

THÔNG TIN VỀ LUẬN ÁN TIẾN SĨ

1. Họ và tên nghiên cứu sinh: Hà Tuấn Dũng.
2. Giới tính: Nam.
3. Ngày sinh: 22/11/1994.
4. Nơi sinh: Yên Bái.
5. Quyết định công nhận nghiên cứu sinh: Số 3163/QĐ-ĐHKHTN ngày 30/11/2020 của Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học Tự nhiên-ĐHQGHN.
6. Các thay đổi trong quá trình đào tạo (nếu có): Quyết định số 4955/QĐ-ĐHKHTN ngày 26/12/2023 về việc điều chỉnh thời gian đào tạo các chương trình đào tạo trình độ tiến sĩ của Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học Tự nhiên-ĐHQGHN.
7. Tên đề tài luận án: Một vài khía cạnh của các dòng hình học trong hình học Riemann.
8. Chuyên ngành: Toán giải tích
9. Mã số: 9460101.02.
10. Cán bộ hướng dẫn khoa học:

Hướng dẫn chính: PGS. TS. Nguyễn Thạc Dũng, Trường ĐHKHTNTN-ĐHQG Hà Nội.

Hướng dẫn phụ: PGS. TS. Trần Thanh Hưng, Đại học Công nghệ Texas, Hoa Kỳ.

11. Tóm tắt các kết quả mới của luận án:

11.1. Mục đích và đối tượng nghiên cứu của luận án

Luận án này nghiên cứu một vài khía cạnh của các dòng hình học, tập trung cụ thể vào hai hướng nghiên cứu chính sau:

- Mục tiêu đầu tiên của luận án là nghiên cứu một số tính chất hình học và tô pô của sóng gradient Ricci và sóng tịnh tiến.
- Mục tiêu thứ hai của luận án là nghiên cứu những khía cạnh giải tích của một số phương trình đạo hàm riêng có nguồn gốc từ hình học trong bối cảnh của một vài trên dòng hình học.

Cụ thể, luận án tập trung nghiên cứu vào các vấn đề sau:

- Xác định một chặn trên cho số chiều của đại số Lie của các trường véc tơ Killing trên một sóng gradient Ricci không tầm thường bất khả quy và nghiên cứu cấu trúc hình học của lớp không gian này khi số chiều nói trên đạt cực đại;

- Thiết lập ước lượng gradient và một vài kết quả kiểu Liouville cho nghiệm dương bị chặn của một phương trình parabolic phi tuyến liên quan tới khoảng cách quy chuẩn của Perelman:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t) + au(x, t) \ln u(x, t)$$

theo k -trên dòng Ricci quá khứ, trong đó $a \in \mathbb{R}$;

- Nghiên cứu một số khía cạnh giải tích của một phương trình parabolic dạng tổng quát liên quan tới toán tử Laplace có trọng

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a(x, t) - \Delta_f \right) u(x, t) = F(u(x, t))$$

trên một không gian độ đo metric tron với metric biến đổi dưới (k, ∞) -trên dòng Perelman-Ricci và dòng Yamabe, trong đó $a(x, t)$ là một hàm thuộc lớp C^2 theo biến x , thuộc lớp C^1 theo biến t , $F(u)$ là một hàm thuộc lớp C^2 theo biến u ;

- Nghiên cứu về tính “rigidity” và tính liên thông tại vô hạn của các sóng tịnh tiến đầy trong không gian Euclid thông qua dạng cơ bản thứ hai.

11.2. Các phương pháp nghiên cứu đã sử dụng

Luận án sử dụng một số phương pháp khác nhau từ giải tích hình học, phương trình đạo hàm riêng và giải tích hàm. Cụ thể, luận án sử dụng các phương pháp và công cụ sau:

- Chúng tôi sử dụng phương pháp tập mức để ước lượng số chiều của đại số Lie của các trường véc tơ Killing trên một sóng gradient Ricci không tầm thường, bất khả quy trong Chương 2;
- Chúng tôi sử dụng phương pháp nguyên lý cực đại để ước lượng gradient cho nghiệm dương bị chặn của các phương trình parabolic phi tuyến trong Chương 3 và Chương 4;
- Chúng tôi sử dụng bất đẳng thức Sobolev và bất đẳng thức Poincaré để nghiên cứu một số tính chất của sóng tịnh tiến đầy trong Chương 5.

11.3. Các kết quả chính và kết luận

a) Những kết quả chính của luận án bao gồm:

- Một chặn trên cho số chiều của đại số Lie của các trường véc tơ Killing trên một sóng gradient Ricci không tầm thường, bất khả quy và một số kết quả về cấu trúc hình học của lớp không gian này khi số chiều nói trên đạt cực đại;
- Các định lý kiểu Liouville và ước lượng gradient cho nghiệm dương bị chặn của

các phương trình parabolic phi tuyến liên quan tới sóng gradient Ricci thông qua khoảng cách quy chuẩn của Perelman dọc theo k -trên dòng Ricci quá khứ;

- Một số khía cạnh giải tích của một phương trình parabolic phi tuyến tổng quát liên quan tới toán tử Laplace có trọng trên một không gian độ đo metric trơn với metric biến đổi dưới (k, ∞) -trên dòng Perelman-Ricci và dòng Yamabe như các ước lượng gradient, bất đẳng thức Harnack và định lý kiểu Liouville;
- Các kết quả về tính “rigidity” và tính liên thông tại vô hạn của các sóng tịnh tiến đầy trong không gian Euclid.

b) Kết luận

Luận án tập trung vào hai hướng nghiên cứu chính trong lĩnh vực dòng hình học và được chia thành năm chương. Luận án đã trình bày các kết quả về cấu trúc hình học của các sóng gradient Ricci không tầm thường, bất khả quy thông qua nhóm đẳng cự trong chương thứ hai. Sau đó, luận án đã thiết lập các kết quả ước lượng gradient cho các nghiệm dương bị chặn của các phương trình parabol phi tuyến tính khi các metric của đa tạp Riemann phụ thuộc vào thời gian và biến đổi theo các trên dòng hình học, đồng thời khám phá một số ứng dụng của chúng, đặc biệt là các định lý kiểu Liouville và bất đẳng thức Harnack. Các kết quả liên quan đến tính “rigidity” và tính liên thông tại vô hạn của các sóng tịnh tiến đầy trong không gian Euclid được trình bày ở chương cuối của luận án.

12. Các hướng nghiên cứu tiếp theo:

- Nghiên cứu nhóm đẳng cự của đa tạp Einstein.
- Nghiên cứu ước lượng gradient và ước lượng Hessian cho nghiệm dương, trơn của lớp phương trình parabolic phi tuyến sau có chứa toán tử V -Laplace:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_V \right) F(u(x, t)) = G(u(x, t)),$$

trên các đa tạp Riemann đầy không compact.

13. Các công trình công bố liên quan đến luận án:

- Ha Tuan Dung, Hung Tran (2025), “On isometry groups of gradient Ricci solitons”, to appear in *Forum Mathematicum* (SCI-E, Q1).
<https://doi.org/10.1515/forum-2024-0325>
- Ha Tuan Dung, Nguyen Tien Manh, and Nguyen Dang Tuyen (2023), “Liouville type theorems and gradient estimates for nonlinear heat equations along ancient K -super Ricci flow via reduced geometry”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 519 (2), 126836 (SCI-E, Q1).

- iii. Ha Tuan Dung (2023), “Gradient estimates for a general type of nonlinear parabolic equations under geometric conditions and related problems”, *Nonlinear Analysis* Vol. 226, 113135 (SCI-E, Q1).
- iv. Ha Tuan Dung, Nguyen Thac Dung, and Tran Quang Huy (2023), “Rigidity and vanishing theorems for complete translating solitons”, *Manuscripta Mathematica* Vol. 172, pp. 331-352 (SCI-E, Q2).

Hà Nội, ngày 14 tháng 03 năm 2025

TM. Tập thể hướng dẫn

(Ký và ghi rõ họ tên)

Nghiên cứu sinh

(Ký và ghi rõ họ tên)

PGS. TS. Nguyễn Thạc Dũng

Hà Tuấn Dũng

INFORMATION ON DOCTORAL THESIS

1. Full name: Ha Tuan Dung.
2. Sex: Male.
3. Date of birth: 22/11/1994.
4. Place of birth: Yen Bai.
5. Admission decision number: 3163/QĐ-ĐHKHTN dated November 30, 2020 by the Rector of VNU University of Science, Hanoi.
6. Changes in academic process: Decision number 4955/QĐ-ĐHKHTN dated December 26, 2023, on adjusting the training duration of doctoral programs by the Rector of VNU University of Science, Hanoi.
7. Official thesis title: Some aspects of geometric flows in Riemannian geometry.
8. Major: Mathematical Analysis.
9. Code: 9460101.02.

10. Supervisors:

Principal supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nguyen Thac Dung, VNU University of Science, Hanoi.

Co-supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tran Thanh Hung, Texas Tech University, USA.

11. Summary of the new findings of the thesis:

11.1. *Thesis purpose and objectives*

This dissertation investigates some aspects of geometric flows, with a particular focus on two main research directions as follows.

- The first aim is to study some geometric and topological properties of gradient Ricci solitons and translating solitons.
- The second aim is to explore the analytical aspects of some partial differential equations that originate from geometry within the context of some super geometric flows.

Specifically, we study the following issues in this dissertation:

- Find an upper bound on the dimension of the Lie algebra of Killing vector fields on an irreducible non-trivial gradient Ricci soliton, and classify the spaces where this maximal dimension is attained;
- Establish gradient estimates and Liouville type results for positive bounded solutions of the nonlinear parabolic equation related to Perelman's reduced distance

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \Delta u(x, t) + au(x, t) \ln u(x, t)$$

along ancient k -super Ricci flow, where $a \in \mathbb{R}$;

- Study some analytical aspects of a general type of nonlinear parabolic equation concerning the weighted Laplacian

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a(x, t) - \Delta_f \right) u(x, t) = F(u(x, t))$$

on a smooth metric measure space with the metric evolving under the (k, ∞) -super Perelman-Ricci flow and the Yamabe flow, where $a(x, t)$ is a function which is C^2 in the x -variable and C^1 in the t -variable, and $F(u)$ is a C^2 function of u ;

- Study of the rigidity properties and connectedness at infinity of complete translating solitons in the Euclidean space via the second fundamental form.

11.2. *Research methods*

In the dissertation, we employ some various methods from geometric analysis, partial differential equations, and functional analysis. Specifically, we use the following methods and tools:

- We use the level-set method to estimate the dimension of the Lie algebra of Killing vector fields on an irreducible non-trivial gradient Ricci soliton in Chapter 2;
- We use the maximum principle method to gradient estimate for positive bounded solutions of nonlinear parabolic equations in Chapter 3 and Chapter 4;
- We use the Sobolev inequality and the Poincare inequality to study some properties of translating solitons in Chapter 5.

11.3. *Major results and conclusions*

a) The major results

The main results of the dissertation include:

- An upper bound on the dimension of the Lie algebra of Killing vector fields on an irreducible, non-trivial gradient Ricci soliton, as well as some results on the geometric structure of this class of gradient Ricci solitons when this maximal dimension is attained;
- Liouville-type theorems and gradient estimates for the positive bounded

solutions to the nonlinear parabolic equation related to gradient Ricci solitons concerning Perelman's reduced distance along ancient k -super Ricci flow;

- Some analytical aspects of a general type of nonlinear parabolic equation concerning the weighted Laplacian on a smooth metric measure space, with the metric evolving under the (k, ∞) -super Perelman-Ricci flow and the Yamabe flow, such as gradient estimates, Harnack inequalities, and Liouville type theorems;
- Rigidity and vanishing results for complete translating solitons in Euclidean spaces.

b) Conclusions

The dissertation focuses on two main research directions in geometric flows and is divided into five chapters. It presents results on the geometric structure of irreducible, non-trivial gradient Ricci solitons through the isometry group in the second chapter. Later, the dissertation establishes gradient estimate results for positive bounded solutions to the nonlinear parabolic equation when the metrics of Riemannian manifolds are time-dependent and evolve under a super geometric flow, and explores some of their implications, notably for Liouville-type theorems and Harnack inequalities. The final chapter provides results regarding the rigidity and connectedness at infinity of complete translators in Euclidean spaces.

12. Further research directions:

- Study of isometric groups of Einstein manifolds.
- Study of gradient estimates and Hessian estimates for positive, smooth solutions of the following class of nonlinear parabolic equations involving the V -Laplace operator:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_V \right) F(u(x, t)) = G(u(x, t)),$$

on complete noncompact Riemannian manifolds.

13. Thesis-related publications:

- Ha Tuan Dung, Hung Tran (2025), “On isometry groups of gradient Ricci solitons”, to appear in *Forum Mathematicum* (SCI-E, Q1).
<https://doi.org/10.1515/forum-2024-0325>

- ii. Ha Tuan Dung, Nguyen Tien Manh, and Nguyen Dang Tuyen (2023), “Liouville type theorems and gradient estimates for nonlinear heat equations along ancient K -super Ricci flow via reduced geometry”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 519 (2), 126836 (SCI-E, Q1).
- iii. Ha Tuan Dung (2023), “Gradient estimates for a general type of nonlinear parabolic equations under geometric conditions and related problems”, *Nonlinear Analysis* Vol. 226, 113135 (SCI-E, Q1).
- iv. Ha Tuan Dung, Nguyen Thac Dung, and Tran Quang Huy (2023), “Rigidity and vanishing theorems for complete translating solitons”, *Manuscripta Mathematica* Vol. 172, pp. 331-352 (SCI-E, Q2).

Date: March 14, 2025

On behalf of academic supervisors

PhD. Student

Assoc. Prof. Dr. Nguyen Thac Dung

Ha Tuan Dung