ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nguyễn Thị Kim Sơn

VỀ MÔ HÌNH CỦA MỘT SỐ MIỀN CÓ NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT VÀ HÌNH THÁI BIÊN CỦA HÀM SQUEEZING

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2025

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nguyễn Thị Kim Sơn

VỀ MÔ HÌNH CỦA MỘT SỐ MIỀN CÓ NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT VÀ HÌNH THÁI BIÊN CỦA HÀM SQUEEZING

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9460101.02.

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. NINH VĂN THU

Hà Nội - 2025

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những kết quả được trình bày trong luận án là mới, đã được công bố trên các tạp chí Toán học trong và ngoài nước.

Các kết quả viết chung với PGS.TS Ninh Văn Thu, GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu, TS Chử Văn Tiệp và Chu Khánh Huyền đã được sự đồng ý của các đồng tác giả khi đưa vào luận án.

Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Thị Kim Sơn

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự quan tâm và hướng dẫn tận tình của PGS.TS. Ninh Văn Thu. Nhân dịp này, tôi xin được gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến Thầy.

Tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến PGS.TS. Nguyễn Thạc Dũng, PGS.TS. Vũ Nhật Huy, PGS.TS. Trịnh Viết Dược, TS. Đặng Anh Tuấn, những người đã trực tiếp giảng dạy các môn học phần và giúp đỡ tôi nhiều trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Bên cạnh đó, tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Ban chủ nhiệm Bộ môn Giải tích, Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Cơ - Tin học, Phòng Đào tạo và Ban Giám hiệu Trường ĐH KHTN - ĐHQGHN đã giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi có thể hoàn thành luận án của mình.

Cuối cùng, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô trong Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Cơ - Tin học thuộc trường ĐH KHTN - ĐHQGHN; Khoa Quản trị kinh doanh và du lịch, Phòng Tổ chức cán bộ và Ban Giám hiệu Trường Đại học Hà Nội; các thành viên của Seminar "Giải tích" thuộc Khoa Toán - Cơ - Tin học; các bạn đồng nghiệp, gia đình và người thân về sự động viên, khích lệ, chia sẻ khó khăn cũng như những trao đổi hữu ích trong suốt quá trình học tập và công tác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Thị Kim Sơn

Mục lục

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU

1. $\mathrm{Aut}(\Omega)$: nhóm tự đẳng cấu của miền Ω.
2. $\mathcal{C}^k(\Omega)$: không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên miền Ω.
3. D^α: toán tử vi phân đạo hàm riêng $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_n^{\alpha_n}}$.
4. $\overline{D}^\beta$: toán tử vi phân đạo hàm riêng $\dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar{z}_1^{\beta_1}\cdots\partial \bar{z}_n^{\beta_n}}$.
5. $\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)$: khoảng cách Euclid từ điểm $z\in\Omega$ tới biên $\partial\Omega$.
6. $Hol(\Omega, D)$: tập các ánh xạ chỉnh hình từ miền Ω vào miền D
7. $F_K(z;\xi)$: metric Kobayashi trên miền $\Omega\subseteq\mathbb{C}^n$ của điểm $z\in\mathbb{C}^n$ tại điểm $\xi\in\Omega$.
8. Miền HHR: miền chính quy, thuần nhất, chỉnh hình.
9. $M_P=\{(z,\omega)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(\omega)+P(z,\bar{z})<0\}$ với P là đa thức nhận giá trị thực trên $\mathbb{C}^n$.
10. $\mathcal{M}(z)$: đa kiểu Catlin của biên $\partial\Omega$ tại điểm $z\in\partial\Omega$.
11. $\Omega_1\simeq\Omega_2$: miền Ω_1 và miền Ω_2 là song chỉnh hình với nhau.
12. $a\lesssim b$ có nghĩa là tồn tại hằng số $C>0$, độc lập với các tham số sao cho $a\le Cb$.
13. $a\approx b$ có nghĩa là tồn tại hằng số $C_1, C_2>0$, độc lập với các tham số sao cho $C_1 b\le a\le C_2 b$.
14. $\tau(\partial\Omega,p)$: kiểu D'Angelo của biên $\partial\Omega$ tại điểm $p\in\partial\Omega$.
15. $\mathcal{T}_P^{\mathbb{C}}(M)$: không gian tiếp xúc phức của siêu mặt M tại điểm p.
16. $\sigma_\Omega(z)$: hàm squeezing của miền $\Omega\Subset\mathbb{C}^n$ tại điểm $z\in\Omega$.
17. $wt(K):=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{k_j}{m_j}$: trọng của đa chỉ số $K=(k_1,\ldots,k_{n-1})\in\mathbb{N}^{n-1}$ theo $\Lambda:=(1/m_1,\ldots,1/m_{n-1})$
18. Đa thức $P(z_1,\ldots,z_n)$ là $(1/m_1,\ldots,1/m_n)$-thuần nhất nếu $P(t^{1/m_1}z_1,\ldots,t^{1/m_n}z_n)=tP(z_1,\ldots,z_n)$ với mọi $t\ge 0$ và $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^n$.
19. $\Delta_\epsilon=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<\epsilon\}$ $(\epsilon>0)$ và $\Delta:=\Delta_1$.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Nghiên cứu tính chất hình học của các nhóm biến đổi của các đa tạp phức hiện đang là một trong những hướng nghiên cứu sôi động của cả Hình học phức và Giải tích phức nhiều biến. Cho Ω là miền trong $\mathbb{C}^n$. Tập hợp tất cả các tự đẳng cấu của Ω, kí hiệu bởi $\mathrm{Aut}(\Omega)$, cùng với phép toán hai ngôi là phép hợp thành của hai tự đẳng cấu tạo thành một nhóm và nhóm này là nhóm tôpô với tôpô hội tụ đều trên các tập compact của Ω.

Trong những năm của thập kỉ 80 của thế kỉ trước, các nhà toán học đã phân loại được các miền bị chặn kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ dựa theo nhóm tự đẳng cấu không compact. Cụ thể hơn, B. Wong và J. P. Rosay đã chứng minh được rằng các miền giả lồi chặt với nhóm tự đẳng cấu không compact đều song chỉnh hình với hình cầu trong $\mathbb{C}^n$ (xem các tài liệu [65, 73]). Sau đó, các nhà toán học như E. Bedford, S. Pinchuk, K. T. Kim, F. Berteloot, H. Gaussier trong các tài liệu [3, 4, 5, 7, 34, 46] đã sử dụng phương pháp scaling của S. Pinchuk để mở rộng Định lý Wong-Rosay cho miền kiểu hữu hạn. Cụ thể, họ đã chứng minh được rằng mọi miền bị chặn giả lồi có kiểu hữu hạn với nhóm tự đẳng cấu không compact đều song chỉnh hình với các mô hình đơn giản. Các công trình trong những năm qua đã chỉ ra rằng tính chất hình học địa phương của điểm biên tụ quỹ đạo cho chúng ta thông tin toàn cục về miền.

Tuy nhiên, nhiều kĩ thuật của E. Bedford và S. Pinchuk không áp dụng được cho các miền không bị chặn. Vì thế, bài toán phân loại miền dựa theo nhóm tự đẳng cấu đối với các miền không bị chặn đòi hỏi phải có cách tiếp cận khác. Trong khoảng 20 năm qua, nhiều nhà toán học đã cố gắng đưa ra những cách tiếp cận mới và vì vậy, vấn đề đã được giải quyết trong một số trường hợp riêng. Hiện tại, theo hướng này chúng ta còn rất nhiều bài toán được đặt ra để nghiên cứu.

Một chủ đề nghiên cứu khác của luận án là nghiên cứu các bất biến song chỉnh hình trên các miền bị chặn, bao gồm các metric bất biến, hàm squeezing, bất biến Fridman, nhân p-Bergman và không gian L^p các hàm chỉnh hình khả tích. Những bất biến này cho chúng ta thông tin về một số tính chất giải tích và tính chất hình học quan trọng của các miền bị chặn và các họ chỉnh hình của chúng, đồng thời đóng vai trò quan trọng trong các công trình nghiên cứu gần đây về phân loại các miền bị chặn.

Các metric bất biến như metric Kobayashi, metric Bergman, metric Kahler-Einstein đóng vai trò quan trọng Hình học phức, Hình học vi phân và Giải tích phức nhiều biến. Việc tính toán cũng như ước lượng các metric này tại các điểm gần biên thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới và các kết quả đã được thể hiện trong các công trình [14, 16, 28, 41, 56, 62, 69, 70],... Trong luận án này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu chủ đề trên cho trường hợp tổng quát hơn.

Gần đây, để nghiên cứu các tính chất hình học và giải tích của miền bị chặn, các tác giả F. Deng, A. Guan và L. Zhang trong tài liệu [21] đã đưa ra khái niệm về một bất biến song chỉnh hình mới đó là hàm squeezing. Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và một điểm $p \in \Omega$. Với một phép nhúng chỉnh hình $f\colon \Omega \to \mathbb{B}^n := B(0;1)$ mà $f(p) = 0$, ta đặt

$$\sigma_{\Omega,f}(p) := \sup\left\{r > 0\colon B(0;r) \subset f(\Omega)\right\},$$

trong đó, $B^n(z;r) \subset \mathbb{C}^n$ là hình cầu tâm z có bán kính r. Khi đó, hàm squeezing $\sigma_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}$ được định nghĩa trong tài liệu [21] bởi

$$\sigma_\Omega(p) := \sup_f \left\{\sigma_{\Omega,f}(p)\right\}.$$

Từ định nghĩa trên ta thấy $0 < \sigma_\Omega(z) \leq 1$ với mọi $z \in \Omega$ và hàm squeezing bất biến qua song chỉnh hình. Miền Ω trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là miền chính quy, thuần nhất, chỉnh hình (HHR) nếu $\inf_{z\in\Omega} \sigma_\Omega(z) > 0$ (xem tài liệu [74]). Tính chất HHR được bảo toàn qua song chỉnh hình và kéo theo tính đầy và tính tương đương của các metric bất biến cổ điển như metric Carathéodory, metric Kobayashi, metric Bergman và metric Kahler-Einstein (xem các tài liệu [22, 74]). Hơn nữa, chúng ta biết rằng lớp các miền thuần nhất bị chặn, miền lồi, miền giả lồi chặt đều là các miền HHR (xem tài liệu [23] và các tài liệu trong đó). Trong luận án này, chúng tôi muốn mở rộng lớp miền HHR và khảo sát ước lượng biên cho hàm squeezing ở gần các điểm cực.

Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, chúng tôi chọn đề tài luận án là: *"Về mô hình của một số miền có nhóm tự đẳng cấu không compact và hình thái biên của hàm squeezing"* là để tiếp tục giải quyết hai bài toán sau đây:

Bài toán 1. Nghiên cứu đặc trưng của các miền trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact.

Bài toán 2. Nghiên cứu dáng điệu biên của hàm squeezing trên các miền bị chặn và metric Kobayashi tổng quát trên các miền h-thác triển được trong $\mathbb{C}^n$.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích đầu tiên của chúng tôi khi thực hiện luận án này là nghiên cứu về đặc trưng của các miền giả lồi có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ bởi dáng điệu biên của các quỹ đạo tự đẳng cấu bằng cách sử dụng kĩ thuật scaling của S. Pinchuk. Tiếp theo, luận án nghiên cứu để tìm cách mở rộng lớp miền HHR và khảo sát dáng điệu biên của hàm squeezing và của các metric Kobayashi tổng quát.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các miền trong $\mathbb{C}^n$. Trong luận án, tư tưởng chính xuyên suốt là khảo sát các tính chất hình học của một miền.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu và kĩ thuật truyền thống của Hình học phức cùng với các kĩ thuật và kết quả của Giải tích phức nhiều biến và Lý thuyết hàm hình học. Đặc biệt, chúng tôi đã áp dụng linh hoạt kĩ thuật scaling của S. Pinchuk cho từng trường hợp cụ thể. Ngoài ra, chúng tôi cũng sáng tạo ra những kĩ thuật mới và các ví dụ minh họa.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Luận án gồm ba chương.

Chương 1 trình bày một số kiến thức cần thiết liên quan dến các vấn đề nghiên cứu của luận án. Nội dung của chương bao gồm: giới hạn của dãy miền và khái niệm dãy hàm chuẩn tắc, kiểu theo nghĩa D' Angelo, đa kiểu Catlin, tính lồi và giả lồi, hàm peak chỉnh hình và hàm peak đa điều hòa dưới, miền h-thác triển được và hội tụ Λ-không tiếp xúc.

Chương 2 dành cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu Bài toán 1 của luận án về đặc trưng của các miền trong $\mathbb{C}^n$ có nhóm tự đẳng cấu không compact.

Theo định lí cổ điển của H. Cartan (xem tài liệu [57]), với một miền bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$, $\mathrm{Aut}(\Omega)$ là nhóm không compact khi và chỉ khi tồn tại điểm $a \in \Omega$, điểm $p \in \partial\Omega$ và các tự đẳng cấu $\varphi_j \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\varphi_j(a) \to p$ khi $j \to \infty$. Khi đó, điểm p được gọi là *điểm biên tụ quỹ đạo*. Tính chất hình học địa phương của các điểm biên tụ quỹ đạo mang đến những thông tin toàn cục về đặc trưng của các miền. Cụ thể, Greene và Krantz đã đặt ra giả thuyết rằng nếu một miền giả lồi, bị chặn, trơn với một nhóm tự đẳng cấu không compact thì điểm biên tụ quỹ đạo có kiểu hữu hạn theo nghĩa D'Angelo (xem tài liệu [20]). Chúng ta có thể tham khảo các bài báo gần đây (xem tài liệu [44, 48, 54]) cho giả thuyết này.

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu bài toán đưa ra đặc trưng cho các miền trong $\mathbb{C}^n$ với các nhóm tự đẳng cấu không compact. Các kết quả chính xung quanh bài toán này có được là nhờ B. Wong và J. P. Rosay (xem các tài liệu [73, 65]), E. Bedford và S. Pinchuk (xem các tài liệu [3, 4, 5, 6]), K.-T. Kim (xem tài liệu [46]), F. Berteloot (xem các tài liệu [7, 9]), A. Isaev và S. Krantz (xem tài liệu [43]), Đ. Đ. Thái và N. V. Thu (xem tài liệu [29]), N. V. Thu và N. Q. Diệu (xem tài liệu [59]). Hầu hết các kết quả trước đây đều yêu cầu tính hữu hạn của kiểu và hoặc là tính giả lồi chặt (thậm chí là lồi), hoặc tính giả lồi chỉ trong không gian 2 chiều. Khác với các kết quả này, chúng tôi đưa ra một đặc trưng mới của các miền giả lồi yếu có kiểu hữu hạn bởi dáng điệu biên của các quỹ đạo tự đẳng cấu bằng việc sử dụng kĩ thuật scaling được giới thiệu bởi S. Pinchuk (xem tài liệu [63]).

Kĩ thuật scaling có thể được mô tả ngắn gọn như sau. Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $\{\varphi_j(a)\}$ là dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ tới điểm biên ξ_0. Cố định một lân cận nhỏ U_0 của ξ_0. Bằng cách sử dụng phép đổi biến thích hợp, kí hiệu là T_j, của các tự đẳng cấu đa thức của $\mathbb{C}^{n+1}$, bao gồm các phép tịnh tiến và các phép co giãn, dãy các miền $D_j := T_j(U_0 \cap \Omega)$ hội tụ chuẩn tắc tới mô hình M_P, được cho bởi

$$M_P := \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\omega) + P(z, \bar{z}) < 0\},$$

trong đó P là đa thức nhận giá trị thực trên $\mathbb{C}^n$. Khi P là đa thức đa điều hòa dưới thuần nhất thì M_P được gọi là mô hình thuần nhất địa phương tại điểm ξ_0.

Dãy $\{F_j := T_j \circ \varphi_j\}$ được gọi là dãy scaling Pinchuk. Với các miền giả lồi có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$, khó khăn lớn nhất là chứng minh dãy Pinchuk scaling $\{F_j\}$ chuẩn tắc, nghĩa là, tồn tại một dãy con của $\{F_j\}$ hội tụ đều trên tập con compact từ Ω vào M_P. Trước hết, ta giả sử tạm thời rằng Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó cách tiếp cận của Bedford và Pinchuk được chia thành hai bước. Trong bước thứ nhất, bằng cách gián tiếp, E. Bedford và S.Pinchuk (xem tài liệu [3, 4, 5, 6]) đã xét sự hội tụ của dãy scaling ngược $\{F_j^{-1}\}$. Do tính bị chặn của Ω, định lý Montel đã khẳng định rằng dãy $\{F_j^{-1}\}$ chứa một dãy con hội tụ. Tiếp theo, giới hạn đó, gọi là G, đã được chứng minh là ánh xạ một-một từ M_P vào Ω bằng cách sử dụng ước lượng đều của metric Kobayshi (xem tài liệu [13] với $n = 1$), hoặc metric Sibony (xem tài liệu [67] cho các miền có đối hạng bằng 1) trên họ các miền scaling $\{D_j\}$. Ngoài ra, sự tồn tại của hàm vét cạn đa điều hòa dưới của Ω (xem tài liệu [24]) kéo theo ánh xạ chỉnh hình G là toàn ánh. Trong bước thứ hai, họ đã xét một nhóm con một chiều $\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ được xác định bởi $\{h_t\}(z) = G(G(z) + (0', it)), z \in \Omega$. Nhóm con này là parabolic theo nghĩa là $\{h_t\}(z)$ hội tụ đến điểm biên $p \in \partial\Omega$ khi $j \to \pm\infty$ với $z \in \Omega$ tùy ý. Sự phân tích về trường véctơ chỉnh hình $H(z) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h_t(z)$, xác định trên Ω và tiếp xúc với $\partial\Omega$ (xem tài liệu [31] mỗi $h_t, t \in \mathbb{R}$, thác triển trơn tới biên), tại điểm parabolic cố định ξ_0 cho thấy đa thức P là đa thức thuần nhất theo trọng sao cho $P(z_1, \bar{z_1}) = c|z_1|^{2m}$ với $n = 1$ và $P(z, \bar{z}) = c|z_1|^{2m} + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2$ với các miền có đối hạng bằng 1, trong đó c là hằng số dương.

Chú ý rằng kĩ thuật trên không áp dụng được cho các miền không bị chặn. Do đó, một cách tiếp cận khác là chứng minh trực tiếp tính chuẩn tắc của $\{F_j\}$ và khi đó tính taut của Ω kéo theo $\{F_j^{-1}\}$ cũng chuẩn tắc. Khi đó, Bổ đề 4.1 trong tài liệu [37] (và Mệnh đề 2.1 trong tài liệu [29]) khẳng định rằng giới hạn của $\{F_j\}$ là một song chỉnh hình từ Ω vào M_P. Tính taut của Ω dễ dàng được suy ra từ sự tồn tại của hàm peak đa điều hòa dưới tại ξ_0 (xem tài liệu [7], Mệnh đề 2.1). Do đó, chúng ta chỉ cần chứng minh tính chuẩn tắc của $\{F_j\}$.

Năm 1991, S. Pinchuk (xem tài liệu [64]) đã xét cho trường hợp ξ_0 là điểm giả lồi chặt. Do tính lồi địa phương của Ω ở gần điểm ξ_0, S. Pinchuk đã chứng minh rằng $\{F_j\}$ là dãy chuẩn tắc. Do đó, miền Ω song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^n$. Kết quả tương tự đã đạt được bởi A. M. Efimov (xem tài liệu [30]) cho các miền giả lồi chặt không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Ngoài ra, với các miền lồi trong $\mathbb{C}^n$ tính chuẩn tắc của dãy Pinchuk scaling có thể dễ dàng được thiết lập (xem các tài liệu [5, 34, 58]). Tuy nhiên, để thuận tiện thì kĩ thuật Frankel scaling (xem tài liệu [33]) đã được áp dụng.

Với các miền giả lồi yếu bị chặn có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^2$, F. Berteloot trong các tài liệu [7, 9, 10] đã đạt được những bước tiến đáng kể bằng cách sử dụng các tính chất của đa đĩa được xây dựng bởi D' Catlin (xem tài liệu [13]) và ước lượng tương ứng của metric Kobayshi gần ξ_0 để chứng minh tính chuẩn tắc của dãy Spinchuk scaling. Do đó, Ω là miền song chỉnh hình với mô hình thuần nhất địa phương M_P. Kết quả này đã được Đ. Đ. Thái và N. V. Thu tổng quát hóa cho các miền có đối hạng bằng 1 trong $\mathbb{C}^n$.

Gần đây, N. V. Thu và N. Q. Diệu trong tài liệu [59] đã nghiên cứu miền giả lồi $\Omega \in \mathbb{C}^n$ có đa kiểu Catlin hữu hạn ở gần điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$. Khi M_P là mô hình thuần nhất có kiểu hữu hạn thì tồn tại hàm peak đa điều hòa dưới cho M_P tại điểm gốc tọa độ. Do đó, tính hút của các đĩa giải tích kéo theo tính chuẩn tắc của dãy Pinchuk scaling. Kết quả là, Ω là miền song chỉnh hình với mô hình M_P nếu dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ Λ-không tiếp xúc tới điểm ξ_0. (xem Nhận xét 3.1 và Định lí 1.1 trong tài liệu [59]).

Chúng ta lưu ý rằng mô hình thuần nhất địa phương M_P phụ thuộc nhiều vào dáng điệu biên của dãy $\{\varphi_j(a)\}$. Chính xác hơn là dáng điệu biên của $\{\varphi_j(a)\}$ quyết định sự lựa chọn các phép co giãn. Mục đích của chương này là đưa ra đặc trưng cho các mô hình thuần nhất địa phương khi quỹ đạo tự đẳng cấu $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ tới điểm ξ_0 theo hướng "rất" tiếp xúc với $\partial\Omega$.

Kết quả mới thứ nhất của luận án trong Chương 2 chỉ ra rằng chỉ có hình cầu đơn vị mới có một quỹ đạo tự đẳng cấu tại điểm ξ_0 hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới $\partial\Omega$. Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lí sau.

Định lí 2.1.1. *Cho Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^{n+1}$ với biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Cho $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm biên h-thác triển mạnh có đa kiểu Catlin hữu hạn $(2m_1, \cdots, 2m_n, 1)$ và $\Lambda = (\frac{1}{2m_1}, \cdots, \frac{1}{2m_n})$. Giả sử tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$.*

Sự hội tụ Λ-tiếp xúc đều của $\{\varphi_j(a)\}$ cho phép ta lựa chọn dãy các phép co giãn thích hợp để mô hình là ellipsoid giải tích song chỉnh hình với $\mathbb{B}^{n+1}$. Tuy nhiên, Ví dụ 2.1.2 trong Mục 2.1 chỉ ra rằng nếu không có sự hội tụ Λ-tiếp xúc đều thì vẫn tồn tại một dãy các phép co giãn thay thế để có được một mô hình như vậy. Ngoài ra, sự mô tả rõ ràng của nhóm tự đẳng cấu của các miền Thullen này hoặc các mô hình có đa kiểu hữu hạn (xem tài liệu [60]) cho thấy dãy quỹ đạo tự đẳng cấu bất kỳ hội tụ Λ-không tiếp xúc tới điểm biên tụ quỹ đạo nào đó. Do đó, dường như có lí do hợp lí để chúng ta có thể hi vọng giảm được yêu cầu về tính đều của sự hội tụ Λ-tiếp xúc đều.

Bây giờ, chúng tôi chuyển sang xét các miền giả lồi, có đối hạng bằng 1 trong $\mathbb{C}^{n+1}$ bao gồm các miền giả lồi, có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^2$. Khi đó, ξ_0 là điểm h-thác triển được (xem tài liệu [76]). Ngoài ra, nếu $n = 1$ và ξ_0 là điểm h-thác triển mạnh thì Ω là miền song chỉnh hình với $\mathbb{B}^2$ theo Định lí 2.1.1. Tuy nhiên, nếu không có tính h-thác triển mạnh thì khái niệm về sự hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu là cần thiết để xác định xem miền Ω có song chỉnh hình với $\mathbb{B}^{n+1}$ hay không.

Kết quả mới thứ hai của luận án trong Chương 2 chỉ ra rằng Định lí 2.1.1 vẫn còn đúng nếu ξ_0 là điểm có kiểu D'Angelo hữu hạn và dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại điểm ξ_0 và dãy $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$. Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lí sau.

Định lí 2.2.1. *Cho Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^{n+1}$ với biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử ξ_0 là điểm biên của Ω có kiểu D'Angelo hữu hạn sao cho dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại ξ_0 và tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$.*

Bây giờ, cho $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ là miền giả lồi có kiểu $2m$ hữu hạn ở gần điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$. Khi đó, khái niệm sự hội tụ $\left(\frac{1}{2m}\right)$-tiếp xúc đều chính là sự hội tụ $\left(\frac{1}{2m}\right)$-tiếp xúc. Do đó, từ Định lí 2.2.1 ta suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.2. *Cho Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ với biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ có kiểu hữu hạn $2m$. Giả sử tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho dãy $\varphi_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới ξ_0 với $a \in \Omega$. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^2$.*

Trong trường hợp dãy $\{\varphi_j(a)\}$ không hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$ thì chúng ta chứng minh Ω là miền song chỉnh hình với một mô hình được xác định bởi một đa thức thuần nhất bậc lớn hơn hoặc bằng 2. Đó là kết quả mới thứ ba của luận án trong chương này.

Mệnh đề 2.3.1. *Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ có biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm có kiểu hữu hạn $2m$. Giả sử tồn tại số $2 \leq \nu \leq m, a \in \Omega$ và dãy $f_j \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp 2ν tới điểm ξ_0. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với một mô hình có dạng*

$$M_Q := \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(\omega) + Q(z) < 0\},$$

trong đó Q là đa thức thuần nhất bậc 2ν và không điều hòa.

Sau đó, chúng tôi đưa ra một ví dụ (Ví dụ 2.3.1) để chỉ ra rằng nếu dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu không hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới một điểm biên thì miền Ω không song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^2$ nhưng song chỉnh hình với mô hình M_Q có $\deg(Q) = 4$.

Chương 3 dành cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu Bài toán 2 của luận án. Đó là các kết quả liên quan đến dáng điệu biên của hai bất biến song chỉnh hình trên các miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là hàm squeezing và metric Kobayashi tổng quát.

Trong phần đầu tiên của Chương 3, chúng tôi trình bày hai kết quả mới liên quan đến hàm squeezing. Một trong những chủ đề trung tâm của giải tích phức nhiều biến và hình học phức là nghiên cứu các metric bất biến song chỉnh hình cổ điển như metric Carathéodory, metric Bergman, metric Kobayashi và metric Kähler-Einstein trên các miền trong $\mathbb{C}^n$ hoặc các đa tạp phức. Để phân biệt các miền hoặc các đa tạp phức, các metric bất biến cổ điển có thể ước lượng được các nhà nghiên cứu giải tích phức quan tâm và đã được nghiên cứu rộng rãi trong nhiều tài liệu. Trong số tất cả các nghiên cứu, một khái niệm có tên là miền chính quy, thuần nhất, chỉnh hình (viết tắt là HHR), đã thu hút được sự chú ý đáng kể trong thời gian vừa qua.

Tính chất HHR được bảo toàn qua các ánh xạ song chỉnh hình. Do đó, kéo theo tính đầy và tính tương đương của các metric bất biến cổ điển như metric Carathéodory, metric Kobayashi, metric Bergman và metric Kahler-Einstein (xem các tài liệu [22] và [74]). Vì vậy, chúng ta mong muốn biết được khi nào thì một đa tạp phức hoặc một miền bị chặn sẽ có tính chất HHR.

Trong tài liệu [74], các tác giả đã chỉ ra rằng các miền thuần nhất bị chặn, các miền bị chặn phủ một đa tạp phức compact, các miền lồi chặt bị chặn và trơn lớp $\mathcal{C}^2$ đều là các đa tạp HHR.

Gần đây, bằng cách nghiên cứu dáng điệu biên của hàm squeezing, người ta đã chứng minh được rằng các miền giả lồi chặt có biên thuộc lớp $\mathcal{C}^2$ (xem tài liệu [22]) và miền lồi bị chặn (xem tài liệu [49]) cũng là các miền HHR.

Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, trong chương này chúng tôi đã đưa ra được một lớp mới các miền HHR, mà miền không lồi $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_2|^2 + |z_1|^8 + |z_1|^2 \mathrm{Re}(z_1^6)/2 < 1\}$ là một ví dụ điển hình. Để làm được như vậy, với các số nguyên $m_1, \ldots, m_{n-1}$ ta xét ellipsoid tổng quát D_P trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ được xác định bởi

$$D_P := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \colon |z_n|^2 + P(z') < 1\},$$

trong đó $P(z')$ là đa thức $(1/2m_1, \ldots, 1/2m_{n-1})$-thuần nhất, nhận giá trị thực trên $\mathbb{C}^{n-1}$ và được cho bởi

$$P(z') = \sum_{wt(K)=wt(L)=1/2} a_{KL} z'^K \bar{z}'^L, \tag{1}$$

với $a_{KL} \in \mathbb{C}$, $a_{KL} = \bar{a}_{LK}$ và $P(z') > 0$ khi $z' \neq 0$. Ở đây và trong các phần sau $z' := (z_1, \ldots, z_{n-1})$.

Để đưa ra kết quả mới đầu tiên của luận án trong chương này ta cần một số định nghĩa sau.

Định nghĩa A (xem tài liệu [1]). *Miền Ω trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là miền WB (weighted-bumped) hoặc miền kiểu đường chéo hữu hạn thuần nhất (homogeneous finite diagonal type) theo nghĩa của các bài báo [40, 42] nếu*

$$\Omega = \left\{(z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z_n) + P\left(z'\right) < 0\right\}$$

và tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$P(z') - \delta(|z_1|^{2m_1} + \cdots + |z_{n-1}|^{2m_{n-1}}) \text{ là đa điều hoà dưới trên } \mathbb{C}^{n-1},$$

nghĩa là, P là đa điều hoà dưới chặt bên ngoài các trục toạ độ.

Lưu ý rằng miền $\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon \operatorname{Re}(z_2) + P\left(z_1\right) < 0\}$ là miền WB nếu nó giả lồi chặt tại mọi điểm biên ở bên ngoài tập hợp $\partial\Omega \cap \{(0, it) \in \mathbb{C}^2 \colon t \in \mathbb{R}\}$.

Định nghĩa B (xem tài liệu [61]). *Miền D_P được gọi là miền $\widetilde{WB}$ nếu D_P là miền giả lồi chặt tại mọi điểm biên ở bên ngoài tập hợp $\{(0', e^{i\theta}) \colon \theta \in \mathbb{R}\}$.*

Chú ý rằng ellipsoid $E_{1m} := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|^{2m} + |z_2|^2 < 1\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ là một miền $\widetilde{WB}$. Mặc dù $\Omega := \{z \in \mathbb{C}^3 \colon |z_1|^4 + |z_2|^4 + |z_3|^2 < 1\}$ là một miền WB nhưng nó không là miền $\widetilde{WB}$ vì điểm biên $(1, 0, 0) \in \partial\Omega \setminus \{(0, 0, e^{i\theta}) \colon \theta \in \mathbb{R}\}$ không giả lồi chặt. Như vậy, khái niệm miền $\widetilde{WB}$ chặt hơn khái niệm miền WB trong không gian chiều lớn hơn 2.

Kết quả mới đầu tiên của luận án trong Chương 3 là định lí sau. Định lí chỉ ra rằng nếu D_P là miền $\widetilde{WB}$ thì D_P là miền HHR.

Định lí 3.1.2. *Cho P là một đa thức thuần nhất theo trọng với trọng $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ được cho bởi (1) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0'\}$. Nếu D_P là miền $\widetilde{WB}$ thì D_P là miền HHR.*

Tiếp theo, chúng tôi khảo sát dáng điệu của hàm squeezing gần điểm cực toàn cục. Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$ gần điểm biên $p \in \partial\Omega$. Ta nhắc lại, điểm biên p được gọi là điểm *cực cầu* nếu tồn tại hình cầu $B(c(p); R)$ trong $\mathbb{C}^n$ bán kính R, tâm tại điểm $c(p)$ sao cho $\Omega \subset B(c(p); R)$ và $p \in \partial\Omega \cap \partial B(c(p); R)$ (xem tài liệu [49]). Năm 2016, K.T. Kim, L. Zhang đã chứng minh được rằng $\lim_{\Omega \ni q \to p} \sigma_\Omega(q) = 1$ nếu p là một điểm biên cực cầu của Ω (xem tài liệu [49], Định lí 3.1). Tuy nhiên, điểm biên cực cầu nói chung không tồn tại, ngay cả với một miền giả lồi trơn có kiểu hữu hạn.

Gần đây, với miền giả lồi trơn có kiểu hữu hạn, Diederich và các cộng sự trong tài liệu [26] đã chứng minh được rằng với một miền bị chặn bất kỳ $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ lồi địa phương và có 1-kiểu hữu hạn $2k$ tại $p \in \partial\Omega$ và có một cơ sở lân cận Stein thì tồn tại một phép nhúng chỉnh hình $f \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}^n$ sao cho $f(p)$ là là một điểm cực toàn cục có kiểu $2k$ của $\overline{f(\Omega)}$ theo nghĩa $f(\Omega) \subset \mathbb{B}_k^n := \{z \in \mathbb{C}^n \colon |z_n|^2 + \|z'\|^{2k} < 1\}$ và $f(p) = (0', 1)$. Điều đó dẫn đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa C. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$, $p \in \partial\Omega$, $P(z')$ là đa thức được cho trong (1), và $r \in (0,1]$. Ta nói p là điểm cực (P,r) nếu tồn tại phép nhúng chỉnh hình $f\colon \overline{\Omega} \to \overline{E_P}$ sao cho $f(p) = (0',0)$ và $D(r) \subset f(\Omega)$, trong đó*

$$E(p) := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon P(z') < 2\mathrm{Re}(z_n)\};$$

$$D(r) := D_{P,r} = \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon |z_n - r|^2 + P(z') < r^2\}.$$

Trong trường hợp này, ta kí hiệu $\Gamma(r,c) := f^{-1}(D(r) \cap \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon |\mathrm{Im}(z_n)| \leq c|\mathrm{Re}(z_n)|\})$ với $c > 0$.

Vì $D(r') \subset D(r)$ với $0 < r' < r \leq 1$ nên ta suy ra rằng nếu p là điểm cực (P,r) thì nó cũng là điểm cực (P,r') với mọi $0 < r' < r \leq 1$. Hơn nữa, p là điểm cực cầu khi và chỉ khi nó là điểm cực $(\|z'\|^2, r)$ với $0 < r \leq 1$.

Kết quả mới thứ hai của luận án trong chương này là định lí dưới đây.

Định lí 3.1.3. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ và $p \in \partial\Omega$ là một điểm cực (P,r) với $0 < r \leq 1$. Khi đó, với mọi $0 < r' < r$ và $c > 0$ tồn tại $\epsilon_0, \gamma_0 > 0$ sao cho*

$$\sigma_\Omega(q) > \gamma_0, \quad \forall q \in \Gamma(r', c) \cap B(p; \epsilon_0).$$

Trong phần tiếp theo của chương này, chúng tôi trình bày các kết quả mới liên quan đến các metric Kobayashi tổng quát.

Cho Ω là một miền giả lồi, trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $\xi_0 \in \partial\Omega$. Giả sử ρ là một hàm xác định biên địa phương của Ω ở gần điểm ξ_0 và đa kiểu $\mathcal{M}(\xi_0) = (1, m_1, \ldots, m_n)$ hữu hạn. Khi đó, tồn tại một hệ tọa độ $z = (z_0, z')$ với $z' = (z_1, \ldots, z_n)$ sao cho $\xi_0 = 0$ và hàm $\rho(z)$ có thể khai triển ở gần điểm 0 như sau

$$\rho(z) = \mathrm{Re}(z_0) + P(z') + R(z),$$

trong đó P là một đa thức đa điều hòa dưới, $(1/m_1, \ldots, 1/m_n)$-thuần nhất và không chứa các hạng tử đa điều hòa, R là hàm trơn và thỏa mãn

$$|R(z)| \leq C\left(|z_0| + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{m_j}\right)^{\gamma},$$

với hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$.

Miền Ω được gọi là *h-thác triển được* tại điểm p nếu mô hình

$$M_P := \{z = (z_0, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \colon \mathrm{Re}(z_0) + P(z') < 0\}$$

có kiểu hữu hạn. Kết quả là M_P *suy biến*, nghĩa là, biên ∂M_P không chứa tập giải tích không tầm thường đi qua gốc tọa độ, và M_P là miền taut (xem Định lí 3.13 trong tài liệu [76]).

Với $s, M, N > 0$, ta kí hiệu

$$\Gamma(s; M, N) = \{z \in \Omega \colon |\mathrm{Im}(z_0)| \leq M|\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)|, \sigma(z') \leq N|\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)|^s\},$$

trong đó $\sigma(z') := \sum_{j=1}^n |z_j|^{m_j}$.

Để đơn giản, ta định nghĩa Λ-nón có đỉnh tại ξ_0 bởi $\Gamma := \Gamma(1; M, N)$ và kí hiệu là $\Gamma^s := \Gamma(s; M, N)$ với $M, N > 0$ nào đó. Chúng ta lưu ý rằng $|z_j|^{m_j} \lesssim |\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)|, j = 1, \ldots, n$, với $z \in \Gamma$.

Cố định một lân cận đủ nhỏ U của ξ_0 trong $\mathbb{C}^{n+1}$, ta có thể giả sử rằng với điểm $\eta \in U \cap \Omega$ bất kì, tồn tại một số thực dương $\epsilon(\eta) > 0$ sao cho điểm $\tilde{\eta} := (\eta_0 + \epsilon(\eta), \eta_1, \ldots, \eta_n)$ thuộc siêu mặt $\{\rho = 0\}$. Chú ý rằng $\epsilon(\eta) = |\rho(\eta)| \approx \mathrm{dist}(\eta, \partial\Omega)$.

Tiếp theo, chúng ta nhắc lại khái niệm các metric Kobayashi bậc cao sau đây.

Định nghĩa D. *Với mỗi số nguyên $k \geq 1$, metric Kobayashi bậc k được định nghĩa bởi*

$$F_\Omega^k(z, X) = \inf\left\{\frac{1}{\lambda} \colon \lambda > 0, \exists\varphi \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Omega),\ \varphi(0) = z, \nu(\varphi) \geq k, \varphi^{(k)}(0) = k!\lambda X\right\},$$

trong đó Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$ và $\nu(\varphi)$ là cấp triệt tiêu của φ tại 0. Chúng ta lưu ý rằng $F_\Omega := F_\Omega^1$ chính là metric Kobayashi.

Bây giờ, chúng ta định nghĩa phép co giãn

$$\pi_t(z_1, \ldots, z_n) = \left(t^{1/m_1} z_1, \ldots, t^{1/m_n} z_n\right),\ t \geq 0.$$

Khi đó, với mọi dãy $\{\eta_j\} \subset \Gamma$ hội tụ về đỉnh ξ_0, tồn tại dãy con $\{\eta_{j_\ell}\} \subset \{\eta_j\}$ sao cho

$$\lim_{\ell\to\infty} \pi_{1/\epsilon(\eta_{j_\ell})}(\eta'_{j_\ell}) = \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

(Chúng ta lưu ý rằng $\alpha = 0$ nếu $\{\eta_{j_\ell}\} \subset \Gamma^s$ với $s > 1$.) Khi đó, mô hình liên kết $M_{P,\alpha}$ được định nghĩa bởi

$$M_{P,\alpha} = \{(z_0, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \colon \mathrm{Re}(z_0) + P(z' + \alpha) - P(\alpha) < 0\}.$$

Để đơn giản, ta viết M_P thay cho $M_{P,0}$.

Năm 1975, I. Graham trong tài liệu [35] đã đưa ra giới hạn biên có trọng cho metric Kobayashi trên các miền giả lồi chặt. Kể từ đó, đã có nhiều ước lượng cho metric Kobayashi trên một số lớp miền giả lồi yếu (xem các tài liệu [13, 15, 16, 25, 32, 40, 53]), đặc biệt là các giới hạn của metric Kobayashi trên các miền giả lồi có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^2$ (xem tài liệu [13]), các miền lồi, bị chặn, trơn, có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ (xem tài liệu [15]). Đối với các miền giả lồi yếu tổng quát có kiểu hữu hạn, chưa có một giới hạn rõ ràng nào được biết đến. Vấn đề là các ước lượng dưới thông thường cho metric Kobayashi như trong tài liệu [13] không còn đúng với các miền tổng quát có kiểu hữu hạn trừ khi kiểu chính quy của miền là nửa liên tục trên (xem tài liệu [76]). Mặt khác, một số kết quả tương tự các kết quả của I. Graham liệu có còn đúng trên các miền giả lồi yếu, thậm chí là trên các miền trong $\mathbb{C}^2$ hay không thì vẫn còn là một câu hỏi mở.

Năm 1995, J. Yu trong tài liệu [76] đã nghiên cứu bài toán tương tự cho các metric Kobayshi tổng quát trên các miền giả lồi yếu. Trong tài liệu [76], J. Yu tập trung vào mối liên hệ giữa các giới hạn biên (có trọng) của các metric và các bất biến Levi của miền theo cách tương tự các kết quả của I. Graham trong tài liệu [35]. Khó khăn lớn nhất trong trường hợp miền giả lồi yếu là tính chất hình học Levi địa phương của miền nói chung phức tạp hơn nhiều và vẫn chưa được hiểu rõ. Đặc biệt, không có mô hình chung cho tất cả các miền giả lồi yếu.

Để vượt qua được khó khăn đó, đầu tiên J. Yu thiết lập lại miền với đa kiểu của miền và sau đó đưa miền đó trở thành một miền taut (nhưng mô hình không bị chặn). Để đạt được giới hạn mong muốn, tác giả đã phải nghiên cứu bài toán tính ổn định và tính địa phương của các metric. Ưu điểm của phương pháp này là không chỉ áp dụng được cho các metric Kobayashi, mà còn có thể áp dụng được cho các metric bất biến khác. Kết quả chính của bài báo đó là mở rộng kết quả của I. Graham trong tài liệu [35] cho một lớp các miền giả lồi yếu rộng lớn, có tên là các miền h-thác triển, miền bao gồm hầu hết tất cả các miền được đề cập ở trên. Giới hạn trong định lí chính của tài liệu [76] là giới hạn rõ ràng nhất cho một miền giả lồi yếu tổng quát. Định lí được phát biểu như sau.

Định lý E (J. Yu). *Cho Ω là một miền taut trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và cho $p \in \partial\Omega$ là điểm có kiểu hữu hạn với đa kiểu $\mathscr{M}(p) = (1, m_1, \ldots, m_n)$. Giả sử (Ω, p) là miền h-thác triển được. Khi đó, với mọi nón không tiếp xúc Γ trong Ω có đỉnh tại điểm p và mọi hàm $V(z)$ nhận giá trị trong $\mathbb{C}^{n+1}$, liên tục tại điểm p, ta có*

$$\lim_{\Omega\cap\Gamma\ni z\to p} F_\Omega\left(z, (H_p)^{-1}_{*z}(\Pi_d)_{*q}(H_p)_{*z}V(z)\right) = F_{D_p}\left(0, (H_p)_{*p}V(p)\right), \tag{2}$$

trong đó H_p là các tọa độ phân biệt được xác định như trên, $D_p = \{(z,w) : \operatorname{Re} w + P(z) < 1\}$ là mô hình liên kết với miền (Ω, p) theo các tọa độ phân biệt $q = H_p(z)$ và $\Pi_{d*} = \operatorname{diag}\left[d^{1/m_n}, \ldots, d^{1/m_1}, d\right]$ với $d = \operatorname{dist}\left(q, \partial\left(H_p(\Omega)\right)\right)$.

Phương trình (2) cho thấy giới hạn biên có trọng của mọi metric Kobayashi bậc cao trên miền h-thác triển chính là giá trị của metric trên mô hình liên kết tại điểm 0.

Trong tài liệu [76] các giới hạn biên có trọng của các metric Kobayashi tổng quát được lấy trên tất cả các điểm trong một nón không tiếp xúc. Kết quả mới thứ ba của luận án trong chương này khẳng định rằng kết quả của J. Yu vẫn đúng với các giới hạn Λ-không tiếp xúc. Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lí sau.

Định lí 3.2.3. *Cho Ω là một miền giả lồi, có biên trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $\xi_0 \in \partial\Omega$ sao cho Ω là h-thác triển được tại điểm ξ_0. Giả sử đa kiểu của điểm ξ_0 là $(1, m_1, \ldots, m_n)$*

mà $m_n < +\infty$ *và cho* $\Lambda = (1/m_1, \ldots, 1/m_n)$. *Giả sử hàm xác định biên địa phương* ρ *của miền* Ω *ở gần điểm* 0 *có dạng*

$$\rho(z) = \mathrm{Re}(z_0) + P(z') + R(z),$$

trong đó P *là đa thức đa điều hòa dưới* Λ*-thuần nhất không chứa hạng tử đa điều hòa,* R *là hàm trơn và thỏa mãn*

$$|R(z)| \le C\left(|z_0| + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{m_j}\right)^{\gamma},$$

với hằng số $\gamma > 1$ *và* $C > 0$. *Cho* $\{\eta_j\} = \{(\eta_{j0}, \eta_j')\} \subset \Omega \cap U \cap \Gamma$ *là một dãy các điểm hội tụ đến điểm* 0 *sao cho*

$$\lim_{j\to\infty} \pi_{1/\epsilon(\eta_j)}(\eta_j') = \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma \ni \eta_j \to 0} F^k_{\Omega\cap U}\left(\eta_j, (\pi_{\epsilon(\eta_j)})_* X\right) &= F^k_{M_{P,\alpha}}((0', -1), X)\\ &= F^k_{M_P}\big((-1 - P(\alpha), \alpha), X\big),\ \forall\ X \in \mathbb{C}^{n+1}.\end{aligned}$$

Luận án cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh theo hướng nghiên cứu này.

6. Cấu trúc luận án

Cấu trúc của luận án bao gồm ba chương chính được viết dựa trên ba công trình đã được đăng trên các tạp chí International Journal of Mathematics (SCIE-Q2), Complex Variables and Elliptic Equations (SCIE-Q2) và VNU Journal of Science: Mathematics - Physics. Cụ thể như sau:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2. Đặc trưng của các miền trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact.

Chương 3. Dáng điệu biên của hàm squeezing và của các metric Kobayashi tổng quát.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cần thiết liên quan đến các vấn đề nghiên cứu của luận án như: giới hạn của dãy miền và khái niệm dãy hàm chuẩn tắc, kiểu theo nghĩa D' Angelo, đa kiểu Catlin, tính lồi và giả lồi, hàm peak chỉnh hình và hàm peak đa điều hòa dưới, tính h-thác triển, sự hội tụ Λ-không tiếp xúc. Chương này được viết dựa trên các tài liệu [12, 29, 37, 39, 52, 59, 68, 71, 75, 76].

1.1 Sự hội tụ chuẩn tắc của một dãy các miền và của một dãy các ánh xạ

Trong mục này, chúng ta nhắc lại các khái niệm về sự hội tụ chuẩn tắc của một dãy các miền trong $\mathbb{C}^n$ và của một dãy các ánh xạ.

Định nghĩa 1.1.1 (xem tài liệu [29] hoặc [37, 52]). *Cho $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ là một dãy các miền trong $\mathbb{C}^n$. Dãy $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ được gọi là* hội tụ chuẩn tắc *tới miền $\Omega_0 \subset \mathbb{C}^n$ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) Nếu tập compact K được chứa trong phần trong của $\bigcap\limits_{j\geq m} \Omega_j$ với số nguyên dương m nào đó thì $K \subset \Omega_0$;

(ii) Nếu tập con compact $K' \subset \Omega_0$ thì tồn tại hằng số $m > 0$ sao cho $K' \subset \bigcap\limits_{j\geq m} \Omega_j$.

Ngoài ra, khi dãy các ánh xạ $\varphi_j \colon \Omega_j \to \mathbb{C}^m$ hội tụ đều trên các tập compact tới ánh xạ $\varphi \colon \Omega_0 \to \mathbb{C}^m$ thì ta nói dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ hội tụ chuẩn tắc *tới φ.*

Tiếp theo, chúng ta trình bày khái niệm dãy phân kì compact và khái niệm về miền taut.

Định nghĩa 1.1.2 (xem tài liệu [19]). *Cho Ω, D là các miền trong $\mathbb{C}^n$.*

i) Dãy các ánh xạ chỉnh hình $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset Hol(\Omega, D)$ được gọi là phân kì compact nếu với mỗi tập con compact $K \subset \Omega$ và mỗi tập con compact $L \subset D$ thì tồn tai j_0 sao cho $f_j(K) \cap L = \emptyset$ với mọi $j \geq j_0$;

ii) Một họ F là không phân kì compact nếu F không chứa dãy con phân kì compact.

iii) Miền D được gọi là một miền taut nếu mọi dãy $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset Hol\,(\Omega, D)$ đều chứa một dãy con hội tụ đều trên các tập compact của Ω hoặc chứa một dãy con phân kì compact.

1.2 Tính lồi và tính giả lồi

Trong mục này, chúng ta nhắc lại khái niệm về tính lồi và tính giả lồi của các miền trong $\mathbb{C}^n$.

Trước tiên, chúng ta sẽ trình bày khái niệm về hàm xác định biên địa phương của một miền và khái niệm véctơ tiếp xúc với biên của một miền tại một điểm nằm trên biên.

Định nghĩa 1.2.1 (xem tài liệu [52]). *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ có biên trơn lớp $\mathcal{C}^1$. Trong một lân cận đủ bé U của điểm biên $p \in \partial\Omega$, ta có thể viết*

$$\Omega \cap U = \{z \in U : \rho(z) < 0\},$$

trong đó ρ là hàm thỏa mãn $\nabla\rho \neq 0$ trên $\partial\Omega \cap U$. Khi đó,

i) Hàm ρ được gọi là hàm xác định biên cho miền Ω trong lân cận của điểm p;

ii) Miền Ω được gọi là có biên trơn lớp $\mathcal{C}^k (1 \leq k \leq \infty)$ tại p nếu hàm xác định biên ρ trơn lớp $\mathcal{C}^k$ tại p;

iii) Biên $\partial\Omega$ được gọi là trơn lớp $\mathcal{C}^k$ nếu biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^k$ tại mọi điểm.

Định nghĩa 1.2.2 (xem tài liệu [52]). *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ có biên trơn lớp $\mathcal{C}^1$ và cố định điểm $p \in \partial\Omega$. Giả sử ρ là hàm xác định biên địa phương của Ω, tức là $\Omega \cap U = \{\rho < 0\}$ với U là một lân cận của p. Một n-bộ $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n$ được gọi là véctơ tiếp xúc với $\partial\Omega$ tại p nếu*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial z_j}(p) w_j = 0.$$

Tập hợp tất cả các véctơ tiếp xúc với $\partial\Omega$ tại p được kí hiệu là $\mathcal{T}_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$.

Tiếp theo, chúng ta trình bày định nghĩa về tính lồi và tính giả lồi của một miền trong $\mathbb{C}^n$.

Định nghĩa 1.2.3 (xem tài liệu [52]). *Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là miền có biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$ và cố định điểm $p \in \partial\Omega$. Giả sử ρ là một hàm xác định biên địa phương của Ω. Ta nói biên $\partial\Omega$ là lồi (yếu) tại điểm p nếu*

$$2\mathrm{Re}\left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial z_k}(p)\omega_j\omega_k\right) + 2\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p)\omega_j\bar{\omega}_k \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{T}_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega). \tag{1.1}$$

Điểm p được gọi là lồi chặt nếu biểu thức ở vế trái của (1.1) dương với mọi $\omega \in \mathcal{T}_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$.

Một miền Ω được gọi là lồi (tương ứng lồi chặt) nếu mọi điểm biên của Ω là lồi (tương ứng lồi chặt).

Định nghĩa 1.2.4 (xem tài liệu [52]). *Cho $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ là một miền có biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$ và điểm $p \in \partial\Omega$. Giả sử ρ là một hàm xác định biên địa phương cho Ω. Ta nói biên $\partial\Omega$ là giả lồi (Levi) tại điểm p nếu*

$$L_\rho(p)(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p)\omega_j \bar{\omega}_k \geq 0 \quad \forall w \in \mathcal{T}_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega). \tag{1.2}$$

Biểu thức bên vế trái của (1.2) được gọi là dạng Levi.

Điểm p được gọi là giả lồi chặt Levi nếu biểu thức bên vế trái của (1.2) dương với mọi $\omega \in \mathcal{T}_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$.

Một miền được gọi là giả lồi Levi (tương ứng giả lồi chặt Levi) nếu mọi điểm biên của nó giả lồi Levi (tương ứng giả lồi chặt Levi).

Chú ý 1.2.1. *Chúng ta chú ý rằng định nghĩa miền giả lồi không phụ thuộc vào cách lựa chọn hàm xác định biên địa phương của miền.*

Sau đây, chúng ta đưa ra một ví dụ để minh họa cho miền giả lồi.

Ví dụ 1.2.1. Giả sử miền $\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$. Khi đó, $\rho(z_1, z_2) = -1 + |z_1|^2 + |z_2|^4$ là hàm xác định biên địa phương của Ω và dạng Levi tại điểm biên (z_1, z_2) tính tại véctơ tiếp xúc (ω_1, ω_2) là

$$|\omega_1|^2 + 4|z_2|^2|\omega_2|^2.$$

Do đó, biên $\partial\Omega$ là giả lồi chặt, trừ tại các điểm biên (z_1, z_2) mà $|z_2|^2 = 0$ và véctơ tiếp xúc (ω_1, ω_2) mà $\omega_1 = 0$. Những điểm này là các điểm biên có dạng $(e^{i\theta}, 0)$. Tại các điểm đó miền Ω là giả lồi Levi (yếu).

1.3 Kiểu theo nghĩa D'Angelo

Định nghĩa 1.3.1 (xem tài liệu [68]). *Giả sử (M, p) là một mầm tại điểm p của siêu mặt thực trơn trong $\mathbb{C}^n$ và r là hàm xác định biên địa phương của M gần p. Cấp tiếp xúc của đường cong γ với M tại p được xác định bởi*

$$\tau(M, \gamma, p) := \frac{\nu(r \circ \gamma)}{\nu(\gamma)},$$

trong đó $\nu(\gamma)$ là cấp triệt tiêu của $\gamma(t)-\gamma(0)$ tại $t=0$ và $\nu(r\circ\gamma)$ là cấp triệt tiêu của $r\circ\gamma(t)$ tại $t=0$. Kiểu D'Angelo của M tại p được định nghĩa bởi

$$\tau(M,p)=\sup_{\gamma}\tau(M,\gamma,p)=\sup_{\gamma}\frac{\nu(r\circ\gamma)}{\nu(\gamma)},$$

trong đó supremum được lấy trên tất cả các mầm $\gamma:\Delta\to\mathbb{C}^n$ của các đường cong chỉnh hình khác hằng thỏa mãn $\gamma(0)=p$.

Ta nói p là điểm có kiểu D'Angelo hữu hạn nếu $\tau(M,p)<+\infty$ và có kiểu D'Angelo vô hạn nếu ngược lại.

Nhận xét 1.3.1. Kiểu D'Angelo của M tại p không phụ thuộc vào hàm xác định biên địa phương của M gần p.

Ví dụ 1.3.1. Cho siêu mặt $M=\partial\mathbb{B}^2=\left\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\colon \rho=|z_1|^2+|z_2|^2-1=0\right\}$. Ta xét điểm $p=(1,0)\in M$.

Chọn đường cong chỉnh hình $\gamma(t)=(1,t), t\in\mathbb{C}$. Ta có $\gamma(0)=(1,0)\in M$, $\nu(\gamma)=1$ và $\rho\circ\gamma(t)=1+|t|^2-1=|t|^2$. Do đó, $\nu(\rho\circ\gamma(t))=2$ và $\tau(M,p)=\sup_\gamma\dfrac{\nu(\rho\circ\gamma)}{\nu(\gamma)}\geq\dfrac{2}{1}=2$.

Mặt khác, áp dụng cách chứng minh của bài báo [48] với $m=1$ ta cũng chứng minh được rằng $\sup_\gamma\dfrac{\nu(\rho\circ\gamma)}{\nu(\gamma)}\leqslant 2$.

Từ đó, ta suy ra $\tau(M,p)=2$.

Ví dụ 1.3.2. Cho siêu mặt $M=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2: |z_1|^4+P(z_2)=1\right\}$, trong đó $P(z_2)=4e^{-1/|z_2|^2}$ nếu $z_2\neq 0$ và $P(0)=0$. Ta xét $p=(1,0)\in M$. Khi đó, $\tau(M,p)=+\infty$.

Chứng minh. Xét $\gamma:(\mathbb{C},0)\longrightarrow(\mathbb{C}^2,p)$ là đường cong chỉnh hình cho bởi $\gamma(t)=(1,t)$. Khi đó, $\gamma(0)=(1,0)=p$ và $\nu(\gamma)=1$. Đặt $\rho(z)=|z_1|^4+P(z_2)-1$. Ta có, $\rho\circ\gamma(t)=|1|^4+4e^{-1/|t|^2}-1=4e^{-1/|t|^2}$ nên $\nu(\rho\circ\gamma(t))=+\infty$. Vì thế, $\dfrac{\nu(\rho\circ\gamma(t))}{\nu(\gamma)}=\dfrac{+\infty}{1}=+\infty$. Do đó, $\sup_\gamma\dfrac{\nu(\rho\circ\gamma)}{\nu(\gamma)}=+\infty$ hay $\tau(M,p)=+\infty$. $\square$

1.4 Đa kiểu Catlin

Trước khi đưa ra định nghĩa về đa kiểu $\mathcal{M}(z)$, chúng ta sẽ đưa ra một số kí hiệu sau đây. Giả sử r là hàm xác định biên địa phương trơn cho miền $\Omega=\{z: r(z)<0\}$. Ta kí hiệu Γ_n là tập của tất các bộ n số $\Lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ với $1\leq\lambda_i\leq+\infty$ sao cho

i) $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots\leq\lambda_n$;

ii) với mỗi k, hoặc $\lambda_k = +\infty$ hoặc tồn tại các số nguyên không âm $a_1, \ldots, a_k$ với $a_k > 0$ sao cho

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{\lambda_j} = 1.$$

Dễ thấy rằng, với mỗi số $T < \infty$ và mỗi $i = 1, \ldots, n$ thì khi Λ thuộc Γ_n chỉ có hữu hạn các giá trị hữu tỉ có thể có của λ_i thỏa mãn $\lambda_i \leq T$. Các phần tử của Γ_n được gọi là *trọng*. Tập các trọng có thể được sắp xếp theo thứ tự từ điển, nghĩa là, với $\Lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n)$ và $\Lambda'' = (\lambda''_1, \ldots, \lambda''_n)$ thì $\Lambda' < \Lambda''$ nếu với k nào đó, $\lambda'_i = \lambda''_i$ với mọi $i < k$, nhưng $\lambda'_k < \lambda''_k$.

Bây giờ, giả sử z_0 là một điểm biên cho trước của Ω với hàm xác định biên địa phương r. Trọng $\Lambda \in \Gamma_n$ được gọi là *phân biệt được* nếu tồn tại hệ tọa độ chỉnh hình $(z_1, \ldots, z_n)$ quanh điểm z_0 mà z_0 được ánh xạ thành điểm gốc tọa độ sao cho

$$D^{\alpha}\bar{D}^{\beta} r(z_0) = 0 \text{ khi } \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i + \beta_i}{\lambda_i} < 1, \tag{1.3}$$

trong đó, D^{α} và $\bar{D}^{\beta}$ kí hiệu cho các toán tử đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}} \quad \text{và} \quad \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar{z_1}^{\beta_1} \ldots \partial \bar{z_n}^{\beta_n}}$$

tương ứng.

Định nghĩa 1.4.1 (xem tài liệu [12]). *Đa kiểu $\mathcal{M}(z_0)$ của điểm biên $z_0 \in \partial\Omega$ là trọng nhỏ nhất $\mathcal{M} = (m_1, \ldots, m_n)$ trong Γ_n (nhỏ nhất theo cách sắp xếp "từ điển") sao cho $\mathcal{M} \geq \Lambda$ với mọi trọng Λ phân biệt được.*

Nhận xét 1.4.1. Vì $dr(z_0) \neq 0$ tại mọi điểm biên z_0 nên ta có thể chứng minh được $m_1 = 1$. Hơn nữa, nếu dạng Levi của $\partial\Omega$ có hạng p tại z_0 thì $m_i = 2$ với $2 \leq i \leq p+1$ và $m_i > 2$ với $i > p+1$. Và nếu Ω là miền giả lồi thì các số $m_1, \ldots, m_n$ đều là các số chẵn. Nói chung đa kiểu $\mathcal{M}(z_0)$ cho biết độ đo về cấp triệt tiêu của hàm xác định biên bởi việc gán trọng m_i cho tọa độ z_i.

1.5 Hàm peak chỉnh hình và hàm peak đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.5.1 (xem tài liệu [39]). *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và p là một điểm biên của Ω. Nếu tồn tại một hàm liên tục $h \colon \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ thỏa mãn:*

(i) h là hàm chỉnh hình trên Ω;

(ii) $h(p) = 1$ và

(iii) $|h(z)| < 1$ *với mỗi* $z \in \bar{\Omega} \setminus \{p\}$.

thì h *được gọi là hàm peak chỉnh hình của miền* Ω *tại điểm* p. *Trong trường hợp này,* p *được gọi là điểm peak chỉnh hình của miền* Ω.

Hơn nữa, điểm biên p *của miền* Ω *được gọi là điểm peak chỉnh hình địa phương nếu tồn tại một lân cận mở* U *của* p *trong* $\mathbb{C}^n$ *sao cho* p *là điểm peak chỉnh hình của* $\Omega \cap U$.

Ví dụ 1.5.1. Xét hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^n$: $\Omega = \mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : ||z|| < 1\}$, và điểm biên $p = (1, 0, \ldots, 0) \in \partial\Omega$. Xét hàm $h(z) = z_1$ ta có:

- $h(z)$ là hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}^n$.
- $h(p) = 1$.
- Với mọi $z \in \bar{\mathbb{B}^n}\ \ \{p\}$, ta có $|z_1| < 1 \to |h(z)| < 1$.

Vậy $h(z) = z_1$ là hàm peak chỉnh hình tại $p = (1, 0, \ldots, 0)$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày định nghĩa và một tính chất quan trọng của hàm peak đa điều hòa dưới.

Định nghĩa 1.5.2 (xem tài liệu [39])**.** *Cho* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^n$ *và* p *là một điểm biên của* Ω. *Nếu tồn tại một hàm liên tục* $h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

(i) h *là đa điều hòa dưới trên* Ω *và*

(ii) $h(p) = 0$ *và* $h(z) < 0$ *với mỗi* $z \in \bar{\Omega}\setminus\{0\}$,

thì ta nói h *là hàm peak đa điều hòa dưới tại* p *của* Ω. *Trong trường hợp này, điểm* p *được gọi là điểm peak đa điều hòa dưới của miền* Ω.

Tương tự định nghĩa trên, điểm biên p *của miền* Ω *được gọi là điểm peak đa điều hòa dưới địa phương nếu tồn tại một lân cận mở* U *của* p *trong* $\mathbb{C}^n$ *sao cho* p *là điểm peak đa điều hòa dưới của* $\Omega \cap U$.

Mệnh đề 1.5.1 (xem tài liệu [39])**.** *Giả sử* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $p \in \partial\Omega$ *là một điểm biên giả lồi chặt. Khi đó, luôn tồn tại một hàm peak đa điều hòa dưới địa phương tại điểm* p *của miền* Ω.

1.6 Miền h-thác triển được

Trong phần tiếp theo, chúng ta gọi một đa chỉ số $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ là một đa trọng nếu $1 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Bây giờ, chúng ta nhắc lại các định nghĩa sau (xem các tài liệu [75, 76]).

Định nghĩa 1.6.1 (xem tài liệu [76])**.** *Giả sử $f(z)$ là một hàm số trên $\mathbb{C}^n$ và $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ là một đa trọng. Với mỗi số thực $t \geq 0$, ta đặt*

$$\pi_t(z) = \left(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, \ldots, t^{\lambda_n} z_n\right).$$

Ta nói f là hàm Λ-thuần nhất theo trọng α nếu $f(\pi_t(z)) = t^\alpha f(z)$ với mỗi $t \geq 0$ và $z \in \mathbb{C}^n$. Trong trường hợp $\alpha = 1$, hàm f được gọi là hàm Λ-thuần nhất.

Với đa trọng Λ, hàm số

$$\sigma(z) = \sigma_\Lambda(z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{1/\lambda_j}$$

là một ví dụ tiêu biểu cho lớp hàm Λ-thuần nhất.

Ngoài ra, với đa trọng Λ và hàm Λ-thuần nhất nhận giá trị thực P, chúng ta định nghĩa một mô hình thuần nhất $D_{\Lambda,P}$ như sau

$$D_{\Lambda,P} = \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) + P(z) < 0\}.$$

Định nghĩa 1.6.2 (xem tài liệu [76])**.** *Giả sử $D_{\Lambda,P}$ là một mô hình thuần nhất. Khi đó, $D_{\Lambda,P}$ được gọi là h-thác triển được nếu tồn tại một hàm $a(z)$ là Λ-thuần nhất thuộc lớp $\mathcal{C}^1$ trên $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $a(z) > 0$ khi $z \neq 0$;

(ii) $P(z) - a(z)$ là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^n$.

Khi đó, hàm $a(z)$ được gọi là hàm bumping.

Ví dụ 1.6.1. Xét trong $\mathbb{C}^2$ hàm thuần nhất $P(z) = |z_1|^4 + |z_2|^2$. Khi đó, mô hình

$$D_{\Lambda,P} = \left\{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) + |z_1|^4 + |z_2|^2 < 0\right\}$$

là h-thác triển được, vì tồn tại hàm $a(z) = \epsilon|z_1|^2$ (với $\epsilon > 0$ đủ nhỏ) thỏa mãn:

- $a(z) > 0$,
- $P(z) - a(z) = |z_1|^4 + |z_2|^2 - \epsilon|z_1|^2$ là hàm đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}^2$.

Nhận xét 1.6.1. Cho $a(z)$ là một hàm bumping. Khi đó, tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho

$$C\sigma(z) \leq a(z) \leq C^{-1}\sigma(z), \forall z \in \mathbb{C}^n.$$

Kí hiệu (Ω, p) là một miền điểm trong $\mathbb{C}^{n+1}$, với Ω là một miền giả lồi trơn trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và điểm $p \in \partial\Omega$. Giả sử ρ là hàm xác định biên địa phương của Ω ở gần điểm p và đa kiểu $\mathcal{M}(p) = (1, m_1, \ldots, m_n)$ hữu hạn. Vì Ω là giả lồi nên các số nguyên $m_1, \ldots, m_n$ đều là các số chẵn.

Theo định nghĩa đa kiểu, tồn tại một hệ tọa độ $(z, w) = (z_1, \ldots, z_n, w)$ sao cho $p = 0$ và hàm $\rho(z, w)$ có thể khai triển được ở gần điểm 0 như sau

$$\rho(z, w) = \mathrm{Re}(w) + P(z) + R(z, w),$$

trong đó P là một đa thức $(1/m_1, \ldots, 1/m_n)$-thuần nhất, đa điều hòa dưới không chứa hạng tử đa điều hòa, R là hàm trơn và thỏa mãn

$$|R(z, w)| \leq C \left(|w| + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{m_j} \right)^{\gamma},$$

với các hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$.

Trong phần tiếp theo, trọng của mọi đa chỉ số $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ theo $\Lambda = (1/m_1, \ldots, 1/m_n)$ được cho bởi

$$wt(K) = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{m_j}.$$

Lưu ý rằng $wt(K + L) = wt(K) + wt(L)$ với mọi $K, L \in \mathbb{N}^n$.

Định nghĩa 1.6.3 (xem tài liệu [76]). *Ta gọi $M_P = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) + P(z) < 0\}$ là một mô hình liên kết với (Ω, p). Nếu miền điểm (Ω, p) có mô hình liên kết của Ω tại $p \in \partial\Omega$ là h-thác triển được thì ta nói (Ω, p) là h-thác triển được. Trong trường hợp này, p được gọi là điểm biên h-thác triển được.*

Tiếp theo, ta trình bày hai kết quả nổi tiếng sau về mô hình h-thác triển được.

Định lí 1.6.1 (xem tài liệu [76]). *Mọi mô hình h-thác triển đều là hyperbolic.*

Định lí 1.6.2 (xem tài liệu [75]). *Xét mô hình $M_P = \{\mathrm{Re}(w) + P(z) < 0\}$ với P là đa thức $(1/m_1, \ldots, 1/m_n)$-thuần nhất. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương*

i) Mô hình M_P có kiểu hữu hạn theo nghĩa D'Angelo;

ii) Mô hình M_P là h-thác triển được;

iii) Mô hình M_P là miền taut.

1.7 Hội tụ Λ-không tiếp xúc

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $p \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Xét một dãy điểm $\{\eta_j\} \subset \Omega$ hội tụ đến điểm biên p. Nói chung, dáng diệu hội tụ của dãy $\{\eta_j\}$ rất phong phú, có thể rất phức tạp. Trường hợp đơn giản nhất là dãy $\{\eta_j\}$ nằm trọn vẹn trong một nón đỉnh p. Khi đó, ta nói dãy $\{\eta_j\}$ hội tụ không tiếp xúc đến điểm biên p. Nhiều kết quả đẹp trong Toán học (như định lý Fatou cho không gian Hardy) khẳng định sự tồn tại giới hạn không tiếp xúc. Trong trường hợp tổng quát, những kết quả này không còn đúng nữa nếu dãy điểm của ta hội tụ "tiếp xúc" đến điểm biên. Tuy nhiên, một số kết quả vẫn có thể nhận được khi dãy điểm $\{\eta_j\}$ nằm trong một Λ-nón (chẳng hạn trong ellipsoid) nào đó.

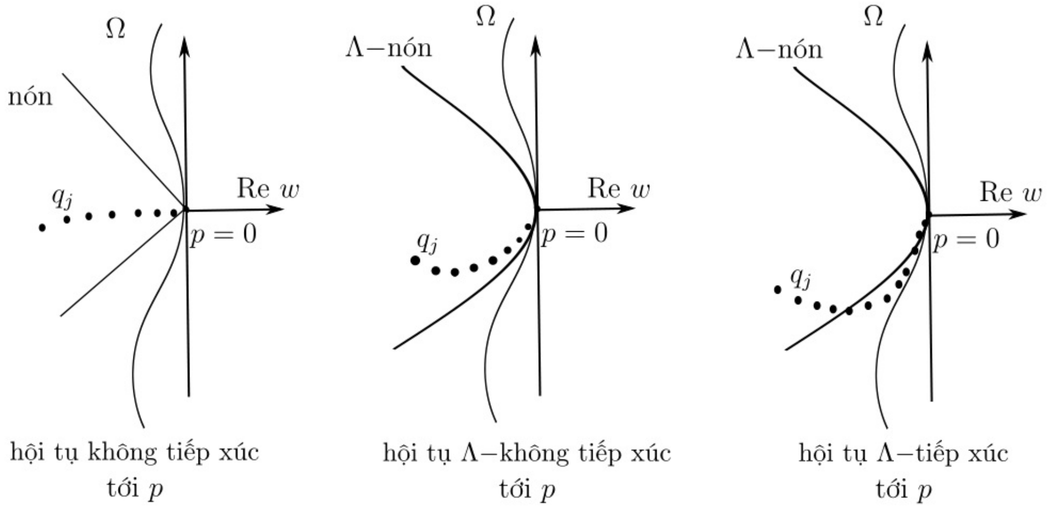
Trong luận án này, ta cần định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.7.1 (xem tài liệu [59]). *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $p \in \partial\Omega$ là một điểm biên h-thác triển được. Ta nói dãy $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ hội tụ Λ-không tiếp xúc tới điểm p nếu $|\mathrm{Im}\,(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}\,(\eta_j, \partial\Omega)|$ và $\sigma(\alpha_j) \lesssim |\mathrm{dist}\,(\eta_j, \partial\Omega)|$, trong đó $\sigma(z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^{m_k}$.*

Nhận xét 1.7.1. Dãy $\{\eta_j\} \subset \Omega$ được gọi là:

- hội tụ không tiếp xúc tới p nếu $|\mathrm{Im}\,(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}\,(\eta_j, \partial\Omega)|$ và $|\alpha_{jk}| \lesssim |\mathrm{dist}\,(\eta_j, \partial\Omega)|$ với mỗi $1 \le k \le n$, trong đó $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn})$;
- hội tụ Λ-không tiếp xúc tới p nếu $|\mathrm{Im}\,(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}\,(\eta_j, \partial\Omega)|$ và $|\alpha_{jk}|^{m_j} \lesssim |\mathrm{dist}\,(\eta_j, \partial\Omega)|$ với mỗi $1 \le k \le n$.

Như vậy, khái niệm hội tụ Λ-không tiếp xúc là sự mở rộng của khái niệm hội tụ không tiếp xúc.



Hình 1.1: Các loại hội tụ đến điểm biên p

CHƯƠNG 2

MÔ HÌNH CỦA CÁC MIỀN TRONG $\mathbb{C}^n$ CÓ NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các kết quả chính (Định lí 2.1.1, Định lí 2.2.1, Mệnh đề 2.3.1) liên quan đến Bài toán 1 của luận án. Các kết quả của chương này được viết dựa trên bài báo [3] trong mục "Các công trình đã công bố liên quan đến luận án". Đồng thời, chúng tôi cũng giới thiệu các khái niệm cần thiết phục vụ cho việc phát biểu và chứng minh các kết quả này (Định nghĩa 2.1.1, Định nghĩa 2.1.2, Định nghĩa 2.2.1 và Định nghĩa 2.3.1).

2.1 Dáng điệu của các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ tới điểm biên của một miền h-thác triển được trong $\mathbb{C}^n$

2.1.1 Hội tụ Λ-tiếp xúc đều

Trong phần này, cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $\xi_0 \in \partial\Omega$ là một điểm biên h-thác triển được (xem các tài liệu [27, 76]). Giả sử ρ là hàm xác định biên địa phương của miền Ω ở gần điểm ξ_0 và đa kiểu $\mathcal{M}(\xi_0) = (2m_1, \ldots, 2m_n, 1)$ hữu hạn (xem tài liệu [12]). (Lưu ý rằng do tính giả lồi của Ω nên tất cả các số nguyên $2m_1, \ldots, 2m_n$ đều là số chẵn.) Ta kí hiệu $\Lambda = (1/2m_1, \ldots, 1/2m_n)$. Theo định nghĩa đa kiểu, tồn tại một hệ tọa độ $(z, w) = (z_1, \ldots, z_n, w)$ sao cho điểm $\xi_0 = 0$ và hàm $\rho(z, w)$ có thể khai triển ở gần điểm 0 như sau

$$\rho(z, w) = \mathrm{Re}(w) + P(z) + Q(z, w),$$

trong đó P là đa thức đa điều hòa dưới, Λ-thuần nhất và không chứa các đơn thức đa điều hòa, Q là hàm trơn và thỏa mãn

$$|Q(z, w)| \leq C \left(|w| + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{2m_j} \right)^{\gamma},$$

với hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$.

Định nghĩa 2.1.1. *Ta nói dãy các điểm* $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ *với* $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn})$ hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm ξ_0 *nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

(a) $|\mathrm{Im}(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)|$;

(b) $\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega) = o(|\alpha_{jk}|^{2m_k})$ *với* $1 \le k \le n$;

(c) $|\alpha_{j1}|^{2m_1} \approx |\alpha_{j2}|^{2m_2} \approx \ldots \approx |\alpha_{jn}|^{2m_n}$.

Tiếp theo, chúng ta nhắc lại định nghĩa sau.

Cho $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ là một n-bộ các số dương và $\mu > 0$. Chúng ta kí hiệu $\mathcal{O}(\mu, \Lambda)$ là tập hợp các hàm trơn f xác định gần điểm gốc tọa độ của $\mathbb{C}^n$ sao cho

$$D^\alpha \overline{D}^\beta f(0) = 0 \text{ khi } \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)\lambda_j \le \mu.$$

Nếu $n = 1$ và $\Lambda = (1)$ thì ta sử dụng $\mathcal{O}(\mu)$ để kí hiệu cho tập hợp các hàm triệt tiêu tới cấp thấp nhất μ tại điểm gốc tọa độ.

Kí hiệu

$$\sigma(z) := \sum_{k=1}^n |z_k|^{2m_k}.$$

Định nghĩa 2.1.2. *Điểm biên* $\xi_0 \in \partial\Omega$ *được gọi là điểm* h*-thác triển mạnh nếu tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho* $P(z) - \delta\sigma(z)$ *là hàm đa điều hòa dưới, nghĩa là* $dd^cP \ge \delta dd^c\sigma$.

Nhận xét 2.1.1. Chúng ta chú ý rằng khái niệm h-thác triển mạnh có nghĩa rằng mô hình M_P là một miền WB (xem Định nghĩa A). Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm h-thác triển mạnh. Khi đó, vì $dd^cP \gtrsim dd^c\sigma$ nên $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm h-thác triển được và P là đa thức đa điều hòa dưới chặt bên ngoài các trục tọa độ. Ngoài ra, theo chứng minh của Định lí 4.1 trong tài liệu [2] và Định lí 4.2 trong tài liệu [1], tồn tại một hàm peak chỉnh hình tại điểm $0 = (0, \ldots, 0)$. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 P}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\alpha) w_j \bar{w}_l &\gtrsim \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\alpha) w_j \bar{w}_l \\ &\gtrsim m_1^2 |\alpha_1|^{2m_1-2}|w_1|^2 + \cdots + m_n^2|\alpha_n|^{2m_n-2}|w_n|^2\end{aligned}$$

với mọi $\alpha, w \in \mathbb{C}^n$.

Ví dụ 2.1.1. Giả sử $\mathcal{D}_m$, $m \in \mathbb{N}^*$, là một miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ được xác định bởi

$$\mathcal{D}_m := \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \colon \rho(z, w) := \mathrm{Re}(w) + |z_1|^{2m} + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 0\right\}.$$

Chúng ta chú ý rằng $\mathcal{D}_m$ là miền song chỉnh hình với ellipsoid

$$E_m := \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \colon |w|^2 + |z_1|^{2m} + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\right\}$$

(xem các tài liệu [5, 60]). Hơn nữa, điểm $(0,\dots,0)\in\partial\mathcal{D}_m$ là điểm h-thác triển mạnh. Bây giờ, ta định nghĩa dãy $\{\eta_j\}\subset\mathcal{D}_m$ bằng cách đặt $\eta_j=\big(\frac{1}{2m\sqrt{j}},\frac{1}{\sqrt{j}},\dots,\frac{1}{\sqrt{j}},-\frac{n}{j}-\frac{1}{j^2}\big)$ với mỗi $j\in\mathbb{N}^*$. Khi đó, $\rho(\eta_j)=-\dfrac{1}{j^2}\approx-\mathrm{dist}(\eta_j,\partial\mathcal{D}_m)$ nên $\mathrm{dist}(\eta_j,\partial\mathcal{D}_m)=o(\Big|\dfrac{1}{\sqrt{j}}\Big|^2)$. Do đó, dãy $\{\eta_j\}\subset\mathcal{D}_m$ hội tụ $\big(\dfrac{1}{2m},\dfrac{1}{2},\dots,\dfrac{1}{2}\big)$-tiếp xúc đều tới điểm $(0,\dots,0)\in\partial\mathcal{D}_m$.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ giả sử rằng $\xi_0\in\partial\Omega$ là điểm h-thác triển mạnh và $\{\epsilon_j\}\subset\mathbb{R}^+$ là một dãy cho trước. Khi đó, ta định nghĩa dãy $\tau_j=(\tau_{j1},\dots,\tau_{jn})$ liên kết với dãy $\{\epsilon_j\}$ như sau

$$\tau_{jk}:=|\alpha_{jk}|.\left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_{jk}|^{2m_k}}\right)^{1/2},\ j\geq 1, 1\leq k\leq n.$$

Từ tính toán đơn giản cho thấy $\tau_{jk}^{2m_k}=\epsilon_j.\left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_{jk}|^{2m_k}}\right)^{m_k-1}\lesssim\epsilon_j$. Vì thế, ta có ước lượng sau

$$\epsilon_j^{1/2}\lesssim\tau_{jk}\lesssim\epsilon_j^{1/2m_k}. \tag{2.1}$$

Trong các phần sau, ta gán các trọng $\frac{1}{2m_1},\dots,\frac{1}{2m_n},1$ cho các biến $z_1,\dots,z_n,w$ tương ứng và kí hiệu $wt(K):=\sum_{j=1}^n\frac{k_j}{2m_j}$ là trọng của n-bộ $K=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Lưu ý rằng $wt(K+L)=wt(K)+wt(L)$ với mọi $K,L\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

Để chứng minh Định lí 2.1.1, ta cần các bổ đề sau. Trước hết, từ ước lượng (2.1) ta thu được bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.1.1. *Cho $f(z,w)$ là hàm trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$, xác định trong một lân cận của điểm gốc tọa độ trong $\mathbb{C}^{n+1}$, triệt tiêu tới cấp theo trọng lớn hơn hoặc bằng 1 tại gốc tọa độ. Khi đó, ta có*

$$f(\tau_{j1}z_1,\dots,\tau_{jn}z_n,\epsilon_j w)=o(\epsilon_j).$$

Với các đơn thức có cấp theo trọng ≤ 1, ta có các bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.1.2. *Cho $p,q\in\mathbb{N}^n$ là hai đa chỉ số. Khi đó, với mọi đa thức P ta có*

$$\epsilon_j^{-1}\left|D^p\overline{D}^qP(\alpha_j)\tau_j^{p+q}\right|\to 0$$

với $|p|+|q|>2$. Ngoài ra, nếu $|p|=|q|=1$ thì

$$\epsilon_j^{-1}\left|D^p\overline{D}^qP(\alpha_j)\tau_j^{p+q}\right|\lesssim 1.$$

Hơn nữa, nếu $P(z)-\delta\sigma(z)$ là đa điều hòa dưới với $\delta>0$ thì

$$\epsilon_j^{-1}\sum_{k,l=1}^n\frac{\partial^2P}{\partial z_k\partial\bar{z}_l}(\alpha_j)\tau_{jk}\tau_{jl}w_k\bar{w}_l\gtrsim m_1^2|w_1|^2+\dots+m_n^2|w_n|^2.$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh hai khẳng định đầu tiên trong bổ đề với $P(z) = z^K \bar{z}^L$ và $K \geq p, L \geq q$ là đủ. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q P(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| \\
&\approx \epsilon_j^{-1} |\alpha_{j1}|^{k_1+l_1} \left(\frac{\tau_{j1}}{|\alpha_{j1}|} \right)^{p_1+q_1} \cdots |\alpha_{jn}|^{k_n+l_n} \left(\frac{\tau_{jn}}{|\alpha_{jn}|} \right)^{p_n+q_n} \\
&= \left(\frac{|\alpha_{j1}|^{2m_1}}{\epsilon_j} \right)^{\frac{k_1+l_1}{2m_1} - \frac{p_1+q_1}{2}} \cdots \left(\frac{|\alpha_{jn}|^{2m_n}}{\epsilon_j} \right)^{\frac{k_n+l_n}{2m_n} - \frac{p_n+q_n}{2}} \\
&\approx \left(\frac{|\alpha_{j1}|^{2m_1}}{\epsilon_j} \right)^{\sum_{s=1}^{n} \frac{k_s+l_s}{2m_s} - \frac{p_j+q_j}{2}} = \left(\frac{|\alpha_{j1}|^{2m_1}}{\epsilon_j} \right)^{1 - \frac{|p|+|q|}{2}}.
\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q P(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| \to 0$$

khi $j \to \infty$ với $|p| + |q| > 2$ và

$$\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q P(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| \lesssim 1$$

với $|p| + |q| = 2$. Cuối cùng, theo Nhận xét 2.1.1 ta có

$$\begin{aligned}
&\epsilon_j^{-1} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\alpha_j) \tau_{jk} \tau_{jl} w_k \bar{w}_l \\
&\gtrsim \epsilon_j^{-1} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\alpha_j) \tau_{jk} \tau_{jl} w_j \bar{w}_l \\
&\gtrsim \epsilon_j^{-1} \left(m_1^2 |\alpha_1|^{2m_1-2} \tau_{j1}^2 |w_1|^2 + \cdots + m_n^2 |\alpha_n|^{2m_n-2} \tau_{jn}^2 |w_n|^2 \right) \\
&\gtrsim m_1^2 |w_1|^2 + \cdots + m_n^2 |w_n|^2
\end{aligned}$$

với mỗi $w \in \mathbb{C}^n$. $\square$

Theo cách tương tự, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.3. *Cho $Q(z)$ là đa thức theo biến $z \in \mathbb{C}^n$ sao cho $Q \in \mathcal{O}(1, \Lambda)$. Khi đó, ta có*

$$\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q Q(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| \to 0$$

khi $j \to \infty$ với $|p| + |q| \geq 2$.

Chứng minh. Như trong chứng minh Bổ đề 2.1.2, ta chỉ cần xét $Q(z) = z^K \bar{z}^L$ và $K \geq p, L \geq q$ với $d := wt(K + L) > 1$ là đủ. Khi đó, theo chứng minh của Bổ đề 2.1.2, ta có

$$\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q Q(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| = o\left(\left(\frac{|\alpha_{j1}|^{2m_1}}{\epsilon_j} \right)^{1 - \frac{|p|+|q|}{2}} \right).$$

Vì thế, ta suy ra $\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q Q(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| \to 0$ khi $j \to \infty$ với $|p| + |q| \geq 2$. $\square$

2.1.2 Mô hình của một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ có một điểm biên h-thác triển mạnh

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả chính thứ nhất của luận án trong Chương 2. Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lí sau.

Định lí 2.1.1. *Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^{n+1}$ có biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm h-thác triển mạnh với đa kiểu Catlin hữu hạn $(2m_1, \cdots, 2m_n, 1)$ và $\Lambda = (\frac{1}{2m_1}, \cdots, \frac{1}{2m_n})$. Giả sử tồn tại một dãy các tự đẳng cấu $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$.*

Chứng minh. Giả sử miền Ω và điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ thỏa mãn giả thiết của Định lí 2.1.1. Giả sử $\mathcal{M}(\xi_0) = (2m_1, \ldots, 2m_n, 1)$ là đa kiểu hữu hạn của miền Ω tại điểm ξ_0 và kí hiệu $\Lambda = (1/2m_1, \ldots, 1/2m_n)$. Như trong Mục 2.1.1, tồn tại một hệ tọa độ địa phương $(\tilde{z}, \tilde{w}) = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n, \tilde{w})$ ở gần điểm ξ_0 sao cho $\xi_0 = 0$ và hàm xác định biên địa phương $\rho(\tilde{z}, \tilde{w})$ của miền Ω có thể khai triển ở gần 0 như sau

$$\rho(\tilde{z}, \tilde{w}) = \mathrm{Re}(\tilde{w}) + P(\tilde{z}) + Q(\tilde{z}, \tilde{w}),$$

trong đó P là đa thức đa điều hòa dưới, Λ-thuần nhất và không chứa các đơn thức đa điều hòa, Q là hàm trơn và thỏa mãn

$$|Q(\tilde{z}, \tilde{w})| \le C\left(|\tilde{w}| + \sum_{j=1}^{n} |\tilde{z}_j|^{2m_j}\right)^{\gamma},$$

với hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$.

Theo giả thiết của Định lí 2.1.1, tồn tại một dãy các tự đẳng cấu $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ và một điểm $a \in \Omega$ sao cho dãy các điểm $\eta_j := \varphi_j(a)$ hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm ξ_0. Ta viết $\eta_j = (\alpha_j, \beta_j) = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn}, \beta_j)$. Khi đó, ta có

(a) $|\mathrm{Im}(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)|$;

(b) $|\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)| = o(|\alpha_{jk}|^{2m_k})$ với $1 \le k \le n$;

(c) $|\alpha_{j1}|^{2m_1} \approx |\alpha_{j2}|^{2m_2} \approx \cdots \approx |\alpha_{jn}|^{2m_n}$.

Theo chứng minh của các Bổ đề 4.10 và 4.11 trong tài liệu [76], sau phép đổi biến

$$\begin{cases} z := \tilde{z}; \\ w := \tilde{w} + b_1(\tilde{z})\tilde{w} + b_2(\tilde{z})\tilde{w}^2 + b_3(\tilde{z}), \end{cases}$$

trong đó b_1, b_2, b_3 là các hàm chỉnh hình của $\tilde{z}$ thỏa mãn $b_k = O(|\tilde{z}|^2)$, $k = 1, 2, 3$, tồn tại một hệ tọa độ chỉnh hình địa phương (z, w) trong $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, trong đó $\xi_0 = 0$ và hàm $\rho(z, \omega)$

có thể khai triển ở gần 0 như sau:

$$\rho(z,w) = \mathrm{Re}(w) + P(z) + R_1(z) + R_2(\mathrm{Im}w) + (\mathrm{Im}w)R(z) < 0,$$

trong đó $R_1 \in \mathcal{O}(1,\Lambda)$, $R \in \mathcal{O}(1/2,\Lambda)$, và $R_2 \in \mathcal{O}(2)$. Chúng ta chú ý rằng theo các tọa độ mới này thì dãy các điểm $\{\eta_j\}$ vẫn có các tính chất (a), (b), và (c).

Cho U_0 là một lân cận nhỏ cố định của điểm $\xi_0 = 0$. Khi đó, với mọi dãy $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\}$ của các điểm hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm gốc tọa độ trong $U_0 \cap \{\rho < 0\} =: U_0^-$, ta liên kết với một dãy các điểm $\eta'_j = (\alpha_j, a_j + \epsilon_j + ib_j)$, trong đó $\epsilon_j > 0$ và $\beta_j = a_j + ib_j$, sao cho $\eta'_j = (\alpha_j, \beta'_j)$ với $\beta'_j = a_j + \epsilon_j + ib_j$ thuộc siêu mặt $\{\rho = 0\}$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Chúng ta chú ý rằng $\epsilon_j \approx \mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)$.

Trước khi bắt đầu quá trình scaling, ta thực hiện một số phép biến đổi các tọa độ. Trước hết, ta xét các dãy của các phép dịch chuyển $L_{\eta'_j} \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, xác định bởi

$$L_{\eta'_j}(z,w) := (z,w) - \eta'_j = (z - \alpha_j, w - \beta'_j).$$

Khi đó, qua phép đổi biến $(\tilde{z}, \tilde{w}) := L_{\eta'_j}(z,w)$, tức là

$$\begin{cases} w - \beta'_j = \tilde{w}; \\ z_k - \alpha_{jk} = \tilde{z}_k,\ k = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

ta thấy $L_{\eta'_j}(\alpha_j, \beta_j) = (0', -\epsilon_j)$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$.

Bây giờ, ta đặt $w = u + iv$, $v = b_j + (v - b_j) = b_j + \mathrm{Im}(\tilde{w})$ và $z = \alpha_j + (z - \alpha_j) = \alpha_j + \tilde{z}$. Vì $R_2 \in \mathcal{O}(2)$ và $R \in \mathcal{O}(1/2,\Lambda)$ nên áp dụng định lí Taylor, ta có

$$\begin{aligned}
R_2(v) &= R_2(b_j) + R'_2(b_j)(v - b_j) + o(|v - b_j|) \\
&= R_2(b_j) + R'_2(b_j)\mathrm{Im}(\tilde{w}) + o(|\mathrm{Im}(\tilde{w})|); \\
vR(z) &= (b_j + (v - b_j))R(\alpha_j + \tilde{z}) \\
&= (b_j + \mathrm{Im}(\tilde{w}))\Big(R(\alpha_j) + 2\mathrm{Re}\sum_{1\le|p|\le 2}\frac{D^pR}{p!}(\alpha_j)(\tilde{z})^p + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 R}{\partial\tilde{z}_k\partial\overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}}_l + o(|\tilde{z}|^2)\Big) \\
&= b_jR(\alpha_j) + b_j\Big(2\mathrm{Re}\sum_{1\le|p|\le 2}\frac{D^pR}{p!}(\alpha_j)(\tilde{z})^p + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 R}{\partial\tilde{z}_k\partial\overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}}_l\Big) \\
&\quad + o(|\tilde{z}|^2) + o(|\mathrm{Im}(\tilde{w})|).
\end{aligned}$$

Do đó, áp dụng định lí Taylor một lần nữa ta thấy siêu mặt $L_{\eta'_j}(\{\rho = 0\})$ được xác định bởi một phương trình có dạng

$$\begin{aligned}\rho\left(L_{\eta_j}^{-1}(\tilde{z},\tilde{w})\right) &= \mathrm{Re}(\tilde{w}) + R_2'(b_j)\mathrm{Im}(\tilde{w}) + R(\alpha_j)\mathrm{Im}(\tilde{w}) + o(|\mathrm{Im}(\tilde{w})|)\\ &\quad + 2\mathrm{Re}\sum_{1\le|p|\le 2}\frac{D^pP}{p!}(\alpha_j)(\tilde{z})^p + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial\tilde{z}_k\partial\overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}}_l\\ &\quad + 2\mathrm{Re}\sum_{1\le|p|\le 2}\frac{D^pR_1}{p!}(\alpha_j)(\tilde{z})^p + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 R_1}{\partial\tilde{z}_k\partial\overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}}_l\\ &\quad + b_j\Big(2\mathrm{Re}\sum_{1\le|p|\le 2}\frac{D^pR}{p!}(\alpha_j)(\tilde{z})^p + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 R}{\partial\tilde{z}_k\partial\overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}}_l\Big) + o(|\tilde{z}|^2) = 0.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Tiếp theo, để chọn các hạng tử điều hòa trong (2.2) ta xác định một dãy $\{Q_j\}$ các tự đẳng cấu của $\mathbb{C}^{n+1}$ bởi

$$\begin{cases} w := \tilde{w} + (R_2'(b_j) + R(\alpha_j))i\tilde{w} + 2\sum\limits_{1\le|p|\le 2}\frac{D^pP}{p!}(\alpha_j)(\tilde{z})^p + 2\sum\limits_{1\le|p|\le 2}\frac{D^pR_1}{p!}(\alpha_j)(\tilde{z})^p\\ \qquad + b_j\sum\limits_{1\le|p|\le 2}\frac{D^pR}{p!}(\alpha_j)(\tilde{z})^p;\\ z_k := \tilde{z}_k,\ k = 1,\dots,n.\end{cases}$$

Khi đó, ánh xạ hợp thành $Q_j\circ L_{\eta_j'}\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ và thỏa mãn

$$Q_j\circ L_{\eta_j'}(\alpha_j,\beta_j) = (0,\dots,0,-\epsilon_j - i(R_2'(b_j)+R(\alpha_j))\epsilon_j)$$

với mỗi $j\in\mathbb{N}^*$. Hơn nữa, siêu mặt $Q_j\circ L_{\eta_j'}(\{\rho=0\})$ được xác định bởi một phương trình có dạng

$$\begin{aligned}\rho\left(L_{\eta_j}^{-1}\circ Q_j^{-1}(z,w)\right) &= \mathrm{Re}(w) + o(|\mathrm{Im}(w)|) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial z_k\partial\bar{z}_l}(\alpha_j)z_k\bar{z}_l\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 R_1}{\partial z_k\partial\bar{z}_l}(\alpha_j)z_k\bar{z}_l + \frac{b_j}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial^2 R}{\partial z_k\partial\bar{z}_l}(\alpha_j)z_k\bar{z}_l + o(|z|^2) = 0.\end{aligned}$$

Cuối cùng, chúng ta nhắc lại kí hiệu

$$\tau_{jk} := |\alpha_{jk}|.\left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_{jk}|^{2m_k}}\right)^{1/2},\ 1\le k\le n$$

và định nghĩa một phép co giãn không đẳng hướng $\Delta_j\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ bằng cách đặt

$$\Delta_j(z,w) := \Delta_{\eta_j}^{\epsilon_j}(z_1,\dots,z_n,w) = \left(\frac{z_1}{\tau_{j1}},\dots,\frac{z_n}{\tau_{jn}},\frac{w}{\epsilon_j}\right). \tag{2.3}$$

Khi đó, $\Delta_j \circ Q_j \circ L_{\eta'_j}(\alpha_j, \beta_j) = (0, \dots, 0, -1 - i(R'_2(b_j) + R(\alpha_j))) \to (0', -1)$ khi $j \to \infty$. Hơn nữa, siêu mặt $\Delta_j \circ Q_j \circ L_{\eta'_j}(\{\rho = 0\})$ được xác định bởi một phương trình có dạng

$$\begin{aligned} &\epsilon_j^{-1}\rho\left(L_{\eta_j}^{-1} \circ Q_j^{-1} \circ (\Delta_j)^{-1}(\tilde{z}, \tilde{w})\right) \\ &= \mathrm{Re}(\tilde{w}) + \epsilon_j^{-1} o(\epsilon_j |\mathrm{Im}(\tilde{w})|) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{z}_k \partial \overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_{jk}\tau_{jl}\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}}_l \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 R_1}{\partial \tilde{z}_k \partial \overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_{jk}\tau_{jl}\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}}_l + \frac{\epsilon_j^{-1} b_j}{2}\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 R}{\partial \tilde{z}_k \partial \overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\tau_{jk}\tau_{jl}\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}}_l + \cdots = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

trong đó dấu $\dots$ kí hiệu cho các phần dư. Chúng ta lưu ý rằng theo Bổ đề 2.1.1, các hạng tử có cấp theo trọng lớn hơn 1 phải hội tụ đều trên các tập compact của $\mathbb{C}^{n+1}$ tới điểm 0. Do đó, ta chỉ xét sự hội tụ của các đơn thức từ (2.4) với cấp theo trọng nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Vì dãy $\{\eta_j := \varphi_j(a)\}$ hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm $\xi_0 = (0', 0)$ nên ta suy ra

$$\frac{|\alpha_{j1}|^{2m_1}}{\epsilon_j} \approx \frac{|\alpha_{j2}|^{2m_2}}{\epsilon_j} \approx \cdots \approx \frac{|\alpha_{jn}|^{2m_n}}{\epsilon_j}.$$

Do đó, từ Bổ đề 2.1.2 ta suy ra

$$\epsilon_j^{-1}\left|\frac{D^p\overline{D}^q P}{p!q!}(\alpha_j)\tau_j^{p+q}\right| \to 0$$

khi $j \to \infty$ với $|p| + |q| > 2$ và sau khi lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng

$$a_{kl} := \frac{1}{2}\lim_{j\to\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{z}_k \partial \overline{\tilde{z}}_l}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_{jk}\tau_{jl}, 1 \le k, l \le n.$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.1.3 ta cũng có

$$\epsilon_j^{-1}\left|\frac{D^p\overline{D}^q R_1}{p!q!}(\alpha_j)\tau_j^{p+q}\right| \to 0$$

khi $j \to \infty$ với $|p| + |q| \ge 2$. Ngoài ra, vì $|\epsilon_j^{-1} b_j| \lesssim 1$ nên ta được

$$\epsilon_j^{-1} b_j\left|\frac{D^p\overline{D}^q R}{p!q!}(\alpha_j)\tau_j^{p+q}\right| \to 0$$

khi $j \to \infty$ với $|p| + |q| \ge 1$. Do đó, sau khi lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng dãy các hàm xác định được cho trong (2.4) hội tụ đều trên tập compact của $\mathbb{C}^{n+1}$ tới hàm $\hat{\rho}(\tilde{z}, \tilde{w}) := \mathrm{Re}(\tilde{w}) + H(\tilde{z})$. Kết quả là, dãy các miền $\Omega_j := \Delta_j \circ Q_j \circ L_{\eta'_j}(U_0^-)$ hội tụ chuẩn tắc tới mô hình sau

$$M_H := \{(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \colon \hat{\rho}(\tilde{z}, \tilde{w}) := \mathrm{Re}(\tilde{w}) + H(\tilde{z}) < 0\},$$

trong đó

$$H(\tilde{z}) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\tilde{z}_k\overline{\tilde{z}_l}.$$

Chúng ta lưu ý rằng mô hình M_H là giới hạn của một dãy các miền giả lồi $\Delta_j \circ Q_j \circ L_{\eta'_j}(U_0^-)$. Vì vậy, mô hình M_H cũng giả lồi và do đó H là hàm đa điều hòa dưới. Ngoài ra, từ Bổ đề 2.1.2 ta suy ra H là dạng toàn phương xác định dương. Do đó, mô hình M_H song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$ (xem Mệnh đề 2 trong tài liệu [35]).

Để đơn giản, ta kí hiệu $T_j := \Delta_j \circ Q_j \circ L_{\eta'_j}$ và $\sigma_j := T_j \circ \varphi_j \colon \varphi_j^{-1}(U_0^-) \to \Omega_j$. Khi đó, $T_j(\eta_j) = (0', -1 - i(R'_2(b_j) + R(\alpha_j)))$ và $\{\sigma_j\}$ là dãy các ánh xạ song chỉnh hình thỏa mãn

$$\sigma_j(a) = b_j := (0', -1 - i(R'_2(b_j) + R(\alpha_j))) \to b := (0', -1).$$

khi $j \to \infty$. Do đó, theo Mệnh đề 3.2.1, sau khi chọn một dãy con, ta có thể giả sử rằng dãy σ_j hội tụ đều trên mọi tập con compact tới ánh xạ chỉnh hình $\sigma : \Omega \to M_H$ mà $\sigma(a) = b$.

Mặt khác, vì Ω là miền taut (xem Mệnh đề 2.2 trong tài liệu [29]) nên dãy $\sigma_j^{-1} \colon \Omega_j \to \varphi_j^{-1}(U_0^-) \subset \Omega$ cũng là dãy chuẩn tắc. Vì $\sigma_j^{-1}(b_j) = a \in \Omega$ với $b_j \to b \in \Omega$ khi $j \to \infty$ nên sau khi chọn một dãy con, ta cũng có thể giả sử rằng dãy σ_j^{-1} hội tụ đều trên mọi tập con compact đến ánh xạ chỉnh hình $\sigma^* : M_H \to \Omega$. Khi đó, từ Mệnh đề. 2.1 trong tài liệu [29] ta suy ra Ω là miền song chỉnh hình với mô hình M_H. Do đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$, và do đó Định lí 2.1.1 được chứng minh. □

Nhận xét 2.1.2. Hầu hết các kết quả trước đây đều yêu cầu tính hữu hạn của kiểu và hoặc là tính giả lồi chặt (thậm chí là lồi), hoặc tính giả lồi chỉ trong không gian 2 chiều. Khác với các kết quả đó, chúng tôi đưa ra một đặc trưng mới của các miền giả lồi yếu có kiểu hữu hạn bởi dáng điệu biên của các quỹ đạo tự đẳng cấu bằng việc sử dụng kỹ thuật scaling được giới thiệu bởi S. Pinchuk. Định lí 2.1.1 chỉ ra rằng chỉ có hình cầu đơn vị mới có một quỹ đạo tự đẳng cấu tại ξ_0 hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới $\partial\Omega$.

Bây giờ, chúng tôi đưa ra một ví dụ để chỉ ra rằng nếu dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu không hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm biên tụ quỹ đạo thì vẫn tồn tại một dãy các phép co giãn thay thế để có được một mô hình như trong Định lí 2.1.1. Ngoài ra, sự mô tả rõ ràng của nhóm tự đẳng cấu của các miền Thullen hoặc các mô hình có kiểu hữu hạn (xem tài liệu [60]) cho thấy dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ Λ-không tiếp xúc tới điểm biên tụ quỹ đạo. Do đó, dường như có lí do hợp lí để chúng ta hi vọng rằng có thể giảm được yêu cầu về tính đều của sự hội tụ Λ-tiếp xúc.

Ví dụ 2.1.2. Kí hiệu $E_{1,2,4}$ là một miền trong $\mathbb{C}^3$, được cho bởi

$$E_{1,2,4} := \{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3 \colon \mathrm{Re}(w) + |z_1|^4 + |z_1|^2|z_2|^4 + |z_2|^8 < 0\}.$$

Kí hiệu $P(z) = |z_1|^4 + |z_1|^2|z_2|^4 + |z_2|^8$ và $\sigma(z) = |z_1|^4 + |z_2|^8$. Khi đó, từ tính toán ta có

$$\begin{aligned}
dd^c P(z) &= (4|z_1|^2 + |z_2|^4)dz_1 d\bar{z}_1 + 2\bar{z}_1 z_2|z_2|^2 dz_1 d\bar{z}_2 + 2z_1\bar{z}_2|z_2|^2 d\bar{z}_1 dz_2 \\
&+ (16|z_2|^6 + 4|z_1|^2|z_2|^2)dz_2 d\bar{z}_2 \\
&= 4|z_1|^2 dz_1 d\bar{z}_1 + 16|z_2|^6 dz_2 d\bar{z}_2 + |z_2|^2|z_2 d\bar{z}_1 + 2\bar{z}_1 dz_2|^2 \\
&\geq dd^c\sigma(z).
\end{aligned}$$

Do đó, gốc tọa độ là điểm h-thác triển mạnh với đa kiểu $(4, 8, 1)$ và do đó trọng Λ được cho bởi $\Lambda := (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$.

Bây giờ, ta xét một dãy các điểm $\{\eta_j := (\frac{1}{j^{1/4}}, \frac{1}{j^{3/8}}, -\frac{1}{j} - \frac{2}{j^2} - \frac{1}{j^3})\}$ hội tụ Λ-tiếp xúc nhưng không đều tới điểm $(0', 0)$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\{\eta_j\}$ không phải là dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu, nghĩa là, không tồn tại dãy $\{f_j\} \subset \mathrm{Aut}(E_{1,2,4})$ và $a \in E_{1,2,4}$ sao cho $f_j(a) = (\frac{1}{j^{1/4}}, \frac{1}{j^{3/8}}, -\frac{1}{j} - \frac{2}{j^2} - \frac{1}{j^3})$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử ngược lại rằng $\{f_j\}$ và a tồn tại. Khi đó, mặc dù không áp dụng được kỹ thuật scaling như trong chứng minh Định lí 2.1.1, nhưng một kỹ thuật scaling thay thế có thể được đưa ra như sau. Thật vậy, giả sử $\rho(z_1, z_2, w) = \mathrm{Re}(w) + |z_1|^4 + |z_1|^2|z_2|^4 + |z_2|^8$ và giả sử $\eta_j = (\frac{1}{j^{1/4}}, \frac{1}{j^{3/8}}, -\frac{1}{j} - \frac{2}{j^2} - \frac{1}{j^3})$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Ta thấy $\rho(\eta_j) = -\frac{1}{j^2} \approx -\mathrm{dist}(\eta_j, \partial E_{1,2,4})$. Đặt $\epsilon_j = |\rho(\eta_j)| = \frac{1}{j^2}$. Ngoài ra, xét phép đổi biến $(\tilde{z}, \tilde{w}) := L_j(z, w)$, ta có

$$\begin{cases} w = \tilde{w}; \\ z_1 - \dfrac{1}{j^{1/4}} = \tilde{z}_1; \\ z_2 - \dfrac{1}{j^{3/8}} = \tilde{z}_2. \end{cases}$$

Khi đó, từ tính toán trực tiếp ta thấy

$$\begin{aligned}
&\rho \circ L_j^{-1}(\tilde{w}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \\
&= \mathrm{Re}(w) + |\frac{1}{j^{1/4}} + \tilde{z}_1|^4 + |\frac{1}{j^{1/4}} + \tilde{z}_1|^2|\frac{1}{j^{3/8}} + \tilde{z}_2|^4 + |\frac{1}{j^{3/8}} + \tilde{z}_2|^8 \\
&= \mathrm{Re}(w) + \frac{1}{j} + \frac{4}{j^{3/4}}\mathrm{Re}(\tilde{z}_1) + \frac{2}{j^{1/2}}|\tilde{z}_1|^2 + \frac{1}{j^{1/2}}(2\mathrm{Re}(\tilde{z}_1))^2 + \frac{4}{j^{1/4}}|\tilde{z}_1|^2\mathrm{Re}(\tilde{z}_1) + |\tilde{z}_1|^4 \\
&+ \left(\frac{1}{j^{1/2}} + \frac{2}{j^{1/4}}\mathrm{Re}(\tilde{z}_1) + |\tilde{z}_1|^2\right) \times \\
&\left(\frac{1}{j^{3/2}} + \frac{4}{j^{9/8}}\mathrm{Re}(\tilde{z}_2) + \frac{2}{j^{3/4}}|\tilde{z}_2|^2 + \frac{1}{j^{3/4}}(2\mathrm{Re}(\tilde{z}_2))^2 + \frac{4}{j^{3/8}}|\tilde{z}_2|^2\mathrm{Re}(\tilde{z}_2) + |\tilde{z}_2|^4\right) + |\frac{1}{j^{3/8}} + \tilde{z}_2|^8.
\end{aligned}$$

Để định nghĩa phép co giãn không đẳng hướng, ta kí hiệu $\tau_{1j} := \tau_1(\eta_j) = \frac{1}{2j^{3/4}}$, $\tau_{2j} := \tau_2(\eta_j) = \frac{1}{j^{3/8}}$ với mọi $j \in \mathbb{N}^*$. Tiếp theo, ta giới thiệu một dãy các tự đẳng cấu đa thức ϕ_{η_j} của $\mathbb{C}^n$ ($j \in \mathbb{N}^*$), được cho bởi

$$\begin{aligned}
&\phi_{\eta_j}^{-1}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{w}) \\
&= \Big(\frac{1}{j^{1/4}} + \tau_{1j}\tilde{z}_1,\ \frac{1}{j^{3/8}} + \tau_{2j}\tilde{z}_2,\ -\frac{1}{j} - \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j^3} + \epsilon_j\tilde{w} - \frac{4}{j^{3/4}}\tau_{1j}\tilde{z}_1 - \frac{2}{j^{1/2}}(\tau_{1j})^2\tilde{z}_1^2\Big).
\end{aligned}$$

Vì vậy, với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$ siêu mặt $\phi_{\eta_j}(\{\rho = 0\})$ được xác định bởi

$$\begin{aligned}
&\epsilon_j^{-1}\rho \circ \phi_{\eta_j}^{-1}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{w}) \\
&= \epsilon_j^{-1}\rho\Big(\frac{1}{j^{1/4}} + \tau_{1j}\tilde{z}_1,\ \frac{1}{j^{3/8}} + \tau_{2j}\tilde{z}_2,\ -\frac{1}{j} - \frac{1}{j^2} - \frac{1}{j^3} + \epsilon_j\tilde{w} - \frac{4}{j^{3/4}}\tau_{1j}\tilde{z}_1 - \frac{2}{j^{1/2}}(\tau_{1j})^2\tilde{z}_1^2\Big) \\
&= \mathrm{Re}(\tilde{w}) + |\tilde{z}_1|^2 + \frac{1}{16j}|\tilde{z}_1|^4 + \frac{1}{2j^{1/4}}|\tilde{z}_1|^2\mathrm{Re}(\tilde{z}_1) + \big(|\tilde{z}_2 + 1|^4 - 1\big) + O(\frac{1}{j^{1/2}}) + O(\frac{1}{j}) = 0.
\end{aligned}$$

Do đó, dãy các miền $\Omega_j := \phi_{\eta_j}(E_{1,2,4})$ hội tụ chuẩn tắc tới mô hình sau

$$M_{1,2} := \big\{(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{w}) \in \mathbb{C}^3 \colon \mathrm{Re}(\tilde{w}) + |\tilde{z}_1|^2 + \big(|\tilde{z}_2 + 1|^4 - 1\big) < 0\big\}.$$

Cuối cùng, lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lí 2.1.1 ta suy ra $E_{1,2,4}$ là miền song chỉnh hình với mô hình $M_{1,2}$, hay $E_{1,2,4}$ là miền song chỉnh hình song chỉnh hình với

$$\big\{(z_1, z_2, w) \in \mathbb{C}^3 \colon \mathrm{Re}(w) + |z_1|^2 + |z_2|^4 < 0\big\}.$$

Đây là điều vô lý theo Định lí chính trong tài liệu [18].

Nhận xét 2.1.3. Mặc dù nhóm tự đẳng cấu của miền $E_{1,2,4}$ đã được mô tả trong tài liệu [60], nhưng không dễ để thấy được rằng dãy $\{\eta_j\} \subset E_{1,2,4}$ trong Ví dụ 2.1.2 không phải là một dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu. Tuy nhiên, điều này có thể chứng minh được bằng cách sử dụng Định lí 2.1.1 như trong Ví dụ 2.1.2.

Nhận xét 2.1.4. Chúng ta xét một dãy các điểm $\{(\frac{1}{j^{1/4}}, \eta_{j2}, -P(\frac{1}{j^{1/4}}, \eta_{j2}) - \frac{1}{j^2}\}$ hội tụ Λ-tiếp xúc nhưng không đều tới điểm $(0', 0)$. Khi đó, lập luận như trong Ví dụ 2.1.2, chúng ta có thể giả sử rằng dãy các miền $\Omega_j := \phi_{\eta_j}(E_{1,2,4})$ hội tụ chuẩn tắc tới mô hình sau

$$\Big\{(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{w}) \in \mathbb{C}^3 \colon \mathrm{Re}(\tilde{w}) + |\tilde{z}_1|^2 + \tilde{P}(\tilde{z}_2) < 0\Big\},$$

trong đó

i) $\tilde{P}(\tilde{z}_2) = |\tilde{z}_2 + \alpha|^4 - |\alpha|^4$ với $\alpha \in \mathbb{C}$ nếu $|\eta_{j2}| \approx \frac{1}{j^{3/8}}$;

ii) $\tilde{P}(\tilde{z}_2) = |\tilde{z}_2|^4$ nếu $|\eta_{j2}| = o\left(\frac{1}{j^{3/8}}\right)$;

iii) $\tilde{P}(\tilde{z}_2) = |\tilde{z}_2|^2$ nếu $\frac{1}{j^{3/8}} = o(|\eta_{j2}|)$.

Điều này cho thấy mô hình phụ thuộc nhiều vào dáng điệu của quỹ đạo $\{\eta_j\} \subset \Omega$.

2.2 Dáng điệu của các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ tới điểm biên của một miền giả lồi có đối hạng Levi bằng 1 trong $\mathbb{C}^{n+1}$

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết để từ đó phát biểu và chứng minh kết quả chính thứ hai của Chương 2. Cho Ω là một miền trong

$\mathbb{C}^{n+1}$ sao cho gần điểm ξ_0 biên $\partial\Omega$ là giả lồi có kiểu hữu hạn và có đối hạng Levi bằng 1.

2.2.1 Hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu

Trong các phần sau, ta viết $z = (z_1, \dots, z_n)$ và $z^* = (0, z_2, \dots, z_n)$. Giả sử $2m$ là kiểu D'Angelo của $\partial\Omega$ tại ξ_0. Không mất tính tổng quát, ta giả sử điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ và hạng của dạng Levi tại điểm ξ_0 bằng $n-1$. Giả sử ρ là hàm xác định biên địa phương trơn của Ω ở gần điểm ξ_0. Sau một phép biến đổi tọa độ thích hợp (xem các tài liệu [4, 17]), ta có thể tìm được các hàm tọa độ $z_1, \dots, z_n, w$ xác định trên lân cận U_0 của điểm ξ_0 sao cho $\xi_0 = 0$ và hàm ρ có thể khai triển ở gần 0 như sau

$$\begin{aligned}\rho(z) = \mathrm{Re}(w) + P(z_1, \bar{z}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n} |z_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} \mathrm{Re}(Q^\alpha(z_1, \bar{z}_1) z_\alpha) \\ + O(|w||(z,w)| + |z^*|^2|z| + |z^*|^2|z_1|^{m+1} + |z_1|^{2m+1}),\end{aligned}$$

trong đó $P(z_1, \bar{z}_1), Q^\alpha(z_1, \bar{z}_1)$ $(2 \le \alpha \le n)$ là các đa thức nhận giá trị thực điều hòa dưới thuần nhất tương ứng có bậc $2m$ và m, không chứa các hạng tử điều hòa.

Định nghĩa 2.2.1. *Ta nói dãy các điểm $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ với $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jn})$,* hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 *nếu*

(a) $|\mathrm{Im}(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)|$;

(b) $|\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)| = o(|\alpha_{j1}|^{2m})$;

(c) $\Delta P(\alpha_{j1}) \gtrsim |\alpha_{j1}|^{2m-2}$.

Nhận xét 2.2.1. Giả sử $\mathcal{D}_m \subset \mathbb{C}^{n+1}$ là miền được cho trong Ví dụ 2.1.1 và chúng ta xét điểm $\xi_0 = (0, \dots, 0) \in \partial\mathcal{D}_m$. Khi đó, ta thấy rằng $P(z_1) = |z_1|^{2m}$ và $\Delta P(z_1) = 4m^2|z_1|^{2m-2} \ge 0$. Do đó, dãy $\{\eta_j\} \subset \mathcal{D}_m$, được cho trong Ví dụ 2.1.1, hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm $(0, \dots, 0) \in \partial\mathcal{D}_m$.

Nhận xét 2.2.2. Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm có kiểu D'Angelo hữu hạn với $\tau(\partial\Omega, \xi_0) = 2m$. Ta đã biết rằng Ω là miền h-thác triển được tại điểm ξ_0. Giả sử $\{\epsilon_j\} \subset \mathbb{R}^+$ là một dãy sao cho $\eta'_j := (\alpha_j, \beta_j + \epsilon_j)$ thuộc siêu mặt $\{\rho = 0\}$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, điều kiện (c) có nghĩa rằng Ω là miền giả lồi chặt tại điểm η'_j với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Kết quả là, điều kiện (c) được thỏa mãn nếu mô hình $M_P := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(w) + P(z) < 0\}$ là miền WB, hay mô hình M_P là giả lồi chặt tại mỗi điểm biên ở bên ngoài tập hợp $\partial M_P \cap \{(0, it) \in \mathbb{C}^2 \colon t \in \mathbb{R}\}$.

2.2.2 Đa thức điều hòa dưới thuần nhất

Ta viết $P(z) = \sum_{j=1}^{2m-1} a_j z^j \bar{z}^{2m-j}$. Đặt $z = |z|e^{i\theta}$, ta định nghĩa $g(\theta)$ bởi

$$P(z) = |z|^{2m} g(\theta).$$

Khi đó, ta có

$$\Delta P(z) = |z|^{2m-2} \left((2m)^2 g(\theta) + g_{\theta\theta}(\theta) \right) \geq 0.$$

(xem tài liệu [2].)

Cho trước một dãy $\{\epsilon_j\} \subset \mathbb{R}^+$, ta liên kết với dãy $\{\tau_j\}$ bởi

$$\tau_j := \tau(\alpha_j, \epsilon_j) = |\alpha_j|. \left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}} \right)^{1/2}.$$

Ta cần kiểm tra bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.1. *Ta có*

$$\left| \frac{\partial^k P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{k-l}} (\alpha_j) \right| \epsilon_j^{-1} \tau_j^k \lesssim \left(\frac{|\alpha_j|^{2m}}{\epsilon_j} \right)^{1-\frac{k}{2}}, \; k \geq 3.$$

Ngoài ra, nếu $k = 2$ và $j = 1$ thì

$$\left| \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}} (\alpha_j) \right| \epsilon_j^{-1} \tau_j^2 = (2m)^2 g(\theta_j) + g_{\theta\theta}(\theta_j).$$

Chứng minh. Ta chứng minh bổ đề với $P(z) = z^s \bar{z}^{2m-s}$ với $1 \leq s \leq 2m-1$ là đủ. Thật vậy, từ tính toán ta thấy

$$\frac{\partial^k P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{k-l}} (z) = \begin{cases} z^{s-l} \bar{z}^{2m-s-(k-l)} & \text{nếu } l \leq s, k-l \leq 2m-s; \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

và

$$\left| \frac{\partial^k P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{k-l}} (\alpha_j) \right| \epsilon_j^{-1} \tau_j^k \lesssim |\alpha_j|^{2m-k} \epsilon_j^{-1} \tau_j^k = |\alpha_j|^{2m} \epsilon_j^{-1} \left(\frac{\tau_j}{|\alpha_j|} \right)^k$$
$$\lesssim \frac{|\alpha_j|^{2m}}{\epsilon_j} \left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}} \right)^{k/2} = \left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}} \right)^{k/2-1}.$$

Do đó, ta được

$$\left| \frac{\partial^k P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{k-l}} (\alpha_j) \right| \epsilon_j^{-1} \tau_j^k \lesssim \left(\frac{|\alpha_j|^{2m}}{\epsilon_j} \right)^{1-\frac{k}{2}}$$

với $k > 2$. Hơn nữa, trong trường hợp $k = 2, l = 1$ ta có

$$\left| \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}} (\alpha_j) \right| \epsilon_j^{-1} \tau_j^2 = |\alpha_j|^{2m-2} \left((2m)^2 g(\theta_j) + g_{\theta\theta}(\theta_j) \right) |\alpha_j|^2 \left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}} \right)$$
$$= (2m)^2 g(\theta_j) + g_{\theta\theta}(\theta_j).$$

Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

2.2.3 Mô hình của một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ có đối hạng Levi bằng 1

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả chính thứ hai của luận án trong Chương 2.

Định lí 2.2.1. *Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^{n+1}$ với biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử ξ_0 là một điểm biên của Ω có kiểu D'Angelo hữu hạn sao cho dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại điểm ξ_0 và tồn tại một dãy các tự đẳng cấu $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ $\frac{1}{2m}-$tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$, trong đó $2m$ là kiểu của $\partial\Omega$ tại điểm ξ_0. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$.*

Chứng minh. Trong phần này, miền Ω và điểm biên $\xi_0 \in \partial\Omega$ được giả sử là thỏa mãn giả thiết của Định lí 2.2.1. Giả sử $2m$ là kiểu D'Angelo của biên $\partial\Omega$ tại điểm ξ_0. Không mất tính tổng quá, ta có thể giả sử rằng điểm $\xi_0 = 0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ và hạng của dạng Levi tại điểm ξ_0 đúng bằng $n-1$. Giả sử ρ là hàm xác định biên địa phương trơn của Ω gần điểm ξ_0. Sau một phép biến đổi các tọa độ thích hợp (xem tài liệu [4, 17]), ta có thể tìm được các hàm tọa độ $z_1, \ldots, z_n, w$ xác định trên lân cận U_0 của điểm ξ_0 sao cho $\xi_0 = 0$ và hàm ρ có thể khai triển gần điểm 0 như sau

$$\begin{aligned}\rho(z,w) = \mathrm{Re}(w) + P(z_1,\bar{z}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n} |z_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n} \mathrm{Re}(Q^\alpha(z_1,\bar{z}_1) z_\alpha)\\ + O(|w||(z,w)| + |z^*|^2|z| + |z^*|^2|z_1|^{m+1} + |z_1|^{2m+1}),\end{aligned}$$

trong đó $P(z_1,\bar{z}_1), Q^\alpha(z_1,\bar{z}_1)$ $(2 \le \alpha \le n)$ tương ứng là các đa thức nhận giá trị thực điều hòa dưới thuần nhất có bậc $2m$ và m, không chứa các hạng tử điều hòa.

Theo giả thiết của Định lí 2.2.1, tồn tại một dãy các tự đẳng cấu $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ và điểm $a \in \Omega$ sao cho $\eta_j := \varphi_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0. Ta viết $\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)$. Khi đó, ta có

(a) $|\mathrm{Im}(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)|$;

(b) $|\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)| = o(|\alpha_{j1}|^{2m})$;

(c) $\Delta P(\alpha_{j1}) \gtrsim |\alpha_{j1}|^{2m-2}$.

Ta cố định lân cận U_0 của điểm gốc tọa độ. Với mỗi dãy $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\}$ của các điểm hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc tới điểm gốc tọa độ trong $U_0 \cap \{\rho < 0\} =: U_0^-$, ta liên kết với một dãy các điểm $\eta_j' = (\alpha_j, a_j + \epsilon_j + ib_j)$, trong đó $\epsilon_j > 0$ và $\beta_j = a_j + ib_j$, sao cho $\eta_j' = (\alpha_j, \beta_j')$ nằm trong siêu mặt $\{\rho = 0\}$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Ta kí hiệu $\epsilon_j \approx \mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)$.

Theo Mệnh đề 2.2 trong tài liệu [17] (và Mệnh đề 3.1 trong tài liệu [29]), với mỗi điểm

η'_j, tồn tại một ánh xạ song chỉnh hình $\Phi_{\eta'_j}$ của $\mathbb{C}^{n+1}$, $(z,w) = \Phi^{-1}_{\eta'_j}(\tilde{z},\tilde{w})$, sao cho

$$\begin{aligned}\rho(\Phi^{-1}_{\eta'_j}(\tilde{z},\tilde{w})) &= \mathrm{Re}(\tilde{w}) + \sum_{\substack{k+l\le 2m\\ k,l>0}} a_{k,l}(\eta'_j)\tilde{z}_1^k\overline{\tilde{z}_1}^l \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{n-1}|\tilde{z}_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n}\sum_{\substack{k+l\le m\\ k,l>0}} \mathrm{Re}[(b^\alpha_{k,l}(\eta'_j))\tilde{z}_1^k\overline{\tilde{z}_1}^l)\tilde{z}_\alpha] \\ &+ O(|\tilde{w}||(\tilde{z},\tilde{w})| + |\tilde{z}^*|^2|\tilde{w}| + |\tilde{z}^*|^2|\tilde{z}_1|^{m+1} + |\tilde{z}_1|^{2m+1}),\end{aligned} \tag{2.5}$$

trong đó $\tilde{z}^* = (0,\tilde{z}_2,\ldots,\tilde{z}_n)$.

Bây giờ, ta định nghĩa

$$\tau_{j1} := |\alpha_j|.\left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\right)^{1/2}, \tau_{j2} = \cdots = \tau_{jn} = \epsilon_j^{1/2},\ j\ge 1.$$

Từ đó, ta suy ra

$$\epsilon_j^{1/2} \lesssim \tau(\eta_j,\epsilon_j) \lesssim \epsilon_j^{1/(2m)}.$$

Để kết thúc quá trình scaling, ta định nghĩa một phép co giãn không đẳng hướng Δ_j bởi

$$\Delta_j(z,w) = \left(\frac{z_1}{\tau_{j1}}, \frac{z_2}{\tau_{j2}}, \ldots, \frac{z_n}{\tau_{jn}}, \frac{w}{\epsilon_j}\right),\ j\in\mathbb{N}^*.$$

Từ đó, ta suy ra $\Delta_j\circ\Phi_{\eta'_j}(\eta_j) = (0', -1+\gamma_j)$ với dãy $\{\gamma_j\}\subset\mathbb{C}$ phụ thuộc vào $\{\Phi_{\eta'_j}\}$ và hội tụ tới điểm 0 khi $j\to\infty$. Hơn nữa, với mỗi $j\in\mathbb{N}^*$, nếu đặt $\rho_j(z,w) = \epsilon_j^{-1}\rho\circ\Phi^{-1}_{\eta'_j}\circ(\Delta_j)^{-1}(z,w)$ thì từ (2.5) ta suy ra

$$\rho_j(z,w) = \mathrm{Re}(w) + P_{\eta'_j}(z_1,\bar{z}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n}|z_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n}\mathrm{Re}(Q^\alpha_{\eta'_j}(z_1,\bar{z}_1)z_\alpha) + O(\tau(\eta'_j,\epsilon_j)),$$

trong đó

$$\begin{aligned}P_{\eta'_j}(z_1,\bar{z}_1) &:= \sum_{\substack{k,l\le 2m\\ k,l>0}} a_{k,l}(\eta'_j)\epsilon_j^{-1}\tau(\eta'_j,\epsilon_j)^{k+l}z_1^k\bar{z}_1^l,\\ Q^\alpha_{\eta'_j}(z_1,\bar{z}_1) &:= \sum_{\substack{k+l\le m\\ k,l>0}} b^\alpha_{k,l}(\eta'_j)\epsilon_j^{-1/2}\tau(\eta'_j,\epsilon_j)^{k+l}z_1^k\bar{z}_1^l.\end{aligned}$$

Chú ý rằng dãy các điểm $\{\eta_j := \varphi_j(a)\}$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm $\xi_0 = (0',0)$. Khi đó, $\dfrac{|\alpha_{j1}|^{2m}}{\epsilon_j}\to+\infty$ khi $j\to\infty$. Ngoài ra, với $1\le k,l$ mà $k+l\le 2m$, ta có

$$a_{k,l}(\eta'_j) = \frac{\partial^{k+l}\rho}{\partial\tilde{z}_1^k\partial\overline{\tilde{z}_1}^l}(0',0) \approx \frac{\partial^{k+l}P}{\partial z_1^k\partial\bar{z}_1^l}(\alpha_{j1}).$$

Do đó, theo Bổ đề 2.2.1 ta được $a_{k,l}(\eta'_j)\epsilon_j^{-1}\tau(\eta'_j,\epsilon_j)^{k+l} \to 0$ khi $j \to \infty$ với $k,l > 0$ mà $2 < k+l \le 2m$. Hơn nữa, theo điều kiện (c), không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng giới hạn $a := \lim_{j\to\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial z_1 \partial \bar z_1}(\alpha_{j1})\epsilon_j^{-1}\tau_{j1}^2 > 0$ tồn tại, và do đó ta suy ra rằng $\{P_{\eta'_j}(z_1,\bar z_1)\}$ hội tụ đều trên tập compact tới $a|z_1|^2$.

Với các dãy $\{Q^\alpha_{\eta'_j}(z_1,\bar z_1)\}$ $(2 \le \alpha \le n)$, theo Bổ đề 2.4 trong tài liệu [17] ta suy ra

$$|Q^\alpha_{\eta'_j}(z_1,\bar z_1)| \le \tau(\eta'_j,\epsilon_j)^{\frac{1}{10}},\ j \ge 1,$$

với mọi $\alpha = 2,\dots,n$ và $|z_1| \le 1$. Hệ quả là, $\{Q^\alpha_{\eta'_j}\}$ hội tụ đều trên mỗi tập con compact của $\mathbb{C}$ tới 0. Do đó, sau khi lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng dãy $\{\hat\rho_j\}$ hội tụ tới hàm số sau

$$\hat\rho(z,w) := \mathrm{Re}(w) + a|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2,$$

trong đó $a = \lim_{j\to\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 P}{\partial z_1\partial \bar z_1}(\alpha_{j1})\epsilon_j^{-1}\tau_{j1}^2 > 0$. Vì thế, sau khi lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng dãy các miền $\Omega_j := \Delta_j \circ \Phi_{\eta'_j}(U_0^-)$ hội tụ chuẩn tắc tới nửa không gian Siegel

$$M_{|z|^2} := \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+1} \colon \hat\rho(z,w) = \mathrm{Re}(w) + a|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 0\right\},$$

là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$ (bằng cách sử dụng phép biến đổi Cayley). Ngoài ra, bằng cách lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.1.1 ta suy ra Ω là miền song chỉnh hình với mô hình $M_{|z|^2}$, hay Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$. Vì vậy, ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 2.2.3. Định lí 2.2.1 chỉ ra rằng Định lí 2.1.1 vẫn còn đúng nếu ξ_0 là điểm có kiểu D'Angelo hữu hạn và dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại ξ_0 và $\varphi_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới ξ_0 với $a \in \Omega$.

2.3 Dáng điệu của các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ đến điểm biên của một miền trong $\mathbb{C}^2$

Trong phần này, chúng tôi sẽ giới hạn việc nghiên cứu cho các miền trong $\mathbb{C}^2$. Cho Ω là một miền giả lồi có kiểu hữu hạn ở gần điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ với kiểu $\tau(\partial\Omega,\xi_0) = 2m$. Khi đó, khái niệm về sự hội tụ $(\frac{1}{2m})$-tiếp xúc đều được cho trong Mục 2.1 chính là sự hội tụ $(\frac{1}{2m})$-tiếp xúc. Hơn nữa, khái niệm về sự hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu đã được cho trong Mục 2.2. Do đó, Hệ quả 2.2.2 được suy trực tiếp từ Định lí 2.2.1 và Bổ đề 2.2.1. Trong trường hợp này, mô hình song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^2$.

Trong phần tiếp theo, ta xét trường hợp mà điều kiện c) trong Định nghĩa 2.2.1 không thoả mãn, nghĩa là $\dfrac{\Delta P(\alpha_j)}{|\alpha_j|^{2m-2}} \to 0$ khi $j \to \infty$ với dãy $\{\alpha_j\}$ hội tụ tới điểm gốc tọa độ trong $\mathbb{C}$. Khi đó, mô hình nhận được có thể được xác định bởi một đa thức thuần nhất có bậc lớn hơn 2.

2.3.1 Hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp cao

Giả sử ρ là hàm xác định biên địa phương cho miền Ω gần điểm ξ_0 và giả sử kiểu D'Angelo $\tau(\partial\Omega, \xi_0) = 2m$ hữu hạn. Như trong chứng minh của Định lí 2.1.1, ta có thể giả sử rằng tồn tại một hệ tọa độ chỉnh hình địa phương (z, w) sao cho $\xi_0 = 0$ và hàm $\rho(z, \omega)$ có thể khai triển gần điểm 0 như sau

$$\rho(z, w) = \mathrm{Re}(w) + P(z) + R_1(z) + R_2(\mathrm{Im}w) + (\mathrm{Im}w)R(z),$$

trong đó P là đa thức nhận giá trị thực, điều hòa dưới, thuần nhất, có bậc $2m$ và không chứa các hạng tử điều hòa, $R_1 \in \mathcal{O}(1, \Lambda), R \in \mathcal{O}(1/2, \Lambda)$ với $\Lambda = (\frac{1}{2m})$, và $R_2 \in \mathcal{O}(2)$.

Bây giờ, ta viết

$$P(z) = \sum_{l=1}^{2m-1} a_l z^l \bar{z}^{2m-l},$$

trong đó $a_l = \overline{a_{l'}}$ nếu $l + l' = 2m$. Ngoài ra, biểu diễn theo tọa độ cực $z = |z|e^{i\theta}$, với $l + l' \leq 2m$, ta có

$$\frac{\partial^{l+l'} P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(z) = |z|^{2m-l-l'} g_{l,l'}(\theta); \ \frac{\partial^{l+l'} R_1}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(z) = |z|^{2m-l-l'} h_{l,l'}(|z|, \theta), \qquad (2.6)$$

trong đó $g_{l,l'}$ là một đa thức lượng giác có bậc $2m - l - l'$ và $h_{l,l'}(|z|, \theta)$ là một hàm trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ xác định trên $\mathbb{C}$ với $h_{l,l'}(|z|, \theta) = O(|z|)$.

Tương tự như Hệ quả 2.2.2, chúng ta xét một trường hợp mà miền song chỉnh hình với một mô hình được xác định bởi một đa thức thuần nhất có bậc lớn hơn 2. Để làm được điều đó, chúng tôi đưa ra một dạng khác của Định nghĩa 2.2.1 như sau.

Định nghĩa 2.3.1. *Một dãy các điểm $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ được gọi là hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp 2ν $(2 \leq \nu \leq m)$ tới điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $|\mathrm{Im}(\beta_j)| \leq \mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)$;

(ii) $\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega) = o(|\alpha_j|^{2m})$;

(iii) nếu $l + l' < 2\nu$ thì

$$\lim_{j\to\infty} \Big(\frac{\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{l+l'}{2\nu}-1} (g_{l,l'}(\theta_j) + h_{l,l'}(|\alpha_j|, \theta_j)) = 0,$$

trong đó $\theta_j := \arg(\alpha_j)$;

(iv) tồn tại l_0, l'_0 với $l_0 + l'_0 = 2\nu, \max(l_0, l'_0) \geq 1$ sao cho

$$\liminf_{j\to\infty} |g_{l_0,l'_0}(\theta_j)| > 0.$$

Bây giờ, chúng ta giả sử rằng dãy $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp 2ν $(2 \leq \nu \leq m)$ tới điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$. Khi đó, với một dãy cho trước $\{\epsilon_j\} \subset \mathbb{R}^+$ hội tụ tới điểm 0, ta định nghĩa

$$\tau_j := |\alpha_j| \Big(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{1}{2\nu}},\ j \geq 1.$$

Với kí hiệu này, theo Định nghĩa 2.3.1 ta có bổ đề sau.

Bổ đề 2.3.1. *Với mọi số nguyên l, l' thỏa mãn $l, l' \geq 1$, ta có*

(a) $\lim_{j\to\infty} \dfrac{\partial^{l+l'}(P+R_1)}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} = 0$ *với* $l + l' < 2\nu$.

(b) $\lim_{j\to\infty} \dfrac{\partial^{l+l'}P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} = 0$ *với* $l + l' > 2\nu$.

(c) $\lim_{j\to\infty} \dfrac{\partial^{l+l'}R_1}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} = 0$ *với* $l + l' \geq 2\nu$.

(d) $\left|\dfrac{\partial^{l+l'}P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\right|\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} \lesssim 1$ *với* $l + l' = 2\nu$ *và*

$$\liminf_{j\to\infty} \left|\frac{\partial^{2\nu}P}{\partial z^{l_0} \partial \bar{z}^{2\nu - l_0}}(\alpha_j)\right|\epsilon_j^{-1}\tau_j^{2\nu} = \liminf_{j\to\infty} g_{l_0, 2\nu - l_0}(\theta_j) > 0.$$

Chứng minh. Thật vậy, bằng tính toán trực tiếp sử dụng (2.6) ta được

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{l+l'}P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} &= |\alpha_j|^{2m-l-l'} g_{l,l'}(\theta_j)\epsilon_j^{-1}|\alpha_j|^{l+l'}\Big(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{l+l'}{2\nu}}\\ &= \Big(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{l+l'}{2\nu}-1} g_{l,l'}(\theta_j)\end{aligned}$$

với $l, l' \geq 1$. Tương tự, ta có

$$\frac{\partial^{l+l'}R_1}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} = \Big(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{l+l'}{2\nu}-1} h_{l,l'}(|\alpha_j|, \theta_j)$$

với $l, l' \geq 1$. Do đó khẳng định (a) được suy ra trực tiếp từ điều kiện (iii).

Theo cách tương tự, với $l + l' \geq 2\nu$ ta có

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^{l+l'}P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\right|\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} \lesssim |\alpha_j|^{2m-l-l'}\epsilon_j^{-1}|\alpha_j|^{l+l'}\Big(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{l+l'}{2\nu}} \lesssim \Big(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{l+l'}{2\nu}-1};\\ &\left|\frac{\partial^{l+l'}R_1}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\right|\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} \lesssim |\alpha_j|^{2m+1-l-l'}\epsilon_j^{-1}|\alpha_j|^{l+l'}\Big(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{l+l'}{2\nu}} \lesssim |\alpha_j|\Big(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\Big)^{\frac{l+l'}{2\nu}-1}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Điều này dễ dàng suy ra (c). Ngoài ra, nếu $l + l' > 2\nu$ thì ta có

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\partial^{l+l'} P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'} = 0,$$

và do đó (b) được suy ra.

Cuối cùng, từ (2.7) và điều kiện (iii) ta thấy rằng mỗi dãy $\left\{\frac{\partial^{2\nu} P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'}\right\}_{j\geq 1}$ là bị chặn nếu $l + l' = 2\nu$, trong đó

$$\liminf_{j\to\infty} \left|\frac{\partial^{2\nu} P}{\partial z^{l_0} \partial \bar{z}^{2\nu-l_0}}(\alpha_j)\right| \epsilon_j^{-1}\tau_j^{2\nu} = \liminf_{j\to\infty} g_{l_0,2\nu-l_0}(\theta_j) > 0.$$

Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

2.3.2 Mô hình của một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ có một điểm biên có kiểu hữu hạn

Mục này được dành để trình bày kết quả mới thứ ba của luận án trong Chương 2; Cụ thể, chúng tôi chứng minh mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2.3.1. *Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ có biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm có kiểu hữu hạn $2m$. Giả sử tồn tại một số $2 \leq \nu \leq m, a \in \Omega$ và một dãy các tự đẳng cấu $f_j \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}-$tiếp xúc cầu cấp 2ν tới điểm ξ_0. Khi đó, miền Ω song chỉnh hình với một mô hình có dạng*

$$M_Q := \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(\omega) + Q(z) < 0\},$$

trong đó Q là một đa thức thuần nhất điều hoà dưới bậc 2ν nhưng không chứa hạng tử điều hòa.

Chứng minh. Trong mục này, miền Ω và điểm biên $\xi_0 \in \partial\Omega$ được giả sử là thỏa mãn giả thiết của Mệnh đề 2.3.1. Giả sử ρ là hàm xác định biên địa phương của miền Ω ở gần điểm ξ_0 và kiểu D'Angelo $\tau(\partial\Omega, \xi_0) = 2m$ hữu hạn. Như trong chứng minh Định lí 2.1.1, ta có thể giả sử rằng tồn tại các tọa độ chỉnh hình địa phương (z, w) trong đó $\xi_0 = 0$ và hàm ρ có thể được khai triển ở gần điểm 0 như sau

$$\rho(z, w) = \mathrm{Re}(w) + P(z) + R_1(z) + R_2(\mathrm{Im}w) + (\mathrm{Im}w)R(z) < 0,$$

trong đó P là đa thức nhận giá trị thực, đa điều hòa thuần nhất, có bậc $2m$, không chứa các hạng tử điều hòa, $R_1 \in \mathcal{O}(1, \Lambda), R \in \mathcal{O}(1/2, \Lambda)$ với $\Lambda = (\frac{1}{2m})$, và $R_2 \in \mathcal{O}(2)$.

Theo giả thiết của Mệnh đề 2.3.1, tồn tại một dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ và điểm $a \in \Omega$ sao cho $\eta_j := \varphi_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp 2ν $(2 \leq k \leq m)$ tới điểm ξ_0.

Ta cố định một lân cận nhỏ U_0 của điểm gốc tọa độ. Với mọi dãy $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\}$ của các điểm hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp 2ν tới điểm gốc tọa độ trong $U_0 \cap \{\rho < 0\} =: U_0^-$, ta liên kết với một dãy các điểm $\eta_j' = (\alpha_j, a_j + \epsilon_j + ib_j)$, trong đó $\epsilon_j > 0$ và $\beta_j = a_j + ib_j$, sao cho $\eta_j' = (\alpha_j, \beta_j')$ nằm trong siêu mặt $\{\rho = 0\}$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Chú ý rằng $\epsilon_j \approx \mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)$.

Như trong chứng minh của Định lí 2.1.1, ta xét các dãy của các phép biến đổi $L_{\eta_j'}$ và các tự đẳng cấu đa thức Q_j của $\mathbb{C}^2$ ($j \in \mathbb{N}^*$), được xác định tương ứng bởi

$$L_{\eta_j'}(z, w) := (z, w) - \eta_j' = (z - \alpha_j, w - \beta_j')$$

và

$$\begin{cases} w & := \tilde{w} + (R_2'(b_j) + R(\alpha_j))i\tilde{w} + 2\sum\limits_{k=1}^{2m} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k P}{\partial z^k}\tilde{w}^k(\alpha_j) \\ & \quad +2\sum\limits_{k=1}^{2m} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k R_1}{\partial z^k}\tilde{w}^k(\alpha_j) + 2b_j\sum\limits_{k=1}^{2m} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k R(\alpha_j)}{\partial z^k}\tilde{w}^k; \\ z & := \tilde{z}. \end{cases}$$

Khi đó, ta thấy $Q_j \circ L_{\eta_j'}(\alpha_j, \beta_j) = (0, -\epsilon_j - i(R_2'(b_j) + R(\alpha_j))\epsilon_j)$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Hơn nữa, siêu mặt $Q_j \circ L_{\eta_j'}(\{\rho = 0\})$ được xác định bởi một phương trình có dạng

$$\rho\left(L_{\eta_j}^{-1} \circ Q_j^{-1}(z, w)\right) = \mathrm{Re}(w) + o(|\mathrm{Im}(w)|) + \sum_{\substack{k+l\le 2m\\ k,l>0}} \frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}P}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}(\alpha_j)z^k\bar{z}^l$$
$$+ \sum_{\substack{k+l\le 2m\\ k,l>0}} \frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}R_1}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}(\alpha_j)z^k\bar{z}^l + b_j\sum_{\substack{k+l\le 2m\\ k,l>0}} \frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}R}{\partial z^k \partial \bar{z}^l}(\alpha_j)z^k\bar{z}^l + \cdots = 0,$$

trong đó dấu $\cdots$ kí hiệu cho các phần dư.

Tiếp theo, ta nhắc lại rằng

$$\tau_j(m_j, \epsilon_j) := \tau_j = |\alpha_j|.\left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\right)^{1/2\nu}$$

và ta định nghĩa phép co giãn không đẳng hướng Δ_j bởi

$$\Delta_j(z, w) := \left(\frac{z}{\tau_j}, \frac{w}{\epsilon_j}\right),\ j \in \mathbb{N}^*.$$

Từ đó, ta suy ra $\Delta_j \circ Q_j \circ L_{\eta_j'}(\alpha_j, \beta_j) = (0, -1 - i(R_2'(b_j) + R(\alpha_j))) \to (0, -1)$ khi $j \to \infty$. Theo định nghĩa của τ_j, từ tính toán ta được $\tau_j^{2m} = \epsilon_j.\left(\frac{\epsilon_j}{|\alpha_j|^{2m}}\right)^{\frac{m}{\nu}-1} \lesssim \epsilon_j$. Do đó, ta có các đánh giá sau

$$\epsilon_j^{1/2} \lesssim \tau_j \lesssim \epsilon_j^{1/2m}. \tag{2.8}$$

Ngoài ra, siêu mặt $\Delta_j \circ Q_j \circ L_{\eta'_j}(\{\rho = 0\})$ được xác định bởi một phương trình có dạng

$$\epsilon_j^{-1}\rho\left(L_{\eta_j}^{-1} \circ Q_j^{-1} \circ (\Delta_j)^{-1}(\tilde{z}, \tilde{w})\right) = \mathrm{Re}(\tilde{w}) + \sum_{\substack{k+l \le 2m \\ k,l>0}} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l}(P+R_1)}{\partial \tilde{z}^k \partial \overline{\tilde{z}}^l}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{k+l}\tilde{z}^k\overline{\tilde{z}}^l$$
$$+ \epsilon_j^{-1} b_j \sum_{\substack{k+l \le 2m \\ k,l>0}} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{k+l} R}{\partial \tilde{z}^k \partial \overline{\tilde{z}}^l}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{k+l}\tilde{z}^k\overline{\tilde{z}}^l + \epsilon_j^{-1} o(\epsilon_j|\mathrm{Im}(\tilde{w})|) + O(\tau(\eta_j, \epsilon_j)) = 0, \tag{2.9}$$

trong đó ước lượng (2.8) cho thấy các hạng tử có trọng lớn hơn 1 thì bằng với $O(\tau(\eta_j, \epsilon_j)$. Do đó, ta chỉ xét các đơn thức hội tụ trong (2.9) có cấp theo trọng nhỏ hơn hoặc bằng 1.

Từ Bổ đề 2.3.1, ta có

$$\frac{\partial^{k+l}(P+R_1)}{\partial \tilde{z}^k \partial \overline{\tilde{z}}^l}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{k+l} \to 0$$

khi $j \to \infty$ với $k + l \neq 2\nu$. Với trường hợp $k + l = 2\nu$,

$$\frac{\partial^{2\nu} R_1}{\partial \tilde{z}^k \partial \overline{\tilde{z}}^{2\nu-k}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{2\nu} \to 0$$

khi $j \to \infty$. Ngoài ra, vì $|\epsilon_j^{-1} b_j| \lesssim 1$, ta được

$$\epsilon_j^{-1} b_j \frac{\partial^{k+l} R}{\partial \tilde{z}^k \partial \overline{\tilde{z}}^l}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{k+l} \to 0$$

khi $j \to \infty$ với mọi $k, l \geq 1$. Hơn nữa, vì mỗi dãy $\left\{\frac{\partial^{2\nu} P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{l'}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{l+l'}\right\}_{j \geq 1}$ là bị chặn nếu $l + l' = 2\nu$ nên sau khi lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng

$$a_{k,2\nu-k} := \frac{1}{k!(2\nu-k)!} \lim_{j\to\infty} \frac{\partial^{2\nu} P}{\partial \tilde{z}^k \partial \overline{\tilde{z}}^{2\nu-k}}(\alpha_j)\epsilon_j^{-1}\tau_j^{2\nu}, 1 \leq k, l \leq n.$$

Do đó, sau khi lấy một dãy con nếu cần, ta có thể suy ra rằng dãy các hàm xác định biên được cho trong (2.9) hội tụ đều trên tập compact của $\mathbb{C}^2$ tới hàm $\hat{\rho} := \mathrm{Re}(\tilde{w}) + Q(\tilde{z})$. Kết quả là, dãy các miền $\Omega_j := \Delta_j \circ Q_j \circ L_{\eta'_j}(U_0^-)$ hội tụ chuẩn tắc tới mô hình sau

$$M_Q := \left\{(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathbb{C}^2 \colon \hat{\rho}(\tilde{z}, \tilde{w}) := \mathrm{Re}(\tilde{w}) + Q(\tilde{z}) < 0\right\},$$

trong đó

$$Q(\tilde{z}) = \sum_{k=1}^{2\nu-1} a_{k,2\nu-k}\tilde{z}^k\overline{\tilde{z}}^{2\nu-k}.$$

Chúng ta lưu ý rằng vì mô hình M_Q là giả lồi nên ta suy ra Q là hàm điều hòa dưới. Thêm nữa, theo điều kiện (iii), ta có $a_{l_0,2\nu-l_0} \neq 0$ với $1 \leq l_0 \leq 2\nu - 1$, và do đó Q là đa thức không điều hòa. Hơn nữa, theo lập luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.1.1, ta suy ra Ω là miền song chỉnh hình với mô hình M_Q. Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 2.3.1. Mệnh đề 2.3.1 chỉ ra rằng nếu dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu không hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm biên ξ_0 thì miền Ω không song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^2$ nhưng song chỉnh hình với một mô hình M_Q được xác định bởi một đa thức thuần nhất bậc lớn hơn hoặc bằng 2.

2.3.3 Miền kiểu Kohn-Nirenberg

Trong mục này, chúng ta đưa ra một ví dụ để chỉ ra rằng nếu dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu không hội tụ $\Lambda-$tiếp xúc cầu tới một điểm biên thì miền Ω không song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^2$ nhưng Ω song chỉnh hình với mô hình $M_Q = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(w) + Q(z) < 0\}$, trong đó Q là đa thức điều hòa dưới, thuần nhất có $\deg(Q) \geq 4$.

Miền Kohn-Nirenberg Ω_{KN} được đưa ra lần đầu tiên trong tài liệu [51] bởi

$$\Omega_{KN} := \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(w) + |z|^8 + \frac{15}{7}|z|^2\mathrm{Re}(z^6) < 0\right\}.$$

Đây là miền giả lồi yếu, có kiểu hữu hạn và không có hàm support tại điểm gốc tọa độ. Hơn nữa, miền Ω_{KN} không song chỉnh hình với một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^2$ với biên giải tích thực. Thật vậy, nếu điều này xảy ra thì theo tài liệu [6], ta có Ω_{KN} là miền song chỉnh hình với ellipsoid

$$\left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon |w|^2 + |z|^8 < 1\right\},$$

hay Ω_{KN} là miền song chỉnh hình với mô hình $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(w) + |z|^8 < 1\}$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn theo Định lí chính trong tài liệu [18].

Hơn nữa, Ω_{KN} là miền WB nên nó thỏa mãn giả thiết của Hệ quả 2.2.2. Thật vậy, vì $\mathrm{Aut}(\Omega_{KN})$ được tạo thành bởi các phép co giãn và các phép dịch chuyển theo hướng phần ảo của w (xem tài liệu [60]) nên nếu một dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu $\{\eta_j = \varphi_j(a)\}$ ($\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega_{KN})$ và $a \in \Omega_{KN}$) hội tụ tới điểm gốc tọa độ thì $\{\eta_j = \varphi_j(a)\}$ hội tụ $\frac{1}{8}$-không tiếp xúc tới điểm gốc tọa độ. Tương tự, với miền

$$\mathcal{Q}_m := \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(w) + |z|^{2m} < 1\right\}, m \in \mathbb{N}^*,$$

mọi dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ tới điểm gốc tọa độ thì phải hội tụ $\frac{1}{2m}$-không tiếp xúc tới điểm gốc tọa độ (xem tài liệu [60] với sự mô tả rõ ràng của nhóm tự đẳng cấu $\mathrm{Aut}(\mathcal{Q}_m)$).

Điều kiện η_j' giả lồi chặt đảm bảo rằng giới hạn của các miền scaling (mô hình M_H) chỉ song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^2$. Nếu điều kiện này không thỏa mãn hay $\Delta P(\alpha_j) = 0$ với mọi j thì mô hình sẽ trở thành $M_Q = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(w) + Q(z) < 0\}$ với đa thức điều hòa dưới, thuần nhất Q nào đó có $\deg(Q) \geq 4$. Ví dụ sau đây sẽ minh họa cho trường hợp này. Ví dụ đó cũng mô tả cho một trường hợp khi nào thì Mệnh đề 2.3.1 có thể xảy ra.

Ví dụ 2.3.1. Giả sử $\widetilde{\Omega}_{KN}$ là một miền trong $\mathbb{C}^2$ được xác định bởi

$$\widetilde{\Omega}_{KN} := \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(w) + |z|^8 - \frac{16}{7}|z|^2\mathrm{Re}(z^6) < 0\right\}.$$

Ta thấy rằng dãy các điểm $\{(\frac{1}{\sqrt[8]{j}}, \frac{9}{7j} - \frac{1}{j^2})\}$ hội tụ $\frac{1}{8}$-tiếp xúc nhưng không hội tụ $\frac{1}{8}$-tiếp xúc cầu tới điểm $(0,0)$.

Đặt $\rho(z,w) = \mathrm{Re}(w) + |z|^8 - \frac{16}{7}|z|^2\mathrm{Re}(z^6)$ và $\eta_j = (\frac{1}{\sqrt[8]{j}}, \frac{9}{7j} - \frac{1}{j^2})$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Từ đó, ta suy ra $\rho(\eta_j) = \frac{9}{7j} - \frac{1}{j^2} - \frac{9}{7j} = -\frac{1}{j^2} \approx -\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\widetilde{\Omega}_{KN})$. Đặt $\epsilon_j = |\rho(\eta_j)| = \frac{1}{j^2}$. Khi đó, từ tính toán cho thấy

$$\begin{aligned}
&\rho(z,w)\\
&= \mathrm{Re}(w) + |(z - \frac{1}{j^{1/8}}) + \frac{1}{j^{1/8}}|^8 - \frac{16}{7}|(z - \frac{1}{j^{1/8}}) + \frac{1}{j^{1/8}}|^2\mathrm{Re}(((z - \frac{1}{j^{1/8}}) + \frac{1}{j^{1/8}})^6)\\
&= \mathrm{Re}(w) + \frac{1}{j^{8/8}} + \frac{8}{j^{7/8}}\mathrm{Re}(z - \frac{1}{j^{1/8}}) + \frac{16}{j^{6/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^2 + \frac{12}{j^{6/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^2)\\
&+ \frac{8}{j^{5/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^3) + \frac{48}{j^{5/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^2\mathrm{Re}(z - \frac{1}{j^{1/8}})\\
&+ \frac{2}{j^{4/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^4) + \frac{32}{j^4}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^2\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^2) + \frac{36}{j^{4/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^4\\
&- \frac{16}{7}\left(\frac{1}{j^{8/8}} + \frac{8}{j^{7/8}}\mathrm{Re}(z - \frac{1}{j^{1/8}}) + \frac{21}{j^{6/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^2) + \frac{7}{j^{6/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^2\right)\\
&- \frac{16}{7}\left(\frac{35}{j^{5/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^3) + \frac{21}{j^{5/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^2\mathrm{Re}(z - \frac{1}{j^{1/8}})\right)\\
&- \frac{16}{7}\left(\frac{21}{j^{4/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^4) + \frac{35}{j^{4/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^2\mathrm{Re}\big((z - \frac{1}{j^{1/8}})^2\big)\right) + O(\frac{1}{j^{3/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^5)\\
&= \mathrm{Re}(w) - \frac{9}{7j^{8/8}} - \frac{72}{7j^{7/8}}\mathrm{Re}(z - \frac{1}{j^{1/8}}) - \frac{36}{j^{6/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^2) - \frac{72}{j^{5/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^3)\\
&\quad - \frac{46}{j^{4/8}}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^4) - \frac{48}{j^{4/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^2\mathrm{Re}((z - \frac{1}{j^{1/8}})^2)\\
&\quad + \frac{36}{j^{4/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^4 + O(\frac{1}{j^{3/8}}|z - \frac{1}{j^{1/8}}|^5).
\end{aligned}$$

Vì thế, để định nghĩa phép co giãn không đẳng hướng, ta kí hiệu $\tau_j := \tau(\eta_j) = \frac{1}{j^{3/8}}$ với mọi $j \in \mathbb{N}^*$.

Bây giờ, ta giới thiệu một dãy các tự đẳng cấu đa thức $\phi_{\eta_j}^{-1}$ của $\mathbb{C}^2$, được cho bởi

$$\begin{cases} z = \frac{1}{\sqrt[8]{j}} + \tau_j\tilde{z}\\ w = \epsilon_j\tilde{w} + \frac{9}{7j} + \frac{72}{7j^{7/8}}\tau_j\tilde{z} + \frac{36}{j^{6/8}}\tau_j^2\tilde{z}^2 + \frac{72}{j^{5/8}}\tau_j^3\tilde{z}^3 + \frac{46}{j^{4/8}}\tau_j^4\tilde{z}^4. \end{cases}$$

Do đó, ta có

$$\epsilon_j^{-1}\rho \circ \phi_{\eta_j}^{-1}(\tilde{z}, \tilde{w}) = \mathrm{Re}(\tilde{w}) + 36|\tilde{z}|^4 - 48|\tilde{z}|^2\mathrm{Re}(\tilde{z}^2) + O(\frac{1}{j^{1/4}}).$$

Ta sẽ chứng minh rằng không tồn tại dãy $\{f_j\} \subset \mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega}_{KN})$ và $a \in \widetilde{\Omega}_{KN}$ sao cho $\eta_j = f_j(a) \to (0,0) \in \partial\widetilde{\Omega}_{KN}$ khi $n \to \infty$. Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại dãy $\{f_j\}$ và điểm $a \in \widetilde{\Omega}_{KN}$ như trên. Khi đó, theo lập luận như trong chứng minh Định lí 2.2.1, $\widetilde{\Omega}_{KN}$ là miền song chỉnh hình với miền sau

$$D := \left\{(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(\tilde{w}) + 36|\tilde{z}|^4 - 48|\tilde{z}|^2\mathrm{Re}(\tilde{z}^2) < 0\right\}.$$

Tuy nhiên, vì kiểu D'Angelo của ∂D luôn nhỏ hơn hoặc bằng 4 nên ta suy ra miền D không song chỉnh hình với miền $\widetilde{\Omega}_{KN}$ (xem Định lí chính trong tài liệu [18]). Đây là điều không thể xảy ra.

CHƯƠNG 3
DÁNG ĐIỆU BIÊN CỦA HÀM SQUEEZING VÀ CỦA METRIC KOBAYASHI

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả chính (Định lí 3.1.2, Định lí 3.1.3 và Định lí 3.2.3) liên quan đến Bài toán 2 của luận án. Kết quả của chương này được viết dựa trên các bài báo [1] và [2] trong mục "Các công trình đã công bố liên quan đến luận án".

3.1 Dáng điệu biên của hàm squeezing ở gần điểm cực toàn cục

3.1.1 Một số tính chất của hàm squeezing

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Kí hiệu $r(z,\Omega)$ và $R(z,\Omega)$ tương ứng bởi

$$r(z,\Omega) = \sup\{r > 0\colon B(z,r) \subset \Omega\} \text{ và } R(z,\Omega) = \inf\{R > 0\colon B(z,R) \supset \Omega\}.$$

Với tập con $K \subset \Omega$, ta đặt

$$r(K,\Omega) = \inf_{z\in K} r(z,\Omega);\ R(K,\Omega) = \sup_{z\in K} R(z,\Omega).$$

Bây giờ, chúng ta chuẩn bị bổ đề kĩ thuật sau.

Bổ đề 3.1.1. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và K là một tập con compact tương đối của Ω. Khi đó, ta có $r(z,\Omega)/R(z,\Omega) \le \sigma_\Omega(z) \le 1$ với $z \in \Omega$ và $\inf_{z\in K} \sigma_\Omega(z) \ge \dfrac{r(K,\Omega)}{R(K,\Omega)} > 0$.*

Chứng minh. Chúng ta xét ánh xạ affine $f(\zeta) := \dfrac{\zeta - z}{R(z,\Omega)}$. Khi đó, f là một ánh xạ song chỉnh hình từ miền Ω vào hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^n$. Hơn nữa, ta có

$$B\left(0, r(z,\Omega)/R(z,\Omega)\right) \subset f(B(z, r(z,\Omega))) \subset f(\Omega),$$

và vì vậy

$$\inf_{z\in K} \sigma_\Omega(z) \ge \inf_{z\in K} \frac{r(z,\Omega)}{R(z,\Omega)} = \frac{r(K,\Omega)}{R(K,\Omega)} > 0.$$

Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

Định nghĩa 3.1.1 (xem tài liệu [11]). *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và Σ là một tập con của Ω. Ta nói Ω là miền chính quy thuần nhất chỉnh hình (HHR) trên Σ nếu $\inf_{z\in\Sigma}\sigma_\Omega(z) > 0$. Đặc biệt, nếu Ω là miền HHR trên Ω thì ta nói Ω là miền HHR.*

Tiếp theo, chúng ta chuẩn bị một mệnh đề sau cho chứng minh Định lí 3.1.2.

Mệnh đề 3.1.1. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử tồn tại một tập con $\Sigma \subset \Omega$ thỏa mãn $\forall z \in \Omega\ \exists f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f(z) \in \Sigma$. Khi đó, Ω là miền HHR nếu Ω là miền HHR trên Σ.*

Chứng minh. Giả sử Ω là một miền HHR trên Σ. Theo định nghĩa, tồn tại $c > 0$ sao cho $\sigma_\Omega(z) \geq c$ với mọi $z \in \Sigma$. Bây giờ ta lấy $z \in \Omega$ tùy ý. Ta sẽ chứng minh rằng $\sigma_\Omega(z) \geq c$. Thật vậy, theo giả thiết tồn tại một tự đẳng cấu $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f(z) \in \Sigma$ và $\sigma_\Omega(z) = \sigma_\Omega(f(z)) \geq c$ do tính bất biến của hàm squeezing qua các ánh xạ song chỉnh hình. Từ đó, ta có điều cần chứng minh. □

Ta nhắc lại rằng một tập compact $K \Subset \mathbb{C}^n$ được gọi là có một cơ sở lân cận Stein nếu với mọi miền V chứa K thì tồn tại một miền giả lồi Ω_V sao cho $K \subset \Omega_V \subset V$. Ví dụ, bao đóng $\overline{\Omega}$ của một miền giả lồi bị chặn trơn Ω trong $\mathbb{C}^n$ có một cơ sở lân cận Stein (chặt) nếu miền Ω có một hàm xác định biên địa phương ρ và tồn tại một số $\epsilon_0 > 0$ sao cho $\{z \in \mathbb{C}^n \colon \rho(z) < \epsilon\}$ là giả lồi với mọi $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ (xem tài liệu [66]).

Gần đây, dáng điệu của hàm squeezing ở gần một điểm biên giả lồi chặt đã được thiết lập.

Định lí 3.1.1 (Xem các tài liệu [4,8,9]). *Nếu miền bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$ có một cơ sở lân cận Stein chứa một điểm biên giả lồi chặt p thì $\lim_{z\to p}\sigma_\Omega(z) = 1$.*

Kết quả sau đây như một hệ quả của Định lí 3.1.1, Bổ đề 3.1.1 và Mệnh đề 3.1.1.

Hệ quả 3.1.1. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ có một cơ sở lân cận Stein. Giả sử tồn tại một tập con $M \subset \Omega$ thỏa mãn $\forall z \in \Omega\ \exists f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f(z) \in M$. Nếu mọi điểm $p \in \overline{M} \cap \partial\Omega$ đều là điểm giả lồi chặt thì Ω là miền HHR.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.1.1, ta chứng minh rằng Ω là miền HHR nếu Ω là miền HHR trên M là đủ. Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại dãy $\{z_j\} \subset M$ sao cho $\sigma_\Omega(z_j) \to 0$ khi $j \to \infty$. Lấy một dãy con nếu cần ta có thể giả sử rằng hoặc $z_j \to p \in \overline{M} \cap \partial\Omega$ hoặc $\{z_j\} \Subset \Omega$. Theo Bổ đề 3.1.1, trường hợp thứ hai không xảy ra. Mặt khác, với trường hợp thứ nhất ta có $\sigma_\Omega(z_j) \to 1$ khi $j \to \infty$ theo Định lí 3.1.1, đó là một sự mâu thuẫn. Từ đó, ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.1.1. Theo Bổ đề 3.1.1, ta dễ thấy rằng Ω là miền HHR trên mọi tập con compact tương đối $K \Subset \Omega$. Ngoài ra, ta có thể thấy rằng nếu $\sigma_\Omega(p) = 1$ với $p \in \Omega$ thì Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị mở (xem tài liệu [21]). Hơn nữa, từ Hệ quả 3.1.1 ta suy ra Ω là miền HHR nếu mọi điểm $p \in \overline{\Omega/\mathrm{Aut}(\Omega)} \cap \partial\Omega$ đều là điểm giả lồi chặt.

3.1.2 Hàm squeezing của ellipsoid tổng quát

Ta gán các trọng $\frac{1}{2m_1}, \ldots, \frac{1}{2m_{n-1}}, 1$ tương ứng cho các biến $z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n$ và kí hiệu $wt(K) := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{2m_j}$ là trọng của một $(n-1)$-bộ $K = (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1}$. Nhắc lại rằng một đa thức nhận giá trị thực P trên $\mathbb{C}^{n-1}$ được gọi là *đa thức thuần nhất theo trọng* với trọng $(1/2m_1, \ldots, 1/2m_{n-1})$ (hoặc đơn giản $(1/2m_1, \ldots, 1/2m_{n-1})$-*thuần nhất*), nếu

$$P(t^{1/2m_1} z_1, \ldots, t^{1/2m_{n-1}} z_{n-1}) = tP(z_1, \ldots, z_{n-1}) \text{ với mọi } z' \in \mathbb{C}^{n-1} \text{ và } t > 0.$$

Trong trường hợp $m = m_1 = \cdots = m_{n-1}$, ta nói đa thức P là *thuần nhất bậc* $2m$. Lưu ý rằng nếu $P(z')$ là đa thức $(1/2m_1, \ldots, 1/2m_{n-1})$-thuần nhất thì

$$P(z') = \sum_{wt(K)+wt(L)=1} a_{KL} {z'}^K \bar{z}'^L,$$

trong đó $a_{KL} \in \mathbb{C}$ với $a_{KL} = \bar{a}_{LK}$ (xem tài liệu [60]).

Trong chương này, giả sử $P(z')$ là đa thức $(1/2m_1, \ldots, 1/2m_{n-1})$-thuần nhất được xác định bởi

$$P(z') = \sum_{wt(K)=wt(L)=1/2} a_{KL} {z'}^K \bar{z}'^L, \tag{3.1}$$

trong đó $a_{KL} \in \mathbb{C}$ với $a_{KL} = \bar{a}_{LK}$, thỏa mãn $P(z') > 0$ khi $z' \neq 0'$. Ngoài ra, vì $P(z') > 0$ với $z' \neq 0'$ và do tính thuần nhất theo trọng, tồn tại hai hằng số $c_1, c_2 > 0$ sao cho

$$c_1 \sigma_\Lambda(z') \leq P(z') \leq c_2 \sigma_\Lambda(z'),$$

trong đó $\sigma_\Lambda(z') = \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^{2m_j}$ (xem các tài liệu [60, 76]). Ngoài ra, ta thấy $\overline{D_P}$ có một cơ sở lân cận Stein.

Trước tiên, ta xét ellipsoid tổng quát D_P và mô hình E_P trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$, được xác định tương ứng bởi

$$D_P := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_n|^2 + P(z') < 1\};$$
$$E_P := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : P(z') < 2\mathrm{Re}(z_n)\}.$$

Khi đó, ta cần có bổ đề sau đây (xem tài liệu [5]).

Bổ đề 3.1.2 (Xem tài liệu [5]). *Cho P là đa thức thuần nhất theo trọng với trọng $(m_1,\dots,m_{n-1})$ được cho trước bởi (3.1) sao cho $P(z')>0$ với mọi $z'\in\mathbb{C}^{n-1}\setminus\{0'\}$. Khi đó, ánh xạ chỉnh hình ψ được xác định bởi*

$$(z',z_n)\mapsto\left(\frac{2^{1/2m_1}}{(1+z_n)^{1/m_1}}z_1,\dots,\frac{2^{1/2m_{n-1}}}{(1+z_n)^{1/m_{n-1}}}z_{n-1},\frac{1-z_n}{1+z_n}\right),$$

là một ánh xạ song chỉnh hình từ D_P vào E_P.

Chứng minh. Thật vậy, từ tính toán trực tiếp ta được

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{1-z_n}{1+z_n}\right)&=\operatorname{Re}\left(\frac{(1-z_n)(1+\bar z_n)}{|1+z_n|^2}\right)\\&=\frac{1-|z_n|^2}{|1+z_n|^2}.\end{aligned}$$

Ngoài ra, vì P có dạng như trong (3.1) nên ta có

$$P\left(\frac{2^{1/2m_1}}{(1+z_n)^{1/m_1}}z_1,\dots,\frac{2^{1/2m_{n-1}}}{(1+z_n)^{1/m_{n-1}}}z_{n-1}\right)=\frac{2}{|1+z_n|^2}P(z').$$

Vì vậy, ta suy ra

$$2\operatorname{Re}\left(\frac{1-z_n}{1+z_n}\right)-P\left(\frac{2^{1/2m_1}}{(1+z_n)^{1/m_1}}z_1,\dots,\frac{2^{1/2m_{n-1}}}{(1+z_n)^{1/m_{n-1}}}z_{n-1}\right)>0$$

khi và chỉ khi

$$|z_n|^2+P(z')<1.$$

Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.1.2. Từ tính toán trực tiếp ta thấy $\psi^{-1}=\psi$, $\psi(0',0)=(0',1)$ và $\psi(0',1)=(0',0)$. Ngoài ra, $\psi(z)\to(0',-1)$ khi $E_P\ni z\to\infty$.

Tiếp theo, N. V. Thu và các cộng sự trong tài liệu [60] đã thiết lập bổ đề sau.

Bổ đề 3.1.3 (xem Bổ đề 7 trong tài liệu [60]). *Cho P là đa thức thuần nhất theo trọng với trọng $(1/2m_1,\dots,1/2m_{n-1})$ được cho bởi (3.1) sao cho $P(z')>0$ với mọi $z'\in\mathbb{C}^{n-1}\setminus\{0'\}$. Khi đó,* $\operatorname{Aut}(D_P)$ *chứa các tự đẳng cấu $\Phi_{a,\theta}$ sau đây, được xác định bởi*

$$(z',z_n)\mapsto\left(\frac{(1-|a|^2)^{1/2m_1}}{(1-\bar a z_n)^{1/m_1}}z_1,\dots,\frac{(1-|a|^2)^{1/2m_{n-1}}}{(1-\bar a z_n)^{1/m_{n-1}}}z_{n-1},e^{i\theta}\frac{z_n-a}{1-\bar a z_n}\right),\qquad(3.2)$$

trong đó $a\in\Delta:=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<1\}$ và $\theta\in\mathbb{R}$. Hơn nữa, $\operatorname{Aut}(E_P)$ *chứa các phép co giãn Λ_λ, $\lambda>0$, được xác định bởi*

$$\Lambda_\lambda(z',z_n))=\left(\frac{z_1}{\lambda^{1/2m_1}},\dots,\frac{z_{n-1}}{\lambda^{1/2m_{n-1}}},\frac{z_n}{\lambda}\right).$$

Bây giờ, chúng ta đã sẵn sàng để chứng minh Định lí 3.1.2 sau đây; đó là kết quả chính thứ nhất của chương này.

Định lí 3.1.2. *Cho P là một đa thức thuần nhất theo trọng $(1/2m_1, \dots, 1/2m_{n-1})$ được cho bởi (3.1) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0'\}$. Nếu D_P là miền $\widetilde{WB}$ thì D_P là miền HHR.*

Chứng minh. Kí hiệu $\Sigma := \{(z', 0) \in D_P \colon P(z') = 1\}$. Khi đó, với mỗi $p = (p', p_n) \in D_P$, ta có $\phi_{p_n,0}(p) \in \Sigma$, trong đó $\phi_{p_n,0}$ là một tự đẳng cấu được cho trong (3.2). Vì mọi điểm biên của $\overline{\Sigma} \cap \partial D_P$ đều là điểm giả lồi chặt và giá trị giới hạn của hàm squeezing bằng 1 theo Định lí 3.1.1 nên $\sigma_{D_P}(z)$ bị chặn đều bởi 0 trên Σ. Do đó, theo Mệnh đề 3.1.1 ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.1.3. Định lí 3.1.2 là mở rộng của các kết quả đã có của F. Deng, A. Guan, L. Zhang, K.-T. Kim cho các miền có thể không lồi.

3.1.3 Dáng điệu của hàm squeezing ở gần điểm cực toàn cục

Phần này được dành hoàn toàn để chứng minh Định lí 3.1.3 dưới đây; đó là kết quả chính thứ hai của chương này.

Định lí 3.1.3. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ và $p \in \partial\Omega$ là một điểm cực (P, r) với $0 < r \leq 1$. Khi đó, với mọi $0 < r' < r$ và $c > 0$ tồn tại $\epsilon_0, \gamma_0 > 0$ sao cho*

$$\sigma_\Omega(q) > \gamma_0, \quad \forall q \in \Gamma(r', c) \cap B(p; \epsilon_0).$$

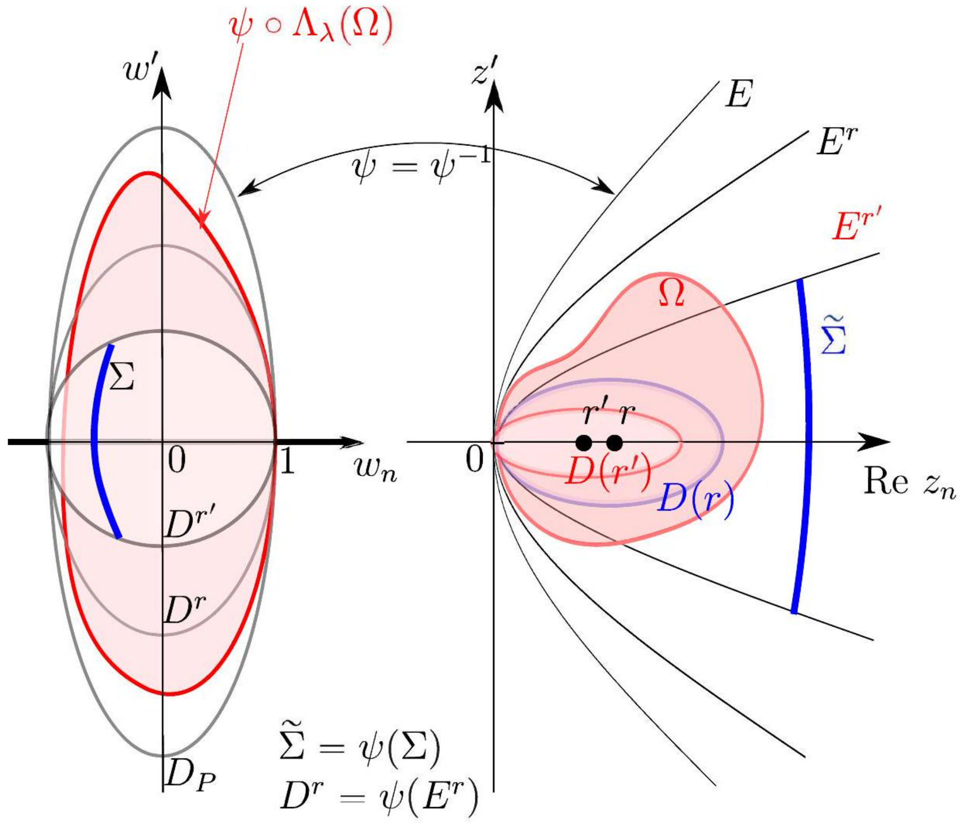
Chứng minh. Giả sử Ω là miền thỏa mãn điều kiện của Định lí 3.1.3 và $p \in \partial\Omega$ là điểm cực (P, r) với $0 < r \leq 1$. Khi đó, do tính bất biến của hàm squeezing qua các ánh xạ song chỉnh hình, ta có thể giả sử rằng $D(r) \subset \Omega \subset E_P$ và $p = (0', 0)$. Ta cố định $0 < r' < r$, $c > 0$. Khi đó, $\Gamma(r', c)$ trở thành $\Gamma(r', c) = D(r') \cap \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon |\mathrm{Im}(z_n)| \leq c|\mathrm{Re}(z_n)|\}$.

Ta kí hiệu $E^r := E_{P/r}, E := E^1 = E_P$, $D^r := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon |z_n|^2 + P(z')/r < 1\}$, $D := D^1 = D_P$. Khi đó, ta thấy rằng miền $D(r') \subset D(r) \subset \Omega \subset E$ và miền $D(r') \subset E^{r'}$. Hơn nữa, ánh xạ song chỉnh hình ψ, được cho trong Bổ đề 3.1.2, ánh xạ $E, E^r, E^{r'}$ tương ứng lên $D, D^r, D^{r'}$ (xem Bổ đề 3.1.2 và Hình 3.1 bên dưới). Ngoài ra, theo Bổ đề 3.1.3, các miền $E, E^r, E^{r'}$ là bất biến dưới tác động của phép co giãn Λ_λ, được xác định bởi

$$\Lambda_\lambda(z) := \left(\frac{z_1}{\lambda^{1/2m_1}}, \dots, \frac{z_{n-1}}{\lambda^{1/2m_{n-1}}}, \frac{z_n}{\lambda} \right), \quad \lambda > 0.$$

Ngoài ra, từ tính toán ta thấy

$$\Lambda_\lambda(D(r)) = \left\{ (z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon \lambda|z_n|^2 + P(z') < 2r\mathrm{Re}(z_n) \right\},$$



Hình 3.1: Co giãn miền

hội tụ đến E^r khi $\lambda \to 0^+$. Hơn nữa, $\psi \circ \Lambda_\lambda(D(r))$ hội tụ đến D^r khi $\lambda \to 0^+$.

Bây giờ, ta định nghĩa tập hợp

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma} &:= \Big\{z = (z', z_n) \in E^{r'} \colon \|z\| = 1, |\mathrm{Im}(z_n)| \leq c|\mathrm{Re}(z_n)|\Big\}\\ &= \{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon P(z') < 2r'\mathrm{Re}(z_n), \|z\| = 1, |\mathrm{Im}(z_n)| \leq c|\mathrm{Re}(z_n)|\} \Subset E^r\end{aligned}$$

và $\Sigma := \psi(\widetilde{\Sigma}) \subset D^{r'}$. Khi đó, ta có $\widetilde{\Sigma} \Subset E^r$ và $\Sigma \Subset D^r$. Đặc biệt, với mọi $q \in E^{r'}$ mà $|\mathrm{Im}(q_n)| < c|\mathrm{Re}(q_n)|$ thì quỹ đạo $\{\Lambda_\lambda(q)\}_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ giao với tập hợp $\widetilde{\Sigma}$ tại một điểm (duy nhất).

Cho $q \in \Gamma(r', c) \cap B(0, \epsilon_0) \subset E^{r'} \cap B(0, \epsilon_0)$, trong đó $\epsilon_0 > 0$ sẽ được chọn sau. Khi đó, tồn tại một số $\lambda > 0$ sao cho $\Lambda_\lambda(q) \in \widetilde{\Sigma}$, nghĩa là $\|\Lambda_\lambda(q)\| = 1$. Chúng ta lưu ý rằng $\lambda \to 0^+$ khi $q \to p = (0', 0)$. Ngoài ra, vì miền $\psi \circ \Lambda_\lambda(D(r))$ hội tụ đến miền D^r khi $\lambda \to 0^+$ nên $\epsilon_0 > 0$ có thể được chọn sao cho $\Sigma \Subset \psi \circ \Lambda_\lambda(D(r)) \subset \psi \circ \Lambda_\lambda(\Omega)$ và

$$\mathrm{dist}\left(\Sigma, \partial\big(\psi \circ \Lambda_\lambda(\Omega)\big)\right) \geq \mathrm{dist}\left(\Sigma, \partial\big(\psi \circ \Lambda_\lambda(D(r))\big)\right) > \mathrm{dist}(\Sigma, \partial D^r)/2 > 0$$

với mọi $q \in D(r') \cap B(0; \epsilon_0)$.

Tóm lại, ánh xạ song chỉnh hình $G_\lambda := \psi \circ \Lambda_\lambda$ từ E vào D thỏa mãn các tính chất sau:

a) $G_\lambda(\Omega) \subset D$;

b) $G_\lambda(q) \in \Sigma \Subset D^r$;

c) $\operatorname{dist}\big(G_\lambda(q), \partial\big(G_\lambda(\Omega)\big)\big) > \delta$,

trong đó $\delta := \operatorname{dist}(\Sigma, \partial D^r)/2$. Do đó, theo Bổ đề 3.1.1 và do tính bất biến của hàm squeezing qua các ánh xạ song chỉnh hình nên ta suy ra

$$\sigma_\Omega(q) = \sigma_{G_\lambda(\Omega)}(G_{\lambda(q)}) > \delta/d > 0, \quad \forall q \in \Gamma(r', c) \cap B(0, \epsilon_0),$$

trong đó d là đường kính của miền D_P. Đặt $\gamma_0 := \delta/d$, ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.1.4. Định lí 3.1.3 là một sự khái quát của Định lí 3.1 của K.T. Kim và L. Zhang (Pacific Journal of Mathematics, 2016). Trong Định lí 3.1 của K.T. Kim và L. Zhang, các tác giả đã nghiên cứu dáng điệu biên của hàm squeezing ở gần các điểm cực cầu trên biên của một miền. Tuy nhiên, điểm cực cầu mà họ xét nhìn chung không tồn tại, ngay cả đối với những miền giả lồi trơn có kiểu hữu hạn. Trong khi đó, Định lí 3.1.3 mở rộng phạm vi nghiên cứu bằng cách thiết lập dáng diệu biên của hàm squeezing ở gần điểm cực (P, r) trên biên của một miền. Kết quả này không những khắc phục được giới hạn trong công trình trước đó mà còn cung cấp một cách tiếp cận mới trong việc khảo sát cấu trúc hình học của biên miền giả lồi từ góc nhìn giải tích phức nhiều biến.

3.2 Dáng điệu biên của các metric Kobayashi tổng quát trên các miền h-thác triển được

3.2.1 Tính ổn định của các metric Kobayashi tổng quát

Trong phần này, chúng ta tập trung vào tính ổn định của metric Kobayashi tổng quát. Trong tài liệu [59], Ninh Văn Thu và Nguyễn Quang Diệu đã chứng minh mệnh đề sau và để tiện theo dõi chúng ta sẽ trình bày ngắn gọn chứng minh của mệnh đề.

Mệnh đề 3.2.1 (xem tài liệu [59]). *Cho $\{D_j\}$ là một dãy các miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ hội tụ tới mô hình M_P có kiểu hữu hạn. Giả sử ω là một miền trong $\mathbb{C}^k$ và $\sigma_j : \omega \to D_j$ là một dãy các ánh xạ chỉnh hình sao cho $\{\sigma_j(a)\} \Subset M_P$ với $a \in \omega$. Khi đó, dãy $\{\sigma_j\}$ chứa một dãy con hội tụ đều đến một ánh xạ chỉnh hình $\sigma : \omega \to M_P$.*

Để chứng minh Mệnh đề 3.2.1, ta cần sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.1. *Tồn tại các lân cận nhỏ U, U' của gốc tọa độ và số $\tau \in (0,1)$ sao cho, với j đủ lớn và với mỗi đĩa giải tích $f\colon \Delta \to D_j$, ta có*

$$f(0) \in U' \;\Rightarrow\; f(\Delta_\tau) \subset U,$$

trong đó $\Delta_\tau = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < \tau\}$.

Chứng minh. Chúng ta lưu ý rằng tồn tại hàm peak đa điều hòa dưới của mô hình M_P tại điểm $(0, 0')$ (xem tài liệu [75]). Do đó, ta có thể tìm được $0 < r < r' < R' < R$, một hàm peak đa điều hòa dưới φ trên mô hình M_P liên tục trên $\overline{M_P}$ sao cho $\varphi > 0$ trên $M_P \cap \{|z| < r\}$ và $\varphi < 0$ trên $M_P \cap \{r' < |z| < R'\}$. Ta cố định $\epsilon > 0$ đủ nhỏ. Vì dãy các miền $\{D_j\}$ hội tụ đến mô hình M_P khi $j \to \infty$ nên ta có thể tìm được một số $j_0 := j_0(\epsilon) \geq 1$ sao cho với $j \geq j_0$ ta có

$$D_j \subset \Omega_r := M_P^\epsilon \cup (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \overline{\{|z| < r\}}),$$

trong đó $M_P^\epsilon := \{(z, w) : \mathrm{Re}(w) + P(z) < \epsilon\}$. Áp dụng [8, Lemme de localisation] cho miền Ω_r và hàm peak $\psi(z) := \varphi(z_0 - \epsilon, z')$, ta suy ra tồn tại các lân cận $\widetilde{U}, \widetilde{U}'$ của $(-\epsilon, 0')$ và hằng số $\tau \in (0, 1)$ sao cho, với mỗi đĩa giải tích $f \colon \Delta \to \Omega_r$, ta có

$$f(0) \in \widetilde{U}' \Rightarrow f(\Delta_\tau) \subset \widetilde{U}.$$

Do đó, nếu chọn $\epsilon > 0$ đủ nhỏ và với $U := \widetilde{U} \cap M_P$, $U' := \widetilde{U}' \cap M_P$ thì ta có điều cần chứng minh. □

Chứng minh Mệnh đề 3.2.1. Đầu tiên, chúng ta định nghĩa phép co giãn sau

$$\Delta^\epsilon(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{z_0}{\epsilon}, \frac{z_1}{\epsilon^{1/m_1}}, \ldots, \frac{z_n}{\epsilon^{1/m_n}}\right),\ \epsilon > 0.$$

Chú ý rằng Bổ đề 3.2.1 vẫn đúng nếu Δ được thay bằng hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^k$. Tập $A := \overline{\{\sigma_j(a) \colon j \in \mathbb{N}^*\}} \Subset M_P$. Vì dãy các miền D_j hội tụ đến mô hình M_P khi $j \to \infty$ nên tồn tại số nguyên $j_0 = j_0(A)$ sao cho $A \Subset D_j$ với mỗi $j \geq j_0$. Chọn số thực $\lambda_0 > 0$ đủ lớn sao cho $\Delta^{\lambda_0}(A) \subset U'$. Vì M_P bất biến qua Δ^ϵ với mỗi $\epsilon > 0$ nên ta thấy $\{\Delta^{\lambda_0}(D_j)\}$ hội tụ đến $\Delta^{\lambda_0}(M_P) = M_P$. Do đó, ta suy ra $\Delta^{\lambda_0} \circ \sigma_j(B(a, \tau_0)) \subset U \cap M_P$ với mọi $j \geq j_0$, trong đó $B(a, \tau_0) := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \colon |z - a| < \tau_0\}$, và vì vậy $\sigma_j(B(a, \tau_0)) \subset \left(\Delta^{\lambda_0}\right)^{-1}(U \cap M_P) \Subset M_P$. Với mọi tập con compact K của miền ω, bằng cách sử dụng một phủ mở hữu hạn các hình cầu có bán kính τ_0 và tiếp tục quá trình trên, ta suy ra tồn tại một số dương λ_K và một số nguyên j_K sao cho $\sigma_j(K) \subset \left(\Delta^{\lambda_K}\right)^{-1}(U \cap M_P) \Subset M_P$ với mọi $j \geq j_K$. Do đó, nếu ta kí hiệu

$$L_K := \overline{\left(\Delta^{\lambda_K}\right)^{-1}(U \cap M_P) \cup_{j=1}^{j_K - 1} \sigma_j(K)} \Subset M_P,$$

thì $\sigma_j(K) \subset L_K$ với mọi $j \geq 1$. Ngoài ra, theo Định lí Montel và quá trình chéo hóa, dãy các ánh xạ $\{\sigma_j\}$ chuẩn tắc và giới hạn là các ánh xạ chỉnh hình từ miền ω vào mô hình M_P. Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

Bây giờ, giả sử $\{D_j\}$ là một dãy các miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ hội tụ tới miền $D_\infty \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Ta xét bài toán ổn định sau

$$\lim_{j \to \infty} F_{D_j}(z, X) = F_{D_\infty}(z, X),\ \forall\, (z, X) \in D \times \mathbb{C}^{n+1}.$$

Một số kết quả về tính ổn định của metric Kobayashi đã được thiết lập trong các tài liệu [36, 76]. Trong tài liệu [36], tính ổn định của metric Kobayashi chỉ đúng với với các miền bị chặn. Sau đó, J. Yu trong tài liệu [76] đã tổng quát hóa kết quả của họ cho các miền không bị chặn D_j được chứa trong một miền taut cố định. Ta chú ý rằng điều kiện tính taut không phải lúc nào cũng được thỏa mãn. Tuy nhiên, nhờ Mệnh đề 3.2.1 ta thu được định lí sau mà không cần điều kiện đó.

Định lí 3.2.1. *Giả sử $\{D_j\}$ là một dãy các miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ hội tụ đến mô hình M_P có kiểu hữu hạn. Khi đó, ta có*

$$\lim_{j\to\infty} F^k_{D_j}(z,X) = F^k_{M_P}(z,X),\ \forall\ (z,X) \in D \times \mathbb{C}^{n+1},\ k \geq 1.$$

Hơn nữa, sự hội tụ là đều trên các tập con compact của $D \times \mathbb{C}^{n+1}$.

Chứng minh. Chúng ta sẽ theo chứng minh của Định lí 2.1 trong tài liệu [76] với những thay đổi nhỏ. Để làm như vậy, ta cố định các tập con compact $K \Subset M_P$ và $L \Subset \mathbb{C}^{n+1}$. Khi đó, ta chỉ cần chứng minh rằng $F^k_{D_j}(z,X)$ là hội tụ đều tới $F^k_{M_P}(z,X)$ trên $K \times L$. Thật vậy, giả sử ngược lại. Khi đó, tồn tại số $\epsilon_0 > 0$, một dãy các điểm $\{z_{j_\ell}\} \subset K$ và một dãy $X_{j_\ell} \subset L$ sao cho

$$|F^k_{D_{j_\ell}}(z_{j_\ell}, X_{j_\ell}) - F^k_{M_P}(z_{j_\ell}, X_{j_\ell})| > \epsilon_0,\ \forall\ \ell \geq 1.$$

Do tính thuần nhất của metric Kobayashi $F^k(z,X)$ theo X nên ta có thể giả sử rằng $\|X_{j_\ell}\| = 1$ với mọi $\ell \geq 1$. Hơn nữa, chuyển qua các dãy con, ta có thể giả sử rằng $z_{j_\ell} \to z_0 \in K$ và $X_{j_\ell} \to X_0 \in L$ khi $\ell \to \infty$. Vì M_P là miền taut nên theo tài liệu [77] ta suy ra metric $F^k_{M_P}(z,X)$ là liên tục trên $D \times \mathbb{C}^{n+1}$. Do đó, ta được

$$F^k_{M_P}(z_{j_\ell}, X_{j_\ell}) \to F^k_{M_P}(z_0, X_0)$$

và vì vậy ta có

$$|F^k_{D_{j_\ell}}(z_{j_\ell}, X_{j_\ell}) - F^k_{M_P}(z_0, X_0)| > \epsilon_0/2 \tag{3.3}$$

với ℓ đủ lớn.

Theo định nghĩa, với $\delta \in (0,1)$ bất kỳ tồn tại một dãy các đĩa giải tích $\varphi_{j_\ell} \in \mathrm{Hol}(\Delta, D_{j_\ell})$ sao cho $\varphi_{j_\ell}(0) = z_0, \nu(\varphi_{j_\ell}) = k, \varphi^{(k)}_{j_\ell}(0) = k!\lambda_{j_\ell} X_{j_\ell}$, trong đó $\lambda_{j_\ell} > 0$, và

$$F^k_{D_{j_\ell}}(z_{j_\ell}, X_{j_\ell}) \geq \frac{1}{\lambda_{j_\ell}} - \delta.$$

Từ Mệnh đề 3.2.1 ta suy ra dãy $\{\varphi_{j_\ell}\}$ chứa một dãy con hội tụ đến đĩa giải tích $\psi \in \mathrm{Hol}(\Delta, M_P)$ sao cho $\psi(0) = z_0, \nu(\psi) = k, \psi^{(k)}(0) = k!\lambda X_0$, với $\lambda > 0$ nào đó. Từ đó, ta có

$$F^k_{M_P}(z_0, X_0) \leq \frac{k!}{|\psi^{(k)}(0)|}.$$

Do đó, ta có

$$\liminf_{\ell\to\infty} F^k_{D_{j_\ell}}(z_{j_\ell}, X_{j_\ell}) \geq F^k_{M_P}(z_0, X_0) - \delta. \tag{3.4}$$

Mặt khác, tương tự như trong tài liệu [76], do tính taut của mô hình M_P nên tồn tại một đĩa giải tích $\varphi \in \mathrm{Hol}(\Delta, M_P)$ sao cho $\varphi(0) = z_0, \nu(\varphi) = k, \varphi^{(k)}(0) = k!\lambda X_0$, trong đó $\lambda = 1/F^k_{M_P}(z_0, X_0)$.

Bây giờ, với $\delta \in (0,1)$, ta định nghĩa đĩa giải tích $\psi^\delta_{j_\ell} : \Delta \to \mathbb{C}^{n+1}$ bằng cách đặt

$$\psi^\delta_{j_\ell}(\zeta) := \varphi((1-\delta)\zeta) + \lambda(1-\delta)^k\zeta^k(X_{j_\ell} - X_0) + (z_{j_\ell} - z_0) \text{ với mọi } \zeta \in \Delta.$$

Vì $\varphi((1-\delta)\overline{\Delta})$ là một tập con compact của M_P và $X_{j_\ell} \to X_0$, $z_{j_\ell} \to z_0$ khi $\ell \to \infty$ nên ta suy ra $\psi^\delta_{j_\ell}(\Delta) \subset D_{j_\ell}$ với mọi ℓ đủ lớn, nghĩa là, $\psi^\delta_{j_\ell} \in \mathrm{Hol}(\Delta, D_{j_\ell})$. Ngoài ra, do cách xây dựng, $\psi^\delta_{j_\ell}(0) = z_{j_\ell}, \nu(\psi^\delta_{j_\ell}) = k$ và $\left(\psi^\delta_{j_\ell}\right)^{(k)}(0) = k!(1-\delta)^k\lambda X_{j_\ell}$. Do đó, theo định nghĩa ta có

$$F^k_{D_{j_\ell}}(z_{j_\ell}, X_{j_\ell}) \leq \frac{1}{(1-\delta)^k\lambda} = \frac{1}{(1-\delta)^k} F^k_{M_P}(z_0, X_0)$$

với mọi ℓ đủ lớn. Do đó, cho $\delta \to 0^+$, ta có

$$\limsup_{\ell\to\infty} F^k_{D_{j_\ell}}(z_{j_\ell}, X_{j_\ell}) \leq F^k_{M_P}(z_0, X_0). \tag{3.5}$$

Từ (3.4), (3.5), và (3.3), ta thấy sự mâu thuẫn. Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

3.2.2 Giới hạn biên có trọng của các metric Kobayashi tổng quát

Trước hết, chúng tôi nhắc lại định nghĩa và mệnh đề sau.

Định nghĩa 3.2.1 (xem các tài liệu [19, 76]). *Cho $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ là một n-bộ cố định của các số dương và $\mu > 0$. Ta kí hiệu $\mathcal{O}(\mu, \Lambda)$ là tập các hàm trơn f xác định ở gần điểm gốc tọa độ trong $\mathbb{C}^n$ sao cho*

$$D^\alpha \overline{D}^\beta f(0) = 0 \text{ khi } \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)\lambda_j \leq \mu.$$

Nếu $n = 1$ và $\Lambda = (1)$ thì ta sử dụng $\mathcal{O}(\mu)$ để kí hiệu các hàm số triệt tiêu với cấp thấp nhất bằng μ tại điểm gốc tọa độ.

Mệnh đề 3.2.2 (Xem tài liệu [76]). *(i) Nếu $f \in \mathcal{O}(\mu, \Lambda)$ thì $\frac{\partial f}{\partial z_j}$ và $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$ thuộc $\mathcal{O}(\mu - \lambda_j, \Lambda)$ với $j = 1, \ldots, n$.*

(ii) Giả sử f_i, $1 \leq i \leq N$, là các hàm số mà $f_i \in \mathcal{O}(\mu_i, \Lambda)$. Khi đó,

$$\prod_{i=1}^N f_i \in \mathcal{O}(\mu, \Lambda), \text{ trong đó } \mu = \sum_{i=1}^N \mu_i.$$

(iii) Nếu $f \in \mathcal{O}(\mu, \Lambda)$ thì tồn tại các hằng số $C, \delta > 0$ sao cho $|f(z)| \leq C(\sigma_\Lambda(z))^{\mu+\delta}$ với mọi z trong một lân cận nhỏ của 0.

Bây giờ, giả sử Ω và ξ_0 được cho như trong Định lí 3.2.3. Lưu ý rằng đa kiểu của ξ_0 là $(1, m_1, \ldots, m_n)$ với $m_n < +\infty$. Khi đó, theo Bổ đề 4.11 trong tài liệu [76], tồn tại các tọa độ chỉnh hình địa phương (z_0, z') trong đó $p = 0$ và Ω trong một lân cận nhỏ U của điểm $\xi_0 = 0$ có thể mô tả như sau

$$\Omega \cap U = \{(z_0, z') \in U \colon \mathrm{Re}(z_0) + P(z') + R_1(z) + R_2(\mathrm{Im}\ z_0) + (\mathrm{Im}\ z_0)R(z) < 0\},$$

trong đó P là đa thức nhận giá trị thực Λ-thuần nhất, đa điều hòa dưới không chứa các hạng tử điều hòa, $R_1 \in \mathcal{O}(1, \Lambda), R \in \mathcal{O}(1/2, \Lambda)$, và $R_2 \in \mathcal{O}(2)$.

Ta nhắc lại rằng với điểm $\eta = (\eta_0, \eta') \in \Omega \cap U$ bất kỳ, $\epsilon(\eta)$ là một số thực sao cho $\tilde{\eta} := (\eta_0 + \epsilon(\eta), \eta')$ thuộc siêu mặt $\{\rho = 0\}$. Cho $\{\eta_j\} = \{(\eta_{j0}, \eta'_j)\} \subset \Omega \cap U \cap \Gamma$ là một dãy các điểm bất kì hội tụ tới điểm 0. Ta viết $\eta_j = (\eta_{j0}, \eta_{j1}, \ldots, \eta_{jn}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Khi đó, theo định nghĩa, ta có $|\eta_{jk}|^{m_j} \lesssim \epsilon(\eta_j)$ với mọi $1 \leq k \leq n$. Do đó, sau khi lấy một dãy con, ta có thể giả sử rằng

$$\lim_{j\to\infty} \pi_{1/\epsilon(\eta_j)}(\eta'_j) = \lim_{j\to\infty} \left(\frac{\eta_{j1}}{\epsilon(\eta_j)^{1/m_1}}, \ldots, \frac{\eta_{jn}}{\epsilon(\eta_j)^{1/m_n}}\right) = \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Định lí 3.2.2. *Cho Ω là miền giả lồi trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ trong $\mathbb{C}^n$ và điểm $0 \in \partial\Omega$ sao cho Ω là miền h-thác triển tại điểm 0. Giả sử đa kiểu của điểm 0 là $(1, m_1, \ldots, m_n)$ mà $m_n < +\infty$ và cho $\Lambda = (1/m_1, \ldots, 1/m_n)$. Giả sử hàm xác định biên địa phương ρ của miền Ω ở gần điểm 0 có dạng*

$$\rho(z_0, z') = \mathrm{Re}(z_0) + P(z') + R_1(z') + R_2(\mathrm{Im}\ z_0) + (\mathrm{Im}\ z_0)R(z),$$

trong đó P là đa thức nhận giá trị thực, đa điều hòa dưới, Λ-thuần nhất không chứa các đơn thức đa điều hòa, $R_1 \in \mathcal{O}(1, \Lambda), R \in \mathcal{O}(1/2, \Lambda)$ và $R_2 \in \mathcal{O}(2)$. Giả sử $\{\eta_j\} = \{(\eta_{j0}, \eta'_j)\} \subset \Omega \cap U \cap \Gamma$ là một dãy các điểm hội tụ đến điểm 0 sao cho

$$\lim_{j\to\infty} \pi_{1/\epsilon(\eta_j)}(\alpha_j) = \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma\ni\eta_j\to 0} F^k_{\Omega\cap U}\left(\eta_j, (\pi_{\epsilon(\eta_j)})_* X\right) &= F^k_{M_{P,\alpha}}((0', -1), X) \\ &= F^k_{M_P}\left((-1 - P(\alpha), \alpha), X\right), \ \forall\ X \in \mathbb{C}^{n+1}.\end{aligned}$$

Chứng minh. Giả sử $\{\eta_j = (\eta_{j0}, \eta'_j)\}$ là một dãy các điểm hội tụ Λ-không tiếp xúc tới điểm gốc tọa độ trong $U \cap \{\rho < 0\} =: U^-$. Khi đó, ta xét một dãy các điểm liên kết

$\tilde{\eta}_j = (\eta_{j0} + \epsilon_j, \eta'_j) \in \partial\Omega$, trong đó $\epsilon_j := \epsilon(\eta_j) > 0$. Ta định nghĩa dãy các phép co giãn Δ^{ϵ_j} và các phép tịnh tiến $L_{\tilde{\eta}_j}$ tương ứng bởi

$$\Delta^{\epsilon_j}(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{z_0}{\epsilon_j}, \frac{z_1}{\epsilon_j^{1/m_1}}, \ldots, \frac{z_n}{\epsilon_j^{1/m_n}}\right)$$

và

$$L_{\tilde{\eta}_j}(z) = (z_0, z') - \tilde{\eta}_j = (z_0 - \eta_{j0} - \epsilon_j, z' - \eta'_j).$$

Sử dụng phép đổi biến $(\tilde{z}_0, \tilde{z}') := \Delta^{\epsilon_j} \circ L_{\eta_j}(z_0, z')$ hay

$$\begin{cases} z_0 - \eta_{j0} = \epsilon_j \tilde{z}_0 \\ z_k - \eta_{jk} = \epsilon_j^{1/m_k} \tilde{z}_k, \; k = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

ta có $\Delta^{\epsilon_j} \circ L_{\tilde{\eta}_j}(\eta_{j0}, \eta'_j) = (-1, 0')$ với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$. Ngoài ra, sử dụng định lí Taylor, siêu mặt $\Delta^{\epsilon_j} \circ L_{\tilde{\eta}_j}(\{\rho = 0\})$ được xác định bởi một phương trình có dạng

$$\begin{aligned}
0 &= \epsilon_j^{-1} \rho \left(L_{\tilde{\eta}_j}^{-1} \circ (\Delta^{\epsilon_j})^{-1} (\tilde{z}_0, \tilde{z}') \right) \\
&= \mathrm{Re}(\tilde{z}_0) + R'_2(b_j)\mathrm{Im}(\tilde{z}_0) + \mathrm{Im}(\tilde{z}_0) R(\alpha_j) + \epsilon_j^{-1} o(\epsilon_j) + P(\tilde{z}') \\
&+ 2\mathrm{Re} \sum_{\substack{|p|>0 \\ wt(p)\leq 1}} \frac{D^p P(\alpha_j)}{p!} \epsilon_j^{wt(p)-1} (\tilde{z}')^p + \sum_{\substack{|p|,|q|>0 \\ wt(p+q)<1}} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha_j)}{p!q!} \epsilon_j^{wt(p+q)-1} (\tilde{z}')^p (\overline{\tilde{z}'})^q \\
&+ 2\mathrm{Re} \sum_{\substack{|p|>0 \\ wt(p)\leq 1}} \frac{D^p R_1(\alpha_j)}{p!} \epsilon_j^{wt(p)-1} (\tilde{z}')^p + \sum_{\substack{|p|,|q|>0 \\ wt(p+q)\leq 1}} \frac{D^p \overline{D}^q R_1(\alpha)}{p!q!} \epsilon_j^{wt(p+q)-1} (\tilde{z}')^p (\overline{\tilde{z}'})^q \\
&+ \epsilon_j^{-1} b_j \Big(2\mathrm{Re} \sum_{\substack{|p|>0 \\ wt(p)\leq 1}} \frac{D^p R(\alpha_j)}{p!} \epsilon_j^{wt(p)} (\tilde{z}')^p + \sum_{\substack{|p|,|q|>0 \\ wt(p+q)\leq 1}} \frac{D^p \overline{D}^q R(\alpha_j)}{p!q!} \epsilon_j^{wt(p+q)} (\tilde{z}')^p (\overline{\tilde{z}'})^q \Big).
\end{aligned}$$

Vì dãy các điểm $\{\eta_j\} \subset \Gamma$ hội tụ đến điểm gốc tọa độ nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng

$$\lim_{j\to\infty} \pi_{1/\epsilon_j}(\eta'_j) = \alpha \in \mathbb{C}^n,$$

trong đó $\pi_t(z') = (t^{1/m_1} z_1, \ldots, t^{1/m_n} z_n)$ với $t \geq 0$. Ở đây, tương tự như chứng minh Định lí 1 trong tài liệu [59] ta có

(i) $\lim_{j\to\infty} \frac{D^p P(\alpha_j)}{p!} \epsilon_j^{wt(p)-1} = \lim_{j\to\infty} \frac{D^p P(\pi_{1/\epsilon_j}(\alpha_j))}{p!} = \frac{D^p P(\alpha)}{p!}$;

(i) $\lim_{j\to\infty} \frac{D^p R_1(\alpha_j)}{p!} \epsilon_j^{wt(p)-1} = \lim_{j\to\infty} \frac{D^p R(\alpha_j)}{p!} \epsilon_j^{wt(p)} = 0$ khi $wt(p) \leq 1$;

(ii) $\lim_{j\to\infty} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha_j)}{p!q!} \epsilon_j^{wt(p+q)-1} = \lim_{j\to\infty} \frac{D^p \overline{D}^q P(\pi_{1/\epsilon_j}(\alpha_j))}{p!q!} = \lim_{j\to\infty} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha)}{p!q!}$ khi $wt(p+q) < 1$;

(iii) $\lim_{j\to\infty} \frac{D^p \overline{D}^q R_1(\alpha_j)}{p!q!} \epsilon_j^{wt(p+q)-1} = \lim_{j\to\infty} \frac{D^p \overline{D}^q R(\alpha_j)}{p!q!} \epsilon_j^{wt(p+q)} = 0$ khi $wt(p) + wt(q) \leq 1$;

(iv) $\lim_{j\to\infty} R_2'(b_j) = \lim_{j\to\infty} R(\alpha_j) = 0$.

Do đó, sau khi lấy một dãy con, ta có thể giả sử rằng dãy các miền $\Omega_j := \Delta^{\epsilon_j} \circ L_{\tilde{\eta}_j}(U^-)$ hội tụ về mô hình

$$M_{P,\alpha} := \{(\tilde{z}_0, \tilde{z}') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \colon \mathrm{Re}(\tilde{z}_0) + P(\tilde{z}' + \alpha) - P(\alpha) < 0\},$$

là mô hình song chỉnh hình với mô hình M_P. Không mất tính tổng quát, trong phần tiếp theo ta luôn giả sử rằng dãy các miền $\{\Omega_j\}$ hội tụ tới mô hình M_P.

Vì dãy các miền $\{\Omega_j\}$ hội tụ tới mô hình M_P khi $j \to \infty$ nên từ Định lí 3.2.1 ta suy ra

$$\lim_{j\to\infty} F^k_{\Omega_j}((\tilde{z}_0, \tilde{z}'), X) = F^k_{M_{P,\alpha}}((\tilde{z}_0, \tilde{z}'), X),\ \forall\ ((\tilde{z}_0, \tilde{z}'), X) \in M_P \times \mathbb{C}^{n+1}.$$

Chúng ta lưu ý rằng sự hội tụ này là đều trên mọi tập con compact của $M_P \times \mathbb{C}^{n+1}$. Hơn nữa, vì $\Omega_j = T_j(U \cap \Omega)$, trong đó $T_j := \Delta^{\epsilon_j} \circ L_{\tilde{\eta}_j}$, ta suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} F^k_{\Omega_j}(T_j(\eta_j), X) &= \lim_{j\to\infty} F^k_{\Omega\cap U}(\eta_j, (T_j^{-1})_* X) = F^k_{M_{P,\alpha}}((-1, 0'), X)\\ &= F^k_{M_P}((-1 - P(\alpha), \alpha), X),\ \forall\ X \in \mathbb{C}^{n+1}.\end{aligned}$$

Từ đó, do $(T_j^{-1})_= (\pi_{\epsilon(\eta)})_*$ nên ta suy ra điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.2.1. Trong tài liệu [76], do sự hội tụ không tiếp xúc của dãy $\{\eta_j\}$ nên tác giả đã chứng minh được rằng tất cả các miền Ω_j đều được chứa trong một miền taut cố định. Do đó, ta thu được các giới hạn không tiếp xúc của metric Kobayashi (xem Định lí 5.2 trong tài liệu [76]).

Tiếp theo, chúng tôi trình bày và chứng minh Định lí 3.2.3 sau đây; đó là kết quả chính thứ ba của luận án trong chương này.

Định lí 3.2.3. *Cho Ω là một miền giả lồi có biên trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ sao cho Ω là miền h-thác triển được tại điểm ξ_0. Giả sử đa kiểu của điểm ξ_0 là $(1, m_1, \ldots, m_n)$ mà $m_n < +\infty$ và cho $\Lambda = (1/m_1, \ldots, 1/m_n)$. Giả sử hàm xác định biên địa phương ρ của miền Ω gần điểm 0 có dạng*

$$\rho(z) = \mathrm{Re}(z_0) + P(z') + R(z),$$

trong đó P là đa thức đa điều hòa dưới, Λ-thuần nhất, không chứa hạng tử đa điều hòa, R là hàm trơn và thỏa mãn

$$|R(z)| \le C\left(|z_0| + \sum_{j=1}^n |z_j|^{m_j}\right)^\gamma,$$

với hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$. Giả sử $\{\eta_j\} = \{(\eta_{j0}, \eta_j')\} \subset \Omega \cap U \cap \Gamma$ là một dãy các điểm hội tụ đến điểm 0 sao cho

$$\lim_{j\to\infty} \pi_{1/\epsilon(\eta_j)}(\eta_j') = \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma\ni\eta_j\to 0} F^k_{\Omega\cap U}\left(\eta_j, (\pi_{\epsilon(\eta_j)})_* X\right) &= F^k_{M_{P,\alpha}}((0', -1), X)\\ &= F^k_{M_P}\big((-1 - P(\alpha), \alpha), X\big),\ \forall\ X \in \mathbb{C}^{n+1}.\end{aligned}$$

Chứng minh. Giả sử ρ là một hàm xác định biên địa phương của miền Ω trên một lân cận U của điểm ξ_0 như trong giả thuyết, tức là, $\xi_0 = 0$ và

$$\rho(\tilde z) = \mathrm{Re}(\tilde z_0) + P(\tilde z') + R(\tilde z),$$

trong đó P là đa thức đa điều hòa dưới $(1/m_1, \ldots, 1/m_n)$-thuần nhất không chứa các hạng tử đa điều hòa, R là hàm trơn và thỏa mãn

$$|R(\tilde z)| \le C\left(|\tilde z_0| + \sum_{j=1}^{n} |\tilde z_j|^{m_j}\right)^{\gamma},$$

với hằng số $\gamma > 1$ nào đó và $C > 0$. Ngoài ra, theo Bổ đề 4.11 trong tài liệu [76], ta có thể giả sử rằng, thu gọn U nếu cần, tồn tại một ánh xạ song chỉnh hình $(z_0, z') = \Phi(\tilde z_0, \tilde z')$, được xác định trên U bởi

$$\begin{cases} z' = \tilde z';\\ z_0 = \tilde z_0 + b_1(\tilde z') z_0 + b_2(\tilde z') w^2 + b_3(\tilde z'),\end{cases} \tag{3.6}$$

trong đó b_1, b_2, b_3 là các hàm trơn của $\tilde z'$ thỏa mãn $b_j(\tilde z') = O(|z|^2)$ $j = 1, 2, 3$, sao cho

$$\rho\left(\Phi^{-1}(z_0, z')\right) = \mathrm{Re}(z_0) + P(z') + R_1(z') + R_2(\mathrm{Im}\ z_0) + (\mathrm{Im}\ z_0) R(z'),$$

trong đó P là đa thức nhận giá trị thực, đa điều hòa dưới, Λ-thuần nhất không chứa các đơn thức đa điều hòa, $R_1 \in \mathcal{O}(1, \Lambda), R \in \mathcal{O}(1/2, \Lambda)$ và $R_2 \in \mathcal{O}(2)$.

Bây giờ, ta kí hiệu $D := \Phi(U \cap \Omega)$ và áp dụng Định lí 3.2.2 ta được

$$\begin{aligned}\lim_{D\cap\Gamma\ni\eta_j\to 0} F^k_D\left(\eta_j, (\pi_{\epsilon(\eta_j)})_* X\right) &= F^k_{M_{P,\alpha}}((-1, 0'), X)\\ &= F^k_{M_P}\left((-1 - P(\alpha), \alpha), X\right),\ \forall\ X \in \mathbb{C}^{n+1}.\end{aligned}$$

Giả sử $\tilde X_j := \left(\pi_{\epsilon(\eta_j)}\right)_* X$ và $Y_j = \left(\pi^{-1}_{\epsilon(\eta_j)}\right)_* \circ \Phi_{*,\eta_j} \tilde X_j$. Từ tính toán cho thấy $\lim\limits_{\Omega\ni z\to 0} \Phi_{*,\eta_j} = \mathrm{Id}$ nên ta có

$$\lim_{j\to\infty} Y_j = \lim_{j\to\infty} (\pi^{-1}_{\epsilon(\eta_j)})_* \circ \Phi_{*,\eta_j}\left(\pi_{\epsilon(\eta_j)}\right)_* X = X.$$

Do đó, theo tính bất biến của metric ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega\cap\Gamma\ni\eta_j\to 0} F_D^k\left(\eta_j, \left(\pi_{\epsilon(\eta_j)}\right)_* X\right) &= \lim_{\Omega\cap\Gamma\ni\eta_j\to 0} F_D^k\left(\eta_j, \tilde{X}_j\right)\\ &= \lim_{j\to\infty} F_{\Omega_j}^k\left((-1,0'), Y_j\right) = F_{M_P}^k\left((-1,0'), X\right).\end{aligned}$$

Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.2.2. Định lí 3.1.3 chỉ ra rằng giới hạn biên có trọng của metric Kobayashi tổng quát trên miền h-thác triển được trùng với giá trị của metric trên mô hình liên kết tại điểm gốc. Trong kết quả của J. Yu (Trans. Amer. Math. Soc, 1995), các giới hạn này được xét trong toàn bộ một nón không tiếp xúc với biên. Định lí 3.2.3 mở rộng kết luận đó khi chứng minh rằng kết quả vẫn còn đúng ngay cả khi các giới hạn chỉ được lấy theo một nón Λ-không tiếp xúc, mà không cần đến toàn bộ nón. Đây là một cải tiến đáng kể, đơn giản hóa điều kiện hình học của J. Yu.

Hệ quả 3.2.1. *Giả sử* Ω, ξ_0, Γ^s *như trong Định lí 3.2.3. Nếu* $s > 1$ *thì ta có*

$$\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma^s\ni\eta\to 0} F_{\Omega\cap U}(\eta, X)\,|\rho(\eta)| = F_{M_P}((-1,0'), X_N(0)),\ \forall\, X \in \mathbb{C}^{n+1},$$

trong đó $X_N(0)$ *là thành phần pháp tuyến phức của* X *tại điểm* $\xi_0 = 0$.

Nhận xét 3.2.3. Để chứng minh sự tồn tại của các giới hạn Λ-không tiếp xúc của các metric Kobayashi tổng quát tại điểm biên h-thác triển được, ta sẽ phóng đại miền Ω bằng cách sử dụng một biến số thay đổi tỷ lệ. Chính xác hơn, ta sẽ xây dựng một dãy các miền $\{\Omega_j\}$ là ảnh của $\Omega\cap U$ qua một dãy các phép co giãn và phép tịnh tiến sao cho dãy các miền Ω_j hội tụ đến mô hình M_P khi $j\to\infty$. Do đó, từ kết quả về tính ổn định của các metric Kobayashi tổng quát (xem Định lí 3.2.1) ta suy ra điều cần chứng minh.

Chứng minh Hệ quả 3.2.1. Với $s > 1$, ta có

$$\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma^s\ni\eta\to 0} \pi_{1/\epsilon(\eta)}(\alpha) = 0.$$

Vì vậy, theo chứng minh của Định lí 3.2.3, ta suy ra

$$\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma^s\ni\eta\to 0} F_{\Omega\cap U}^k\left(\eta, (\pi_{\epsilon(\eta)})_* Y\right) = F_{M_P}^k\left((-1,0'), Y\right),\ \forall\, Y \in \mathbb{C}^{n+1}.$$

Với $X = (X_0, X')$, đặt $Y := \epsilon(\eta)X = |\rho(\eta)|$ và lưu ý rằng

$$\lim_{\eta\to 0}(\pi_{\epsilon(\eta)})_* Y = \lim_{\eta\to 0}(\pi_{\epsilon(\eta)})_*\epsilon(\eta)X = X_0 = X_N(\xi_0).$$

Do đó, ta có điều cần chứng minh. □

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

1) Sử dụng linh hoạt kĩ thuật scaling của S. Pinchuk để nghiên cứu tính đặc trưng mới của các miền giả lồi yếu có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ bởi dáng điệu biên của các quỹ đạo tự đẳng cấu, trong đó kết quả chính là các Định lí 2.1.1, Định lí 2.2.1, Mệnh đề 2.3.1 và đưa ra các ví dụ minh họa.

2) Đưa ra và chứng minh một định lí về một lớp mới các miền chính quy, thuần nhất, chỉnh hình (miền HHR), trong đó kết quả chính là Định lí 3.1.2.

3) Đưa ra và chứng minh một định lí về ước lượng dưới đều cho hàm squeezing ở gần điểm cực (P, r), trong đó kết quả chính là Định lí 3.1.3.

4) Sử dụng kĩ thuật scaling để chứng minh sự tồn tại giới hạn Λ-không tiếp xúc của các metric Kobayashi tổng quát tại điểm biên h-thác triển được, trong đó kết quả chính là Định lí 3.2.3.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

Luận án đã tập hợp được một số kết quả nghiên cứu mới "Về mô hình của một số miền có nhóm tự đẳng cấu không compact và hình thái biên của hàm squeezing", tuy nhiên vẫn còn nhiều vấn đề cần được mở rộng và tiếp tục nghiên cứu sâu hơn. Cụ thể, chúng tôi kiến nghị một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau.

1) Trong Định lí 3.1.3, sự hội tụ của dãy các điểm trong $\Gamma(r, c)$ đến điểm p là sự hội tụ Λ-không tiếp xúc. Với trường hợp khi $\{a_j\} \subset f^{-1}(D(r)) \subset \Omega$ không hội tụ Λ-không tiếp xúc tới $p = 0$, nghĩa là, với mọi $0 < r' < r$ và $c > 0$ tồn tại $j_{r',c} \in \mathbb{N}$ sao cho $a_j \notin \Gamma(r', c)$ với mọi $j \geq j_{r',c}$, chúng ta không biết được dáng điệu của $\{\sigma_\Omega(a_j)\}$. Do đó, câu hỏi tự nhiên được đặt ra là liệu $\liminf\limits_{f^{-1}(D(r)) \ni z \to p} \sigma_\Omega(z) > 0$ hay không và đó vẫn là bài toán mở. Vì vậy, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu để tìm cách mô tả dáng điệu biên của hàm squeezing khi dãy điểm $\Gamma(r, c)$ không hội tụ Λ-không tiếp xúc tới điểm p.

2) Cho đến nay, bài toán về ước lượng các metric mới chỉ dừng lại xem xét cho các miền giả lồi có kiểu hữu hạn. Đối với miền giả lồi có kiểu vô hạn thì bài toán ước lượng các metric này vẫn còn là bài toán mở và chỉ mới đạt được một số kết quả cho các miền đặc biệt. Trong những năm gần đây, N. V. Thu cũng quan tâm đến chủ đề này và đạt được một số kết quả ban đầu (xem các tài liệu [19] và [71]). Trong thời gian tới, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu chủ đề này cho các miền có kiểu vô hạn tổng quát hơn.

3) Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu để đưa ra đặc trưng cho cho các miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ khi quĩ đạo tự đẳng cấu $\varphi_j(a)$ không hội tụ Λ-tiếp xúc đều đến điểm biên ξ_0.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Ninh Van Thu, Nguyen Thi Kim Son and Chu Van Tiep, *Boundary behavior of the squeezing function near a global extreme point*, Complex Variables and Elliptic Equations, 2023, Vol. 68, Issue 3, pp. 351-360.

[2] Ninh Van Thu, Do Khanh Huyen and Nguyen Thi Kim Son, *Boundary behavior of general Kobayashi metrics in h-extendible domains*, VNU Journal of Science: Mathematics - Physics, 2024, Vol. 40, No. 3, pp. 106-115.

[3] Ninh Van Thu, Nguyen Thi Kim Son and Nguyen Quang Dieu, *Pinchuk scaling method on domains with non-compact automorphism groups*, International Journal of Mathematics, 2025, Vol.36, No. 01, 2450063.

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI CÁC HỘI NGHỊ

1. Báo cáo "Boundary behavior of the squeezing function near a global extreme point", Trường hè Giải tích và Hình học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, 11-14/06/2020.

2. Báo cáo "Pinchuk scaling method on domains with non-compact automorphism groups", Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ X, Đà Nẵng, 8-12/8/2023.

Tài liệu tham khảo

[1] T. Ahn, H. Gaussier, and K.-T. Kim (2016), *Positivity and completeness of invariant metrics*, J. Geom. Anal. Vol. 26 (2), pp. 1173–1185.

[2] E. Bedford and J.E. Fornæss (1978), *A construction of peak functions on weakly pseudoconvex domains*, Ann. of Math. Vol. 107 (3), pp. 555–568.

[3] E. Bedford and S. Pinchuk (1989), *Domains in $\mathbb{C}^2$ with non-compact groups of holomorphic automorphisms*, (Russian) Mat. Sb. (N.S.) 135 (177) (1988), no. 2, 147–157, 271; translation in Math. USSR-Sb. 63, no. 1, 141–151.

[4] E. Bedford and S. Pinchuk (1991), *Domains in $\mathbb{C}^{n+1}$ with non-compact automorphism group*, J. Geom. Anal. Vol. 1, pp. 165–191.

[5] E. Bedford and S. Pinchuk (1995), *Convex domains with noncompact groups of automorphisms*, Mat. Sb. 1994; Vol. 185(5), pp. 3-26; translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. Vol. 82(1), pp. 1-20.

[6] E. Bedford and S. Pinchuk (1998), *Domains in $\mathbb{C}^2$ with non-compact automorphism groups*, Indiana Univ. Math. J. Vol. 47, pp. 199–222.

[7] F. Berteloot (1994), *Characterization of models in $\mathbb{C}^2$ by their automorphism groups*, Internat. J. Math. Vol. 5, pp. 619–634.

[8] F. Berteloot (1995), *Attraction de disques analytiques et continuité Holdérienne d'applications holomorphes propres*, Topics in Compl. Anal., Banach Center Publ., pp. 91-98.

[9] F. Berteloot (2003), *Principle de Bloch et Estimations de la Metrique de Kobayashi des Domains de $\mathbb{C}^2$*, J. Geom. Anal. Math. Vol. 1, pp. 29–37.

[10] F. Berteloot (2006), *Méthodes de changement d'échelles en analyse complexe*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. Vol. 15 (6), pp. 427–483.

[11] G. Bharali (2023), *A new family of holomorphic homogeneous regular domains and some questions on the squeezing function*, Int. J. Math. Vol. 34 (06), 2350020.

[12] D. Catlin (1984), *Boundary invariants of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. Vol. 120 (3), pp. 529–586.

[13] D. Catlin (1989), *Estimates of invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two*, Math. Z. Vol. 200 (3), pp. 429–466.

[14] B. -Y. Chen (2002), *Boundary behavior of the Bergman metric*, Nagoya Math. J. Vol. 168, pp. 27-40.

[15] J. Chen (1989), *Estimates of the invariantmetrics on convexdomains*, PurdueUniversity Ph.D. Dissertation.

[16] S. Cho (1992), *A lower bound on the Kobayashi metric near a point of finite type in* $\mathbb{C}^n$, J. Geom. Anal. Vol. 2 (4), pp. 317–325.

[17] S. Cho (1994), *Boundary behavior of the Bergman kernal function on some pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 345 (2), pp. 803–817.

[18] B. Coupet and S. Pinchuk (2001), *Holomorphic equivalence problem for weighted homogeneous rigid domains in* $\mathbb{C}^{n+1}$, Complex analysis in modern mathematics (Russian), FAZIS, Moscow, pp. 57–70.

[19] T. P. Dau and V. T. Ninh (2020), *Lower bounds on the Bergman metric near points of infinite type*, Vietnam J. Math. Vol. 48 (1), pp. 1-10.

[20] J. P. D'Angelo (1982), *Real hypersurfaces, orders of contact, and applications*, Ann. Math. Vol. 115, pp. 615–637.

[21] F. Deng, A. Guan and L. Zhang (2012), *Some properties of squeezing functions on bounded domains*, Pac. J. Math. Vol. 257(2), pp. 319-341.

[22] F. Deng, A. Guan and L. Zhang (2016), *Properties of squeezing functions and global transformations of bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol (368)(4), pp. 2679-2696.

[23] F. Deng, Z. Wang, L. Zhang and X. Zhou (2020), *Holomorphic Invariants of bounded domains*, J. Geom. Anal. Vol. 30 (2), pp. 1204-1217.

[24] K. Diederich and J.E. Fornæss (1977), *Pseudoconvex domains: bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, Invent. Math. Vol. 39 (2), pp. 129–141.

[25] K. Diederich and J.E. Fornæss (1979), *Proper holomorphic maps onto pseudoconvex domains with real analytic boundary*, Ann. of Math. Vol. 110, pp. 575-592.

[26] K. Diederich, J.E. Fornæss and E.F. Wold (2014), *Exposing points on the boundary of a strictly pseudoconvex or a locally convexifiable domain of finite 1-type*, J. Geom. Anal. Vol. 24, pp. 2124-2134.

[27] K. Diederich and G. Herbort (1994), *Pseudoconvex domains of semiregular type*, in: Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry, in: Asp. Math. E. Vol. 26, Vieweg, Braunschweig, pp. 127–161.

[28] K. Diederich and T. Ohsawa (1995), *An estimate for the Bergman distance on pseudoconvex domains*, Ann. of Math. (2) Vol. 141 (1), pp. 181-190.

[29] D. T. Do and V. T. Ninh (2009), *Characterization of domains in $\mathbb{C}^n$ by their noncompact automorphism groups*, Nagoya Math. J. Vol. 196, pp. 135–160.

[30] A. M. Efimov (1995), *Extension of the Wong-Rosay theorem to the unbounded case*, Sb. Math. Vol. 186, pp. 967–976.

[31] C. Fefferman (1974), *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. Vol. 26, pp. 1–65.

[32] F. Forstneric and J. Rosay (1987), *Localizations of the Kobayashi and the boundary continuity of Proper holomorphic mappings*, Math. Ann. Vol. 279, pp. 239-252.

[33] S. Frankel (1989), *Complex geometry of convex domains that cover varieties*, Acta Math. Vol. 163, pp. 109–149.

[34] H. Gaussier (1997), *Characterization of convex domains with non-compact automorphism group*, Michigan Math. J. Vol. 44 (2), pp. 375–388.

[35] I. Graham (1975), *Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ with smooth boundary*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 207, pp. 219–240.

[36] R. E. Greene and S. G. Krantz (1984), *Stability of the Carathéodory and Kobayashi metrics and applications to biholomorphic mappings, in "Complex Analysis of Several Complex Variables"*, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 41, pp. 77–93, Trans. Amer. Math. Soc., Providence.

[37] R. E. Greene and S. G. Krantz (1987), *Biholomorphic self-maps of domains*, Lecture Notes in Math. Vol. 1276, pp. 136–207.

[38] R. E. Greene and S. G. Krantz (1993), *Techniques for studying automorphisms of weakly pseudoconvex domains*, Math. Notes. Vol 38, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, pp. 389–410.

[39] R. E. Greene, K-T. Kim, S. G. Krantz (2011), *The Geometry of complex domains*, Progress in Mathematics. Vol. 291.

[40] G. Herbort (1992), *Invariant metrics and peak functions on pseudoconvex domain of homogeneous finite diagonaltype*, Math. Z. Vol. 209, pp. 223-243.

[41] G. Herbort (2014), *On the Bergman metric on bounded pseudoconvex domains an approach without the Neumann operator*, Int. J. Math. Vol. 25 (3), 45002525.

[42] G. Herbort (2016), *On the Bergman distance on model domains in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Polon. Math, 116 (1), pp. 1–36 .

[43] A. V. Isaev and S. G. Krantz (1997), *Finitely smooth Reinhardt domains with non-compact automorphism group*, Illinois J. Math. Vol. 41 (3), pp. 412–420.

[44] A. V. Isaev and S. G. Krantz (1999), *Domains with non-compact automorphism group*, A survey. Adv. Math. Vol. 146, pp. 1–38.

[45] S. Joo (2017), *On the scaling methods by Pinchuk and Frankel*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 454 (1), pp. 181–194.

[46] K. T. Kim (1990), *Complete localization of domains with non-compact automorphism groups*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 319 (1), pp. 139–153.

[47] K. T. Kim and S. G. Krantz (2001), *Convex scaling and domains with non-compact automorphism group*, Illinois J. Math. Vol. 45, pp. 1273–1299.

[48] K. T. Kim and V. T. Ninh (2015), *On the tangential holomorphic vector fields vanishing at an infinite type point*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 367(2), pp. 867-885.

[49] K-T. Kim and L. Zhang (2016), *On the uniform squeezing property and the squeezing function*, Pac. J. Math. Vol. 282(2), pp. 341-358.

[50] S. Kobayashi (1970), *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, N. Y. Dekker.

[51] J. J. Kohn and L. Nirenberg (1973), *A pseudo-convex domain not admitting a holomorphic support function*, Math. Ann. Vol. 201, pp. 265–268.

[52] S. G. Krantz (1985), *Function theory of several complex variables*, second edition, AMS Chelsea publishing.

[53] S. G. Krantz (1992), *The boundary behavior of the Kobayashi metric*, Rocky MountainJ. Math. Vol. 22, pp. 227-233.

[54] S. G. Krantz (2021), *Automorphism group actions in complex analysis*, Expo. Math. Vol. 39 (1), pp. 78–114.

[55] K. Liu, X. Sun and S. T. Yau (2004), *Canonical metrics on the moduli space of Riemann surfaces*, I. J Differ Geom. Vol. 68(3), pp. 571-637.

[56] J. McNeal (1992), *Lower bounds on the Bergman metric near a point of finite type*, Ann. of Math. 136, 339-360.

[57] R. Narasimhan (1971), *Several Complex Variables, Chicago Lectures in Mathematics*, University of Chicago Press.

[58] V. T. Ninh (2009), *Characterization of linearly convex domains in $\mathbb{C}^n$ by their non-compact automorphism groups*, Vietnam J. Math. Vol. 37 (1), pp. 67–79.

[59] V. T. Ninh and Q. D. Nguyen (2020), *Some properties of h-extendible domains in* $\mathbb{C}^{n+1}$, J. Math. Anal. Appl. Vol. 485 (2), 123810, 14 pp.

[60] V. T. Ninh, T. L. H. Nguyen, Q. H. Tran, H. Kim (2019), *On the automorphism groups of finite multitype models in $\mathbb{C}^n$*, J. Geom. Anal. 29 (1), pp. 428–450.

[61] V. T. Ninh, T. L. H. Nguyen, Q. D. Nguyen (2024), *On the boundary behaviour of the squeezing function near weakly pseudoconvex boundary points*, Taiwanese J. Math. 28, no. 4, 831–845.

[62] L. Pan, A. Wang and L. Zhang (2016), *On the Kähler-Einstein metric of Bergman-Hartogs domains*, Nagoya Math. J. Vol. 221 (1), pp. 184–206.

[63] S. Pinchuk (1981), *Holomorphic inequivalence of some classes of domains in $\mathbb{C}^n$ (translated from Russian)*, Math. USSR-Sb. Vol. 39, pp. 61–86.

[64] S. Pinchuk (1991), *The scaling method and holomorphic mappings*, Proc. Symp. Pure Math. 52, Part 1, Trans. Amer. Math. Soc..

[65] J. P. Rosay (1979), *Sur une caracterisation de la boule parmi les domaines de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier Vol. 29 (4), pp. 91–97.

[66] S. Şahutoğlu (2012), *Strong Stein neighbourhood bases*, Complex Var. Elliptic Equ. Vol. 57(10), pp. 1073–1085.

[67] N. Sibony (1981), *A class of hyperbolic manifolds*, Ann. of Math. Stud. Vol. 100, pp. 357–372.

[68] N. T. K. Son, C. V. Tiep (2019), *A note on infinite type germs of a real hypersurface in* $\mathbb{C}^2$, VNU Journal of Science: Mathematics – Physics, Vol. 35(2), pp. 82–87

[69] V. K. Tran (2016), *Lower bounds on the Kobayashi metric near a point of infinite type*, J. Geom. Anal. Vol. 26 (1), pp. 616-629.

[70] V. K. Tran and G. Zampieri (2012), *Necessary geometric and analytic conditions for general estimates in the D-bar-Neumann problem*, Invent. Math., 188, 729-750.

[71] V. K. Tran and V. T. Ninh (2016), *Iterates of holomorphic self-maps on pseudoconvex domains of finite and infinite type in* $\mathbb{C}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 144, pp. 5197–5206.

[72] J. Winkelmann (2004), *Realizing connected Lie groups as automorphism groups of complex manifolds*. Comment. Math. Helv. Vol. 79 (2), pp. 285–299.

[73] B. Wong (1977), *Characterization of the ball in* $\mathbb{C}^n$ *by its automorphism group*, Invent. Math. Vol. 41, pp. 253–257.

[74] S. K. Yeung (2009), *Geometry of domains with the uniform squeezing property*, Adv Math. Vol. 221(2), pp. 547–569.

[75] J. Yu (1994), *Peak functions on weakly pseudoconvex domains*, Indiana Univ. Math. J. Vol. 43 (4), pp. 1271–1295.

[76] J. Yu (1995), *Weighted boundary limits of the generalized Kobayashi-Royden metrics on weakly pseudoconvex domains*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 347 (2), pp. 587–614.

[77] J. Yu (1995), *Singular Kobayashi metrics and finite type conditions*, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 123, pp. 121–130.

[78] A. Zimmer (2017), *Characterizing domains by the limit set of their automorphism group*, Adv. Math. Vol. 308, pp. 438–482.