MPa)

Loại vỏ	$n_r = 0$ $n_s = 0$	$n_r = 0$ $n_s = 20$	$n_r = 20$ $n_s = 0$	$n_r = 20$ $n_s = 20$
Vỏ lõi	5,894 (1,9) <sup>a</sup>	5,972 (1,9)	8,742 (1,8)	8,840 (1,8)
Vỏ lõm	1,827 (1,3)	1,829 (1,3)	2,126 (1,3)	2,128 (1,3)

<sup>a</sup>Mode vòng ( $m, n$ )



**Hình 2.43.** Đường cong  $q - w_{max}/h$  của vỏ trống khi số gân biến thiên

**Kết luận.** Với tiếp cận giải tích và phương pháp Galerkin, chương 2 của luận án đã trình bày lời giải cho bốn bài toán ổn định của vỏ trống. Trong đó có ba bài toán cho vỏ trống không gân chịu tải khác nhau, bài toán thứ 4 cho vỏ trống có gân. Các so sánh đã được thực hiện nhằm kiểm chứng độ tin cậy của các công thức đã được tìm ra. Với mỗi bài toán các nghiên cứu tham số cũng đã được thực hiện nhằm phát hiện các đặc trưng ứng xử của vỏ. Kết quả chính chương này được đăng trên 4 bài báo ISI và hai bài hội nghị.

### CHƯƠNG 3

## PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH ĐỘNG VÀ DAO ĐỘNG CỦA VỎ TRỐNG FGM

### 3.1. Đặt vấn đề

### 3.2. Các phương trình cơ bản

Khảo sát vỏ trống FGM được mô tả như ở mục 2.2. Vỏ chịu tác dụng của áp lực ngoài có cường độ thay đổi theo thời gian  $q = q(t)$ . Hệ phương trình chuyển động của vỏ theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 của Reddy [70] như sau :

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = \bar{I}_1 u_{,tt} + \bar{I}_2 \phi_{x,tt} - \bar{I}_3 w_{,xxt} \quad (3.1)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = \bar{I}_1^* v_{,tt} + \bar{I}_2^* \phi_{y,tt} - \bar{I}_3^* w_{,ytt} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} Q_{y,y} + Q_{x,x} - 3c(R_{y,y} + R_{x,x}) + N_x/a + N_y/R + c(P_{x,xx} + P_{y,yy} + 2P_{xy,xy}) \\ + w_{,xx} N_x + w_{,yy} N_y + 2w_{,xy} N_{xy} - K_1 w + K_2 (w_{,yy} + w_{,xx}) + q = I_1 w_{,tt} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$+ 2I_1 \varepsilon w_{,t} + \bar{I}_3 u_{,ttx} + \bar{I}_5 \phi_{x,ttx} + \bar{I}_3^* v_{,tty} + \bar{I}_5^* \phi_{y,tty} - c^2 I_7 (w_{,ttyy} + w_{,ttxx})$$

$$M_{xy,y} + M_{x,x} + 3cR_x - Q_x - c(P_{xy,y} + P_{x,x}) = \bar{I}_2 u_{,tt} + \bar{I}_4 \phi_{x,tt} - \bar{I}_5 w_{,xxt} \quad (3.4)$$

$$M_{y,y} + M_{xy,x} + 3cR_y - Q_y - c(P_{xy,x} + P_{y,y}) = \bar{I}_2^* v_{,tt} + \bar{I}_4^* \phi_{y,tt} - \bar{I}_5^* w_{,ytt} \quad (3.5)$$

Đưa vào hàm ứng suất  $F(x, y)$ , sau đó biến đổi hệ phương trình chuyển động về dạng toán tử như sau :

$$L_{11}(w) + L_{12}(\phi_x) + L_{13}(\phi_y) + S(w, F) + q = I_1 w_{,tt} \quad (3.7)$$

$$+ 2I_1 \varepsilon w_{,t} + \bar{I}_5 \phi_{x,xtt} + \bar{I}_5^* \phi_{y,ytt} + \bar{I}_7 w_{,xxtt} + \bar{I}_7^* w_{,yytt}$$

$$L_{21}(w) + L_{22}(\phi_x) + L_{23}(\phi_y) = \bar{I}_3 \phi_{x,tt} - \bar{I}_5 w_{,xxt} \quad (3.8)$$

$$L_{31}(w) + L_{32}(\phi_x) + L_{33}(\phi_y) = \bar{I}_3^* \phi_{y,tt} - \bar{I}_5^* w_{,ytt} \quad (3.9)$$

Hệ gồm 3 phương trình (3.7-3.9) và phương trình tương thích biến dạng (2.25) tạo thành một hệ khép kín bốn phương trình và bốn ẩn hàm  $w$ ,  $F$ ,  $\phi_x$  và  $\phi_y$ . Đó là hệ phương trình cơ bản được sử dụng để phân tích động lực vỏ trống FGM.

### 3.3. Phân tích dao động vỏ trống FGM

#### 3.3.1. Các công thức lý thuyết

Xét vỏ trống tựa đơn ở hai đầu vỏ và chịu tác dụng của áp lực ngoài cường độ  $q = q(t)$ . Điều kiện biên có dạng như (2.26). Dạng nghiệm hàm độ võng được chọn như sau:

$$w = W(t) \sin Mx \sin Ny \quad (3.11)$$

Thay dạng nghiệm hàm độ võng vào hệ phương trình cơ bản, sau đó áp dụng phương pháp Galerkin dẫn đến:

$$\begin{aligned} H_1^{(5)} \ddot{W}(t) + H_2^{(5)} \dot{W}(t) + H_3^{(5)} W + H_4^{(5)} W^2(t) \\ + H_5^{(5)} W^3(t) + H_6^{(5)} (-q + \Phi_1/R) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

##### 3.3.1.1. Tần số dao động tự do tuyến tính

Từ phương trình (3.14), biểu thức của tần số dao động riêng của vỏ được xác định như sau:

$$\omega = \sqrt{H_3^{(5)} / H_1^{(5)}} \quad (3.15)$$

##### 3.3.1.2. Dao động cưỡng bức của vỏ trống FGM

Khảo sát trường hợp vỏ chịu kích động điều hòa  $q = Q \sin \Omega t$ , khi đó dao động cưỡng bức được tính toán từ phương trình sau :

$$\begin{aligned} H_1^{(5)} \ddot{W}(t) + H_2^{(5)} \dot{W}(t) + H_3^{(5)} W + H_4^{(5)} W^2(t) \\ + H_5^{(5)} W^3(t) + H_6^{(5)} (-Q \sin \Omega t + \Phi_1/R) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

##### 3.3.1.3. Phương trình biên độ – tần số

Để thiết lập phương trình biên độ – tần số, thay  $W = A \sin \Omega t$  vào (3.17) rồi áp dụng phương pháp tựa Galerkin, thu được:

$$\gamma^2 - c_1 \gamma = 1 + c_2 A + c_3 A^2 + (-c_4 Q + c_5 \Phi_1) \frac{1}{A} \quad (3.18)$$

Trong đó  $\gamma = \Omega / \omega$  là tỷ số tần số.

#### 3.3.2. Khảo sát số

##### 3.3.2.1. Nghiên cứu so sánh

Xét vỏ trụ thuần nhất có các tham số vật liệu và hình học như sau:  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $h = 0,06 \text{ m}$ ,  $R = 100h$ ,

$L = 0,5R$ . Tần số dao động tự do không thứ nguyên  $\omega^* = \omega(h/\pi)\sqrt{2(1+\nu)\rho/E}$  được tính toán và được so sánh với các tài liệu [17, 79, 96]. Kết quả so sánh được trình bày trong Bảng 3.1.

**Bảng 3.1.** So sánh tần số không thứ nguyên

$(m, n)$	Bhimaraddi [17]	Shen [79]	Xuebin [96]	Luận án
(1, 1)	0,03692	0,03712	0,03739	0,03729
(1, 2)	0,03612	0,03648	0,03666	0,03666
(1, 3)	0,03566	0,03620	0,03634	0,03640
(1, 4)	0,03632	0,03700	0,03723	0,03723

Nhận xét: kết quả tính toán trong luận án phù hợp tốt với các kết quả được công bố trong các tài liệu [17, 79, 96].

### 3.3.2.2. Khảo sát tần số dao động tự do tuyến tính

Ảnh hưởng của nhiệt độ đến tần số dao động tự do tuyến tính được minh họa trong Bảng 3.3.

**Bảng 3.3.** Sự biến thiên của tần số theo nhiệt độ

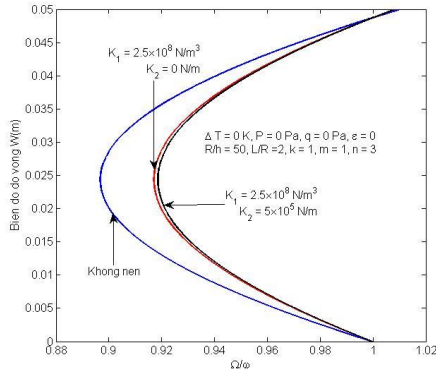
$\Delta T(K)$	$\omega(1,1)$	$\omega(1,2)$	$\omega(2,1)$	$\omega(2,2)$
0	2781,5	2629,4	3672,5	3668,6
100	2779,8	2622,2	3671,2	3663,5
200	2778,1	2615,1	3669,9	3658,4
300	2776,5	2607,9	3668,7	3653,3

Nhận xét: tần số dao động tự do tuyến tính của vỏ giảm khi nhiệt độ tăng.

### 3.3.2.3. Khảo sát đường cong biên độ – tần số

Ảnh hưởng của hệ số nền đến đường cong biên độ - tần số của vỏ trống FGM được mô tả trên Hình 3.1 cho mode ( $m = 1, n = 3$ ).

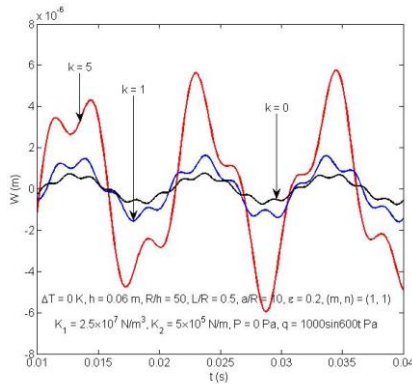
Có thể nhận thấy rằng với cùng một giá trị của biên độ, vỏ đặt trên nền đàn hồi hai hệ số có tần số dao động lớn nhất, trong khi đó, trường hợp không có nền vỏ có tần số nhỏ nhất. Như vậy nền đàn hồi có tác dụng làm gia tăng giá trị của tần số dao động tự do phi tuyến.



**Hình 3.1.** Đồ thị biên độ – tần số khi hệ số nền biến thiên

### 3.3.2.4. Dao động cưỡng bức của vỏ trống FGM

Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu (đặc trưng bởi hệ số tỷ phân thể tích  $k$ ) đến đáp ứng dao động của vỏ trống FGM được minh họa trên Hình 3.7 cho mode ( $m = 1, n = 1$ ).



**Hình 3.7.** Đồ thị  $w_{max} - t$  khi thay sự phân bố vật liệu

Nhận xét: Khi hệ số  $k$  càng lớn thì biên độ dao động càng lớn.

## 3.4. Phân tích ổn định động vỏ trống FGM

### 3.4.1. Các công thức lý thuyết

Xét vỏ trống FGM chịu tác dụng của lực nén dọc trục có cường độ tăng tuyến tính theo thời gian.

$$P = Ct \quad (3.19)$$

Trong đó  $C$  (Pa/s) là tốc độ đặt tải. Điều kiện biên có dạng như (2.62). Dạng nghiệm hàm độ võng được chọn thỏa mãn điều kiện biên có dạng (3.11). Thay dạng nghiệm này vào hệ phương trình chuyển động (3.7-3.9, 2.25), áp dụng phương pháp Galerkin, sau một số phép biến đổi, thu được

$$H_1^{(6)}\ddot{W} + H_2^{(6)}\dot{W} + \left[ H_3^{(6)} + \left( M^2 - \frac{N^2 R}{a} \right) hCt \right] W + H_4^{(6)}W^3 = 0 \quad (3.27)$$

Phương trình (3.27) được giải số, sau đó sử dụng tiêu chuẩn Budiansky-Roth để xác định tải tới hạn động lực ( $P_{dcr}$ ).

### 3.4.2. Khảo sát số

#### 3.4.2.1. Nghiên cứu so sánh

Xét vỏ trụ FGM với các tham số như sau  $E_m = 105,7$  GPa,  $E_c = 168,08$  GPa,  $\rho_m = 4429$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_c = 5700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0,2980$ ,  $\varepsilon = 0,2$ . Kết quả tính toán được trình bày trong Bảng 3.6, so sánh với tài liệu tham khảo [18] sử dụng lý thuyết vỏ mỏng.

**Bảng 3.6.** So sánh tải tới hạn động của vỏ trụ FGM  $P_{dcr}$  (MPa)

Các tham số	Luận án	Tài liệu [18]	Sai số (%)
$C = 100.10^6$ pa/s, $L/R = 2$ , $k = 0,2$			
$R/h = 400$	236,84 (23,4) <sup>a</sup>	239,55 (5,15)	1,13
$R/h = 600$	158,41 (28,6)	162,17 (3,14)	2,32
$R/h = 800$	119,32 (33,1)	124,66 (2,12)	4,28
$L/R = 2$ , $R/h = 500$ , $k = 0,5$			
$C = 10.10^6$ pa/s	175,92 (26,2)	177,01 (2,11)	0,61
$C = 50.10^6$ pa/s	176,24 (26,2)	179,37 (2,11)	1,74
$C = 100.10^6$ pa/s	176,54 (26,2)	181,67 (2,11)	2,82

Nhận xét: các kết quả của tải tới hạn động của luận án phù hợp tốt với các kết quả tương ứng trình bày trong nghiên cứu [18] của Bích và cộng sự sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển.

#### 3.4.2.2. Khảo sát sự phụ thuộc của tải tới hạn theo các tham số

Ảnh hưởng của sự phân bố vật liệu và tỷ số  $R/h$  tới tải tới hạn và đáp ứng động lực của vỏ được trình bày trong Bảng 3.7.

**Bảng 3.7.** Sự phụ thuộc của tải tới hạn theo hệ số  $k$  và tỷ số  $R/h$

$R/h$	$k = 0,2$	$k = 0,5$	$k = 1$	$k = 5$
50	1879,21	1748,65	1631,71	1428,65
100	943,44	877,48	819,24	720,35
150	629,6	585,55	546,53	479,14

Nhận xét: Vỏ càng mỏng hoặc vật liệu có tỷ lệ kim loại càng cao (hệ số  $k$  càng lớn) thì sẽ có tải tới hạn động lực càng nhỏ.

**Kết luận chương 3.** Với tiếp cận nửa giải tích, chương 3 đã trình bày bài toán phân tích dao động và bài toán phân tích ổn định động của vỏ trống FGM. Trong bài toán dao động, các công thức của tần số dao động tự do tuyến tính, phương trình biên độ – tần số, và phương trình vi phân động lực của vỏ trống FGM đã được thiết lập. Phương pháp số được sử dụng để giải số phương trình vi phân chuyển động, từ đó đáp ứng động lực được tính toán và nghiên cứu tham số được thực hiện. Trong bài toán ổn định động, phương trình vi phân động lực được thiết lập, phương pháp số được áp dụng để giải số phương trình vi phân, sau đó tải tới hạn động được tính toán theo tiêu chuẩn ổn định động của Budiansky-Roth. Kết quả chính của chương 3 được đăng trên 3 bài báo ISI và 01 bài hội nghị.

## KẾT LUẬN

### Những đóng góp mới của luận án

Luận án đã sử dụng tiếp cận giải tích, nửa giải tích để giải quyết một loạt các bài toán về ổn định tĩnh, ổn định động và dao động của vỏ trống FGM dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc ba giúp ích phân tích ứng xử của vỏ trống dày hơn. Trước đó chỉ có các nghiên cứu về vỏ trống sử dụng lý thuyết vỏ mỏng. Cụ thể hơn, luận án đã giải quyết sáu bài toán về ổn định và dao động của vỏ trống, trong đó có bốn bài toán về ổn định tĩnh, một bài toán ổn định động, và một bài toán phân tích dao động. Bốn bài toán phân tích ổn định tĩnh là bài toán vỏ trống chịu tải áp lực ngoài; vỏ trống chịu tải xoắn; vỏ trống chịu lực nén dọc trục hoặc tải nhiệt; và vỏ trống có gân chịu áp lực ngoài. Một bài toán về ổn định động lực của vỏ trống chịu lực nén dọc trục tăng tuyến tính theo thời gian và một bài toán phân tích dao động của vỏ trống chịu áp lực ngoài biến đổi điều hòa theo thời gian. Chi tiết hơn, luận án đã có những đóng góp sau:

1. Xây dựng các hệ thức nội lực, nội lực bậc cao cho vỏ trống FGM không gân và có gân gia cường theo TSDT. Đó là những hệ thức cơ bản, có thể được sử dụng để giải các bài toán về ổn định và dao động của vỏ trống, vỏ trụ dày chịu các loại tải khác nhau và bằng các phương pháp khác nhau.

2. Tìm ra biểu thức tải vòng, biểu thức tải – độ võng cực đại cho các bài toán ổn định tĩnh; tìm ra biểu thức của tần số dao động tự do tuyến tính, phương trình biên độ – tần số và phương trình vi phân biên độ độ võng – thời gian cho bài toán phân tích dao động; tìm ra tải tới hạn động theo tiêu chuẩn Budiansky-Roth cho bài toán ổn định động. Có thể nói tiếp cận giải tích và phương pháp Galerkin được sử dụng trong luận án không phải là tiếp cận mới và phương pháp mới, điểm mới của luận án là xử lý hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng với bốn phương trình và bốn ẩn hàm là hàm độ võng  $w(x, y, t)$ , hàm ứng suất  $F(x, y, t)$ , các hàm góc xoay  $\phi_x(x, y, t)$ , và  $\phi_y(x, y, t)$  để từ đó có thể giải quyết được các bài toán nói trên. Đó là khó khăn lớn nhất khi sử dụng HSĐT so với việc sử dụng CST. Nếu sử dụng CST thì chỉ phải xử lý hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng với hai phương trình tương ứng hai ẩn hàm là hàm độ võng  $w(x, y, t)$  và hàm ứng suất  $F(x, y, t)$ . Đặc biệt các hệ thức được xây dựng trong bài toán vỏ trống có gân gia cường có thể được mở rộng, được sử dụng cho các bài toán vỏ trống làm bằng các loại vật liệu khác như vật liệu gia cường ống nano các bon, gia cường tấm graphene vì về phương diện toán học hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng của các bài toán này có nhiều điểm tương đồng.

3. Xây dựng các chương trình tính toán số nhằm khảo sát ảnh hưởng của các kích thước hình học, sự phân bố vật liệu, tham số nền đàn hồi và nhiệt độ đến ổn định tĩnh, ổn định động và dao động của vỏ trống FGM. Từ đó rút ra một số kết luận có ý nghĩa khoa học có thể giúp ích cho các nhà thiết kế.

Nội dung chính của luận án được công bố trong 10 công trình (7 bài báo ISI và 3 bài trong các hội nghị).

### HƯỚNG PHÁT TRIỂN CỦA LUẬN ÁN

✓ Nghiên cứu ổn định tĩnh, ổn định động và dao động của vỏ trống làm bằng các loại vật liệu khác như vật liệu gia cường sợi các bon

nano (FG-CNTRC), vật liệu gia cường tấm các bon nano (FG-GPLRC), vật liệu rỗng.

✓ Nghiên cứu bài toán động của vỏ trống chịu tải phức tạp như tải nổ. Vỏ trống có vết nứt với các điều kiện biên khác nhau sử dụng phương pháp giải tích, phương pháp số.

✓ Nghiên cứu ổn định tĩnh, động và dao động của vỏ trống có độ dày thay đổi, vỏ trống không thoải.