ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

MỘT SỐ BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA ĐƯỢC CỦA CÁC HỆ CHUYỂN MẠCH RỜI RẠC SUY BIẾN

NCS: NINH THỊ THU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112.01

Hà Nội – 2025

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

MỘT SỐ BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA ĐƯỢC CỦA CÁC HỆ CHUYỂN MẠCH RỜI RẠC SUY BIẾN

NCS: NINH THỊ THU

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112.01

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. PGS. TS. Đỗ Đức Thuận

2. GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh

Hà Nội – 2025

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những kết quả trình bày trong luận án là mới, đã được công bố trên các tạp chí chuyên ngành uy tín trong và ngoài nước. Các kết quả viết chung với PGS.TS. Đỗ Đức Thuận đã được sự đồng ý của tác giả khi đưa vào luận án. Những kết quả được trình bày trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ luận văn, luận án nào khác.

Nghiên cứu sinh

Ninh Thị Thu

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới PGS. TS. Đỗ Đức Thuận và GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh. Các thầy đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ tôi vượt qua nhiều khó khăn trong nghiên cứu khoa học cũng như trong cuộc sống.

Trong quá trình học tập, nghiên cứu và giảng dạy, tác giả còn thường xuyên nhận được sự quan tâm, động viên, giúp đỡ từ các thầy, các anh chị em trong bộ môn Toán học tính toán và Toán ứng dụng cũng như toàn thể các thầy, cô giáo trong khoa Toán – Cơ – Tin học. Tác giả xin gửi tới tất cả các thầy cô lời cảm ơn chân thành nhất. Tác giả cũng xin cảm ơn TS. Nguyễn Trung Hiếu đã hỗ trợ và đóng góp nhiều ý kiến quý báu trong quá trình tác giả hoàn thiện bài báo khoa học.

Tác giả xin cảm ơn Ban giám hiệu, Ban lãnh đạo khoa Toán – Cơ – Tin học, phòng Sau đại học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội đã dành cho tác giả những điều kiện tốt nhất trong thời gian học tập và nghiên cứu tại đây.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới những người thân và bạn bè đã luôn bên cạnh, giúp đỡ, động viên, khích lệ để tác giả hoàn thành luận án này.

Mục lục

Bảng ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}$	Tập các số tự nhiên
$\mathbb{Z}$	Tập số nguyên
$\mathbb{Q}$	Tập các số hữu tỷ
$\mathbb{R}$	Tập các số thực
$\mathbb{R}_+$	Tập các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	Không gian véc-tơ n chiều
$\mathbb{R}^n_+$	Tập các véc-tơ không âm trong $\mathbb{R}^n$
$\dot{\mathbb{R}}^n_+$	Phần trong của $\mathbb{R}^n_+$
$\mathbb{R}^{n\times m}$	Không gian các ma trận thực cỡ $n \times m$
$\mathbb{R}^{n\times n}_+$	Không gian các ma trận thực không âm cỡ $n \times n$
$\underline{N}$	$\underline{N} := \{1, 2, \ldots, s\}, s \in \mathbb{N}$
$\mathcal{A}$	$\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \ldots, A_s : A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$
$\operatorname{im} E$	Không gian ảnh của toán tử E
$\ker E$	Không gian nhân của toán tử E
$\operatorname{rank} E$	Hạng của ma trận E
I_n	Ma trận đơn vị cấp n
0_n	Ma trận không cấp n
$\mathcal{S}$	$A^{-1}(\mathrm{im}E) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : A\xi \in \mathrm{im}E\}$
$\mathcal{S}_i$	$A_i^{-1}(\operatorname{im} E_i) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : A_i\xi \in \operatorname{im} E_i\}$
$\mathcal{S}_{i,j}$	$A_i^{-1}(\operatorname{im} E_j) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : A_i\xi \in \operatorname{im} E_j\}$
$\overline{\Phi}_\sigma(k, h)$	Ma trận chuyển trạng thái từ bước h tới bước k
$\Phi_\sigma(k, h)$	Toán tử Cauchy liên kết với hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu

$\Phi_{(E,A)}$	Ánh xạ một bước của hệ sai phân suy biến với cặp ma trận (E, A)
$\Phi_{i,j}$	Ánh xạ một bước từ trạng thái j tới trạng thái i của hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến chỉ số 1
Π_V^W	Phép chiếu lên V song song với W
P_i	Phép chiếu chính tắc lên $\mathcal{S}_i$ song song với $\ker E_i$
Q_i	Phép chiếu chính tắc lên $\ker E_i$ song song với $\mathcal{S}_i$
V_i	Ma trận gồm các cột véc-tơ là cơ sở của $\mathcal{S}_i$ và $\ker E_i$
$V_{i,j}$	Ma trận gồm các cột véc-tơ là cơ sở của $\mathcal{S}_i$ và $\ker E_j$
$\rho(\mathcal{A})$	Bán kính phổ của một họ các ma trận $\mathcal{A}$
$\check{\rho}(\mathcal{A})$	Dưới bán kính phổ của một họ các ma trận $\mathcal{A}$
$\rho\left(\{(E_i, A_i)\}_{i=1}^s\right)$	Bán kính phổ của một họ các cặp ma trận $\{(E_i, A_i)\}_{i=1}^s$
$\check{\rho}\left(\{(E_i, A_i)\}_{i=1}^s\right)$	Dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận $\{(E_i, A_i)\}_{i=1}^s$
$\sigma(t), \sigma(k)$	Quy tắc chuyển mạch
$\sigma(A)$	Phổ của ma trận A
$B = [B(i,j)] \geq 0$	Ma trận (hoặc véc-tơ) có tất cả các thành phần $B(i,j) \geq 0$
$B = [B(i,j)] > 0$	Ma trận (hoặc véc-tơ) có tất cả các thành phần $B(i,j) > 0$
$\oplus$	Tổng trực tiếp của các không gian véc-tơ
$\otimes$	Tích Kronecker
vec	Toán tử **vec**
B^+	Nghịch đảo Moore–Penrose của ma trận $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathrm{diag}(v)$	Ma trận vuông có véc-tơ v ở trên đường chéo còn các thành phần khác bằng 0
$\mathbb{1}_n$	véc-tơ $[1, \ldots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$
Hệ SDLS	Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (switched discrete–time linear singular)
Hệ DPSS	Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương (discrete–time positive switched system)

Mở đầu

Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Lý thuyết ổn định các hệ động lực được nghiên cứu một cách hệ thống từ những năm cuối thế kỷ XIX bởi nhà toán học người Nga A.M. Lyapunov. Các kết quả của lý thuyết ổn định được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như cơ học, vật lý toán, sinh thái học, kinh tế, vũ trụ, ... Vì thế, cho đến nay lý thuyết ổn định vẫn thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà khoa học. Để mô tả các hệ phức hợp trong tự nhiên, kinh tế, năng lượng, hàng không, ... khó có thể dùng các hệ đơn lẻ, mà phải kết hợp nhiều hệ con kèm theo các ràng buộc. Một hệ chuyển mạch bao gồm một tập hữu hạn các hệ con và quy luật chuyển mạch giữa chúng. Các hệ con có thể liên tục hay rời rạc, không suy biến hay suy biến. Quy luật chuyển mạch là một hàm hằng từng khúc phụ thuộc vào các biến thời gian, giá trị của nó trong quá khứ, trạng thái $x(t)$ của mỗi hệ con đơn lẻ hoặc chuyển mạch ngẫu nhiên với hàm phân phối cho trước.

Trong thực tế, việc chuyển mạch có thể xảy ra do những thay đổi đột ngột, không dự báo được của hệ thống, ví dụ do hỏng hóc một thành phần nào đó của hệ thống hay do một hệ con nào đó tình cờ bị kích hoạt. Trong những trường hợp này, để đảm bảo sự an toàn của hệ thống, người ta phải thiết kế sao cho hệ ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch. Tính ổn định của hệ chuyển mạch thực chất là tính vững với mọi nhiễu động của chuyển mạch. Một trong các bài toán quan trọng khi nghiên cứu hệ chuyển mạch là tìm các điều kiện để hệ chuyển mạch ổn định với quy luật chuyển mạch bất kỳ. Ngoài ra, trong thực tế có những hệ chuyển mạch có một số hoặc tất cả các hệ con đều không ổn định, ta cần thiết kế những quy tắc chuyển mạch để hệ chung thu được ổn định, bài toán này được gọi là bài toán ổn định hóa hệ chuyển mạch.

Xét hệ chuyển mạch liên tục tuyến tính không suy biến dạng

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$$

và hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính không suy biến có dạng

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k),$$

trong đó σ là quy tắc chuyển mạch nhận các giá trị trong tập $\underline{N} := \{1, 2, \ldots, s\}$. Một số kết quả tiêu biểu về sự ổn định, ổn định hóa hệ chuyển mạch tuyến tính phải kể đến như: Ge, Sun và Lee, 2001 ([21]), Shorten và Narendra, 2002 ([52]), Liberzon, 2003 ([37]), Gökcek, 2004 ([22]), Phat và Hien, 2009 ([44]), ... Theo đó, điều kiện cần để hệ chuyển mạch tuyến tính không suy biến ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch σ là từng hệ con phải ổn định, tức là A_i, $i \in \underline{N}$ là các ma trận Hurwitz với trường hợp hệ liên tục theo thời gian và A_i, $i \in \underline{N}$ là các ma trận Schur với hệ rời rạc theo thời gian. Các điều kiện cần và đủ để hệ chuyển mạch ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch σ được phát biểu thông qua sự tồn tại của hàm Lyapunov toàn phương chung. Tuy nhiên, việc đưa ra điều kiện tồn tại cho hàm Lyapunov không đơn giản. Các kết quả đầu tiên được Shorten và Narendra thu được trong [51, 52] cho hệ chuyển mạch hai chiều, với hai ma trận Hurwitz A_1, A_2. Các kết quả này được mở rộng cho hệ hai chiều với n ma trận $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và hệ n chiều với hai ma trận A_1, A_2. Ngoài ra, bằng việc đưa ra định nghĩa hàm Lyapunov toàn phương chuyển mạch, Lin và các cộng sự đưa ra các điều kiện dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính để hệ chuyển mạch ổn định (xem [18]). Trong [26], các tác giả Hespanha và Morse nghiên cứu tính ổn định hóa thông qua các điều kiện cho thời gian dừng trung bình (average dwell-time) τ_a.

Liberzon và Trenn [36] thu được những kết quả đầu tiên cho hệ chuyển mạch suy biến tuyến tính liên tục có dạng

$$E_\sigma \dot{x}(t) = A_\sigma x(t),$$

trong đó E_σ là các ma trận suy biến. Nếu chỉ giới hạn trong lớp hàm liên tục tuyệt đối, thì phần lớn các hệ chuyển mạch suy biến dạng trên không có lời giải nào khác ngoài nghiệm tầm thường. Để giải quyết bài toán này, các tác giả đưa ra khái niệm nghiệm suy rộng là các hàm trơn từng khúc và từ đó thiết lập công thức nghiệm cho hệ. Phát triển kết quả này, trong [37], Liberzon và các cộng sự đã đưa ra các điều kiện đủ để hệ ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch σ thông qua các hàm Lyapunov $\mathcal{V}_p$ của từng hệ con, đồng thời sử dụng biến đổi Kronecker đưa ra điều kiện giao hoán để hệ chuyển mạch ổn định. Ngoài ra, trong [42], các tác giả Zhou, Ho và Zhai đã đưa ra điều kiện cho hệ ổn định dựa trên thời gian dừng trung bình τ_a.

Ngày nay, với sự ra đời của nhiều hệ thống lấy mẫu hiện đại, cho ta dữ liệu tại những thời điểm rời rạc; đây cũng là một trong nhiều lý do dẫn đến sự cần thiết của việc nghiên cứu hệ suy biến rời rạc.

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) dạng

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \tag{1}$$

trong đó $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc-tơ trạng thái tại thời điểm $k \in \mathbb{N}$ và $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N} := \{1, 2, \ldots, s\}, s \in \mathbb{N}$, là quy tắc chuyển mạch, nhận giá trị trong tập hữu hạn $\underline{N}$. Giả sử các ma trận E_i suy biến với mọi $i \in \underline{N}$.

Năm 2010, Zhai và Xu đưa ra điều kiện giao hoán để xét tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến cho trường hợp hệ có dạng sau (xem [62])

$$\begin{cases} Ex(k+1) &= A_1x(k), \\ Ex(k+1) &= A_2x(k). \end{cases} \tag{2}$$

Ngoài ra, trong [63], Zhai và các cộng sự xét hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến gồm hai hệ con dạng

$$\begin{cases} E_1x(k+1) &= A_1x(k), \\ E_2x(k+1) &= A_2x(k). \end{cases} \tag{3}$$

Giả sử hai hệ con ứng với cặp ma trận (E_i, A_i) ổn định mũ. Khi đó, nếu các ma trận E_1, E_2 có hạng bằng nhau và các ma trận E_1, E_2, A_1, A_2 từng đôi một giao hoán, tức là

$$E_iE_j = E_jE_i, \quad E_iA_j = A_jE_i, \quad A_iA_j = A_jA_i, \quad i, j \in \{1, 2\},$$

thì hệ (3) ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch.

Gần đây, trong [5, 6], Anh và các cộng sự đã nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) chỉ số 1 dạng (1), đưa ra các tính chất của hệ SDLS chỉ số 1 và đưa ra công thức nghiệm của hệ SDLS chỉ số 1 thông qua ánh xạ một bước. Sau đó, các tác giả nghiên cứu sự ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dựa trên bán kính phổ của một họ các cặp ma trận và phương pháp hàm Lyapunov. Ở đó, các tác giả đã khẳng định giả thiết mỗi mode chỉ số 1 không đủ để đảm bảo sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ SDLS (1) và đưa ra điều cần và đủ mạnh hơn bằng định nghĩa hệ chỉ số 1, cụ thể $\mathcal{S}_i \cap \ker E_j = \{0\}$, với mọi $i, j \in \underline{N}$, trong đó $\mathcal{S}_i = A_i^{-1}(\operatorname{im} E_i) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : A_i\xi \in \operatorname{im} E_i\}$. Các kết quả trên được đưa ra với giả thiết tín hiệu chuyển mạch bất kỳ. Năm 2024, các tác giả Sutrisno và Trenn ([56]) đã mở rộng các kết quả quan trọng này cho trường hợp tín hiệu chuyển mạch có ràng buộc. Cụ thể, các tác giả nghiên cứu hai tình huống: 1) dãy mode cho trước, còn thời gian chuyển mạch bất kỳ và 2) toàn bộ tín hiệu chuyển mạch đã cho trước (cả dãy mode và thời gian chuyển mạch đã cho). Trong cả hai trường hợp, tác giả đưa ra điều kiện cho các ma trận của hệ để đảm bảo sự tồn tại và duy nhất của nghiệm bằng các khái niệm "*chỉ số 1 tuần tự*" và "*chỉ số 1 chuyển mạch*". Sau đó, các tác giả cũng mở rộng ý tưởng ánh xạ một bước được giới thiệu bởi Anh và các cộng sự (xem [5]) cho hai trường hợp này.

Bên cạnh các kết quả cho tính ổn định của hệ chuyển mạch suy biến, còn có một số công trình nghiên cứu bài toán ổn định hóa hệ chuyển mạch suy biến. Các tác giả Gu và Koenig đã đề xuất ổn định hóa hệ chuyển mạch bằng cách thiết kế điều khiển phản hồi (xem ([24, 31]). Năm 2017, trong [7], Anh và Linh đã nghiên cứu tính ổn định của hệ chuyển mạch tuần hoàn và đề xuất ổn định hóa hệ chuyển mạch bằng cách chọn quy luật chuyển mạch tuần hoàn phù hợp hoặc bằng các điều khiển phản hồi.

Hệ chuyển mạch cũng được nhiều nhà khoa học trong nước đặc biệt quan tâm. Chẳng hạn, nhóm nghiên cứu của GS. Vũ Ngọc Phát và các học trò nghiên cứu bài toán điều khiển hệ chuyển mạch có trễ biến thiên bằng cách sử dụng công cụ hàm Lyapunov – Krasovskii và bất đẳng thức ma trận tuyến tính (xem [27, 57, 45], . . .). Nhóm nghiên cứu của GS. Nguyễn Khoa Sơn và các học trò nghiên cứu về tính ổn định vững và ổn định hóa được vững của hệ chuyển mạch tuyến tính không suy biến (xem [53, 58], . . .).

Nhìn chung, với hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến, nếu không có điều kiện tất cả các trạng thái đều dương, đã có nhiều kết quả về tính ổn định và ổn định hóa của hệ, chẳng hạn các công trình của Meng và Zhang (2006), Liberzon và Treen (2012), Zhou, Ho và Zhai (2013), Tawani và Treen (2017), ... cho trường hợp hệ liên tục theo thời gian; hay các công trình của Xia và Zhang (2008), Zhai, Xu và Ho (2012), Darouch và Chadli (2013), Anh và Linh (2017), ... cho trường hợp hệ rời rạc theo thời gian.

Tuy nhiên, ta cần đến hệ với ràng buộc dương ở tất cả các trạng thái để mô phỏng các hệ trong thực tế, chẳng hạn như hệ biểu diễn các đại lượng vật lý như nồng độ, mật độ và khối lượng vật chất, kích thước quần thể, hay các gói dữ liệu trong hệ thống mạng, ... Do vậy, việc nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc suy biến dương là cần thiết và có nhiều ý nghĩa trong thực tế.

Trong [20], các tác giả Fornasini và Valcher đã đưa ra một số kết quả nền tảng cho hệ chuyển mạch rời rạc dương không suy biến dạng $x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k)$, trong đó $\sigma(k)$ là quy tắc chuyển mạch bất kỳ, nhận giá trị trong tập hữu hạn $\underline{N}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n_+$ là biến trạng thái tại thời gian k, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận dương với mọi $i \in \underline{N}$. Đầu tiên, các tác giả nghiên cứu các điều kiện đủ để kiểm tra tính ổn định của hệ dựa vào sự tồn tại của lớp hàm Lyapunov chung. Sau đó, các tác giả giới thiệu khái niệm ổn định hóa được của hệ và chứng minh được rằng, nếu hệ là ổn định hóa được, thì có thể ổn định hóa được hệ bằng một dãy chuyển mạch tuần hoàn, dãy chuyển mạch này sẽ đưa quỹ đạo nghiệm hội tụ về 0 từ mọi trạng thái ban đầu dương.

Một số kết quả được đưa ra cho hệ chuyển mạch suy biến dương với ràng buộc lên ma trận E là hằng và nghiên cứu cho trường hợp thời gian liên tục, như công trình của Li và Xiang (xem [35]).

Theo hiểu biết của chúng tôi, các kết quả cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến dương dạng (1) còn khá ít. Do đó, như một sự tiếp tục, chúng tôi mong muốn nghiên cứu được tính dương, tính ổn định và ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến dạng (1). Chúng tôi vẫn đặt thêm điều kiện chỉ số 1 cho hệ (1), giả thiết này liên quan đến tính nhân quả tương ứng với tín hiệu chuyển mạch, tức là: sự thay đổi tín hiệu chuyển mạch trong tương lai không làm thay đổi nghiệm tại thời điểm hiện tại (hay trong quá khứ). Phát triển cách tiếp cận trong [6] và [48], chúng tôi sử dụng ánh xạ một bước và điều kiện ổn định dạng Lyapunov để nghiên cứu tính dương và sự ổn định của hệ SDLS chỉ số 1. Sau đó bằng cách mở rộng bổ đề Fekete, chúng tôi định nghĩa dưới bán kính phổ cho một họ các cặp ma trận $\{(E_i, A_i)\}_{i=1}^s$ và từ đó đưa ra các đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ SDLS dương.

Ở khía cạnh khác, ta thấy các tác giả trong [5, 6] đã nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ SDLS dạng (1), ở đó quy tắc chuyển mạch trong ma trận E và A là giống nhau. Trong thực tế, hệ có thể chịu các nhiễu không mong muốn. Do vậy, chúng tôi mong muốn nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu. Hơn nữa, nếu quy tắc chuyển mạch trong các ma trận E và A khác nhau thì bài toán sẽ phức tạp hơn. Điều này xảy ra khi động lực học của x_{k+1} phụ thuộc vào ma trận dẫn E tại thời điểm $k+1$, chẳng hạn trong trường hợp ta rời rạc hóa hệ liên tục bằng phương pháp Euler ẩn. Trong [38], Linh đã đề xuất một số kết quả cho trường hợp này với hệ SDLS không có nhiễu. Theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có kết quả nào về tính giải được của hệ SDLS có nhiễu Lipschitz $f_{\sigma(k)}(x(k))$. Do vậy, chúng tôi nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu trong hai trường hợp: trường hợp 1 với quy tắc chuyển mạch ở ma trận E và A giống nhau dạng

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{4}$$

và trường hợp 2 với quy tắc chuyển mạch ở ma trận E và A khác nhau dạng

$$E_{\sigma(k+1)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{5}$$

trong đó $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N} := \{1, 2, \ldots, s\}, s \in \mathbb{N}$, là quy tắc chuyển mạch xác định mode $j \in \underline{N}$ hoạt động tại thời điểm k. Quy tắc chuyển mạch khác nhau trong các ma trận hệ số E và A, cùng với động lực học của hệ (5) bị ràng buộc và kết hợp giữa các hệ con suy biến gây nên một số khó khăn trong việc nghiên cứu tính giải được cũng như sự ổn định của hệ. Chúng tôi sẽ mở rộng và phát triển cách tiếp cận trong [4, 6, 38] để nghiên cứu tính giải được của hệ SDLS có nhiễu Lipschitz. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của hệ (5) sẽ được chứng minh dựa vào nguyên lý ánh xạ co. Sau đó, các đặc trưng về tính ổn định của hệ (5) sẽ được đề xuất bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov, đánh giá nghiệm và sử dụng bất đẳng thức Gronwall dạng rời rạc.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu hai bài toán của hệ chuyển mạch suy biến.

- Bài toán 1 nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương, nghiên cứu tính ổn định của hệ, xây dựng dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận, từ đó đưa ra các đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ, cũng như điều kiện để hệ ổn định hóa được.

- Bài toán 2 nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu Lipschitz trong hai trường hợp: quy tắc chuyển mạch ở các ma trận hệ số giống nhau dạng

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)),$$

  và quy tắc chuyển mạch ở các ma trận hệ số khác nhau dạng

$$E_{\sigma(k+1)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)).$$

Phương pháp nghiên cứu

Để nghiên cứu tính giải được, ổn định và ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến, ngoài việc sử dụng các tính chất cơ bản của giải tích, giải tích hàm, đại số tuyến tính như nguyên lý ánh xạ co, nguyên lý so sánh, tính chất của chuẩn ma trận, tính chất dãy số, dãy hàm, ... chúng tôi sử dụng các phương pháp chiếu, phương pháp hàm Lyapunov, bán kính phổ, dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận, ... Tất cả các ví dụ minh họa được tính toán, mô phỏng quỹ đạo nghiệm bằng phần mềm Matlab trên máy tính cá nhân có cấu hình Core i5, RAM 8GB.

Bố cục của luận án

Luận án được viết dựa trên các kết quả của ba bài báo [CT1, CT2, CT3]. Luận án gồm phần mở đầu, kết luận chung và ba chương lần lượt như sau:

- **Chương 1. Kiến thức chuẩn bị**. Trong chương này, chúng tôi trình bày lại một số khái niệm cơ bản về bán kính phổ của ma trận, bán kính phổ của một họ các ma trận, dưới bán kính phổ của một họ các ma trận, một số ma trận đặc biệt, tích Kronecker, toán tử **vec**, nghịch đảo Drazin, nghịch đảo Moore – Penrose, hệ chuyển mạch tuyến tính thường cùng với các điều kiện để hệ ổn định. Tiếp theo chúng tôi trình bày lại các kết quả về phương trình sai phân suy biến tuyến tính với các khái niệm chỉ số, bài toán giá trị ban đầu cho phương trình sai phân suy biến tuyến tính chỉ số 1 và hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương.

- **Chương 2. Tính ổn định và ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương**. Đầu tiên chúng tôi trình bày lại định nghĩa hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1, công thức nghiệm và một số tính chất quan trọng của hệ suy biến chỉ số 1 thông qua ánh xạ một bước và phép chiếu. Sau đó, luận án nghiên cứu tính dương và tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1. Chúng tôi định nghĩa dưới bán kính phổ cho một họ các cặp ma trận, từ đó đưa ra một số đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương. Cuối cùng chúng tôi đưa ra một số ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết.

- **Chương 3. Tính giải được và tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu Lipschitz**. Chúng tôi nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu Lipschitz với quy tắc chuyển mạch giống nhau ở ma trận hệ số. Sau đó, chúng tôi xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 với quy tắc chuyển mạch khác nhau ở ma trận hệ số, nghiên cứu tính giải được của hệ, thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính ổn định của hệ. Cuối cùng chúng tôi đưa ra một số ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết.

Các kết quả chính của luận án được công bố trong ba bài báo [CT1-CT3] trên các tạp chí *Systems & Control Letters* ([CT1]), *Journal of Difference Equations and Applications* ([CT2]), *VNU Journal of Science: Mathematics – Physics* ([CT3]). Ngoài ra, nội dung của luận án đã được trình bày tại các hội nghị, hội thảo:

1. Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 10, Đà Nẵng, 08 – 2023.

2. Hội thảo Tối ưu và tính toán khoa học, Ba Vì – Hà Nội, 04 – 2024.

3. Hội thảo Gặp gỡ Toán học, Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Vĩnh Phúc, 09 – 2024.

4. Hội nghị Toán học, Khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, 10 – 2024.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày lại một số khái niệm cơ bản về bán kính phổ của ma trận, bán kính phổ của một họ các ma trận, dưới bán kính phổ của một họ các ma trận, một số ma trận đặc biệt, tích Kronecker, toán tử **vec**, nghịch đảo Drazin, nghịch đảo Moore–Penrose, hệ chuyển mạch tuyến tính thường cùng với các điều kiện để hệ ổn định. Tiếp theo chúng tôi nhắc lại một số kết quả về phương trình sai phân suy biến tuyến tính với các khái niệm chỉ số, bài toán giá trị ban đầu cho phương trình sai phân suy biến tuyến tính chỉ số 1 và hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương cùng một số kết quả bổ trợ sử dụng trong luận án (xem [6, 9, 11, 16, 20, 23, 32, 46, 47, 48, 49, 59, 61]).

Chúng tôi nhấn mạnh một số kí hiệu dùng trong toàn bộ luận án. Ma trận (véc-tơ) thực A với tất cả các phần tử không âm được gọi là ma trận (véc-tơ) không âm, kí hiệu $A \geq 0$; A là ma trận (véc-tơ) dương, kí hiệu $A > 0$ nếu tất cả các phần tử của A đều dương. Với hai ma trận thực cùng cỡ M, N, kí hiệu $M \geq N; M > N$ nghĩa là $M - N \geq 0; M - N > 0$ tương ứng. $\mathbb{R}^n_+$ là tập hợp các véc-tơ không âm trong $\mathbb{R}^n$; $\dot{\mathbb{R}}^n_+$ là phần trong của $\mathbb{R}^n_+$ – tập các véc-tơ dương trong $\mathbb{R}^n$.

1.1. Một số khái niệm cơ bản

1.1.1. Bán kính phổ của ma trận

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

i) Phổ của ma trận A là tập các giá trị riêng của A, kí hiệu là $\sigma(A)$.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Av = \lambda v\}.$$

ii) Bán kính phổ của ma trận A kí hiệu là $\rho(A)$ và được xác định bởi

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Ta cũng có $\rho(A) = \lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$.

Gọi $\underline{N} := \{1, 2, \ldots, s\}, s \in \mathbb{N}$, xét một tập các ma trận

$$\mathcal{A} := \{A_1, A_2, \ldots, A_s : A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}\}.$$

Năm 1960, các tác giả Rota và Strang đã đưa ra khái niệm bán kính phổ chung (joint spectral radius) của một họ các ma trận như sau.

Định nghĩa 1.1.1 (xem [50]). Bán kính phổ chung của họ các ma trận $\mathcal{A}$ là

$$\rho(\mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \max_{i_1,\ldots,i_k\in\underline{N}} \|A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\|^{\frac{1}{k}}.$$

Sau đó, khái niệm dưới bán kính phổ chung của một họ các ma trận được tác giả Gurvits đưa ra như sau.

Định nghĩa 1.1.2 (xem [25]). Dưới kính phổ chung (joint spectral subradius) của họ các ma trận $\mathcal{A}$ là

$$\breve{\rho}(\mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \min_{i_1,\ldots,i_k\in\underline{N}} \|A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}\|^{\frac{1}{k}}.$$

Nhận xét 1.1.1. Do trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$ các chuẩn là tương đương nên các định nghĩa bán kính phổ của ma trận, bán kính phổ chung của họ các ma trận, dưới bán kính phổ chung của họ các ma trận không phụ thuộc vào chuẩn được sử dụng.

1.1.2. Một số ma trận đặc biệt

Định nghĩa 1.1.3. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Khi đó

i) A là ma trận Schur nếu tất cả các giá trị riêng của nó nằm trong đường tròn đơn vị mở (hay bán kính phổ $\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ là nhỏ hơn 1).

ii) A là ma trận Hurwitz nếu tất cả các giá trị riêng nằm trong nửa mặt phẳng phức trái.

Ta đã có các kết quả quan trọng cho tính ổn định của hệ động lực theo ma trận Hurwitz và ma trận Schur tương ứng với trường hợp thời gian liên tục và thời gian rời rạc. Hệ liên tục theo thời gian $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ổn định tiệm cận (tức là $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$) nếu và chỉ nếu A là ma trận Hurwitz (xem [17]).

Xét hệ động lực tuyến tính rời rạc theo thời gian dạng

$$x(k+1) = Ax(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Hệ (1.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu đa thức đặc trưng của hệ $\det(\lambda I_n - A)$ có tất cả các nghiệm nằm trong đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức (xem [30]). Từ đó, hệ động lực (1.1) ổn định tiệm cận nếu và chỉ nếu A là ma trận Schur.

1.1.3. Tích Kronecker

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ cỡ $m \times n$ và ma trận B cỡ $p \times q$, khi đó tích Kronecker của A và B được ký hiệu $A \otimes B$, là ma trận khối cỡ $pm \times qn$ và được xác định bởi

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

1.1.4. Toán tử vec

véc-tơ hóa một ma trận là một phép biến đổi tuyến tính chuyển một ma trận thành một véc-tơ.

Với ma trận B cỡ $m \times n$, định nghĩa $\mathbf{vec}(B)$ là ma trận cỡ $mn \times 1$, thu được bằng cách lấy các cột của ma trận B từ trái sang phải và xếp chồng lên nhau. Chẳng hạn, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $\mathbf{vec}(B) = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$.

Cho các ma trận B, C và D có cỡ thích hợp, ta có tính chất

$$\mathbf{vec}(BCD) = \left(D^\top \otimes B\right) \mathbf{vec}(C).$$

1.1.5. Nghịch đảo Drazin

Chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản của nghịch đảo Drazin.

Định nghĩa 1.1.4 (xem [16]). Cho ma trận $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, nghịch đảo Drazin của ma trận M là ma trận duy nhất M^D thỏa mãn

$$M^D M = M M^D, \quad M^D M M^D = M^D, \quad M^D M^{\nu+1} = M^{\nu},$$

trong đó ν là số nguyên không âm nhỏ nhất sao cho $\operatorname{rank}(M^{\nu}) = \operatorname{rank}(M^{\nu+1})$.

Trong [33], Kunkel và Mehrmann (2006) đã chỉ ra cách tính nghịch đảo Drazin của một ma trận; ngoài ra có thể xem công trình [13] của Cantó, Coll và Sánchez (2005) để biết thêm chi tiết về vấn đề này. Ta cũng có thể sử dụng dạng chuẩn Jordan để tìm nghịch đảo Drazin của ma trận M (xem [11]) như sau: phân tích ma trận M thành dạng

$$M = T \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{1.2}$$

trong đó C là ma trận khả nghịch và N là ma trận lũy linh. Khi đó, nghịch đảo Drazin của ma trận M được xác định bởi

$$M^D = T \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}. \tag{1.3}$$

Chú ý rằng, nếu M là ma trận không suy biến thì khối N trong (1.2) sẽ mất đi và $M^D = M^{-1}$, nếu M là ma trận lũy linh thì khối C trong (1.2) sẽ mất đi và $M^D = 0$.

1.1.6. Nghịch đảo Moore–Penrose

Định nghĩa 1.1.5 (xem [12]). Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, nghịch đảo Moore–Penrose của A là ma trận $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ thỏa mãn các tính chất sau

$$AA^+A = A, \qquad A^+AA^+ = A^+, \qquad (AA^+)^\top = AA^+, \qquad (A^+A)^\top = A^+A.$$

Chú ý rằng, A^+A và AA^+ là các toán tử chiếu, do $(A^+A)^2 = A^+A$ và $(AA^+)^2 = AA^+$. Thực tế, bốn điều kiện trên tương đương với điều kiện A^+A và

AA^+ là các phép chiếu trực giao. Hơn nữa, AA^+ là phép chiếu lên $\mathrm{im}(A)$ suy ra $(AA^+)A = A$ và A^+A là phép chiếu lên $\mathrm{im}(A^\top)$ nên $(A^+A)A^\top = A^\top$.
Nếu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận khả nghịch thì $A^+ = A^{-1}$.

1.1.7. Bất đẳng thức Gronwall

Ta cần sử dụng bất đẳng thức Gronwall dạng rời rạc dưới đây để nghiên cứu tính ổn định mũ của hệ SDLS ở Chương 3.

Định lý 1.1.1 (xem [32]). *Giả sử rằng $\{y_m\}, \{f_m\}, \{g_m\}$ là các dãy không âm sao cho*

$$y_m \le f_m + \sum_{0\le i<m} g_i y_i, \forall m \ge 0.$$

Khi đó

$$y_m \le f_m + \sum_{0\le i<m} f_i g_i \prod_{i<j<m} (1 + g_j).$$

1.1.8. Bổ đề Fekete

Bổ đề 1.1.1 (Bổ đề Fekete, xem [19]). *Cho $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ là dãy số thực thỏa mãn*

$$a_{m+n} \le a_m + a_n, \qquad \text{với mọi } m, n \ge 1.$$

Khi đó, giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$ tồn tại và bằng $\inf\limits_{n\ge1} \dfrac{a_n}{n}$.

Từ Bổ đề Fekete ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.1.1 (xem [46]). *Cho $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy số dương sao cho $a_{k+\ell} \le a_k a_\ell$ với mọi $k, \ell \ge 1$. Khi đó giới hạn $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k)^{\frac{1}{k}}$ tồn tại.*

1.1.9. Định lý Perron – Frobenius

Định lý 1.1.2 (Định lý Perron – Frobenius, xem [10, 28]). *Giả sử $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Khi đó*

i) $\rho(A)$ là một giá trị riêng của A và tồn tại véc-tơ $x \in \mathbb{R}_+^n$, $x \ne 0$ sao cho $Ax = \rho(A)x$.

ii) Cho trước $\alpha > 0$, tồn tại véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq 0$ sao cho $Ax \geq \alpha x$ nếu và chỉ nếu $\rho(A) \geq \alpha$.

Từ Định lý Perron – Frobenius ta suy ra được hệ quả sau, được sử dụng trong chứng minh một số kết quả ở Chương 2.

Hệ quả 1.1.2. *Giả sử $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$, cho trước $\alpha > 0$. Khi đó, nếu tồn tại véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq 0$ sao cho $Ax < \alpha x$ thì ta có $\rho(A) < \alpha$.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq 0$ sao cho $Ax < \alpha x$ nhưng $\rho(A) \geq \alpha$. Ta sẽ chỉ ra mâu thuẫn.
Ta có $\rho(A^\top) = \rho(A)$, mà $\rho(A) \geq \alpha$ nên $\rho(A^\top) \geq \alpha$.
Khi đó, theo Định lý Perron – Frobenius, tồn tại véc-tơ $y \in \mathbb{R}^n_+$, $y \neq 0$ sao cho $A^\top y \geq \alpha y$, suy ra $y^\top A \geq \alpha y^\top$. Từ đó, $y^\top Ax \geq \alpha y^\top x$. Do vậy, $y^\top(Ax - \alpha x) \geq 0$, điều này là vô lý do $Ax < \alpha x$ nên $Ax - \alpha x < 0$ và $y^\top \geq 0$.
Vậy với $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$, nếu tồn tại véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq 0$ sao cho $Ax < \alpha x$ thì ta có $\rho(A) < \alpha$. ■

1.2. Hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính hệ số hằng

Xét hệ rời rạc tuyến tính suy biến dạng

$$Ex(k+1) = Ax(k),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

trong đó, các ma trận $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cho trước, E là ma trận suy biến và $x(k) \in \mathbb{R}^n$.

1.2.1. Tính giải được của hệ sai phân suy biến tuyến tính chỉ số 1

Định nghĩa 1.2.1 (xem [61]). Cặp ma trận $(E, A) \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ được gọi là chính quy nếu đa thức đặc trưng $\det(\lambda E - A)$ không đồng nhất 0.

Bổ đề 1.2.1 (xem [61]). *Cặp ma trận $(E, A) \in \left(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$ là chính quy khi và chỉ khi tồn tại các ma trận khả nghịch $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho*

$$(UEV, UAV) = \left(\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & I_{n-r} \end{bmatrix} \right), \tag{1.5}$$

trong đó $J \in \mathbb{R}^{r\times r}$ là ma trận chuẩn Jordan và $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh cũng có dạng chuẩn Jordan.

Nhận xét 1.2.1. Chỉ số lũy linh của N là số $\nu \in \mathbb{N}$ bé nhất sao cho $N^\nu = 0_{n-r}$. Chỉ số này không phụ thuộc vào việc chọn các ma trận U, V và gọi là chỉ số của cặp (E, A).

Khi $N = 0_{n-r}$ thì cặp ma trận (E, A) có chỉ số 1. Trong trường hợp này, ta chọn các ma trận $V = [V_1, V_2]$ và $U = [EV_1, AV_2]$ với

$$\begin{aligned} \operatorname{im} V_1 &= \mathcal{S} := A^{-1}(\operatorname{im} E) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : A\xi \in \operatorname{im} E\}, \\ \operatorname{im} V_2 &= \ker E. \end{aligned}$$

Bổ đề 1.2.2 (xem [23]). *Các khẳng định sau là tương đương với $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $\mathcal{S} := A^{-1}(\operatorname{im} E)$.*

i) Cặp ma trận (E, A) là chính quy và có chỉ số 1.

ii) $\mathcal{S} \cap \ker E = \{0\}$.

iii) $\mathcal{S} \oplus \ker E = \mathbb{R}^n$.

Tính chính quy và chỉ số 1 của cặp ma trận (E, A) liên quan đến sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ (1.4) được khẳng định trong bổ đề dưới đây.

Bổ đề 1.2.3 (xem [61]). *Giả sử cặp ma trận (E, A) là chính quy chỉ số 1. Khi đó, hệ rời rạc tuyến tính suy biến (1.4) với điều kiện đầu $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0 \in \mathcal{S}$ và nghiệm được cho bởi công thức*

$$x(k) = \Phi^k_{(E,A)} x_0, \quad \text{với } \Phi_{(E,A)} := V \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1},$$

trong đó V và J là các ma trận trong khai triển dạng (1.5) và $\Phi_{(E,A)}$ không phụ thuộc vào cách chọn các ma trận V và J.

1.2.2. Tính giải được của hệ sai phân suy biến tổng quát

Kết quả dưới đây trình bày tính giải được của hệ (1.4) được Campbel đưa ra năm 1980.

Định lý 1.2.1 (xem [11]). *Hệ suy biến* (1.4) *có nghiệm duy nhất với mỗi điều kiện ban đầu chấp nhận được nếu và chỉ nếu cặp ma trận* (E, A) *là chính quy (tức là, tồn tại* $\lambda \in \mathbb{C}$ *sao cho* $(\lambda E - A)^{-1}$ *tồn tại). Hơn nữa, tập điều kiện ban đầu chấp nhận được cho bởi* $\operatorname{im}\left(\widehat{E}^D \widehat{E}\right)$ *và các nghiệm của hệ* (1.4) *có dạng*

$$x(k) = \left(\widehat{E}^D \widehat{A}\right)^k \widehat{E}^D \widehat{E} v,$$

trong đó v *là véc-tơ bất kỳ trong* $\mathbb{R}^n$*, các ma trận* $\widehat{A}$ *và* $\widehat{E}$ *được xác định bởi*

$$\widehat{E} = (\lambda E - A)^{-1} E, \quad \widehat{A} = (\lambda E - A)^{-1} A, \tag{1.6}$$

với $\lambda \in \mathbb{C}$ *sao cho* $(\lambda E - A)^{-1}$ *tồn tại và* $\widehat{E}^D$ *là nghịch đảo Drazin của* $\widehat{E}$.

Nhận xét 1.2.2. Nghiệm của hệ (1.4) không phụ thuộc vào λ và nó thỏa mãn phương trình sai phân

$$\begin{cases} x(k+1) &= \widehat{E}^D \widehat{A} x(k), \\ x(0) &= \widehat{E}^D \widehat{E} v \in \operatorname{im}(\widehat{E}^D \widehat{E}). \end{cases}$$

Từ đây ta luôn giả thiết cặp ma trận (E, A) chính quy.

Đặt $P := \widehat{E}^D \widehat{E}$ và $\overline{A} := \widehat{E}^D \widehat{A}$. Bổ đề dưới đây trình bày một số tính chất quan trọng cho các ma trận này.

Bổ đề 1.2.4 (xem [47]). *Các tính chất sau là đúng.*

i) P *là một phép chiếu* ($P^2 = P$).

ii) $P\overline{A} = \overline{A}P = \overline{A}$.

iii) Với mọi nghiệm $x(k)$ *của hệ* (1.4) *ta có* $Px(k) = x(k)$.

1.2.3. Tính dương của hệ sai phân suy biến

Nhìn chung, việc phân tích tính dương của hệ với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được bất kỳ là bài toán không dễ. Trong [43, 54], Nieuwenhuis (1984) và Stern (1982) đã nghiên cứu tính dương của hệ LTI (linear time–invariant systems) với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được là một nón nhọn lồi đóng. Tuy nhiên, các kết quả đề xuất còn mang tính lý thuyết và không thể kiểm tra bằng phương pháp số trị. Năm 2014, trong [48], các tác giả Rami và Napp đã nghiên cứu tính toán các điều kiện cho tính dương của hệ (1.4) liên kết với một tập nón dạng $\mathrm{im}(P) \cap \mathbb{R}^n_+$.

Định nghĩa 1.2.2 (xem [48]). Ta nói hệ (1.4) là dương nếu với mọi điều kiện ban đầu chấp nhận được không âm $x(0) \in \mathcal{X}_0 = \mathrm{im}(P) \cap \mathbb{R}^n_+$ ta có $x(k) \geq 0$ với mọi $k \geq 0$.

Để đưa ra các kết quả về tính dương của hệ (1.4) ta sử dụng kết quả trong bổ đề dưới đây.

Bổ đề 1.2.5 (xem [41]). *Cho M, N là các ma trận có cỡ thích hợp. Các khẳng định dưới đây là tương đương:*

i) $Mx \geq 0$ suy ra $Nx \geq 0$, với x có cỡ thích hợp;

ii) Tồn tại $H \geq 0$ thỏa mãn phương trình ma trận $N = HM$.

Bây giờ, chúng ta xét hệ

$$\begin{cases} x(k+1) = \overline{A}x(k), \\ x(0) \in \mathrm{im}\, P. \end{cases} \tag{1.7}$$

Từ Định lý 1.2.1 và Nhận xét 1.2.2 ta có hệ (1.7) và hệ (1.4) có cùng tập nghiệm với bất kỳ điều kiện ban đầu nằm trong $\mathrm{im}(P)$. Từ đó, tính dương của hệ (1.4) tương đương với tính dương của hệ (1.7) với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được không âm $\mathcal{X}_0 = \mathrm{im}\, P \cap \mathbb{R}^n_+$.

Định lý 1.2.2 (xem [48]). *Các khẳng định dưới đây là tương đương.*

i) Hệ (1.4) (hoặc hệ (1.7)) là dương với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được không âm $\mathcal{X}_0 = \mathrm{im}(P) \cap \mathbb{R}^n_+$.

ii) Tồn tại một ma trận H sao cho

$$\begin{cases} H \geq 0, \\ \overline{A} = HP. \end{cases} \tag{1.8}$$

Định lý 1.2.2 đưa ra đặc trưng tính dương của hệ (1.4) bằng sự tồn tại của ma trận H không âm thỏa mãn đẳng thức tuyến tính, việc này có thể được kiểm tra thông qua bất đẳng thức ma trận và dạng quy hoạch tuyến tính một cách hiệu quả. Tuy nhiên, đặc trưng tính dương có thể được cải thiện bằng cách loại bỏ ràng buộc đẳng thức trong (1.8) và thay thế bằng một bất đẳng thức tuyến tính. Để làm được điều này, ta cần bổ đề dưới đây.

Bổ đề 1.2.6 (xem [47, 48]). *Hệ phương trình ma trận $XM = N$ có nghiệm theo biến X nếu và chỉ nếu $N(I - M^+M) = 0$, trong đó M^+ là nghịch đảo Moore–Penrose. Hơn nữa, tất cả các nghiệm được xác định bởi $X = NM^+ + D(I - MM^+)$, với D là một ma trận bất kỳ.*

Kết quả đơn giản hóa tính dương được phát biểu trong định lý dưới đây.

Định lý 1.2.3 (xem [48]). *Các khẳng định dưới đây là tương đương.*

i) Hệ (1.4) (hoặc hệ (1.7)) là dương với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được không âm $\mathcal{X}_0 = \operatorname{im} P \cap \mathbb{R}^n_+$.

ii) Tồn tại một ma trận D sao cho

$$\overline{A} + D(I - P) \geq 0.$$

Bất đẳng thức ma trận theo biến ma trận $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\overline{A} + D(I - P) \geq 0, \tag{1.9}$$

có thể viết lại thành bất đẳng thức tuyến tính

$$\left[\left(P^\top - I\right) \otimes I\right] x \leq b, \tag{1.10}$$

ở đó $x = \mathbf{vec}(D)$ và $b = \mathbf{vec}(\overline{A})$.

1.2.4. Tính ổn định của hệ sai phân suy biến dương

Định nghĩa 1.2.3 (xem [48]). Ta nói hệ (1.4) là ổn định nếu với bất kì điều kiện ban đầu $x(0) \in \mathcal{X}_0$ ta có $x(k) \to 0$ khi $k \to \infty$.

Chúng tôi trình bày lại một số điều kiện ổn định cho hệ rời rạc tuyến tính không suy biến dương.

Mệnh đề 1.2.1 (xem [48]). *Cho N là ma trận không âm và xét hệ tuyến tính không suy biến dạng*

$$z(k+1) = Nz(k). \tag{1.11}$$

Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.

i) N là ma trận Schur, hay hệ (1.11) là ổn định với mọi điều kiện ban đầu.

ii) Tồn tại véc-tơ $\nu \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\nu > 0 \quad \textit{và} \quad (N - I)\nu < 0.$$

iii) Tồn tại véc-tơ $\gamma \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\gamma > 0 \quad \textit{và} \quad \gamma^\top(N - I) < 0.$$

Dưới đây, ta trình bày các đặc trưng cho tính ổn định của hệ (1.4) với điều kiện $\operatorname{im} P \cap \dot{\mathbb{R}}^n_+ \neq \emptyset$, nghĩa là ta yêu cầu hệ (1.4) có quỹ đạo nghiệm không chỉ nằm trên biên của $\mathbb{R}^n_+$.

Định lý 1.2.4 (xem [48]). *Giả sử rằng, tồn tại véc-tơ $v \in \mathbb{R}^n$ sao cho $Pv > 0$. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.*

i) Hệ (1.4) (hay (1.7)) là dương và ổn định với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được $\mathcal{X}_0 = \operatorname{im} P \cap \mathbb{R}^n_+$.

ii) Tồn tại một ma trận D sao cho

$$H := \overline{A} + D(I - P) \quad \textit{là ma trận Schur không âm.} \tag{1.12}$$

iii) Tồn tại véc-tơ $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ và ma trận $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho

$$\begin{cases} \gamma^\top(\overline{A} - I) + \mathbb{1}_n^\top Z(I - P) < 0, \\ \operatorname{diag}(\gamma)\overline{A} + Z(I - P) \geq 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

trong đó $\mathbb{1}_n = [1, \ldots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$.

1.3. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương (DPSS) dạng

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \tag{1.14}$$

trong đó $x(k) \in \mathbb{R}^n_+$ là biến trạng thái tại thời gian k, $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ là quy tắc chuyển mạch bất kỳ, nhận giá trị trong tập $\underline{N}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận dương với mọi $i \in \underline{N}$.

1.3.1. Tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương

Định nghĩa 1.3.1 (xem [20]). Hệ (1.14) là *ổn định tiệm cận* nếu với mọi quy tắc chuyển mạch σ và điều kiện ban đầu $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ ta có $x(k) \to 0$ khi $k \to \infty$.

Định nghĩa 1.3.2 (xem [20]). Một hàm $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm đồng dương nếu $V(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $V(0) = 0$. Hàm đồng dương $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm Lyapunov chung cho hệ DPSS (1.14) nếu

$$\forall x > 0, \forall i \in \underline{N} \quad \Delta V_i(x) := V(A_i x) - V(x) < 0,$$

hoặc tương đương

$$\forall x > 0, \qquad \max_{i \in \underline{N}} \Delta V_i(x) < 0.$$

Ta thường xét ba lớp hàm đồng dương dưới đây:

- hàm đồng dương tuyến tính: $V(x) = v^\top x$, với $v \in \mathbb{R}^n, v > 0$.
- hàm đồng dương bậc hai: $V(x) = x^\top P x$, với $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho $x^\top P x > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 0$.

- hàm bậc hai xác định dương: $V(x) = x^\top Px$, với $P = P^\top \succ 0$.

Trong luận án, chúng tôi sử dụng lớp hàm đồng dương tuyến tính để đưa ra điều kiện ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương ở Chương 2.

Một hàm đồng dương tuyến tính $V(x) = v^\top x$, với $v > 0$ là hàm Lyapunov chung cho hệ DPSS (1.14) nếu $v^\top A_i x < v^\top x$ với mọi $i \in \underline{N}$ và với mỗi $x > 0$. Nếu tồn tại một hàm Lyapunov chung cho hệ (1.14) thì hệ (1.14) ổn định tiệm cận. Điều này được khẳng định trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.3.1 (xem [20]). *Hệ DPSS* (1.14) *là ổn định tiệm cận nếu tồn tại* $v \in \mathbb{R}^n$ *sao cho*

$$v > 0 \quad \textit{và} \quad v^\top (A_i - I) < 0, \quad \forall i \in \underline{N}.$$

1.3.2. Tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương theo thời gian dừng nhỏ nhất

Ta gọi dãy $\{k_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ là dãy thời điểm chuyển mạch, tức là thời điểm $\sigma(k)$ thay đổi giá trị và $\tau_q := k_{q+1} - k_q$ được gọi là thời gian dừng. Ta quy ước $k_0 = 0$.

Ta biết rằng, một hệ chuyển mạch là ổn định nếu tất cả các hệ con là ổn định và việc chuyển mạch được thực hiện đủ chậm. Trong [59], các tác giả đã nghiên cứu xác định thời gian dừng nhỏ nhất τ^* để hệ (1.14) bao gồm các hệ con ổn định là ổn định tiệm cận, với quy tắc chuyển mạch

$$\sigma(k) = i \in \underline{N}, \quad \forall k \in [k_q, k_{q+1}), \tag{1.15}$$

trong đó k_q và k_{q+1} là hai thời điểm chuyển mạch liên tiếp thỏa mãn $k_{q+1} - k_q \geq \tau^*$.

Điều kiện ổn định của hệ DPSS (1.14) với thời gian dừng nhỏ nhất được trình bày trong định lý dưới đây.

Định lý 1.3.1 (xem [59]). *Giả sử, với hằng số* $0 < \tau \in \mathbb{N}$ *cho trước, tồn tại một tập các véc-tơ* $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^n, v_i > 0, i \in \underline{N}$ *sao cho*

$$v_i^\top (A_i - I) < 0, \ \forall i \in \underline{N} \tag{1.16}$$

và

$$v_i^\top A_i^\tau - v_j^\top < 0, \ \forall\, i, j \in \underline{N}. \tag{1.17}$$

Khi đó, hệ (1.14) *ổn định (tiệm cận) với dãy thời điểm chuyển mạch* $\{k_q\}_{q\in\mathbb{N}}$ *thỏa mãn* $\tau_q \geq \tau$.

Trong [34], các tác giả Li và Zhang cũng đã xây dựng được điều kiện ổn định cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương (1.14) với thời gian dừng nhỏ nhất. Ở đó, các tác giả đưa ra điều kiện tương đương với các điều kiện (1.16), (1.17) trong Định lý 1.3.1, được trình bày trong định lý dưới đây.

Định lý 1.3.2 (xem [34]). *Cho trước hằng số* $0 < \tau \in \mathbb{N}$. *Các khẳng định dưới đây là tương tương:*

i) Tồn tại một tập các véc-tơ $v_i \in \mathbb{R}^n, v_i > 0, i \in \underline{N}$ *sao cho*

$$\begin{cases} v_i^\top(A_i - I) < 0, \ \forall i \in \underline{N}, \\ v_i^\top A_i^\tau - v_j^\top < 0, \ \forall i, j \in \underline{N}; \end{cases}$$

ii) Tồn tại một tập các véc-tơ $v_{i,l} \in \mathbb{R}^n, \ v_{i,\tau} > 0, \ i \in \underline{N}, l = 0, 1, \ldots \tau$ *sao cho*

$$\begin{cases} v_{j,0} - v_{i,\tau} < 0, \ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{i,\tau}^\top(A_i - I) < 0, \ \forall i \in \underline{N}, \\ v_{i,l+1}^\top A_i - v_{i,l}^\top \leq 0, \ \forall i \in \underline{N}, 0 \leq l \leq \tau - 1. \end{cases}$$

Hơn nữa, khi một trong các khẳng định trên đúng, hệ DPSS (1.14) *là ổn định tiệm cận với dãy thời điểm chuyển mạch* $\{k_q\}_q$ *thỏa mãn* $\tau_q \geq \tau$.

1.3.3. Tính ổn định hóa được bằng quy tắc chuyển mạch của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương

Định nghĩa 1.3.3 (xem [20]). Hệ DPSS (1.14) là *ổn định hóa được* nếu với mọi điều kiện ban đầu dương $x(0)$, tồn tại một dãy chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ sao cho quỹ đạo trạng thái $x(k)$ hội tụ về 0.

Rõ ràng bài toán ổn định hóa là không tầm thường nếu tất cả các ma trận $A_i, i \in \underline{N}$ không là ma trận Schur, tức là tất cả các hệ con đều không ổn định. Trong định nghĩa trên, việc chọn dãy chuyển mạch σ có thể phụ thuộc vào điều kiện ban đầu $x(0)$. Một định nghĩa mạnh hơn của điều kiện ổn định hóa được là dãy chuyển mạch ổn định hệ không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu.

Định nghĩa 1.3.4 (xem [20]). Hệ DPSS (1.14) là *ổn định hóa được nhất quán* nếu tồn tại một dãy chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ sao cho với mọi điều kiện ban đầu dương $x(0)$, quỹ đạo trạng thái tương ứng $x(k)$ hội tụ về 0.

Ta thấy, hệ ổn định hóa được nhất quán suy ra hệ ổn định hóa được, điều ngược lại chưa chắc đúng. Trong trường hợp tổng quát, tức là không có điều kiện dương, người ta có thể tìm được hệ ổn định hóa được nhưng không ổn định hóa được nhất quán (xem ví dụ trang 112 – 113 trong [55]). Tuy nhiên, trong [20] các tác giả đã chứng minh được, với hệ chuyển mạch dương (1.14), hai định nghĩa trên là tương đương và chúng tương đương với khả năng ổn định hóa được hệ bằng một dãy chuyển mạch tuần hoàn không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu dương. Điều này được khẳng định trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.3.2 (xem [20]). *Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương* (1.14), *các khẳng định sau là tương đương:*

i) hệ ổn định hóa được;

ii) hệ ổn định hóa được nhất quán;

iii) tồn tại $T > 0$ và bộ chỉ số $i_0, i_1, \dots, i_{T-1} \in \underline{N}$ sao cho ma trận tích $A_{i_{T-1}} A_{i_{T-2}} \dots A_{i_1}$ là một ma trận Schur dương;

iv) tồn tại một dãy chuyển mạch tuần hoàn đưa quỹ đạo trạng thái tương ứng với mọi điều kiện ban đầu dương hội tụ về 0.

Chương 2

Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương

Ta cần đến hệ chuyển mạch với ràng buộc dương ở tất cả các trạng thái để mô phỏng các hệ trong thực tế, chẳng hạn như hệ biểu diễn các đại lượng vật lý như nồng độ, mật độ và khối lượng vật chất, kích thước quần thể, hay các gói dữ liệu trong hệ thống mạng, ... Chương này chúng tôi trình bày một số kết quả về tính ổn định và ổn định hóa được cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương. Chúng tôi đưa ra định nghĩa tính dương của hệ, sau đó thiết lập điều kiện đủ cho tính ổn định của hệ. Cuối cùng, chúng tôi định nghĩa dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận, từ đó đưa ra đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ. Kết quả của chương đã được công bố trong bài báo [CT1].

2.1. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1

Đầu tiên, chúng tôi trình bày lại một số kết quả quan trọng cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 đã được Anh và các cộng sự đề xuất trong [5, 6].

2.1.1. Định nghĩa hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1

Ta xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) dạng

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \tag{2.1}$$

trong đó $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc-tơ trạng thái tại thời điểm $k \in \mathbb{N}$ và $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N} := \{1, 2, \dots, s\}, s \in \mathbb{N}$, là quy tắc chuyển mạch, nhận giá trị trong tập hữu hạn $\underline{N}$. Giả sử các ma trận E_i suy biến với mọi $i \in \underline{N}$.

Ta xét hệ (2.1) với điều kiện ban đầu

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Định nghĩa 2.1.1. Nghiệm của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến dạng (2.1) là dãy $\{x(k)\}_k$ thỏa mãn hệ (2.1) với mỗi $k = 1, 2, \dots$ và quy tắc chuyển mạch $\sigma(k) \in \underline{N}$ bắt đầu từ trạng thái $x(0)$ tương thích.

Đối với hệ chuyển mạch liên tục suy biến công thức nghiệm đã được thiết lập trong [60]. Đặc biệt, khi xét không gian nghiệm suy rộng là không gian các hàm trơn từng khúc, sự tồn tại và duy nhất nghiệm với mọi tín hiệu chuyển mạch được đảm bảo khi và chỉ khi các cặp ma trận (E_i, A_i) là chính quy. Hai tính chất quan trọng của hệ chuyển mạch liên tục suy biến là: 1) tính nhân quả của nghiệm liên quan tới tín hiệu chuyển mạch, tức là, sự thay đổi tín hiệu chuyển mạch trong tương lai không làm thay đổi nghiệm tại thời điểm hiện tại và 2) tính duy nhất nghiệm khi cho trước tín hiệu chuyển mạch và giá trị ban đầu. Tuy nhiên, ví dụ dưới đây cho thấy các tính chất này không còn đúng trong trường hợp hệ rời rạc. Điều này chứng tỏ các kết quả cho hệ rời rạc không thể suy ra trực tiếp từ các kết quả tương ứng cho hệ liên tục.

Ví dụ 2.1.1 (xem [5]). Xét hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến (2.1) với $\underline{N} = \{1, 2\}$ và

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta xét hai tín hiệu chuyển mạch cụ thể với $\sigma_1 \equiv 1$ và $\sigma_2 \equiv 2$, nghiệm của hệ tương ứng có dạng

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad x(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0^2 \end{pmatrix},$$

với $k \in \mathbb{N}$ và $x(0) = (x_0^1, x_0^2) \in \mathbb{R}^2$ là điều kiện ban đầu cho trước. Tiếp theo, ta xét hệ chuyển mạch (2.1) với tín hiệu chuyển mạch thay đổi tại thời điểm $k_s > 0$ như sau $\sigma(k) = \begin{cases} 1, & k < k_s, \\ 2, & k \geq k_s. \end{cases}$

Hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến (2.1) trở thành

$$\begin{aligned} &k < k_s && k \geq k_s \\ x_1(k+1) &= x_1(k) & 0 &= x_1(k) \\ 0 &= x_2(k), & x_2(k+1) &= x_2(k). \end{aligned}$$

Ta thấy, thành phần thứ nhất $x_1(k_s)$ bị phụ thuộc vào cả hai trạng thái: với $k = k_s - 1$, từ trạng thái thứ nhất ta có $x_1(k_s) = x_1(k_s - 1)$ và với $k = k_s$, từ trạng thái thứ hai ta có $0 = x_1(k_s)$. Suy ra $x(k) = 0$ với mọi $k < k_s$, từ đó cho thấy, thời điểm chuyển mạch $k_s > 0$ làm thay đổi toàn bộ nghiệm khác không trước đó (mất đi tính nhân quả). Trong khi đó, thành phần thứ hai $x_2(k_s)$ có thể nhận giá trị bất kỳ, do đó hệ thu được không có nghiệm duy nhất (mất đi tính duy nhất nghiệm). Để ý rằng, các cặp ma trận (E_i, A_i) là chính quy. Khi đó, hệ chuyển mạch liên tục với các cặp ma trận (E_i, A_i) là nhân quả và bài toán giá trị ban đầu có nghiệm duy nhất.

Như vậy, đối với trường hợp liên tục, chỉ cần giả thiết mỗi cặp ma trận (E_i, A_i) chính quy để kết luận sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ chuyển mạch tương ứng. Tuy nhiên, kết quả này không còn đúng đối với trường hợp thời gian rời rạc. Như vậy, giả thiết mỗi mode của hệ chuyển mạch là chỉ số 1 không đủ để đảm bảo sự tồn tại nghiệm của hệ chuyển mạch tương ứng. Do đó, ta cần giả thiết chặt hơn cho cặp ma trận (E_i, A_i) để kết luận được các tính chất của nghiệm. Dựa trên khái niệm chỉ số linh hoạt của Griepentrog và Marz (xem [23]) và khái niệm chỉ số 1 dạng hình học cho hệ sai phân suy biến với hệ số biến thiên của Anh và Yen (xem [8]), các tác giả trong [6] đã đưa ra khái niệm chỉ số 1 cho hệ chuyển mạch tổng quát như sau.

Định nghĩa 2.1.2 (xem [5, 6]). Hệ (2.1) được gọi là hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến chỉ số 1 nếu

$$\mathcal{S}_i \cap \ker E_j = \{0\}, \quad \text{với mọi } \ i, j \in \underline{N}, \tag{2.3}$$

trong đó $\mathcal{S}_i = A_i^{-1}(\operatorname{im} E_i) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : A_i \xi \in \operatorname{im} E_i\}$.

Một số tính chất quan trọng của hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến chỉ số 1 được trình bày trong bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.1 (xem [5, 6]). *Giả sử hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến* (2.1) *có chỉ số 1. Khi đó ta có các khẳng định*

i) $\operatorname{rank} E_i = \text{const} =: \text{r} \ (\text{r} < \text{n})$,

ii) $\mathcal{S}_i \oplus \ker E_j = \mathbb{R}^n$, $\forall i, j \in \underline{N}$.

2.1.2. Ánh xạ một bước cho hệ SDLS chỉ số 1

Trước tiên, chúng tôi trình bày tính chất hình học đơn giản của các không gian con, cần thiết cho việc đưa ra công thức nghiệm của (2.1).

Xét hai không gian con $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$. Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ ta có phân tích duy nhất dạng $x = x_{\mathcal{V}} + x_{\mathcal{W}}$ với $x_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$, $x_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W}$. Khi đó, $\{x\} + \mathcal{W} = \{x_{\mathcal{V}}\} + \mathcal{W}$ và với bất kỳ $w \in \mathcal{W} \setminus \{0\}$ ta có $x_{\mathcal{V}} + w \notin \mathcal{V}$. Do đó, $\mathcal{V} \cap (\{x\} + \mathcal{W}) = \{x_{\mathcal{V}}\}$. Từ đây, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.2 (xem [5]). *Xét hai không gian con $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathbb{R}^n$ và gọi $\Pi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ là phép chiếu chính tắc lên $\mathcal{V}$ song song với $\mathcal{W}$ (tức là $\operatorname{im} \Pi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = \mathcal{V}$ và $\ker \Pi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = \mathcal{W}$). Khi đó, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ ta thu được*

$$\mathcal{V} \cap (\{x\} + \mathcal{W}) = \left\{ \Pi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} x \right\},$$

hay, với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ tồn tại duy nhất véc-tơ $y \in \mathcal{V}$, tương ứng tồn tại véc-tơ $w \in \mathcal{W}$ sao cho $y = x + w$ và có công thức $y = \Pi_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} x$.

Định nghĩa 2.1.3 (xem [5]). Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dạng (2.1). Khi đó ánh xạ một bước từ mode j đến mode i được định nghĩa bởi

$$\Phi_{i,j} := \Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_j} \Phi_{(E_j, A_j)},$$

trong đó $\Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_j}$ là phép chiếu chính tắc lên $\mathcal{S}_i$ song song với $\ker E_j$ và $\Phi_{(E_j, A_j)}$ là ánh xạ một bước tại mode j tương ứng như trong Bổ đề 1.2.3.

Định lý 2.1.2 (xem [5, 6]). *Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính chỉ số 1 có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x(0) \in \mathcal{S}_{\sigma(0)}$. Khi đó ta có công thức*

$$x(k+1) = \Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)}x(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

trong đó, $\Phi_{i,j}$ là ánh xạ một bước từ mode j đến mode i được xác định như trong Định nghĩa 2.1.3.

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.2.3 ta có $x(0) \in \mathcal{S}_{\sigma(0)}$ là điều kiện cần cho sự tồn tại nghiệm. Để chứng minh điều kiện đủ ta giả sử $x(m)$ thỏa mãn hệ (2.1) với $m = 0, 1, \ldots, k$ và $x(k) \in \mathcal{S}_{\sigma(k)}$. Ta cần tìm $x(k+1)$ sao cho

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k)$$

và

$$E_{\sigma(k+1)}\xi = A_{\sigma(k+1)}x(k+1) \text{ với } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ nào đó.}$$

Điều kiện thứ nhất tương đương với

$$x(k+1) \in \{\Phi_{(E_{\sigma(k)},A_{\sigma(k)})}x(k)\} + \ker E_{\sigma(k)}$$

và điều kiện thứ hai tương đương với

$$x(k+1) \in A^{-1}_{\sigma(k+1)}\left(\operatorname{im} E_{\sigma(k+1)}\right) = \mathcal{S}_{\sigma(k+1)}.$$

Từ giả thiết $\mathcal{S}_{\sigma(k+1)} \cap \ker E_{\sigma(k)} = \{0\}$, Bổ đề 2.1.1 và Bổ đề 2.1.2 suy ra $x(k+1)$ là duy nhất và được cho bởi công thức (2.4). ■

Sự tồn tại của ánh xạ một bước cho phép ta định nghĩa ma trận chuyển trạng thái cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (2.1).

Định nghĩa 2.1.4 (xem [5, 6]). Ma trận chuyển trạng thái $\overline{\Phi}_\sigma(k, h)$ cho hệ (2.1) được xác định bởi

$$\overline{\Phi}_\sigma(k,h) = \Phi_{\sigma(k),\sigma(k-1)}\Phi_{\sigma(k-1),\sigma(k-2)} \ldots \Phi_{\sigma(h+1),\sigma(h)},$$

với $k > h$ và $\overline{\Phi}_\sigma(h,h) = \Pi^{\ker E_{\sigma(h)}}_{\mathcal{S}_{\sigma(h)}}$.

Khi đó, mọi nghiệm của hệ được cho bởi công thức

$$x(k) = \overline{\Phi}_\sigma(k,0)x(0), \tag{2.5}$$

Chú ý rằng, với $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ta có $x(0) = x_0$ khi và chỉ khi $x_0 \in \mathcal{S}_{\sigma(0)}$. Nói chung $x(0)$ phải thỏa mãn

$$x(0) = \Pi_{\mathcal{S}_{\sigma(0)}}^{\ker E_{\sigma(0)}} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Bổ đề 2.1.3 (xem [5, 6]). *Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dạng (2.1). Với* $i \in \underline{N}$, *gọi* $V_i := [s_i^1, \dots, s_i^r, h_i^{r+1}, \dots, h_i^n]$ *là ma trận có các cột tương ứng* $\{s_i^1, \dots, s_i^r\}$ *là các véc-tơ cơ sở của* $\mathcal{S}_i$ *và* $\{h_i^{r+1}, \dots, h_i^n\}$ *là các véc-tơ cơ sở của* $\ker E_i$. *Ký hiệu* $P := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q := I_n - P$. *Đặt* $P_i := V_i P V_i^{-1}$, $Q_i := I - P_i$ *và* $Q_{i,j} := V_j Q V_i^{-1}$, *ta có* $P_i = \Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_i}$, $Q_i = \Pi_{\ker E_i}^{\mathcal{S}_i}$, *với* $i, j \in \underline{N}$. *Khi đó, với mọi* $i, j \in \underline{N}$ *ta có các tính chất*

i) $G_{i,j} := E_i + A_i Q_{i,j}$ *là ma trận không suy biến,*

ii) $\Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_j} = I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i$,

iii) $\Phi_{(E_i, A_i)} = P_i G_{i,i}^{-1} A_i$,

iv) $\Phi_{i,j} = \left(I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i\right) P_j G_{j,j}^{-1} A_j$,

v) $P_i \Phi_{i,j} = \Phi_{i,j}$, $\Phi_{i,j} P_j = \Phi_{i,j}$,

vi) $E_i P_i = E_i$,

vii) $P_i = G_{i,j}^{-1} E_i$,

viii) $V_i^{-1} G_{i,j}^{-1} A_i V_j Q = Q$.

Chứng minh.

i) Giả sử $x \in \ker G_{i,j}$, tức là $A_i Q_{i,j} x = -E_i x \in \operatorname{im} E_i$, suy ra $Q_{i,j} x \in \mathcal{S}_i$. Ngoài ra, $Q_{i,j} x = V_j Q V_i^{-1} x \in \operatorname{im} V_j Q = \ker E_j$. Vì $\mathcal{S}_i \cap \ker E_j = \{0\}$, ta có $Q_{i,j} x = 0$, từ đó, $E_i x = -A_i Q_{i,j} x = 0$, do đó $x \in \ker E_i = \operatorname{im} Q_i$. Vì Q_i là phép chiếu, ta có $x = Q_i x$. Mặt khác $Q_i x = V_i V_j^{-1} Q_{i,j} x = 0$, nên $x = Q_i x = 0$. Điều này chứng tỏ $\ker G_{i,j} = \{0\}$, hay ma trận $G_{i,j}$ không suy biến.

ii) Ta chứng minh $Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i$ là phép chiếu dọc theo $\mathcal{S}_i$ lên $\ker E_j$, từ đó kéo theo $I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i = \Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_j}$. Trước tiên ta thấy rằng

$$G_{i,j} V_i Q = (E_i + A_i Q_{i,j}) V_i Q = A_i V_j Q.$$

Vì $E_iV_iQ = 0$, từ đó

$$\begin{aligned}\left(Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_i\right)^2 &= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}\underbrace{A_iV_jQ}V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_i \\ &= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}\underbrace{G_{i,j}V_iQ}V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_i \\ &= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_i,\end{aligned}$$

tức là $Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_i$ là phép chiếu.

Ta cần chứng tỏ rằng $\operatorname{im} Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_i = \ker E_j$ và $\ker Q_{i,j}G_{i,j}A_i = \mathcal{S}_i$. Từ tính chất $E_jV_jQ = 0$ kéo theo $\operatorname{im} Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_i \subseteq \ker E_j$. Với $x \in \ker E_j \subseteq \operatorname{im} Q_j$ ta có $x = Q_jx$ và từ đó

$$\begin{aligned}\operatorname{im} Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_i \ni Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_ix &= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}\underbrace{A_iV_jQ}V_j^{-1}x \\ &= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_ix \\ &= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}\underbrace{G_{i,j}V_iQ}V_j^{-1}x \\ &= V_jQV_j^{-1}x = x.\end{aligned}$$

Do đó $\ker E_j \subseteq \operatorname{im} Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_i$. Cuối cùng ta thu được các đẳng thức tương đương sau

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{S}_i &\iff A_ix = E_i\xi \text{ với } \xi \text{ nào đó} \\ &\iff G_{i,j}^{-1}A_ix = G_{i,j}^{-1}E_i\xi = P_i\xi \\ &\iff V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_ix = PV_i^{-1}\xi \\ &\iff QV_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_ix = 0 \\ &\iff Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_ix = 0.\end{aligned}$$

Từ đó ta thu được $\operatorname{im} \mathcal{S}_i = \ker Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_i$.

iii) Từ Bổ đề 1.2.1 ta có

$$(E_iV_iP + A_iV_iQ)^{-1}A_iV_i = \begin{bmatrix} J_i & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & I_{(n-r)} \end{bmatrix}$$

với ma trận $J_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Từ đó,

$$\Phi_{(E_i,A_i)} = V_iP(E_iV_iP + A_iV_iQ)^{-1}A_i.$$

Mặt khác

$$P_iG_{i,i}^{-1}A_i = V_iP(E_iV_i + A_iV_iQ)^{-1}A_i$$

và vì $E_iV_iP = E_iV_i$, đẳng thức được chứng minh.

iv) Đẳng thức này thu được trực tiếp từ mục $(ii),(iii)$ của Bổ đề này và Bổ đề 2.1.2.

v) Ta có

$$\Phi_{i,j}P_j = \Phi_{i,j}(I - Q_j) = \Phi_{i,j} - \Phi_{i,j}Q_j = \Phi_{i,j} - \Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_j} P_j G_{j,j}^{-1} A_j Q_j = \Phi_{i,j}.$$

vi) Vì Q_i là phép chiếu lên $\ker E_i$ dọc theo $\mathcal{S}_i$, nên $E_iQ_i = 0$.
Do đó, $E_iP_i = E_i(P_i + Q_i) = E_i$.

vii) Ta thấy $G_{i,j}P_i = (E_i + A_iV_jQV_i^{-1})V_iPV_i^{-1} = E_iP_i + A_iV_jQPV_i^{-1} = E_iP_i$.
Áp dụng khẳng định (vi) của Bổ đề này ta có $G_{i,j}P_i = E_i$. Do đó $P_i = G_{i,j}^{-1}E_i$.

viii) Ta có $G_{i,j}V_iQV_i^{-1} = (E_i + A_iV_jQV_i^{-1})V_iQV_i^{-1} = E_iQ_i + A_iV_jQV_i^{-1} = A_iV_jQV_i^{-1}$,
Suy ra $V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_iV_jQ = Q$. ■

Mệnh đề 2.1.1 (xem [6]). *Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có chỉ số 1 dạng* (2.1) *và gọi* V_i, $G_{i,j}$ *là các ma trận được cho trong Bổ đề* 2.1.3. *Khi đó*

$$\overline{A}_{i,j} = V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_iV_j = \begin{bmatrix} \overline{A}_{i,j}^1 & 0 \\ \overline{A}_{i,j}^2 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

với $\overline{A}_{i,j}^1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ *và* $\overline{A}_{i,j}^2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$. *Hơn nữa, ta thấy rằng* $x(\cdot)$ *là nghiệm của hệ* (2.1) *khi và chỉ khi* $v(\cdot)$ *là nghiệm của hệ*

$$v(k+1) = \overline{A}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}v(k), \tag{2.8}$$

trong đó

$$x(k) = V_{\sigma(k-1)} \begin{bmatrix} v(k) \\ -\overline{A}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}^2 v(k) \end{bmatrix}.$$

Chứng minh. Theo khẳng định $vii), viii)$ của Bổ đề 2.1.3 ta có $P_i = G_{i,j}^{-1}E_i$, $V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_iV_jQ = Q$.

Từ đây ta thu được

$$\bar{A}_{i,j} := V_i^{-1} G_{i,j}^{-1} A_i V_j = \begin{bmatrix} \bar{A}_{i,j}^1 & 0_{r\times(n-r)} \\ \bar{A}_{i,j}^2 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

$$\bar{E}_{i,j} := V_i^{-1} G_{i,j}^{-1} E_i V_i = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Nhân bên trái hai vế của hệ (2.1) với $V_{\sigma(k)}^{-1} G_{\sigma(k),\sigma(k-1)}^{-1}$ và dùng phép đổi biến $\bar{x}(k) = V_{\sigma(k-1)}^{-1} x(k)$, ta có

$$\bar{E}_{\sigma(k),\sigma(k-1)} \bar{x}(k+1) = \bar{A}_{\sigma(k),\sigma(k-1)} \bar{x}(k). \tag{2.9}$$

Đặt $\bar{x}(k) := (v(k)^\top, w(k)^\top)^\top$, ở đó $v(k) \in \mathbb{R}^r$, $w(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$, ta chuyển hệ (2.1) thành các hệ con (2.8) và

$$w(k) = -\bar{A}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}^2 v(k).$$

■

Dựa vào các kết quả nền tảng về tính giải được, công thức nghiệm cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) chỉ số 1 dạng (2.1) đã được trình bày ở mục 2.1. Chúng tôi đã nghiên cứu và đưa ra được một số kết quả cho tính dương của hệ SDLS chỉ số 1, điều kiện đủ cho tính ổn định và một số đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ SDLS chỉ số 1 dương. Các kết quả này đã được công bố trong [CT1] và được trình bày trong các mục dưới đây.

2.2. Tính dương và tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1

Trong phần này, chúng tôi đưa ra một số kết quả về tính dương và sự ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1. Đầu tiên, ta định nghĩa tính dương của hệ SDLS (2.1).

Định nghĩa 2.2.1. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) dạng (2.1) được gọi là *dương* nếu với mọi tín hiệu chuyển mạch σ và với mọi điều kiện ban đầu chấp nhận được $x(0) \in \mathcal{S}_{\sigma(0)} \cap \mathbb{R}_+^n$, ta có $x(k) \geq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một số đặc trưng cho tính dương của hệ (2.1). Các kết quả ở đây, chúng tôi phát triển từ các kết quả nền tảng cho tính dương của hệ sai phân suy biến (Định lý 1.2.2, 1.2.3).

Định lý 2.2.1. *Giả sử rằng hệ SDLS* (2.1) *có chỉ số 1. Các khẳng định sau là tương đương.*

i) Hệ SDLS (2.1) *là hệ dương.*

ii) Tồn tại các ma trận $H_{i,j}$ thỏa mãn điều kiện dưới đây

$$\begin{cases} H_{i,j} \geq 0, \\ \Phi_{i,j} = H_{i,j} P_j, \end{cases} \quad \forall i, j \in \underline{N}.$$

iii) Tồn tại các ma trận $D_{i,j}$ sao cho

$$\Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0, \quad \forall i, j \in \underline{N}.$$

Chứng minh. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Với mỗi $i, j \in \underline{N}$, lấy $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ thỏa mãn $\sigma(1) = i, \sigma(0) = j$. Từ công thức (2.6) và Bổ đề 2.1.3, $x(0) = P_{\sigma(0)} x_0 \geq 0$, dẫn đến $x(1) = \Phi_{\sigma(1),\sigma(0)} x(0) = \Phi_{\sigma(1),\sigma(0)} P_{\sigma(0)} x_0 \geq 0$. Do đó, từ Bổ đề 1.2.5, tồn tại ma trận $H_{\sigma(1),\sigma(0)} \geq 0$ sao cho $\Phi_{\sigma(1),\sigma(0)} P_{\sigma(0)} = H_{\sigma(1),\sigma(0)} P_{\sigma(0)}$. Hơn nữa, do

$$\Phi_{\sigma(1),\sigma(0)} P_{\sigma(0)} = \Phi_{\sigma(1),\sigma(0)},$$

ta thu được $\Phi_{\sigma(1),\sigma(0)} = H_{\sigma(1),\sigma(0)} P_{\sigma(0)}$. Điều này suy ra rằng $\Phi_{i,j} = H_{i,j} P_j$.

i) $\Leftarrow$ *ii)*. Vì $x(k) \in \mathcal{S}_{\sigma(k)}$ nên ta có $P_{\sigma(k)} x(k) = x(k)$. Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)} x(k) \\ &= H_{\sigma(k+1),\sigma(k)} P_{\sigma(k)} x(k) \\ &= H_{\sigma(k+1),\sigma(k)} x(k) \\ &= H_{\sigma(k+1),\sigma(k)} H_{\sigma(k),\sigma(k-1)} \ldots H_{\sigma(1),\sigma(0)} x(0). \end{aligned}$$

Do $x(0) \in \mathcal{S}_{\sigma(0)} \cap \mathbb{R}^n_+$ và $H_{i,j} \geq 0$ với mọi $i, j \in \underline{N}$, ta suy ra $x(k+1) \geq 0$.

$ii) \Rightarrow iii)$. Giả sử rằng phương trình $\Phi_{i,j} = H_{i,j}P_j$ giải được và có một nghiệm $H_{i,j} \geq 0$. Áp dụng Bổ đề 1.2.6 cho phương trình này, ta có tồn tại các ma trận $D_{i,j}$ sao cho

$$H_{i,j} = \Phi_{i,j}P_j^+ + D_{i,j}(I - P_jP_j^+).$$

Vì nghịch đảo Moore–Penrose của ma trận lũy đẳng P_j ($P_j = P_j^2$) chính là P_j (tức là, $P_j^+ = P_j$, $\Phi_{i,j}P_j = \Phi_{i,j}$ và $P_jP_j^+ = P_j^2 = P_j$), nên ta thu được

$$H_{i,j} = \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0, \quad \forall i, j \in \underline{N}.$$

$ii) \Leftarrow iii)$. Giả sử rằng tồn tại các ma trận $D_{i,j}$ sao cho

$$\Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0, \forall i, j \in \underline{N}.$$

Ta định nghĩa $H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0$. Áp dụng Bổ đề 2.1.3, ta có

$$H_{i,j}P_j = \Phi_{i,j}P_j + D_{i,j}(I - P_j)P_j = \Phi_{i,j}.$$

Vậy tồn tại ma trận $H_{i,j} \geq 0$ sao cho $\Phi_{i,j} = H_{i,j}P_j$ với mọi $i, j \in \underline{N}$. ■

Nhận xét 2.2.1. Sự tồn tại của ma trận $H_{i,j}$ không âm và thỏa mãn đẳng thức tuyến tính trong điều kiện $ii)$ của Định lý 2.2.1 có thể được kiểm tra thông qua dạng quy hoạch tuyến tính, bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Hơn nữa, điều kiện $iii)$ có thể được biểu diễn lại theo dạng

$$[(P_{i,j}^\top - I) \otimes I]x_{i,j} \leq b_{i,j},$$

với $x_{i,j} = \mathbf{vec}(D_{i,j})$ và $b_{i,j} = \mathbf{vec}(\Phi_{i,j})$.

Tiếp theo, ta đưa ra định nghĩa tính ổn định tiệm cận của hệ SDLS (2.1).

Định nghĩa 2.2.2. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (2.1) được gọi là *ổn định tiệm cận* nếu với mọi tín hiệu chuyển mạch σ và điều kiện ban đầu $x(0) \in \mathcal{S}_{\sigma(0)}$, ta có $x(k) \to 0$ khi $k \to \infty$.

Trong Chương 2, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định của hệ SDLS theo nghĩa ổn định tiệm cận như Định nghĩa 2.2.2. Bằng cách sử dụng nguyên lý so sánh và các đặc trưng cho tính dương của hệ SDLS (2.1) ở trên, ta thu được định lý cho tính ổn định của hệ như sau.

Định lý 2.2.2. *Giả sử rằng hệ SDLS* (2.1) *có chỉ số 1 và với mọi* $i, j \in \underline{N}$ *tồn tại ma trận* $D_{i,j}$ *sao cho*

$$H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j)$$

là ma trận không âm và $H_{i,j} \leq H$ *với* H *là ma trận Schur. Khi đó, hệ SDLS* (2.1) *là hệ dương và ổn định.*

Chứng minh. Do $P_{\sigma(k)}x(k) = x(k)$,

$$D_{\sigma(k+1),\sigma(k)}\left(I - P_{\sigma(k)}\right)x(k) = D_{\sigma(k+1),\sigma(k)}\left(I - P_{\sigma(k)}\right)P_{\sigma(k)}x(k) = 0,$$

nên ta thu được

$$\begin{aligned} H_{\sigma(k+1),\sigma(k)}x(k) &= [\Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)} + D_{\sigma(k+1),\sigma(k)}(I - P_{\sigma(k)})]x(k) \\ &= \Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)}x(k) = x(k+1). \end{aligned}$$

Sử dụng giả thiết $H_{\sigma(k+1),\sigma(k)} \geq 0$, ta suy ra hệ (2.1) là hệ dương. Bây giờ, ta xét hệ

$$\begin{cases} y(k+1) = Hy(k), \\ y(0) = x(0). \end{cases} \tag{2.10}$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$0 \leq x(k) \leq y(k), \quad \text{với mọi} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Thật vậy, ta chứng minh bằng quy nạp. Giả sử rằng (2.11) đúng với $i = k$. Vì $0 \leq H_{\sigma(k+1),\sigma(k)} \leq H$, nên suy ra

$$x(k+1) = H_{\sigma(k+1),\sigma(k)}x(k) \leq Hx(k) \leq Hy(k) = y(k+1).$$

Do đó, (2.11) đúng với $i = k + 1$ và ta có điều phải chứng minh. Vì H là ma trận Schur nên hệ (2.10) là ổn định, dẫn đến hệ SDLS (2.1) ổn định. Định lý được chứng minh. ■

Tính dương và tính ổn định của hệ SDLS (2.1) có thể kiểm tra đồng thời thông qua dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính, được phát biểu trong định lý dưới đây.

Định lý 2.2.3. *Giả sử rằng hệ SDLS* (2.1) *có chỉ số 1 và tồn tại véc-tơ* $v \in \mathbb{R}^n$, $v > 0$ *và các ma trận* $Z_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sao cho*

$$\begin{cases} v^\top(\Phi_{i,j} - I) + \mathbb{1}_n^\top Z_{i,j}(I - P_j) < 0, \\ \mathrm{diag}(v)\Phi_{i,j} + Z_{i,j}(I - P_j) \geq 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

với mọi $i, j \in \underline{N}$, *trong đó* $\mathbb{1}_n = [1, \ldots, 1]^\top$. *Khi đó, hệ SDLS* (2.1) *là hệ dương và ổn định.*

Chứng minh. Nhân vào bên trái hai vế của phương trình thứ hai trong (3.24) với $\mathrm{diag}(v)^{-1}$ ta được

$$\Phi_{i,j} + \mathrm{diag}(v)^{-1} Z_{i,j}(I - P_j) \geq 0.$$

Đặt $D_{i,j} := \mathrm{diag}(v)^{-1} Z_{i,j}$ và ta có

$$H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0.$$

Điều kiện này suy ra hệ SDLS (2.1) là hệ dương. Do

$$\begin{cases} v^\top = \mathbb{1}_n^\top \mathrm{diag}(v), \\ Z_{\sigma(k+1),\sigma(k)} = \mathrm{diag}(v) D_{\sigma(k+1),\sigma(k)}, \end{cases}$$

nên ta có

$$\begin{aligned}
& v^\top(\Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)} - I) + \mathbb{1}_n^\top Z_{\sigma(k+1),\sigma(k)}(I - P_{\sigma(k)}) \\
= \ & v^\top(\Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)} - I) + v^\top D_{\sigma(k+1),\sigma(k)}(I - P_{\sigma(k)}) \\
= \ & v^\top \left(\Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)} - I + D_{\sigma(k+1),\sigma(k)}(I - P_{\sigma(k)})\right) \\
= \ & v^\top \left(\Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)} + D_{\sigma(k+1),\sigma(k)}(I - P_{\sigma(k)}) - I\right) \\
= \ & v^\top \left(H_{\sigma(k+1),\sigma(k)} - I\right) < 0.
\end{aligned}$$

Áp dụng Mệnh đề 1.3.1, ta suy ra phương trình $x(k+1) = H_{\sigma(k+1),\sigma(k)} x(k)$ ổn định và do đó hệ SDLS (2.1) ổn định. Định lý được chứng minh. ∎

Bằng cách lập luận tương tự như Định lý 1.3.2, ta thu được điều kiện ổn định với thời gian dừng nhỏ nhất cho hệ SDLS (2.1) như sau.

Định lý 2.2.4. *Giả sử rằng hệ SDLS* (2.1) *có chỉ số 1. Với hằng số* $1 \leq \tau \in \mathbb{N}$ *cho trước, các khẳng định sau là tương đương:*

i) Tồn tại ma trận $D_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *và một tập các véc-tơ* $v_{i,j} \in \mathbb{R}^n, v_{i,j} > 0, i, j \in \underline{N}$ *sao cho*

$$\begin{cases} H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0,\ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{i,j}^\top (H_{i,j} - I) < 0,\ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{i,j}^\top H_{i,j}^\tau - v_{h,k}^\top < 0,\ \forall i, j, h, k \in \underline{N}; \end{cases}$$

ii) Tồn tại ma trận $D_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *và một tập các véc-tơ* $v_{i,j,l} \in \mathbb{R}^n$, $v_{i,j,\tau} > 0$, $i, j \in \underline{N}, l = 0, 1, \ldots \tau$ *sao cho*

$$\begin{cases} H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0,\ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{h,k,0} - v_{i,j,\tau} < 0,\ \forall i, j, h, k \in \underline{N}, \\ v_{i,j,\tau}^\top (H_{i,j} - I) < 0,\ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{i,j,l+1}^\top H_{i,j} - v_{i,j,l}^\top \leq 0,\ \forall i, j \in \underline{N}, 0 \leq l \leq \tau - 1. \end{cases}$$

Hơn nữa, khi một trong các khẳng định trên đúng, hệ SDLS (2.1) *là hệ dương và ổn định với dãy thời điểm chuyển mạch* $\{k_q\}_q$ *thỏa mãn* $\tau_q \geq \tau$.

2.3. Tính ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương

Ta định nghĩa tập điều kiện ban đầu không âm chấp nhận được $\mathcal{S} = \cup_{i\in\underline{N}}\mathcal{S}_i \cap \mathbb{R}^n_+$.

Định nghĩa 2.3.1. i) Hệ SDLS chỉ số 1 dương (2.1) được gọi là *ổn định hóa được* nếu với mỗi điều kiện ban đầu dương $x(0) \in \mathcal{S}$ tồn tại một dãy chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ sao cho quỹ đạo trạng thái $x(k)$ hội tụ về 0.

ii) Hệ SDLS chỉ số 1 dương (2.1) được gọi là *ổn định hóa được nhất quán* nếu tồn tại dãy chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ sao cho với mỗi $i \in \underline{N}$, với mọi điều kiện ban đầu dương $x(0) \in \mathcal{S}_i \cap \mathbb{R}^n_+$, quỹ đạo trạng thái tương ứng $x(k)$ hội tụ về 0.

Nhận xét 2.3.1. Trong định nghĩa *ổn định hóa được*, việc chọn dãy chuyển mạch σ có thể phụ thuộc vào điều kiện ban đầu $x(0) \in \mathcal{S}$ còn trong định nghĩa *ổn định* *hóa được nhất quán*, dãy chuyển mạch σ không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu $x(0) \in \mathcal{S}_i \cap \mathbb{R}^n_+$ với mỗi $i \in \underline{N}$, nhưng nó có thể phụ thuộc vào $\mathcal{S}_i$.

Theo định nghĩa, hệ *ổn định hóa được nhất quán* suy ra hệ *ổn định hóa được*. Hơn nữa, chúng tôi chỉ ra với hệ SDLS chỉ số 1 dương dạng (2.1), hai định nghĩa trên tương đương với nhau và chúng tương đương với khả năng ổn định hóa được hệ bằng một dãy chuyển mạch tuần hoàn không phụ thuộc vào điều kiện ban đầu dương, trong định lý dưới đây.

Định lý 2.3.1. *Giả sử hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dạng* (2.1) *là hệ dương. Khi đó, các khẳng định sau tương đương:*

i) hệ ổn định hóa được;

ii) hệ ổn định hóa được nhất quán;

iii) tồn tại $T > 0$ và bộ chỉ số $i_0, i_1, \ldots, i_T \in \underline{N}$ thỏa mãn $i_T = i_0$ sao cho

$$\|\Phi_{i_T,i_{T-1}}\Phi_{i_{T-1},i_{T-2}}\ldots\Phi_{i_1,i_0}\| < 1;$$

iv) với mỗi $p \in \underline{N}$ và điều kiện ban đầu dương $x(0) \in \mathcal{S}_p \cap \mathbb{R}^n_+$, tồn tại một quy tắc chuyển mạch tuần hoàn để hệ ổn định.

Chứng minh. *i)* $\Longrightarrow$ *ii)*. Giả sử rằng, tồn tại một quy tắc chuyển mạch σ đưa quỹ đạo trạng thái tiệm cận về 0 từ trạng thái ban đầu $\widehat{x}(0) \in \mathcal{S}_i \cap \dot{\mathbb{R}}^n_+$, $\widehat{x}(0)$ có các thành phần dương chặt. Ta sẽ chứng minh rằng, quy tắc chuyển mạch này cũng đưa quỹ đạo trạng thái tiệm cận về 0 từ bất kỳ trạng thái ban đầu dương khác $x(0) \in \mathcal{S}_i \cap \mathbb{R}^n_+$. Gọi $\widehat{x}(k)$ và $x(k)$ là các trạng thái tương ứng bắt đầu từ $\widehat{x}(0) \in S_i \cap \dot{\mathbb{R}}^n_+$ và $x(0) \in \mathcal{S}_i \cap \mathbb{R}^n_+$ và ứng với quy tắc chuyển mạch σ. Khi đó, tồn tại một số dương α sao cho $0 < x(0) \leq \alpha\widehat{x}(0)$. Do hệ SDLS (2.1) là hệ dương nên từ Định lý 2.2.1 ta có, với k bất kỳ, luôn tồn tại ma trận $H_{\sigma(k+1),\sigma(k)} \geq 0$ thỏa mãn

$$x(k+1) = H_{\sigma(k+1),\sigma(k)}P_{\sigma(k)}x(k) = H_{\sigma(k+1),\sigma(k)}x(k).$$

Do đó, sử dụng phương pháp quy nạp và nguyên lý so sánh, ta suy ra, với mọi $k \in \mathbb{N}$ ta có $0 \leq x(k) \leq \alpha\widehat{x}(k) \to 0$ khi $k \to +\infty$. Điều này dẫn đến $x(k)$ hội tụ về 0 khi $k \to +\infty$. Vậy hệ SDLS (2.1) ổn định hóa được nhất quán.

$ii) \Longrightarrow iii)$. Giả sử rằng, hệ (2.1) là ổn định hóa được nhất quán. Gọi σ là quy tắc chuyển mạch làm cho quỹ đạo trạng thái hội tụ về 0 và σ không phụ thuộc vào trạng thái ban đầu $x(0)$. Lấy $x(0) \in \mathcal{S}_{\sigma(0)} \cap \dot{\mathbb{R}}^n_+$, với chú ý $x(0)$ có các thành phần dương chặt và $\varepsilon \in (0,1)$ đủ nhỏ. Khi đó, tồn tại một số nguyên $p > 0$ sao cho với mọi $k \geq p$ ta có

$$\begin{aligned} x(k) &= \Phi_\sigma(k,0)x(0) \\ &= \Phi_{\sigma(k),\sigma(k-1)}\Phi_{\sigma(k-1),\sigma(k-2)}\dots\Phi_{\sigma(1),\sigma(0)}x(0) \\ &< \varepsilon x(0). \end{aligned}$$

Do hệ SDLS (2.1) là hệ dương nên từ Định lý 2.2.1 ta có, tồn tại các ma trận $H_{i,j} \geq 0$ sao cho

$$\begin{aligned} x(p) &= H_{\sigma(p),\sigma(p-1)}P_{\sigma(p-1)}x(p-1) = H_{\sigma(k),\sigma(k-1)}x(p-1) \\ &= H_{\sigma(p),\sigma(p-1)}H_{\sigma(p-1),\sigma(p-2)}\dots H_{\sigma(1),\sigma(0)}x(0) \\ &< \varepsilon x(0). \end{aligned}$$

Nhân cả hai vế của bất phương trình trên từ bên trái với $H_{\sigma(0),\sigma(p)}$, ta suy ra

$$\begin{aligned} &H_{\sigma(0),\sigma(p)}H_{\sigma(p),\sigma(p-1)}H_{\sigma(p-1),\sigma(p-2)}\dots H_{\sigma(1),\sigma(0)}x(0) \\ &\leq \varepsilon H_{\sigma(0),\sigma(p)}x(0). \end{aligned}$$

Ta định nghĩa

$$H_\sigma(p) := H_{\sigma(0),\sigma(p)}H_{\sigma(p),\sigma(p-1)}H_{\sigma(p-1),\sigma(p-2)}\dots H_{\sigma(1),\sigma(0)}.$$

Với $0 < \varepsilon_2 < 1$, ta có thể chọn ε đủ nhỏ sao cho

$$H_\sigma(p)x(0) \leq \varepsilon H_{\sigma(0),\sigma(p)}x(0) < (1-\varepsilon_2)x(0).$$

Áp dụng Hệ quả 1.1.2, ta suy ra được bán kính phổ của ma trận dương $H_\sigma(p)$ nhỏ hơn $(1-\varepsilon_2)$. Điều này dẫn đến, tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho

$$\|H^k_\sigma(p)\| < (1-\varepsilon_2)^k, \ \forall k \geq k_0.$$

Ta chọn $q \geq k_0$ sao cho $(1-\varepsilon_2)^q \max\limits_{i \in \underline{N}} \|P_i\| < 1$ và đặt $T = q(p+1)$. Với $0 \leq k \leq T$, ta chọn dãy

$$i_k = \begin{cases} \sigma(k), & k = 0, 1, \dots, p; \\ \sigma(0), & k = p + 1; \\ i_l, & k = l + \overline{r}(p + 1), 0 \le l \le p, 1 \le \overline{r} \le q - 1; \\ \sigma(0), & k = q(p + 1). \end{cases}$$

Khi đó, sử dụng tính chất $P_i \Phi_{i,j} = \Phi_{i,j}$, ta có

$$\begin{aligned} & \|\Phi_{i_T,i_{T-1}} \Phi_{i_{T-1},i_{T-2}} \dots \Phi_{i_1,i_0}\| \\ =& \|H_{i_T,i_{T-1}} P_{i_{T-1}} \Phi_{i_{T-1},i_{T-2}} \dots \Phi_{i_1,i_0}\| \\ =& \|H_{i_T,i_{T-1}} \Phi_{i_{T-1},i_{T-2}} \dots \Phi_{i_1,i_0}\| \\ =& \dots \\ =& \|H_{i_T,i_{T-1}} H_{i_{T-1},i_{T-2}} H_{i_{T-2},i_{T-3}} \dots H_{i_1,i_0} P_{i_0}\| \\ \le& \|H_{i_T,i_{T-1}} H_{i_{T-1},i_{T-2}} H_{i_{T-2},i_{T-3}} \dots H_{i_1,i_0}\| \|P_{i_0}\| \\ =& \|H_\sigma^q(p)\| \|P_{i_0}\| < (1 - \varepsilon_2)^q \max_{i \in \underline{N}} \|P_i\| < 1. \end{aligned}$$

Vậy $ii) \Longrightarrow iii)$ được chứng minh.

$iii) \Longrightarrow iv)$. Giả sử rằng, tồn tại $T > 0$ và các chỉ số $i_0, i_1, \dots, i_T \in \underline{N}$ với $i_T = i_0$ sao cho

$$\|\Phi_{i_T,i_{T-1}} \Phi_{i_{T-1},i_{T-2}} \dots \Phi_{i_1,i_0}\| < 1.$$

Đặt $\Phi := \Phi_{i_T,i_{T-1}}.\Phi_{i_{T-1},i_{T-2}} \dots \Phi_{i_1,i_0}$. Do $\|\Phi\| < 1$ nên với mỗi $p \in \underline{N}$, tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $\|\Phi_{p,i_0} \Phi^k \Phi_{i_0,p}\| < 1$. Điều này suy ra rằng, tồn tại bộ chỉ số $\hat{i}_0, \hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{\widetilde{T}} \in \underline{N}$ với $\widetilde{T} = kT + 2$, $\hat{i}_{\widetilde{T}} = \hat{i}_0 = p$ sao cho

$$\|\Phi_{\hat{i}_{\widetilde{T}},\hat{i}_{\widetilde{T}-1}} \Phi_{\hat{i}_{\widetilde{T}-1},\hat{i}_{\widetilde{T}-2}} \dots \Phi_{\hat{i}_1,\hat{i}_0}\| < 1.$$

Ta định nghĩa quy tắc chuyển mạch tuần hoàn

$$\sigma(k) = \hat{i}_l \quad \text{nếu} \quad k = l + \overline{r}\widetilde{T},\ 0 \le l \le \widetilde{T} - 1,\ \overline{r} \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, ta dễ thấy rằng dãy chuyển mạch tuần hoàn này đưa quỹ đạo trạng thái $x(k)$ từ mọi trạng thái ban đầu dương $x(0) \in \mathcal{S}_p \cap \mathbb{R}^n_+$ hội tụ về 0.

$iv) \Longrightarrow i)$. là hiển nhiên. ∎

Nhận xét 2.3.2. Định lý 2.3.1 tổng quát hóa kết quả cho tính ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính không suy biến khi $E_i = I$ với mọi $i \in \underline{N}$ được đưa ra trong Mệnh đề 1.3.2.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra định nghĩa dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận $\{(E_1, A_1), (E_2, A_2), \ldots, (E_s, A_s)\}$. Từ đó, đưa ra đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương dạng (2.1).

Định nghĩa 2.3.2. Dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận $\{(E_i, A_i)\}_1^s$ cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dạng (2.1) được định nghĩa như sau

$$\check{\rho}(\{(E_i, A_i)\}_1^s) := \lim_{k\to\infty} \min_{i_0, i_1, \ldots, i_k \in \underline{N}} \|\Phi_{i_k, i_{k-1}} \Phi_{i_{k-1}, i_{k-2}} \ldots \Phi_{i_1, i_0}\|^{\frac{1}{k}}, \qquad (2.13)$$

trong đó $\Phi_{i,j}$ là ánh xạ một bước từ mode j đến mode i.

Để chứng minh sự tồn tại của giới hạn trong định nghĩa trên, ta cần mở rộng Bổ đề Fekete (xem [19]).

Bổ đề 2.3.1. *(Bổ đề Fekete mở rộng) Cho $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ là dãy số thực sao cho*

$$a_{i+j+1} \le c + a_i + a_j, \quad \forall i, j \ge 1,$$

trong đó c là hằng số. Khi đó, giới hạn $\lim_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{k}$ tồn tại và bằng $\inf_{k\ge 1} \left\{\dfrac{a_k + c}{k}\right\}$.

Chứng minh. Đặt $b_k := a_k + c$ và $L = \inf_{k\ge 1} \dfrac{b_k}{k}$. Theo giả thiết, ta có $b_{i+j+1} \le b_i + b_j$ với mọi $i, j \ge 1$. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, từ định nghĩa của cận dưới đúng, ta có thể chọn n_0 sao cho $b_{n_0} < n_0(L + \varepsilon)$. Gọi $b := \max_{0\le i\le n_0} b_i$. Với $m \ge n_0 + 1$, ta lấy $q \in \mathbb{N}$ sao cho $q(n_0 + 1) \le m \le q(n_0 + 1) + n_0$. Đặt $m = qn_0 + \hat{r}$, ta suy ra được $0 \le \hat{r} - q \le n_0$. Từ tính chất dưới cộng tính, ta có

$$\begin{aligned} b_m = b_{qn_0 + r} &= b_{\underbrace{n_0 + n_0 + \cdots + n_0}_{q \text{ số hạng}} + \hat{r}} \\ &\le b_{n_0} + b_{\underbrace{n_0 + n_0 + \cdots + n_0}_{q-1 \text{ số hạng}} + \hat{r} - 1} \\ &\le \cdots \le qb_{n_0} + b_{\hat{r} - q} \le qb_{n_0} + b. \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$L \leq \frac{b_m}{m} \leq \frac{qb_{n_0}}{m} + \frac{b}{m} \leq \frac{n_0(L+\varepsilon)}{n_0+1} + \frac{b}{m} < L + 2\varepsilon,$$

với mọi $m \geq \frac{|b|}{\varepsilon}$, điều này dẫn đến $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{b_k}{k} = L.$ ■

Từ Bổ đề Fekete mở rộng trên, ta có hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.3.1. *Cho $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ là dãy số dương và $c > 0$ sao cho*

$$a_{i+j+1} \leq c a_i a_j, \quad \text{với mọi } i, j \geq 1.$$

Khi đó, giới hạn $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k)^{\frac{1}{k}}$ tồn tại.

Bây giờ, ta chứng minh định nghĩa dưới bán kính phổ là định nghĩa tốt, nghĩa là giới hạn ở vế phải của (2.13) tồn tại hữu hạn. Đặt

$$a_k := \min_{i_0, i_1, \ldots, i_k \in \underline{N}} \|\Phi_{i_k, i_{k-1}} \Phi_{i_{k-1}, i_{k-2}} \ldots \Phi_{i_1, i_0}\|.$$

Ta chọn $\hat{i}_{k+m+1}, \hat{i}_{k+m}, \ldots, \hat{i}_{m+1}$ và $\hat{i}_m, \hat{i}_{m-1}, \ldots, \hat{i}_0$ sao cho

$$\begin{aligned} a_k &= \|\Phi_{\hat{i}_{k+m+1}, \hat{i}_{k+m}} \Phi_{\hat{i}_{k+m}, \hat{i}_{k+m-1}} \ldots \Phi_{\hat{i}_{m+2}, \hat{i}_{m+1}}\|, \\ a_m &= \|\Phi_{\hat{i}_m, \hat{i}_{m-1}} \Phi_{\hat{i}_{m-1}, \hat{i}_{m-2}} \ldots \Phi_{\hat{i}_1, \hat{i}_0}\|. \end{aligned}$$

Ta có đánh giá

$$\begin{aligned} a_{k+m+1} &= \min_{i_{k+m+1}, i_{k+m}, \ldots, i_1, i_0 \in \underline{N}} \|\Phi_{i_{k+m+1}, i_{k+m}} \ldots \Phi_{i_1, i_0}\| \\ &\leq \|\Phi_{\hat{i}_{k+m+1}, \hat{i}_{k+m}} \ldots \Phi_{\hat{i}_{m+2}, \hat{i}_{m+1}} \Phi_{\hat{i}_{m+1}, \hat{i}_m} \Phi_{\hat{i}_m, \hat{i}_{m-1}} \ldots \Phi_{\hat{i}_1, \hat{i}_0}\| \\ &\leq \|\Phi_{\hat{i}_{k+m+1}, \hat{i}_{k+m}} \ldots \Phi_{\hat{i}_{m+2}, \hat{i}_{m+1}}\| \|\Phi_{\hat{i}_{m+1}, \hat{i}_m}\| \|\Phi_{\hat{i}_m, \hat{i}_{m-1}} \ldots \Phi_{\hat{i}_1, \hat{i}_0}\| \\ &\leq c a_k a_m, \end{aligned}$$

trong đó $c = \max\limits_{i,j \in \underline{N}} \|\Phi_{i,j}\|$. Từ Hệ quả 2.3.1 ta suy ra giới hạn trong Định nghĩa 2.3.2 tồn tại và hữu hạn.

Nhận xét 2.3.3. i) Trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$, các chuẩn tương đương với nhau nên định nghĩa dưới bán kính phổ (Định nghĩa 2.3.2) không phụ thuộc vào chuẩn được sử dụng.

ii) Trường hợp cặp ma trận (E_i, A_i) có chỉ số 0 với $i = 1, 2, \ldots, s$, tức là $E_i = I_n, i = 1, 2, \ldots, s$, ta có $P = I_n$ và $Q = 0_n$ thì $G_{i,j} = E_i = I_n$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Chọn $V_i = I_n$, ta tìm được $\Phi_{i_k,i_{k-1}}\Phi_{i_{k-1},i_{k-2}}\ldots\Phi_{i_1,i_0} = A_{i_{k-1}}A_{i_{k-2}}\ldots A_{i_0}$. Từ đó, dưới bán kính phổ của một họ các ma trận $\{(I_n, A_i)\}_{i=1}^s$ chính là dưới bán kính phổ của một họ các ma trận $\{A_i\}_{i=1}^s$ được đưa ra bởi Gurvits như Định nghĩa 1.1.2.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ để hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương có dạng (2.1) ổn định hóa được dựa vào dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận $\{(E_i, A_i)\}_1^s$.

Định lý 2.3.2. *Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương dạng* (2.1) *ổn định hóa được khi và chỉ khi*

$$\check{\rho}\left(\{(E_i, A_i)\}_1^s\right) < 1.$$

Chứng minh. *Điều kiện đủ.* Giả sử $\check{\rho}\left(\{(E_i, A_i)\}_1^s\right) < 1$. Ta sẽ chứng minh rằng hệ SDLS dương (2.1) ổn định hóa được. Vì $\check{\rho}\left(\{(E_i, A_i)\}_1^s\right) < 1$ nên tồn tại $K > 0$ và $\lambda \in (0, 1)$ sao cho với mọi $k > K$ ta có

$$\min_{i_0,i_1,\ldots,i_k \in \underline{N}} \|\Phi_{i_k,i_{k-1}}.\Phi_{i_{k-1},i_{k-2}}\ldots\Phi_{i_1,i_0}\|^{1/k} < \lambda$$
$$\Leftrightarrow \min_{i_0,i_1,\ldots,i_k \in \underline{N}} \|\Phi_{i_k,i_{k-1}}.\Phi_{i_{k-1},i_{k-2}}\ldots\Phi_{i_1,i_0}\| < \lambda^k < 1.$$

Do đó, tồn tại $T > K + 1$ và $\hat{i}_0, \hat{i}_1, \ldots, \hat{i}_{T-1} \in \underline{N}$ sao cho

$$\|\Phi_{\hat{i}_0,\hat{i}_{T-1}}\Phi_{\hat{i}_{T-1},\hat{i}_{T-2}}\Phi_{\hat{i}_{T-2},\hat{i}_{T-3}}\ldots\Phi_{\hat{i}_1,\hat{i}_0}\| < c\lambda^T < 1,$$

với $c = \max\limits_{i,j \in \underline{N}} \|\Phi_{i,j}\|$. Áp dụng Định lý 2.3.1, hệ SDLS dương (2.1) là ổn định hóa được.

Điều kiện cần. Vì hệ SDLS dương (2.1) là ổn định hóa được nên theo Định lý 2.3.1, tồn tại $T > 0$ và bộ chỉ số $\hat{i}_0, \hat{i}_1, \ldots \hat{i}_T \in \underline{N}$ với $\hat{i}_0 = \hat{i}_T$ sao cho

$$\|\Phi_{\hat{i}_T,\hat{i}_{T-1}}\Phi_{\hat{i}_{T-1},\hat{i}_{T-2}}\ldots\Phi_{\hat{i}_1,\hat{i}_0}\| < 1,$$

điều này dẫn đến

$$\|\Phi_{\hat{i}_T,\hat{i}_{T-1}}\Phi_{\hat{i}_{T-1},\hat{i}_{T-2}}\ldots\Phi_{\hat{i}_1,\hat{i}_0}\|^{\frac{1}{T}} < 1.$$

Ta định nghĩa dãy tuần hoàn $\hat{i}_k = \hat{i}_l$ với $k = l + qT;\ 0 \le l \le T-1;\ q \in \mathbb{N}$. Khi đó, ta có

$$\|\Phi_{\hat{i}_{qT},\hat{i}_{qT-1}}\Phi_{\hat{i}_{qT-1},\hat{i}_{qT-2}}\dots\Phi_{\hat{i}_1,\hat{i}_0}\|^{\frac{1}{qT}}\le\|\Phi_{\hat{i}_T,\hat{i}_{T-1}}\dots\Phi_{\hat{i}_1,\hat{i}_0}\|^{\frac{1}{T}}.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}\check{\rho}(\{(E_i,A_i)\}_1^s)&=\lim_{k\to\infty}\min_{i_0,i_1,\dots,i_k\in\underline{N}}\|\Phi_{i_k,i_{k-1}}\Phi_{i_{k-1},i_{k-2}}\dots\Phi_{i_1,i_0}\|^{\frac{1}{k}}\\&\le\lim_{q\to\infty}\|\Phi_{\hat{i}_{qT},\hat{i}_{qT-1}}\Phi_{\hat{i}_{qT-1},\hat{i}_{qT-2}}\dots\Phi_{\hat{i}_1,\hat{i}_0}\|^{\frac{1}{qT}}<1.\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. ■

Mặc dù hoàn toàn có thể xác định dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận $\{(E_i,A_i)\}_1^s$ thông qua các ánh xạ một bước $\Phi_{i,j}$, chúng tôi đưa ra một cách tiếp cận hiệu quả khác để xác định dưới bán kính phổ, bằng cách đưa hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến n chiều ban đầu về hệ chuyển mạch tuyến tính không suy biến r chiều như trong Mệnh đề 2.1.1. Phần chứng minh của hệ quả dưới đây tương tự như chứng minh Định lý 5.7 trong [6].

Hệ quả 2.3.2. *Giả sử hệ SDLS dạng* (2.1) *là hệ dương và có chỉ số 1. Xét hệ giản lược* (2.8). *Khi đó*

$$\check{\rho}\left(\{(E_i,A_i)\}_{i=1}^s\right)=\lim_{k\to\infty}\min_{i_{-1},i_0,\dots,i_{k-1}\in\underline{N}}\|\overline{A}^1_{i_{k-1},i_{k-2}}\dots\overline{A}^1_{i_0,i_{-1}}\|^{\frac{1}{k}},$$

trong đó $\overline{A}^1_{i_{k-1},i_{k-2}},\dots,\overline{A}^1_{i_0,i_{-1}}$ *xác định như trong Mệnh đề 2.1.1 và hệ* (2.1) *là ổn định hóa được khi và chỉ khi dưới bán kính phổ này nhỏ hơn* 1.

Ví dụ 2.3.1. Xét hệ SDLS (2.1) với quy tắc chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N}\cup\{0\} \to \{1,2\} = \underline{N}$ và

$$E_1=\begin{pmatrix}-1&-3&1\\-1&-3&1\\1&-1&-1\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}-3&6&3\\0&3&0\\6&9&-6\end{pmatrix},$$

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&-1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix},\qquad A_2=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&2&1\\1&2&-3\end{pmatrix}.$$

Ta tìm được

$$\ker E_1 = \ker E_2 = \operatorname{span}\{(1,0,1)^\top\},$$
$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \operatorname{span}\{(1,-1,0)^\top, (0,1,-1)^\top\}.$$

Do đó $\mathcal{S}_i \cap \ker E_j = \{0\}, \forall i,j \in \underline{N}$ và $\operatorname{rank} E_i = 2 < 3$. Điều này chứng tỏ hệ SDLS với các ma trận hệ số đã cho có chỉ số 1. Ta có

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$Q_i = V_i Q V_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad Q_{i,j} = V_j Q V_i^{-1} = Q_i.$$

Do $G_{i,j} = E_i + A_i Q_{i,j}, \forall i,j \in \underline{N}$, nên ta tính được

$$G_{1,j} = \begin{pmatrix} -3/2 & -7/2 & 1/2 \\ -1/2 & -5/2 & 3/2 \\ 1/2 & -3/2 & -3/2 \end{pmatrix}, \quad G_{1,j}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix},$$
$$G_{2,j} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad G_{2,j}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 11/24 & -1/4 \\ 1/12 & 1/24 & 1/24 \\ -1/12 & 3/8 & -1/8 \end{pmatrix},$$

và $\Pi_{S_i}^{\ker E_j} = I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i = P_i$. Từ $\Phi_{(E_i,A_i)} = P_i G_{i,i}^{-1} A_i$, ta có

$$\Phi_{(E_1,A_1)} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{(E_2,A_2)} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Vì $\Phi_{i,j} = \Pi_{S_i}^{\ker E_j} \Phi_{(E_j,A_j)} = P_i \Phi_{(E_j,A_j)}$, nên $\Phi_{i,1} = \Phi_{(E_1,A_1)}, \Phi_{i,2} = \Phi_{(E_2,A_2)}$ và ta tìm được

$$\Phi_{1,1} = \Phi_{2,1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{1,2} = \Phi_{2,2} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/6 & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Ta chọn

$$H_{1,1} = H_{2,1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_{1,2} = H_{2,2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix},$$

khi đó, điều kiện $\begin{cases} H_{i,j} \geq 0, \\ \Phi_{i,j} = H_{i,j}P_j, \end{cases}$ đúng với mọi $i, j \in \underline{N}$. Theo Định lý 2.2.1, hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính với các ma trận ở trên là hệ dương.
Do $\overline{A}_{i,j} = V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_iV_j$, nên ta tính được

$$\overline{A}_{1,j} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{A}_{1,1}^1 = \overline{A}_{1,2}^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$\overline{A}_{2,j} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \overline{A}_{2,1}^1 = \overline{A}_{2,2}^1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Áp dụng Hệ quả 2.3.2, ta thu được $\breve{\rho}\left(\{(E_i, A_i)\}_{i=1}^2\right) = \dfrac{1}{3} < 1$. Vậy hệ SDLS (2.1) với các cặp $\{(E_i, A_i)\}_{i=1,2}$ đã cho là hệ dương và ổn định hóa được. Hơn nữa, do $\|\Phi_{1,1}\|_\infty < 1$ và $\|\Phi_{2,2}\|_\infty < 1$, nên ta có thể ổn định hóa hệ bằng tín hiệu chuyển mạch hằng tương ứng với trạng thái ban đầu dương.

Nhận xét 2.3.4. Trong thực tế có những hệ chuyển mạch gồm những hệ con không ổn định, thậm chí tất cả các hệ con không ổn định; người ta có thể thiết kế quy luật chuyển mạch tuần hoàn phù hợp để hệ chuyển mạch là ổn định. Chẳng hạn, xét hệ chuyển mạch tuần hoàn, khi có ít nhất một trong các hệ con, giả sử (E_i, A_i), ổn định thì bằng cách lựa chọn khoảng kích hoạt $\Delta_i = k_i - k_{i-1}$ đủ lớn so với các hệ con còn lại, ta sẽ thu được hệ chuyển mạch tuần hoàn ổn định. Phương án thiết kế quy tắc chuyển $\sigma(k)$ để ổn định hóa hệ hầu hết là chuyển mạch tuần hoàn. Trong chương này, chúng tôi đưa ra các điều kiện ổn định cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương dạng (2.1), không phụ thuộc vào quy tắc chuyển mạch, tuy nhiên các điều kiện đưa ra khá chặt, chẳng hạn Định lý 2.2.2 đưa ra điều kiện để hệ SDLS (2.1) dương và ổn định là với mọi $i, j \in \underline{N}$ tồn tại ma trận $D_{i,j}$ sao cho $H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j)$ là ma trận không âm và $H_{i,j} \leq H$, với H là ma trận Schur. Mặc dù điều kiện để hệ chuyển mạch ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch là rất chặt, song nó cần thiết trong nhiều tình huống thực tế, khi hệ thống (trong an toàn hàng không, an toàn hạt nhân, ...) bắt buộc phải ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch.

Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đưa ra kết quả ổn định hóa hệ nếu hệ chuyển mạch không ổn định bằng một dãy chuyển mạch tuần hoàn như Định lý 2.3.1.

Kết luận chương

Trong chương này chúng tôi đã đưa ra một số kết quả về tính ổn định và ổn định hóa được cho một lớp hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương. Tính dương của hệ SDLS chỉ số 1 được nghiên cứu thông qua ánh xạ một bước. Sau đó, chúng tôi thiết lập được các điều kiện đủ cho tính ổn định của hệ SDLS chỉ số 1 dương dựa vào nguyên lý so sánh, các đặc trưng cho tính dương của hệ SDLS chỉ số 1 cũng như sử dụng hàm Lyapunov chung dạng đồng dương tuyến tính. Cuối cùng, chúng tôi định nghĩa dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận, từ đó đưa ra đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ.

Chương 3

Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được và tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu trong hai trường hợp: cặp ma trận hệ số có quy tắc chuyển mạch giống nhau và khác nhau. Nội dung của chương được viết dựa trên các bài báo [CT2, CT3].

3.1. Hệ chuyển mạch suy biến có nhiễu với cặp ma trận hệ số có quy tắc chuyển mạch giống nhau

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu dạng

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{3.1}$$

trong đó $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$, là quy tắc chuyển mạch lấy giá trị trong tập hữu hạn $\underline{N}$, $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, i \in \underline{N}$, là nhiễu, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc-tơ trạng thái tại thời điểm $k \in \mathbb{N}$. Giả sử rằng, E_i là các ma trận suy biến với mọi $i \in \underline{N}$.

Ta xét hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.1) với điều kiện ban đầu

$$P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0) = P_{\sigma(k_0-1)}\gamma, \tag{3.2}$$

với γ là véc-tơ bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$ và k_0 là số nguyên không âm cố định.

3.1.1. Tính giải được

Tính giải được của bài toán giá trị ban đầu (3.1), (3.2) được khẳng định trong định lý dưới đây.

Định lý 3.1.1. *Cho $f_{\sigma(k)}(x)$ là hàm liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz đủ nhỏ, tức là,*

$$\|f_i(x) - f_i(\tilde{x})\| \leq L_i\|x - \tilde{x}\|, \; \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, \; i \in \underline{N} \tag{3.3}$$

và

$$\omega_i := L_i \max\{\|Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}\| : j \in \underline{N}\} < 1, \; \forall i \in \underline{N}. \tag{3.4}$$

Khi đó, bài toán giá trị ban đầu (3.1), (3.2) có nghiệm duy nhất.

Chứng minh. Nhân cả hai vế của phương trình (3.1) từ bên trái với $P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}$ và $Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}$ tương ứng và chú ý rằng

$$G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}E_{\sigma(k)} = P_{\sigma(k)}, \quad P_{\sigma(k)}Q_{\sigma(k)} = Q_{\sigma(k)}P_{\sigma(k)} = 0,$$

ta được

$$P_{\sigma(k)}x(k+1) = P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}x(k) + P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{3.5}$$

$$Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}x(k) = -Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}f_{\sigma(k)}(x(k)). \tag{3.6}$$

Đặt $u(k) = P_{\sigma(k-1)}x(k), v(k) = Q_{\sigma(k-1)}x(k), (k \in \mathbb{N})$ ta có

$$\begin{aligned}
&P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}v(k)\\
&= P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}Q_{\sigma(k-1)}x(k)\\
&= P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}Q_{\sigma(k),\sigma(k-1)}V_{\sigma(k)}QV^{-1}_{\sigma(k-1)}x(k)\\
&= P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}(G_{\sigma(k),\sigma(k-1)} - E_{\sigma(k)})V_{\sigma(k)}QV^{-1}_{\sigma(k-1)}x(k)\\
&= (P_{\sigma(k)} - P_{\sigma(k)}P_{\sigma(k)})V_{\sigma(k)}QV^{-1}_{\sigma(k-1)}x(k)\\
&= 0
\end{aligned}$$

và từ (3.5)

$$u(k+1) = P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}u(k) + P_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}f_{\sigma(k)}(u(k)+v(k)). \tag{3.7}$$

Từ khẳng định $viii)$ của Bổ đề 2.1.3, ta có

$$G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}Q_{\sigma(k),\sigma(k-1)} = V_{\sigma(k)}QV^{-1}_{\sigma(k)} = Q_{\sigma(k)}.$$

Hơn nữa, ta có $Q_j = Q_{i,j}.Q_{j,i}$, $Q_i.Q_{j,i} = Q_{j,i}$ nên vế trái của (3.6) có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned}
&Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}x(k) = Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}(u(k)+v(k))\\
&= Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}u(k) + Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}Q_{\sigma(k),\sigma(k-1)}Q_{\sigma(k-1),\sigma(k)}x(k)\\
&= Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}u(k) + Q_{\sigma(k-1),\sigma(k)}x(k).
\end{aligned}$$

Khi đó, từ (3.6) suy ra rằng

$$Q_{\sigma(k-1),\sigma(k)}x(k) = -Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}A_{\sigma(k)}u(k) - Q_{\sigma(k)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}f_{\sigma(k)}(x(k)).$$

Nhân hai vế của đẳng thức trên với $Q_{\sigma(k),\sigma(k-1)}$ từ bên trái ta được

$$v(k) = Q_{\sigma(k-1)}x(k) = -Q_{\sigma(k),\sigma(k-1)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}[f_{\sigma(k)}(u(k)+v(k)) + A_{\sigma(k)}u(k)]. \quad (3.8)$$

Từ (3.7), giả sử đã biết $u := u(k)$ $(k \geq k_0)$, với $u(k_0)$ cho trước dạng

$$u(k_0) = P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0) = P_{\sigma(k_0-1)}\gamma.$$

Ta xét toán tử $T_{i,j} : \operatorname{im} Q_{i,j} \to \operatorname{im} Q_{i,j}$ định nghĩa bởi

$$T_{i,j}(v) := -Q_{i,j}G^{-1}_{i,j}[f_i(u+v) + A_i u].$$

Do

$$\begin{aligned}
\|T_{i,j}(v) - T_{i,j}(\tilde{v})\| &= \|Q_{i,j}G^{-1}_{i,j}[f_i(u+v) - f_i(u+\tilde{v})\|\\
&\leq \|Q_{i,j}G^{-1}_{i,j}\|\|f_i(u+v) - f_i(u+\tilde{v})\|\\
&\leq \|Q_{i,j}G^{-1}_{i,j}\|L_i\|v-\tilde{v}\| \leq \omega_i\|v-\tilde{v}\| < \|v-\tilde{v}\|,
\end{aligned}$$

nên $T_{i,j}$ là toán tử co. Do đó, theo nguyên lý ánh xạ co, phương trình (3.8) có nghiệm duy nhất được xác định bởi ánh xạ $g_{\sigma(k)} : \operatorname{im} P_{\sigma(k-1)} \to \operatorname{im} Q_{\sigma(k-1)}, g_{\sigma(k)}(u(k)) = v(k)$. Hơn nữa, ta thấy $g_{\sigma(k)}$ là hàm liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz

$$K_{\sigma(k)} := \omega_{\sigma(k)}(L_{\sigma(k)} + \|A_{\sigma(k)}\|)L^{-1}_{\sigma(k)}(1-\omega_{\sigma(k)})^{-1}. \quad (3.9)$$

Từ đó, bài toán giá trị ban đầu $(3.1),(3.2)$ có nghiệm duy nhất được xác định bởi

$$x(k) = u(k) + g_{\sigma(k)}(u(k)), \tag{3.10}$$

với $u(k_0) = P_{\sigma(k_0-1)}\gamma$. Định lý được chứng minh. ■

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $f_i(0) = 0, \forall i \in \underline{N}$. Khi đó, $g_{\sigma(k)}(0) = 0$ và hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.1) luôn có nghiệm tầm thường $x(k) = 0$. Từ (3.10), ta thấy mỗi nghiệm $x(k)$ của bài toán giá trị ban đầu $(3.1),(3.2)$ thỏa mãn $x(k) = P_{\sigma(k-1)}x(k) + g_{\sigma(k)}(P_{\sigma(k-1)}x(k))$ hoặc tương đương $x(k)$ thỏa mãn

$$Q_{\sigma(k-1)}x(k) = -Q_{\sigma(k),\sigma(k-1)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}[f_{\sigma(k)}x(k)) + A_{\sigma(k)}P_{\sigma(k-1)}x(k)].$$

Với $i \in \underline{N}$, ta đặt

$$\Delta_i := \{x \in \mathbb{R}^n : Q_j x = -Q_{i,j}G^{-1}_{i,j}(f_i(x) + A_i P_j x), \text{ với } j \in \underline{N}\}. \tag{3.11}$$

Nếu $x = x(k)$ là một nghiệm của bài toán giá trị ban đầu $(3.1),(3.2)$, thì chắc chắn $x(k) \in \Delta_{\sigma(k)}(k \geq k_0)$. Ngược lại, với mỗi $\theta \in \Delta_i$, luôn tồn tại nghiệm của (3.1) phụ thuộc vào θ. Thật vậy, gọi σ là quy tắc chuyển mạch bất kỳ thỏa mãn $\sigma(k) = i$ và $x(m,k;\theta)(m \geq k)$ là một nghiệm của (3.1) thỏa mãn điều kiện ban đầu $P_{\sigma(k-1)}x(k) = P_{\sigma(k-1)}\theta$. Rõ ràng,

$$\begin{aligned} x(k,k;\theta) &= P_{\sigma(k-1)}x(k) + g_{\sigma(k)}(P_{\sigma(k-1)}x(k)) \\ &= P_{\sigma(k-1)}\theta + g_{\sigma(k)}(P_{\sigma(k-1)}\theta) \\ &= P_{\sigma(k-1)}\theta + Q_{\sigma(k-1)}\theta = \theta. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ta sẽ chứng minh rằng tập Δ_i không phụ thuộc vào cách chọn các phép chiếu trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 3.1.1. *Xét đa tạp nghiệm Δ_i được định nghĩa trong* (3.11)*. Khi đó, các khẳng định sau là đúng:*

i) $\Delta_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) + A_i x \in \operatorname{im} E_i\}$.

ii) $\Delta_i \cap \ker E_j = \{0\}$.

Chứng minh.

i) Lấy $x \in \Delta_i$, khi đó tồn tại $j \in \underline{N}$ sao cho

$$Q_j x = -Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} (f_i(x) + A_i P_j x),$$

do đó

$$x = P_j x + Q_j x = -Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} f_i(x) + \left(I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i\right) P_j x.$$

Từ đó, ta thu được

$$f_i(x) + A_i x = \left(I - A_i Q_{i,j} G_{i,j}^{-1}\right) f_i(x) + A_i \left(I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i\right) P_j x.$$

Ta thấy rằng

$$A_i \left(I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i\right) P_j x = \left(I - A_i Q_{i,j} G_{i,j}^{-1}\right) A_i P_j x,$$

nên

$$f_i(x) + A_i(x) = \left(I - A_i Q_{i,j} G_{i,j}^{-1}\right) \left(f_i(x) + A_i P_j(x)\right).$$

Vì

$$A_i Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} = (G_{i,j} - E_i) G_{i,j}^{-1} = I - E_i G_{i,j}^{-1},$$

nên suy ra

$$f_i(x) + A_i(x) = E_i G_{i,j}^{-1} \left(f_i(x) + A_i P_j(x)\right) \in \operatorname{im} E_i.$$

Do đó $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) + A_i x \in \operatorname{im} E_i\}$.

Ngược lại, lấy $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $f_i(x) + A_i x \in \operatorname{im} E_i$, tức là, tồn tại $\xi \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn $f_i(x) + A_i x = E_i \xi$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$Q_j x = -Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} (f_i(x) + A_i P_j x),$$

hoặc tương đương,

$$x = -Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} (f_i(x) + A_i x) + Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i Q_j x + P_j x.$$

Gọi vế phải của đẳng thức trên là ω_i và chú ý rằng

$$Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} (f_i(x) + A_i x) = Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} E_i \xi = Q_{i,j} P_i \xi = V_j Q V_i^{-1} V_i P V_i^{-1} \xi = 0.$$

Áp dụng Bổ đề 2.1.3 ta có

$$\begin{aligned}
\omega_i &= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_iQ_jx + P_jx \\
&= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}A_iV_jQV_i^{-1}V_iQV_j^{-1}x + P_jx \\
&= Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}(G_{i,j} - E_i)V_iQV_j^{-1}x + P_jx \\
&= Q_{i,j}V_iQV_j^{-1}x - Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}E_iV_iQV_j^{-1}x + P_jx \\
&= V_jQV_i^{-1}V_iQV_j^{-1}x - V_jQV_i^{-1}P_iV_iQV_j^{-1}x + P_jx \\
&= Q_jx - V_jQPQV_j^{-1}x + P_jx \\
&= Q_jx + P_jx = x.
\end{aligned}$$

Vậy $x \in \Delta_i$.

ii) Lấy $x \in \Delta_i \cap \ker E_j$. Khi đó, $P_jx = 0$ và $x \in \Delta_i$, do đó $x = P_jx + g_i(P_jx) = 0$.
Mệnh đề 3.1.1 được chứng minh. ■

Nghiệm duy nhất của bài toán giá trị ban đầu (3.1), (3.2) được định nghĩa bởi $x(k) = x(k, k_0; \gamma)$.

3.1.2. Tính ổn định

Trong phần này, chúng tôi đưa ra các khái niệm ổn định, ổn định đều của hệ và thiết lập điều kiện cần và đủ cho tính ổn định của hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu dạng (3.1).

Định nghĩa 3.1.1. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu dạng (3.1) được gọi là

i) *ổn định* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, $k_0 \geq 0$ bất kỳ và với mọi quy tắc chuyển mạch σ, luôn tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, k_0) \in (0, \varepsilon]$ sao cho $\|P_{\sigma(k_0-1)}\gamma\| < \delta$ thì ta có $\|x(k, k_0; \gamma)\| < \varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$;

ii) *ổn định đều* nếu hệ *ổn định* và δ không phụ thuộc vào k_0.

Ta định nghĩa $\mathcal{K}$ là lớp các hàm tăng $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sao cho $\psi(0) = 0$, $\psi(x) > 0$ với $x \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} \psi(x) = 0$.

Bổ đề 3.1.1. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.1) *là ổn định nếu và chỉ nếu tồn tại hàm* $\psi \in \mathcal{K}$*, sao cho với mỗi số nguyên không âm* k_0 *và với mọi quy tắc chuyển mạch, bất đẳng thức sau đúng*

$$\|x(k)\| \le \psi(\|x(k_0)\|), \quad \forall k \ge k_0. \tag{3.13}$$

Chứng minh. Đầu tiên, ta giả sử với mọi quy tắc chuyển mạch và với mỗi số nguyên không âm k_0, tồn tại hàm $\psi \in \mathcal{K}$ thỏa mãn điều kiện (3.13). Vì ψ là hàm tăng và liên tục tại 0 nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon]$ sao cho $\psi(\delta) < \varepsilon$. Đặt $K := \max_{i \in \underline{N}} K_i$, trong đó K_i được cho bởi (3.28). Nếu $x(k)$ là nghiệm bất kỳ của (3.1) thỏa mãn $\|P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0)\| < \delta_1 := \dfrac{\delta}{K+1}$ thì

$$\begin{aligned}\|x(k_0)\| &= \|P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0) + g_{\sigma(k_0)}(P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0))\| \\ &\le \|P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0)\| + \|g_{\sigma(k_0)}(P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0))\| \\ &\le \|P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0)\|(1 + K_{\sigma(k_0)}) \le \|P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0)\|(1+K) < \delta.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Điều này dẫn đến

$$\|x(k)\| \le \psi(\|x(k_0)\|) \le \psi(\delta) < \varepsilon, \ \ \forall k \ge k_0, \forall \sigma,$$

từ đó ta suy ra rằng hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.1) là ổn định.

Ngược lại, giả sử rằng hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.1) là ổn định, tức là, với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon]$, sao cho nếu $x(k)$ là nghiệm bất kỳ của (3.1) thỏa mãn $\|P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0)\| < \delta$ với mọi quy tắc chuyển mạch thì $\|x(k)\| < \varepsilon$ với mọi $k \ge k_0$. Gọi $\alpha(\varepsilon)$ là cận trên đúng của $\delta(\varepsilon)$. Rõ ràng, nếu $\|P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0)\| < \alpha(\varepsilon)$ với k_0 và với mọi σ, thì $\|x(k)\| < \varepsilon$ với mọi $k \ge k_0$. Hơn nữa, hàm $\alpha(\varepsilon)$ là hàm dương, tăng và $\alpha(\varepsilon) \le \varepsilon$. Đặt $\beta(\varepsilon) := \dfrac{\varepsilon\alpha(\varepsilon)}{(\varepsilon+1)H}$ với $\varepsilon \ge 0$, trong đó $H := \max\{\|P_i\| : i \in \underline{N}\}$. Dễ thấy rằng $0 < \beta(\varepsilon) < \dfrac{\alpha(\varepsilon)}{H} \le \dfrac{\varepsilon}{H}$, β là hàm tăng chặt và liên tục tại 0. Khi đó, tồn tại hàm ngược tăng chặt của β từ $\operatorname{im}\beta$ vào $[0, \infty)$, hàm này có thể được mở rộng từ hàm $\psi \in \mathcal{K}$. Gọi $x(k)$ là một nghiệm của (3.1) và k_0 là số nguyên không âm cố định. Đặt $\varepsilon_k := \|x(k)\|$ và xét hai trường hợp sau. Nếu $\|x(k)\| = 0$ thì $\|x(k)\| = 0 \le \psi(\|x(k_0)\|)$ do ψ là hàm không âm. Tiếp theo, ta giả sử rằng $\varepsilon_k := \|x(k)\| > 0$. Nếu $\|x(k_0)\| < \beta(\varepsilon_k)$ thì

$$\|P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0)\| \le H\beta(\varepsilon_k) < \alpha(\varepsilon_k).$$

Điều này suy ra rằng $\|x(k)\| < \varepsilon_k = \|x(k)\|, \forall k \geq k_0$, dẫn đến mâu thuẫn. Do đó $\|x(k_0)\| \geq \beta(\varepsilon_k)$, hay

$$\|x(k)\| = \varepsilon_k \leq \beta^{-1}(\|x(k_0)\|) = \psi(\|x(k_0)\|).$$

Bổ đề 3.1.1 được chứng minh. ■

Nhận xét 3.1.1. Bổ đề 3.1.1 được phát triển từ Bổ đề 3.3 trong [4]. Trong [4], ψ là hàm của $\|x(k_0)\|$, không phụ thuộc vào việc chọn các phép chiếu và hàm $\psi \in \mathcal{K}$. Hơn nữa, để chứng minh chiều ngược lại của Bổ đề 3.4.1 chúng tôi đã xây dựng hàm β đơn giản hơn ở Bổ đề 3.3 trong [4].

Định lý 3.1.2. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.1) *là ổn định nếu và chỉ nếu tồn tại hàm Lyapunov $V_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ liên tục theo biến thứ hai tại $\gamma = 0$ và các hàm $a, \psi_k \in \mathcal{K}$, sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq \psi_k(\|y\|),\ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma$;

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall \sigma$, *với $y(k)$ là nghiệm của* (3.1) *tương ứng với σ.*

Chứng minh. *Điều kiện cần.* Giả sử rằng hệ SDLS (3.1) là ổn định. Với mỗi k_0, theo Bổ đề 3.1.1, tồn tại hàm $\psi_{k_0} \in \mathcal{K}$ ($k_0 \geq 0$), sao cho với bất kỳ nghiệm $x(k)$ của (3.20), ta có

$$\|x(k)\| \leq \psi_{k_0}(\|x(k_0)\|),\ \forall k \geq k_0, \forall \sigma. \tag{3.15}$$

Ta định nghĩa hàm Lyapunov

$$V_\sigma(k_0, \gamma) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_\sigma(k_0 + m, k_0; \gamma)\|,\ \text{với mỗi } \gamma \in \mathbb{R}^n, k_0 \in \mathbb{N}, \tag{3.16}$$

trong đó $x_\sigma(k_0 + m, k_0; \gamma)$ là nghiệm duy nhất của (3.1) tương ứng với quy tắc chuyển mạch σ thỏa mãn điều kiện ban đầu $P_{\sigma(k_0-1)} x_\sigma(k_0) = P_{\sigma(k_0-1)}\gamma$. Bất đẳng thức (3.15) đảm bảo tính đúng đắn của định nghĩa hàm Lyapunov (3.16). Từ (3.14), ta có

$$\|x_\sigma(k_0)\| \leq (K+1)\|P_{\sigma(k_0-1)} x_\sigma(k_0)\| = (K+1)\|P_{\sigma(k_0-1)}\gamma\| \leq (K+1)H\|\gamma\|,$$

với các hằng số K, H được cho trong Bổ đề 3.1.1. Đặt $\widehat{\psi}_{k_0}(t) := \psi_{k_0}[(K+1)Ht]$ với $t \geq 0$. Khi đó, ta suy ra rằng

$$V_\sigma(k_0, \gamma) \leq \psi_{k_0}(\|x_\sigma(k_0)\|) \leq \psi_{k_0}((K+1)H\|\gamma\|) = \widehat{\psi}_{k_0}(\|\gamma\|), \forall k_0 \geq 0, \forall \gamma \in \mathbb{R}^n, \forall \sigma.$$

Điều này dẫn đến $V_\sigma(k_0, 0) = 0$ và tính liên tục của hàm V theo biến thứ hai tại $\gamma = 0$. Với mỗi $y \in \Delta_{\sigma(k_0)}$, theo (3.12), ta có

$$V_\sigma(k_0, y) = \sup_{l \in \mathbb{N}} \|x_\sigma(k_0 + l, k_0; y)\| \geq \|x_\sigma(k_0, k_0; y)\| = \|y\| := a(\|y\|). \tag{3.17}$$

Mặt khác, với mỗi $k_0 \geq 0$, vì bài toán giá trị ban đầu (3.1), (3.2) có duy nhất nghiệm nên ta dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} \{x_\sigma(k_0 + l, k_0; y(k_0)) : l \geq 0\} &= \{y(k_0 + l) : l \geq 0)\} \\ \supset \{y(k_0 + l) : l \geq 1)\} &\supset \{x_\sigma(k_0 + 1 + l, k_0 + 1; y(k_0 + 1)) : l \geq 0\}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

trong đó $\sigma_y(k)$ là quy tắc chuyển mạch tương ứng với $y(k)$. Do vậy

$$\begin{aligned} V_\sigma(k+1, y(k+1)) &= \sup_{l \geq 0} \|x_\sigma(k + 1 + l, k + 1; y(k + 1))\| \\ &\leq \sup_{l \geq 0} \|x_\sigma(k + l, k; y(k))\| = V_\sigma(k, y(k)), \end{aligned}$$

điều này suy ra rằng $\Delta V_\sigma(k, y(k)) \leq 0$. Điều kiện cần được chứng minh.

Điều kiện đủ. Ta chứng minh phản chứng, giả sử rằng hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.1) không ổn định, tức là, tồn tại $\varepsilon_0 > 0$, tồn tại số không âm k_0 và một quy tắc chuyển mạch σ, sao cho với mọi $\delta \in (0, \varepsilon_0]$, tồn tại nghiệm $x_\sigma(k)$ của (3.1) thỏa mãn bất đẳng thức $\|P_{\sigma(k_0-1)} x_\sigma(k_0)\| < \delta$ và $\|x_\sigma(k_1)\| \geq \varepsilon_0$ với $k_1 \geq k_0$.
Vì $V_\sigma(k_0, 0) = 0$ và $V_\sigma(k_0, \gamma)$ là hàm liên tục tại $\gamma = 0$, nên tồn tại $\delta_0' = \delta_0'(\varepsilon, k_0) > 0$, sao cho với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| < \delta_0'$ và với mọi σ ta có $V_\sigma(k_0, \xi) < \varepsilon_1 := a(\varepsilon_0)$.
Chọn $\delta_0 \leq \min\{\frac{\delta_0'}{K+1}, \varepsilon_0\}$, ta có thể thấy nghiệm $x_\sigma(k)$ của (3.1) thỏa mãn $\|P_{\sigma(k_0-1)} x_\sigma(k_0)\| < \delta_0$, tuy nhiên $\|x_\sigma(k_1)\| \geq \varepsilon_0$ với $k_1 \geq k_0$.
Do $\|P_{\sigma(k_0-1)} x_\sigma(k_0)\| < \delta_0 \leq \frac{\delta_0'}{K+1}$, $\|x_\sigma(k_0)\| < \delta_0'$ nên ta thu được $V_\sigma(k_0, x_\sigma(k_0)) < \varepsilon_1$.
Mặt khác, sử dụng tính chất của hàm V, ta thu được

$$V_\sigma(k_0, x_\sigma(k_0)) \geq V_\sigma(k_1, x_\sigma(k_1)) \geq a(\|x_\sigma(k_1)\|) \geq a(\varepsilon_0) = \varepsilon_1,$$

điều này dẫn đến mâu thuẫn. Định lý 3.1.2 được chứng minh. ■

Nếu hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.1) là ổn định đều thì hàm ψ_k ở Định lý 3.1.2 có thể được chọn không phụ thuộc vào k. Do đó, bằng cách lập luận tương tự như phần chứng minh ở trên ta thu được kết quả sau.

Định lý 3.1.3. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.1) *là ổn định đều nếu và chỉ nếu tồn tại các hàm $a, b \in \mathcal{K}$ và hàm Lyapunov $V_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, sao cho*

i) $a(\|y\|) \le V_\sigma(k, y) \le b(\|y\|),\ \forall k \ge 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma,$

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \le 0, \forall k \ge 0, \forall \sigma,$ *với $y(k)$ là nghiệm của* (3.1) *tương ứng với σ.*

Ví dụ 3.1.1. Trong ví dụ này ta sử dụng chuẩn Euclid cho véc-tơ và ma trận.

Xét hệ SDLS (3.1) với quy tắc chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N} = \{1, 2, \dots, s\}$ và

$$E_i = (i+1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_i = \begin{pmatrix} i+1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

và

$$f_i(x) = \frac{\sin(x_1)}{i+1}(0, 0, 1)^\top, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3, \quad i \in \underline{N}.$$

Ta tìm được $\ker E_i = \operatorname{span}\{(0,0,1)^\top\}$ và $\mathcal{S}_i = \operatorname{span}\{(1,-1,0)^\top, (1,i,0)^\top\}$.

Rõ ràng, $\mathcal{S}_i \cap \ker E_i = \{0\}$ và $\operatorname{rank} E_i = 2 < 3$, do đó hệ SDLS thuần nhất tương ứng với (3.1) có chỉ số 1.

Ta có $V_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall i, j \in \underline{N}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, từ đó ta tính toán được

$$V_i^{-1} = \frac{1}{i+1}\begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix}, \quad Q_i = Q, \quad P_i = I_n - Q_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tính toán đơn giản, ta cũng chỉ ra được $Q_{i,j} = V_j Q V_i^{-1} = Q, \forall i, j \in \underline{N}$ và

$$G_{i,j} = E_i + A_i Q_{i,j} = \begin{pmatrix} i+1 & i+1 & 0 \\ i+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{i,j}^{-1} = \frac{1}{i+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa, hàm $f_i(x)$ liên tục Lipschitz với hệ số $L_i = \dfrac{1}{i+1}$. Ngoài ra, $f_i(0) = 0$ và $\omega_i = L_i \max \|Q_{i,j}G_{i,j}^{-1} : j \in \underline{N}\| = \dfrac{1}{(i+1)} < 1, \forall i \in \underline{N}$. Theo Định lý 3.1.1, bài toán giá trị ban đầu (3.1) – (3.2) với dữ liệu đã cho có duy nhất nghiệm.

Từ định nghĩa của Δ_i, ta có $x \in \Delta_i$ nếu và chỉ nếu

$$Q_j x = -Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}\left(f_i(x) + A_i P_j x\right),$$

Từ đây ta có $x_3 = -\dfrac{\sin x_1}{(i+1)}$. Do vậy,

$$\Delta_i = \Omega_i = \left\{x = (x_1, x_2, x_3)^T : x_3 = -\frac{\sin x_1}{(i+1)}\right\}, \forall i \in \underline{N}.$$

Xét hàm Lyapunov $V_\sigma(k,\gamma) := 3\|P_{\sigma(k-1)}\gamma\|$ với mọi $\gamma \in \mathbb{R}^3$. Với mỗi $y \in \Delta_i$, ta có

$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \frac{\sin^2 y_1}{(i+1)^2}} \le \sqrt{2y_1^2 + y_2^2} \le 3\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = 3\|P_{\sigma(k-1)}y\|.$$

Hơn nữa, $V_\sigma(k,y) = 3\|P_{\sigma(k-1)}y\| \le 3\|y\|$. Do đó, khẳng định (i) của Định lý (3.1.3) được thỏa mãn.

Giả sử rằng $y(k)$ là nghiệm của (3.1) và đặt $y(k) = u(k) + v(k)$, ở đó $u(k) = P_{\sigma(k-1)}y(k),\ v(k) = Q_{\sigma(k-1)}y(k)$, ta có

$$\begin{aligned}\Delta V_\sigma(k, y(k)) &= V(k+1, y(k+1)) - V(k, y(k))\\ &= 3(\|P_{\sigma(k-1)}y(k+1)\| - \|P_{\sigma(k-1)}y(k)\|) = 3(\|u(k+1)\| - \|u(k)\|).\end{aligned}$$

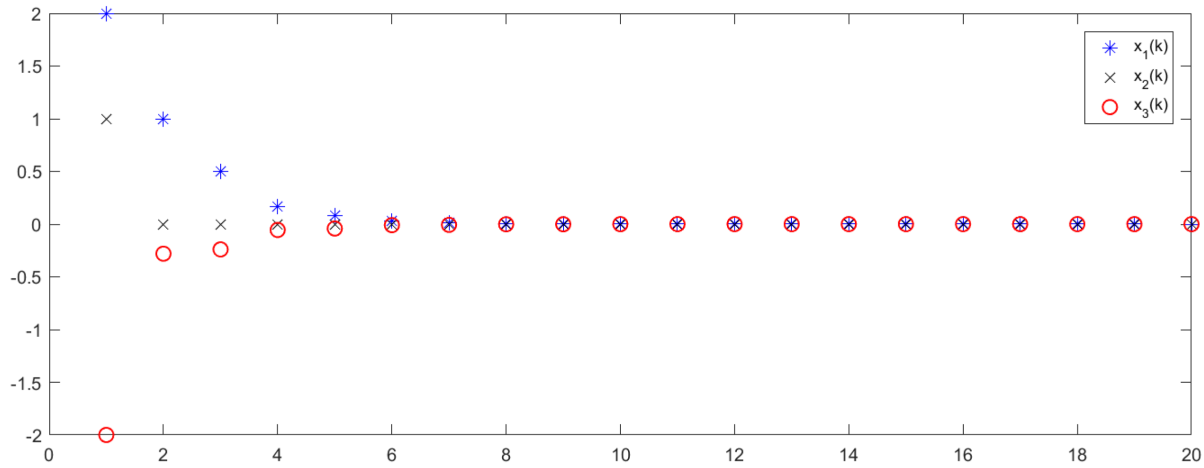
Sử dụng (3.7) ta tìm được

$$u(k+1) = P_j G_{i,j}^{-1} A_i u(k) + P_j G_{i,j}^{-1} f_i(x(k)) = \frac{1}{(i+1)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} u(k),$$

do đó, $\|u(k+1)\| \le \dfrac{2}{(i+1)}\|u(k)\|$ và dẫn đến $\|u(k+1)\| - \|u(k)\| \le 0$. Theo Định lý 3.1.3, hệ SDLS (3.1) là ổn định đều.

Ta mô phỏng quỹ đạo nghiệm của hệ SDLS cho trường hợp $\underline{N} = \{1,2\}$ với quy tắc chuyển mạch cụ thể $\sigma(k) = (k \mod 2) + 1$. Chọn trạng thái ban đầu $x(0) = (2, 1, -2)^\top$. Ở đây, ta xét quy tắc chuyển mạch dạng tuần hoàn đơn giản: nếu k chẵn, ta xét hệ $E_1 x(k+1) = A_1 x(k) + f_1(x(k))$, ngược lại, xét hệ $E_2 x(k+1) =$

$A_2x(k) + f_2(x(k))$. Ở mỗi hệ con, tại bước thứ k, ta tìm được $x_1(k)$ và $x_2(k)$ dựa vào $x_1(k-1), x_2(k-1)$, trong khi đó $x_3(k)$ được xác định thông qua $x_1(k)$. Quỹ đạo nghiệm của hệ được mô tả như Hình 3.1.



Hình 3.1: Mô phỏng nghiệm ổn định $X(x_1, x_2, x_3)$ với $\underline{N} = 1, 2$ và $\sigma(k) = (k \mod 2) + 1$.

3.2. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất với cặp ma trận hệ số có quy tắc chuyển mạch lệch nhau

Trong các mục tiếp theo của chương này, chúng tôi nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu với quy tắc chuyển mạch ở cặp ma trận hệ số lệch nhau. Một số kết quả được phát triển từ các kết quả của hệ chuyển mạch rời rạc chuyển mạch rời rạc suy biến chỉ số 1 có nhiễu với quy tắc chuyển mạch ở ma trận hệ số giống nhau (mục 3.1). Trước hết, chúng tôi trình bày một số tính chất của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất với cặp ma trận hệ số có quy tắc chuyển mạch lệch nhau.

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất với cặp ma trận hệ số có quy tắc chuyển mạch lệch nhau dạng

$$E_{\sigma(k+1)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \tag{3.19}$$

trong đó $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$, là quy tắc chuyển mạch lấy giá trị trong tập hữu hạn $\underline{N}$, $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Giả sử rằng E_i là các ma trận suy biến với mọi $i \in \underline{N}$.

Ta giả sử (3.19) là hệ có chỉ số 1 (xem [8, 38]), tức là, các giả thiết sau được thỏa mãn

i) $\operatorname{rank} E_i = r < n, \forall i \in \underline{N}$,

ii) $\mathcal{S}_{i,j} \cap \ker E_i = \{0\}, \forall i, j \in \underline{N}$,
trong đó $\mathcal{S}_{i,j} = A_i^{-1}(\operatorname{im} E_j) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : A_i\xi \in \operatorname{im} E_j\}$.

Trong [38], tác giả chứng minh được rằng, từ giả thiết (ii) suy ra

$$\mathcal{S}_{i,j} \oplus \ker E_i = \mathbb{R}^n, \forall i, j \in \underline{N}.$$

Gọi $V_{i,j} = \{s_{i,j}^1, \dots, s_{i,j}^r, h_i^{r+1}, \dots, h_i^n\}$ là ma trận gồm các cột tương ứng là các véc-tơ cơ sở của $\mathcal{S}_{i,j}$ và $\ker E_i$ và $Q = \operatorname{diag}(0_r, I_{n-r}), P = I_n - Q$, với 0_r là ma trận không cỡ $r \times r$ và I_{n-r} là ma trận đơn vị cỡ $(n-r) \times (n-r)$.
Khi đó, ma trận $Q_{i,j} := V_{i,j}QV_{i,j}^{-1}$ xác định một phép chiếu lên $\ker E_i$ dọc theo $\mathcal{S}_{i,j}$ (tức là, $Q_{i,j}^2 = Q_{i,j}$ và $\operatorname{im} Q_{i,j} = \ker E_i$) và $P_{i,j} := I_n - Q_{i,j}$ là phép chiếu lên $\mathcal{S}_{i,j}$ dọc theo $\ker E_i$. Hơn nữa, ta xác định toán tử nối $Q_{i,j,k} := V_{i,j}QV_{j,k}^{-1}$.

Định lý 3.2.1 (xem [38]). *Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất chỉ số 1 dạng* (3.19), *với mọi $i, j, m \in \underline{N}$, các khẳng định sau là đúng:*

(i) $G_{i,j,m} = E_j + A_iQ_{i,j,m}$ *là ma trận không suy biến;*

(ii) $E_jP_{j,m} = E_j$;

(iii) $P_{j,m} = G_{i,j,m}^{-1}E_j$;

(iv) $V_{j,m}^{-1}G_{i,j,m}^{-1}A_iV_{i,j}Q = Q$.

Nhận xét 3.2.1. Các tính chất trên được chứng minh bằng cách phát triển các kĩ thuật chứng minh Bổ đề 2.1.3 cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 với quy tắc chuyển mạch ở cặp ma trận hệ số giống nhau. Tuy nhiên, hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến chỉ số 1 với quy tắc chuyển mạch ở cặp ma trận hệ số lệch nhau dạng (3.19), mỗi trạng thái $x(k)$ phụ thuộc vào dữ liệu ở ba thời điểm $k-1,\ k,\ k+1$ và các quy tắc chuyển mạch $\sigma(k-1), \sigma(k), \sigma(k+1) \in \underline{N}$.

3.3. Tính giải được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu dạng

$$E_{\sigma(k+1)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{3.20}$$

trong đó $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$, là quy tắc chuyển mạch lấy giá trị trong tập hữu hạn $\underline{N}$, $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, i \in \underline{N}$, là nhiễu, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ là véc-tơ trạng thái tại thời điểm $k \in \mathbb{N}$. Giả sử rằng E_i là các ma trận suy biến với mọi $i \in \underline{N}$ và hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất tương ứng có chỉ số 1.

Ta xét hệ (3.20) với điều kiện ban đầu

$$P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0) = P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma, \tag{3.21}$$

với γ là véc-tơ bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$ và k_0 là số nguyên không âm cố định.

Tính giải được của hệ chuyển mạch tuyến tính rời rạc suy biến có nhiễu được chỉ ra trong định lý sau.

Định lý 3.3.1. *Cho $f_{\sigma(k)}(x)$ là hàm liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz đủ nhỏ, tức là,*

$$\|f_i(x) - f_i(\tilde{x})\| \le L_i\|x - \tilde{x}\|,\ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n,\ i \in \underline{N} \tag{3.22}$$

và

$$\omega_i := L_i \max\{\|Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}\| : j, m \in \underline{N}\} < 1, \forall i \in \underline{N}. \tag{3.23}$$

Khi đó bài toán giá trị ban đầu (3.20) – (3.21) *có nghiệm duy nhất.*

Chứng minh. Nhân cả hai vế của phương trình (3.20) từ bên trái với

$$P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)} \text{ và } Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)},$$

tương ứng và chú ý rằng

$$\begin{aligned} G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}E_{\sigma(k+1)} &= P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}, \\ P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} &= Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} = 0, \end{aligned}$$

ta thu được

$$\begin{aligned}P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}x(k+1) =&P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}x(k)\\ &+ P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}f_{\sigma(k)}(x(k)),\end{aligned}\tag{3.24}$$

$$Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}x(k) = -Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}f_{\sigma(k)}(x(k)).\tag{3.25}$$

Đặt $u(k) = P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k), v(k) = Q_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k), (k \in \mathbb{N})$ ta có

$$\begin{aligned}&P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}v(k)\\ =&P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}Q_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)\\ =&P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}V_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}QV^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)\\ =&P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}(G_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)} - E_{\sigma(k+1)})\times\\ &\times V_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}QV^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)\\ =&(P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)} - P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)})V_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}QV^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)\\ =&0\end{aligned}$$

và từ (3.24) ta được

$$\begin{aligned}u(k+1) &= P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}(u(k)+v(k))\\ &\quad + P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}f_{\sigma(k)}(u(k)+v(k))\\ &= P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}u(k)\\ &\quad + P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}f_{\sigma(k)}(u(k)+v(k)).\end{aligned}\tag{3.26}$$

Sử dụng (iv) của Định lý 3.2.1, ta có

$$Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}Q_{\sigma(k),\sigma(k+1)} = V_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}QV^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1)}.$$

Do đó, vế trái của (3.25) có thể viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned}&Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}x(k)\\ =&Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}(u(k)+v(k))\\ =&Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}u(k) + V_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}QV^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k).\end{aligned}$$

Khi đó, từ (3.25) suy ra rằng

$$\begin{aligned}V_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}QV^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k) = &- Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}u(k)\\ &- Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}f_{\sigma(k)}(x(k)).\end{aligned}$$

Nhân hai vế của đẳng thức trên với $Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}$ từ bên trái ta thu được

$$\begin{aligned}v(k) = Q_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k) &= Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}V_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}QV^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)\\ &= -Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}u(k)\\ &\qquad - Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}Q_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}f_{\sigma(k)}(x(k))\\ &= -Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}A_{\sigma(k)}u(k)\\ &\qquad - Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}f_{\sigma(k)}(x(k))\\ &= -Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}(f_{\sigma(k)}(u(k)+v(k)) + A_{\sigma(k)}u(k)).\end{aligned} \tag{3.27}$$

Sử dụng phương trình (3.26), giả sử đã biết $u := u(k)(k \geq k_0)$, trong đó

$$u(k_0) = P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0) = P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma$$

cho trước. Ta xét toán tử $T_{i,j,m} : \operatorname{im} Q_{i,j} \to \operatorname{im} Q_{i,j}$ được định nghĩa bởi

$$T_{i,j,m}(v) := -Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}[f_i(u+v) + A_i u].$$

Do

$$\begin{aligned}\|T_{i,j,m}(v) - T_{i,j,m}(\tilde{v})\| &= \|Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}[f_i(u+v) - f_i(u+\tilde{v})\|\\ &\leq \|Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}\|\|f_i(u+v) - f_i(u+\tilde{v})\|\\ &\leq \|Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}\|L_i\|v-\tilde{v}\| \leq \omega_i\|v-\tilde{v}\| < \|v-\tilde{v}\|,\end{aligned}$$

nên toán tử $T_{i,j,m}$ là toán tử co. Do đó, theo nguyên lý ánh xạ co, phương trình (3.27) có nghiệm duy nhất được xác định bởi ánh xạ

$$g_{\sigma(k),\sigma(k+1)} : \operatorname{im} P_{\sigma(k),\sigma(k+1)} \to \operatorname{im} Q_{\sigma(k),\sigma(k+1)},\ \ g_{\sigma(k),\sigma(k+1)}(u(k)) = v(k).$$

Hơn nữa, dễ thấy rằng $g_{\sigma(k),\sigma(k+1)}$ là hàm liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz

$$K_{\sigma(k)} := \omega_{\sigma(k)}(L_{\sigma(k)} + \|A_{\sigma(k)}\|)L^{-1}_{\sigma(k)}(1-\omega_{\sigma(k)})^{-1}. \tag{3.28}$$

Vậy bài toán giá trị ban đầu (3.20), (3.21) có nghiệm duy nhất được xác định bởi

$$x(k) = u(k) + g_{\sigma(k),\sigma(k+1)}(u(k)), \tag{3.29}$$

với $u(k_0) = P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma$. Định lý được chứng minh. ■

Ta định nghĩa toán tử Cauchy liên kết với hệ (3.20)

$$\Phi_\sigma(k,h) = \prod_{l=h+1}^{k} P_{\sigma(l),\sigma(l+1)} G^{-1}_{\sigma(l-1),\sigma(l),\sigma(l+1)} A_{\sigma(l-1)} \text{ và } \Phi_\sigma(h,h) = P_{\sigma(h),\sigma(h+1)}. \tag{3.30}$$

Khi đó, dễ thấy rằng $\Phi_\sigma(k,h)$ thỏa mãn

$$\Phi_\sigma(k,h) = \Phi_\sigma(k,l)\Phi_\sigma(l,h),\ \forall k \geq l \geq h.$$

Công thức biến thiên hằng số cho nghiệm của hệ (3.20) được đưa ra trong hệ quả dưới đây.

Hệ quả 3.3.1. *Nghiệm duy nhất của hệ* (3.20) *với điều kiện ban đầu* (3.21) *thỏa mãn phương trình*

$$\begin{aligned} x(k) =& \Phi_\sigma(k,k_0)P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi_\sigma(k,i+1)P_{\sigma(i+1),\sigma(i+2)}G^{-1}_{\sigma(i),\sigma(i+1),\sigma(i+2)}f_{\sigma(i)}(x(i)) \\ &- Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}(f_{\sigma(k)}(x(k)) + A_{\sigma(k)}P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Chứng minh. Từ phương trình (3.26), ta suy ra nghiệm $u(k)$ được cho bởi công thức

$$u(k) = \Phi_\sigma(k,k_0)P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi_\sigma(k,i+1)P_{\sigma(i+1),\sigma(i+2)}G^{-1}_{\sigma(i),\sigma(i+1),\sigma(i+2)}f_{\sigma(i)}(x(i))$$

và từ phương trình (3.27), ta có

$$v(k) = -Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}(f_{\sigma(k)}(x(k)) + A_{\sigma(k)}P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)).$$

Vì $x(k) = u(k) + v(k)$ nên ta thu được công thức (3.31). ■

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $f_i(0) = 0, \forall i \in \underline{N}$. Khi đó, $g_{\sigma(k),\sigma(k+1)}(0) = 0$ và hệ (3.20) luôn có nghiệm tầm thường $x(k) = 0$. Từ (3.29) suy ra rằng mỗi nghiệm $x(k)$ của bài toán giá trị ban đầu (3.20), (3.21) thỏa mãn

$$x(k) = P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k) + g_{\sigma(k),\sigma(k+1)}(P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)),$$

hoặc tương đương $x(k)$ thỏa mãn

$$Q_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k) = -Q_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k),\sigma(k+1),\sigma(k+2)}(f_{\sigma(k)}(x(k)) + A_{\sigma(k)}P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)).$$

Đặt

$$\Delta_i := \{x \in \mathbb{R}^n : Q_{i,j}x = -Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}(f_i(x) + A_iP_{i,j}x), \text{ với } j, m \in \underline{N}\}. \tag{3.32}$$

Nếu $x = x(k)$ là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu (3.20), (3.21), thì chắc chắn $x(k) \in \Delta_{\sigma(k)}(k \geq k_0)$. Ngược lại, với mỗi $\theta \in \Delta_i$, tồn tại nghiệm của (3.20) phụ thuộc vào θ. Thật vậy, gọi σ là một quy tắc chuyển mạch thỏa mãn $\sigma(k) = i$ và $x(m, k; \theta)$ với $m \geq k$ là một nghiệm của (3.20) thỏa mãn điều kiện ban đầu $P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k) = P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}\theta$. Rõ ràng,

$$\begin{aligned} x(k, k; \theta) &= P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k) + g_{\sigma(k),\sigma(k+1)}(P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}x(k)) \\ &= P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}\theta + g_{\sigma(k),\sigma(k+1)}(P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}\theta) \\ &= P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}\theta + Q_{\sigma(k),\sigma(k+1)}\theta = \theta. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ta sẽ chứng minh rằng tập Δ_i không phụ thuộc vào cách chọn các phép chiếu trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 3.3.1. *Xét đa tạp nghiệm Δ_i được định nghĩa trong* (3.32)*. Khi đó, các khẳng định sau là đúng:*

i) $\Delta_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) + A_ix \in \operatorname{im} E_j, \text{ với } j \in \underline{N}\}$.

ii) $\Delta_i \cap \ker E_i = \{0\}$.

Chứng minh. *i)* Lấy $x \in \Delta_i$, khi đó tồn tại $j, m \in \underline{N}$ sao cho

$$Q_{i,j}x = -Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}(f_i(x) + A_iP_{i,j}x),$$

từ đó

$$x = P_{i,j}x + Q_{i,j}x = -Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}f_i(x) + (I - Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}A_i)P_{i,j}x.$$

Từ mối quan hệ này ta có

$$f_i(x) + A_ix = (I - A_iQ_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1})f_i(x) + A_i(I - Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}A_i)P_{i,j}x.$$

Chú ý rằng

$$A_i(I - Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}A_i)P_{i,j}x = (I - A_iQ_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1})A_iP_{i,j}x.$$

Do đó

$$f_i(x) + A_ix = (I - A_iQ_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1})(f_i(x) + A_iP_{i,j}x).$$

Vì

$$A_iQ_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1} = (G_{i,j,m} - E_j)G_{i,j,m}^{-1} = I - E_jG_{i,j,m}^{-1},$$

nên ta được

$$f_i(x) + A_ix = E_jG_{i,j,m}^{-1}\{f_i(x) + A_iP_{i,j}x\} \in \operatorname{im} E_j.$$

Do đó $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) + A_ix \in \operatorname{im} E_j, \text{ với } j \in \underline{N}\}$.

Ngược lại, lấy $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $f_i(x) + A_ix \in \operatorname{im} E_j$ với $j \in \underline{N}$. Khi đó, tồn tại $\xi \in \mathbb{R}^n, j \in \underline{N}$ sao cho $f_i(x) + A_ix = E_j\xi$. Với $m \in \underline{N}$, ta sẽ chứng minh rằng

$$Q_{i,j}x = -Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}(f_i(x) + A_iP_{i,j}x),$$

hoặc tương đương

$$x = -\,Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}(f_i(x) + A_ix) + Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}A_iQ_{i,j}x + P_{i,j}x.$$

Gọi vế phải của đẳng thức trên là $w_{i,j}$ và chú ý rằng

$$\begin{aligned} Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}(f_i(x) + A_ix) &= Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}E_j\xi = Q_{i,j,m}P_{j,m}\xi \\ &= V_{i,j}QV_{j,m}^{-1}V_{j,m}PV_{j,m}^{-1}\xi = V_{i,j}QPV_{j,m}^{-1}\xi = 0, \end{aligned}$$

áp dụng Định lý 3.2.1 ta được

$$\begin{aligned}
w_{i,j} &= Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}A_iQ_{i,j}x + P_{i,j}x \\
&= Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}A_iV_{i,j}QV_{j,m}^{-1}V_{j,m}QV_{i,j}^{-1}x + P_{i,j}x \\
&= Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}(G_{i,j,m} - E_j)V_{j,m}QV_{i,j}^{-1}x + P_{i,j}x \\
&= Q_{i,j,m}V_{j,m}QV_{i,j}^{-1}x - Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}E_jV_{j,m}QV_{i,j}^{-1}x + P_{i,j}x \\
&= V_{i,j}QV_{j,m}^{-1}V_{j,m}QV_{i,j}^{-1}x - V_{i,j}QV_{j,m}^{-1}P_{j,m}V_{j,m}QV_{i,j}^{-1}x + P_{i,j}x \\
&= V_{i,j}QQV_{i,j}^{-1}x - V_{i,j}QPQV_{i,j}^{-1}x + P_{i,j}x \\
&= Q_{i,j}x + P_{i,j}x = x.
\end{aligned}$$

Vì vậy $x \in \Delta_i$ và khẳng định (i) của Mệnh đề 3.3.1 được chứng minh.

$ii)$ Lấy $x \in \Delta_i \cap \ker E_i$. Khi đó, ta có $x \in \Delta_i$ và $P_{i,j}x = 0$ với mọi $j \in \underline{N}$. Vì $x \in \Delta_i$ nên ta suy ra

$$Q_{i,j}x = g_{i,j}(P_{i,j}x) = 0$$

và do đó

$$x = P_{i,j}x + Q_{i,j}x = 0.$$

Ta có điều phải chứng minh. ■

Nghiệm duy nhất của bài toán giá trị ban đầu $(3.20), (3.21)$ được ký hiệu bởi $x(k) = x(k, k_0; \gamma)$.

3.4. Tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu

Trong phần này, chúng tôi đưa ra khái niệm tính ổn định và thiết lập điều kiện cần và đủ cho tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu. Ta gặp khó khăn khi sử dụng cách tiếp cận dựa vào bán kính phổ chung như trong [6] hay [CT1] để nghiên cứu các đặc trưng cho tính ổn định của hệ SDLS có nhiễu Lipschitz với quy tắc chuyển mạch khác nhau ở hai ma trận E và A. Chúng tôi sử dụng phương pháp hàm Lyapunov và đánh giá nghiệm để nghiên cứu tính ổn định, ổn định tiệm cận, ổn định mũ của hệ.

Định nghĩa 3.4.1. Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu dạng (3.20) được gọi là

i) *ổn định* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, $k_0 \geq 0$ bất kỳ và với mọi quy tắc chuyển mạch, luôn tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, k_0) \in (0, \varepsilon]$ sao cho $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma\| < \delta$ thì ta có $\|x(k, k_0; \gamma)\| < \varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$, *ổn định đều* nếu nghiệm *ổn định* và δ không phụ thuộc vào k_0;

ii) *ổn định tiệm cận* nếu nghiệm *ổn định* và với bất kỳ $k_0 \geq 0$, với mọi quy tắc chuyển mạch, tồn tại $\delta = \delta(k_0) > 0$ sao cho $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma\| < \delta$ thì ta có $\|x(k, k_0; \gamma)\| \to 0$ khi $k \to +\infty$;

iii) *ổn định mũ* nếu tồn tại $M > 0$, $0 < \lambda < 1$ sao cho với mọi $k \geq k_0$ và mọi quy tắc chuyển mạch ta có $\|x(k, k_0; \gamma)\| \leq M\lambda^{k-k_0}\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma\|$.

Ta định nghĩa $\mathcal{K}$ là lớp các hàm tăng $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sao cho $\psi(0) = 0$, $\psi(x) > 0$ với $x \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} \psi(x) = 0$.

Bổ đề 3.4.1. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.20) *là ổn định nếu và chỉ nếu tồn tại hàm $\psi \in \mathcal{K}$, sao cho với mỗi số nguyên không âm k_0 và với mọi quy tắc chuyển mạch, bất đẳng thức sau đúng*

$$\|x(k)\| \leq \psi(\|x(k_0)\|), \quad \forall k \geq k_0. \tag{3.34}$$

Chứng minh. Đầu tiên, ta giả sử với mọi quy tắc chuyển mạch và với mỗi số nguyên không âm k_0, tồn tại hàm $\psi \in \mathcal{K}$ thỏa mãn điều kiện (3.34). Vì ψ là hàm tăng và liên tục tại 0 nên với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon]$ sao cho $\psi(\delta) < \varepsilon$. Lấy $K = \max\limits_{i \in \underline{N}} K_i$, trong đó K_i được cho bởi (3.28). Nếu $x(k)$ là nghiệm bất kỳ của (3.20) thỏa mãn $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0)\| < \delta_1 := \dfrac{\delta}{K+1}$ thì

$$\begin{aligned}
\|x(k_0)\| &= \|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0) + g_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}(P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0))\| \\
&\leq \|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0)\| + \|g_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}(P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0))\| \\
&\leq \|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0)\|(1 + K_{\sigma(k_0)}) \leq \|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0)\|(1 + K) < \delta.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Điều này dẫn đến

$$\|x(k)\| \leq \psi(\|x(k_0)\|) \leq \psi(\delta) < \varepsilon, \ \forall k \geq k_0, \forall \sigma,$$

từ đó ta suy ra rằng hệ (3.20) là ổn định.

Ngược lại, giả sử rằng hệ (3.20) là ổn định, tức là, với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon]$, sao cho nếu $x(k)$ là nghiệm bất kỳ của (3.20) thỏa mãn bất đẳng thức $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0)\| < \delta$ với mọi quy tắc chuyển mạch thì $\|x(k)\| < \varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$. Gọi $\alpha(\varepsilon)$ là cận trên đúng của $\delta(\varepsilon)$. Rõ ràng, nếu $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0)\| < \alpha(\varepsilon)$ với k_0 và với mọi σ, thì $\|x(k)\| < \varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$. Hơn nữa, hàm $\alpha(\varepsilon)$ là hàm dương, tăng và $\alpha(\varepsilon) \leq \varepsilon$. Đặt $\beta(\varepsilon) := \dfrac{\varepsilon\alpha(\varepsilon)}{(\varepsilon+1)H}$ với $\varepsilon \geq 0$, ở đó $H := \max\{\|P_{i,j}\| : i, j \in \underline{N}\}$. Dễ thấy rằng $0 < \beta(\varepsilon) < \dfrac{\alpha(\varepsilon)}{H} \leq \dfrac{\varepsilon}{H}$, β là hàm tăng chặt và liên tục tại 0. Khi đó, tồn tại hàm ngược tăng chặt của β từ $\operatorname{im}\beta$ vào $[0, \infty)$ hàm này có thể được mở rộng từ hàm $\psi \in \mathcal{K}$. Gọi $x(k)$ là một nghiệm của (3.20) và k_0 là một số nguyên không âm cố định. Đặt $\varepsilon_k := \|x(k)\|$ và xét hai khả năng sau. Nếu $\|x(k)\| = 0$ thì $\|x(k)\| = 0 \leq \psi(\|x(k_0)\|)$ do ψ là hàm không âm. Bây giờ, ta giả sử rằng $\varepsilon_k := \|x(k)\| > 0$. Nếu $\|x(k_0)\| < \beta(\varepsilon_k)$ thì

$$\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0)\| \leq H\beta(\varepsilon_k) < \alpha(\varepsilon_k).$$

Điều này suy ra rằng $\|x(k)\| < \varepsilon_k = \|x(k)\|, \forall k \geq k_0$, mâu thuẫn.
Do đó $\|x(k_0)\| \geq \beta(\varepsilon_k)$, điều này tương đương với

$$\|x(k)\| = \varepsilon_k \leq \beta^{-1}(\|x(k_0)\|) = \psi(\|x(k_0)\|).$$

Bổ đề 3.4.1 được chứng minh. ■

Nhận xét 3.4.1. Bổ đề 3.4.1 được phát triển từ Bổ đề 3.1.1 cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu với quy tắc chuyển mạch ở cặp ma trận hệ số giống nhau.

Định lý 3.4.1. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.20) *là ổn định nếu và chỉ nếu tồn tại của hàm Lyapunov* $V_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *liên tục theo biến thứ hai tại* $\gamma = 0$ *và các hàm* $a, \psi_k \in \mathcal{K}$*, sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq \psi_k(\|y\|),\ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma,$

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall \sigma,$ *với* $y(k)$ *là nghiệm của* (3.20) *tương ứng với* σ.

Chứng minh. *Điều kiện cần.* Giả sử rằng hệ SDLS (3.20) là ổn định. Với mỗi k_0, theo Bổ đề 3.4.1, tồn tại hàm $\psi_{k_0} \in \mathcal{K}$ ($k_0 \geq 0$), sao cho với nghiệm $x(k)$ bất kỳ của (3.20), ta có

$$\|x(k)\| \leq \psi_{k_0}(\|x(k_0)\|), \ \forall k \geq k_0, \forall \sigma. \tag{3.36}$$

Ta định nghĩa hàm Lyapunov

$$V_\sigma(k_0, \gamma) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \|x_\sigma(k_0 + m, k_0; \gamma)\|, \text{ với mỗi } \gamma \in \mathbb{R}^n, k_0 \in \mathbb{N}, \tag{3.37}$$

trong đó $x_\sigma(k_0 + m, k_0; \gamma)$ là nghiệm duy nhất của (3.20) tương ứng với quy tắc chuyển mạch σ thỏa mãn điều kiện ban đầu $P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)} x_\sigma(k_0) = P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma$. Bất đẳng thức (3.36) đảm bảo tính đúng đắn của định nghĩa hàm Lyapunov (3.37). Từ (3.35), ta có

$$\|x_\sigma(k_0)\| \leq (K+1)\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)} x_\sigma(k_0)\| = (K+1)\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma\| \leq (K+1)H\|\gamma\|,$$

với các hằng số K, H được cho trong Bổ đề 3.4.1. Định nghĩa $\widehat{\psi}_{k_0}(t) := \psi_{k_0}((K+1)Ht)$ với $t \geq 0$. Khi đó, ta suy ra rằng

$$V_\sigma(k_0, \gamma) \leq \psi_{k_0}(\|x_\sigma(k_0)\|) \leq \psi_{k_0}((K+1)H\|\gamma\|) = \widehat{\psi}_{k_0}(\|\gamma\|), \forall k_0 \geq 0, \forall \gamma \in \mathbb{R}^n, \forall \sigma.$$

Điều này dẫn đến $V_\sigma(k_0, 0) = 0$ và tính liên tục của hàm V theo biến thứ hai tại $\gamma = 0$. Với mỗi $y \in \Delta_{\sigma(k_0)}$, theo (3.33), ta có

$$V_\sigma(k_0, y) = \sup_{l \in \mathbb{N}} \|x_\sigma(k_0 + l, k_0; y)\| \geq \|x_\sigma(k_0, k_0; y)\| = \|y\| := a(\|y\|). \tag{3.38}$$

Mặt khác, với mỗi $k_0 \geq 0$, vì bài toán giá trị ban đầu (3.20) – (3.21) có duy nhất nghiệm nên ta dễ thấy rằng

$$\begin{aligned} &\{x_\sigma(k_0 + l, k_0; y(k_0)) : l \geq 0\} = \{y(k_0 + l) : l \geq 0)\} \\ &\qquad \supset \{y(k_0 + l) : l \geq 1)\} \supset \{x_\sigma(k_0 + 1 + l, k_0 + 1; y(k_0 + 1)) : l \geq 0\}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

ở đó $\sigma_y(k)$ là quy tắc chuyển mạch tương ứng với $y(k)$. Do vậy

$$\begin{aligned} V_\sigma(k+1, y(k+1)) &= \sup_{l \geq 0} \|x_\sigma(k + 1 + l, k + 1; y(k + 1))\| \\ &\leq \sup_{l \geq 0} \|x_\sigma(k + l, k; y(k))\| = V_\sigma(k, y(k)), \end{aligned}$$

điều này suy ra rằng $\Delta V_\sigma(k, y(k)) \leq 0$. Điều kiện cần được chứng minh.

Điều kiện đủ. Ta chứng minh phản chứng, giả sử rằng hệ (3.20) không ổn định, tức là, tồn tại $\varepsilon_0 > 0$, tồn tại số không âm k_0 và một quy tắc chuyển mạch σ, sao cho với mọi $\delta \in (0, \varepsilon_0]$, tồn tại nghiệm $x_\sigma(k)$ của (3.20) thỏa mãn bất đẳng thức $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)} x_\sigma(k_0)\| < \delta$ và $\|x_\sigma(k_1)\| \geq \varepsilon_0$ với $k_1 \geq k_0$.
Vì $V_\sigma(k_0, 0) = 0$ và $V_\sigma(k_0, \gamma)$ là hàm liên tục tại $\gamma = 0$ nên tồn tại $\delta_0^{'} = \delta_0^{'}(\varepsilon, k_0) > 0$, sao cho với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| < \delta_0^{'}$ và với mọi σ ta có $V_\sigma(k_0, \xi) < \varepsilon_1 := a(\varepsilon_0)$.
Chọn $\delta_0 \leq \min\{\frac{\delta_0^{'}}{K+1}, \varepsilon_0\}$, ta có thể thấy nghiệm $x_\sigma(k)$ của (3.20) thỏa mãn $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)} x_\sigma(k_0)\| < \delta_0$, tuy nhiên $\|x_\sigma(k_1)\| \geq \varepsilon_0$ với $k_1 \geq k_0$.
Do $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)} x_\sigma(k_0)\| < \delta_0 \leq \frac{\delta_0^{'}}{K+1}$, $\|x_\sigma(k_0)\| < \delta_0^{'}$ nên ta thu được

$$V_\sigma(k_0, x_\sigma(k_0)) < \varepsilon_1.$$

Mặt khác, sử dụng tính chất của hàm V, ta có

$$V_\sigma(k_0, x_\sigma(k_0)) \geq V_\sigma(k_1, x_\sigma(k_1)) \geq a(\|x_\sigma(k_1)\|) \geq a(\varepsilon_0) = \varepsilon_1,$$

điều này dẫn đến mâu thuẫn. Định lý 3.4.1 được chứng minh. ■

Nếu hệ (3.20) là ổn định đều thì hàm ψ_k ở định lý trên có thể được chọn không phụ thuộc vào k. Do đó, bằng cách lập luận tương tự như chứng minh trên ta được kết quả sau.

Định lý 3.4.2. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.20) *là ổn định đều nếu và chỉ nếu tồn tại hai hàm $a, b \in \mathcal{K}$ và hàm Lyapunov $V_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq b(\|y\|),\ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma,$

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall \sigma,$ *với $y(k)$ là nghiệm của* (3.20) *ứng với σ.*

Bây giờ, ta đưa ra định lý về tính ổn định tiệm cận của hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.20).

Định lý 3.4.3. *Giả sử rằng tồn tại hàm Lyapunov $V_\sigma : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ và các hàm $a, c, \psi_k \in \mathcal{K}$ sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq \psi_k(\|y\|),\ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma,$

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq -c(\|y(k)\|), \forall k \geq 0, \forall \sigma$, *với* $y(k)$ *là nghiệm của* (3.20) *ứng với* σ.

Khi đó, hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.20) *là ổn định tiệm cận.*

Chứng minh. Từ Định lý 3.4.1, ta có hệ SDLS (3.20) là ổn định. Từ mục (ii), $\{V_\sigma(k, y(k))\}$ là một dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0. Do đó, tồn tại giới hạn $\lim_{k\to\infty} V_\sigma(k, y(k))$. Điều này suy ra rằng

$$\lim_{k\to\infty} V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) = 0$$

và do đó $\lim_{k\to\infty} c(\|y(k)\|) = 0$. Vì $c \in \mathcal{K}$ nên $\lim_{k\to\infty} \|y(k)\| = 0$. Thật vậy, giả sử rằng $\lim_{k\to\infty} \|y(k)\| \neq 0$. Khi đó, với $\varepsilon > 0$, tồn tại dãy $\{k_m\} \subset \mathbb{N}$ sao cho $k_m \to \infty$ và $\|y(k_m)\| > \varepsilon$. Điều này suy ra $c(\|y(k_m)\|) \geq c(\varepsilon) > 0$, mâu thuẫn.
Định lý 3.4.3 được chứng minh. ∎

Ta định nghĩa

$$\mu = \max\{L_i(1+K_i)\|P_{j,m}G^{-1}_{i,j,m}\| : i, j, m \in \underline{N}\}.$$

Định lý 3.4.4. *Xét hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.20)*. Giả sử các điều kiện của Định lý 3.3.1 được thỏa mãn. Nếu tồn tại* $M > 0, 0 < \lambda < 1$ *sao cho*

$$\|\Phi_\sigma(k, h)\| \leq M\lambda^{k-h}, \ \forall k \geq h \geq k_0,$$

và $M\mu < 1 - \lambda$*, thì hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.20) *là ổn định mũ.*

Chứng minh. Từ công thức (3.26), ta có

$$u(k) = \Phi_\sigma(k, k_0)u(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi_\sigma(k, i+1)P_{\sigma(i+1),\sigma(i+2)}G^{-1}_{\sigma(i),\sigma(i+1),\sigma(i+2)}f_{\sigma(i)}(u(i)+v(i)).$$

Ta suy ra được

$$\|u(k)\| \leq M\lambda^{k-k_0}\|u(k_0)\| + \sum_{i=k_0}^{k-1} M\lambda^{k-i-1}\|P_{\sigma(i+1),\sigma(i+2)}G^{-1}_{\sigma(i),\sigma(i+1),\sigma(i+2)}\|L_{\sigma(i)}\|u(i)+v(i)\|$$

$$= M\lambda^{k-k_0}\|u(k_0)\| + \sum_{i=k_0}^{k-1} M\lambda^{k-i-1}\|P_{\sigma(i+1),\sigma(i+2)}G^{-1}_{\sigma(i),\sigma(i+1),\sigma(i+2)}\|L_{\sigma(i)}(1+K_{\sigma(i)})\|u(i)\|$$

$$\leq M\lambda^{k-k_0}\|u(k_0)\| + \sum_{i=k_0}^{k-1} M\lambda^{k-i-1}\mu\|u(i)\|.$$

Điều này tương đương với

$$\frac{\|u(k)\|}{\lambda^{k-k_0}} \le M\|u(k_0)\| + \sum_{i=k_0}^{k-1} \frac{M\mu}{\lambda} \frac{\|u(i)\|}{\lambda^{i-k_0}}, \ \forall k \ge k_0.$$

Do đó, nếu ta đặt $y_m = \dfrac{\|u_{m+k_0}\|}{\lambda^m}, f_m = M\|u(k_0)\|, g_m = \dfrac{M\mu}{\lambda}$ với mọi $m \ge 0$, thì ta có

$$y_m \le f_m + \sum_{0 \le i < m} g_i y_i, \forall m \ge 0.$$

Áp dụng Định lý 1.1.1, ta được

$$\begin{aligned} y_m &\le f_m + \sum_{0\le i<m} f_i g_i \prod_{i<j<m} (1+g_j) \\ &\le M\|u(k_0)\| + \sum_{0\le i<m} M\|u(k_0)\| \frac{M\mu}{\lambda}\left(1+\frac{M\mu}{\lambda}\right)^{m-i-1} \\ &= M\|u(k_0)\| + M\|u(k_0)\|\left(\left(1+\frac{M\mu}{\lambda}\right)^m - 1\right) \\ &= M\|u(k_0)\|\left(1+\frac{M\mu}{\lambda}\right)^m. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Điều này dẫn đến

$$\|u(k)\| \le M\|u(k_0)\|\left(1+\frac{M\mu}{\lambda}\right)^{k-k_0} \lambda^{k-k_0} = M\|u(k_0)\|(\lambda+M\mu)^{k-k_0}, \forall k \ge k_0.$$

Do đó

$$\|x(k)\| = \|u(k)+v(k)\| \le (1+K)\|u(k)\| \le (1+K)M\|u(k_0)\|(\lambda+M\mu)^{k-k_0}, \forall k \ge k_0.$$

Vì $\lambda + M\mu < 1$ nên hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.20) là ổn định mũ. Định lý 3.4.4 được chứng minh. ■

Nhận xét 3.4.2. Hàm Lyapunov trong các Định lý 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 có thể phụ thuộc vào quy tắc chuyển mạch σ. Các điều kiện trong Định lý 3.4.4 đúng nếu hệ số Lipschitz của hàm f đủ nhỏ.

Nhận xét 3.4.3. Các kết quả ở trên có thể ứng dụng trong hệ động lực chuyển mạch Leontief, hệ này được phát triển từ hệ động lực Leontief trong [39, 40].

Xét mô hình kinh tế s thành phần (s ngành), mỗi ngành sản xuất một loại sản phẩm. Với mỗi ngành $j \in \{1, 2, \ldots, s\} := \underline{N}$, để sản xuất ra sản phẩm j cần đầu vào từ các ngành khác, bao gồm cả ngành j. Mô hình kinh tế đa thành phần của Leontief có dạng sau

$$x(k) = B_{\sigma(k)}x(k) + C_{\sigma(k+1)}\left(x(k+1) - x(k)\right) + d_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{3.41}$$

trong đó, thành phần thứ i của véc-tơ N chiều $x(k)$ là mức độ sản xuất của ngành i tại thời điểm k. Quá trình sản xuất này được chia thành ba phần, tương ứng với ba hạng tử ở vế phải của (3.41). Hạng tử thứ nhất, $B_{\sigma(k)}x(k)$ là lượng hàng hóa ngành i cần để đưa vào sản xuất từ các ngành j. Ma trận chuyển $B_{\sigma(k)}$ cỡ $s \times s$ là ma trận đầu vào-đầu ra có các phần tử không âm tại thời điểm k. Hạng tử thứ hai là lượng hàng hóa i cần để mở rộng sản xuất để tạo ra $x(k+1)$ trong bước tiếp theo. Ma trận chuyển $C_{\sigma(k+1)}$ được gọi là ma trận hệ số vốn và cũng có các phần tử không âm. Hạng tử cuối cùng $d_{\sigma(k)}(x(k))$ là lượng hàng hóa i dành cho tiêu dùng. Trong mô hình kinh tế đa thành phần, sản xuất của ngành i không nhất thiết cần sản phẩm của ngành khác vì thế ma trận $C_{\sigma(k+1)}$ thường suy biến. Do vậy, hệ động lực Leontief có thể được viết lại theo hệ SDLS (3.20) với $E_{\sigma(k+1)} = -C_{\sigma(k+1)}, A_{\sigma(k)} = B_{\sigma(k)} - C_{\sigma(k+1)} - I_N, f_{\sigma(k)} = d_{\sigma(k)}$ với $k \in \underline{N}$.

Nhận xét 3.4.4. Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu với quy tắc chuyển mạch ở ma trận hệ số E và A khác nhau dạng (3.20), quy tắc chuyển mạch khác nhau trong các ma trận hệ số E và A, cùng với động lực học của hệ bị ràng buộc và kết hợp giữa các hệ con suy biến gây nên một số khó khăn trong việc nghiên cứu tính giải được cũng như sự ổn định của hệ. Mỗi trạng thái $x(k)$ phụ thuộc vào dữ liệu ở ba thời điểm $k-1, k, k+1$. Chúng tôi đưa ra các đặc trưng về tính ổn định của hệ (3.20) bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov, và thiết lập điều kiện ổn định mũ cho hệ bằng cách sử dụng công thức biến thiên hằng số cho nghiệm, đánh giá nghiệm và sử dụng bất đẳng thức Gronwall dạng rời rạc. Còn hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu với quy tắc chuyển mạch ở ma trận E và A giống nhau dạng (3.1) như một trường hợp đơn giản hơn của hệ (3.20) nên các kết quả được suy ra một cách tương tự, chúng tôi viết ra kết quả cho trường hợp này để có thể áp dụng trực tiếp khi cần.

Ví dụ 3.4.1. Trong ví dụ này, ta sử dụng chuẩn Euclid của véc-tơ.

Xét hệ SDLS có nhiễu dạng (3.20) với quy tắc chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ và

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & i+1 \end{pmatrix}, \qquad A_i = \begin{pmatrix} i+1 & 1 \\ -i-1 & 1 \end{pmatrix},$$

và

$$f_i(x) = \frac{\sin x_2}{i}(1,-1)^\top, \qquad x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2, \quad i \in \underline{N}.$$

Ta có $\ker E_i = \operatorname{span}\{(1,0)^\top\}, \mathrm{im\,E_i} = \operatorname{span}\{(0,1)^\top\}$ và $\mathcal{S}_{i,j} = \operatorname{span}\{(0,1)^\top\}$. Suy ra, $\mathcal{S}_{i,j} \cap \ker E_i = \{0\}$ và $\operatorname{rank} E_i = 1 < 2$, do đó hệ SDLS thuần nhất tương ứng với hệ (3.20) có chỉ số 1. Rõ ràng,

$$V_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \forall i, j \in \underline{N}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Điều này suy ra rằng

$$Q_{i,j} = V_{i,j} Q V_{i,j}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P, \quad P_{i,j} = I_n - Q_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta tính được $Q_{i,j,m} = V_{i,j} Q V_{j,m}^{-1} = Q_{i,j} = P$, $\forall i, j, m \in \underline{N}$ và

$$G_{i,j,m} = E_j + A_i Q_{i,j,m} = \begin{pmatrix} i+1 & j \\ -i-1 & j+1 \end{pmatrix}, \quad G_{i,j,m}^{-1} = \frac{1}{(i+1)(2j+1)} \begin{pmatrix} j+1 & -j \\ i+1 & i+1 \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa, hàm $f_i(x)$ là liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz $L_i = \dfrac{\sqrt{2}}{i}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \|f_i(x) - f_i(y)\| &= \left\| \frac{\sin x_2}{i}(1,-1)^\top - \frac{\sin y_2}{i}(1,-1)^\top \right\| \\ &\le \frac{1}{i+1} |x_2 - y_2| \|(1,-1)^T\| = \frac{\sqrt{2}}{i} |x_2 - y_2| \\ &\le \frac{\sqrt{2}}{i} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \frac{\sqrt{2}}{i} \|x - y\|, \end{aligned}$$

Hơn nữa, $f_i(0) = 0$ và

$$\begin{aligned} \omega_i &= L_i \max\{\|Q_{i,j,m} G_{i,j,m}^{-1}\| : j, m \in \underline{N}\} \\ &= \max\left\{ \frac{\sqrt{4j^2 + 4j + 2}}{2j+1} : j \in \underline{N} \right\} \times \frac{1}{i(i+1)} \\ &< \frac{\sqrt{10}}{3i(i+1)} < 1, \forall i \in \underline{N}. \end{aligned}$$

Theo Định lý 3.3.1, bài toán giá trị ban đầu (3.20), (3.21) với dữ liệu đã cho có duy nhất nghiệm. Từ định nghĩa của Δ_i, ta có $x \in \Delta_i$ nếu và chỉ nếu

$$Q_{i,j}x = -V_{i,j}QV_{j,m}^{-1}G_{i,j,m}^{-1}[f_i(x) + A_iP_{i,j}x].$$

Từ đây dẫn đến $x_1 = -\dfrac{\sin x_2}{i(i+1)} - \dfrac{x_2}{(i+1)(2j+1)}$. Do đó,

$$\Delta_i = \left\{x = (x_1, x_2)^\top : x_1 = -\frac{\sin x_2}{i(i+1)} - \frac{x_2}{(i+1)(2j+1)}, j \in \underline{N}\right\}.$$

Xét hàm $V_\sigma(k, \gamma) := 2\|P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}\gamma\|$ với mọi $\gamma \in \mathbb{R}^2$. Ta có, với mỗi $y \in \Delta_i$,

$$\begin{aligned}
\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} &= \sqrt{\left(\frac{\sin y_2}{i(i+1)} + \frac{y_2}{(i+1)(2j+1)}\right)^2 + y_2^2} \\
&\le \sqrt{\left(\frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(i+1)(2j+1)}\right)^2 y_2^2 + y_2^2} \\
&\le 2|y_2| = 2\|P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}y\| = V_\sigma(k, y).
\end{aligned}$$

Ngoài ra, $V_\sigma(k, y) = 2\|P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}y\| = 2|y_2| \le 2\|y\|$. Do đó, mục $i)$ của Định lý 3.4.2 được thỏa mãn. Giả sử rằng $y(k)$ là một nghiệm của hệ (3.20) và đặt $y(k) = u(k) + v(k)$, trong đó $u(k) = P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}y(k),\ \ v(k) = Q_{\sigma(k),\sigma(k+1)}y(k)$, ta có

$$\Delta V_\sigma(k, y(k)) = 2(\|P_{\sigma(k+1),\sigma(k+2)}y(k+1)\| - \|P_{\sigma(k),\sigma(k+1)}y(k)\|) = 2(\|u(k+1)\| - \|u(k)\|).$$

Sử dụng phương trình (3.26) ta được

$$u(k+1) = P_{j,m}G_{i,j,m}^{-1}A_iu(k) + P_{j,m}G_{i,j,m}^{-1}f_i(x(k)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{2j+1} \end{pmatrix} u(k),$$

suy ra, $\|u(k+1)\| = \dfrac{2}{2j+1}\|u(k)\|$ và từ đó dẫn đến$\|u(k+1)\| - \|u(k)\| \le 0$. Theo Định lý 3.4.2, hệ SDLS (3.20) là ổn định đều. Hơn nữa, vì

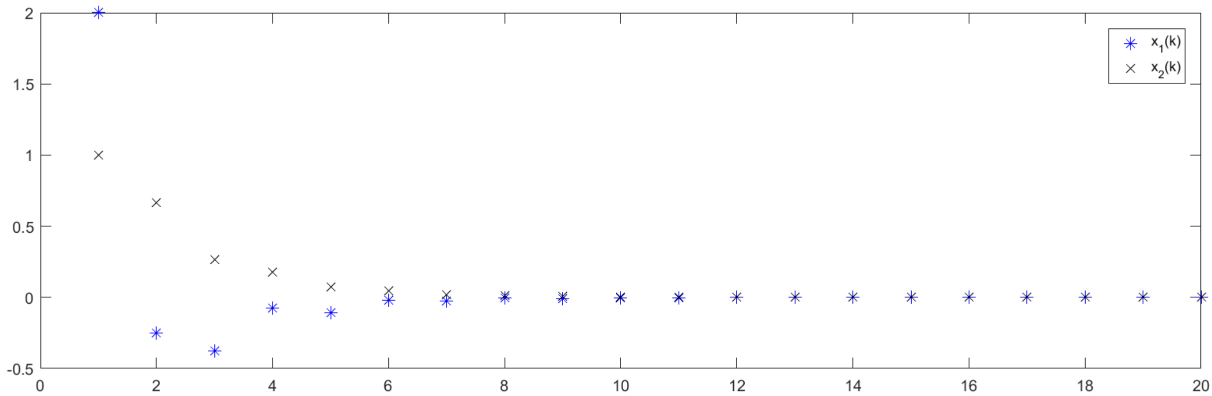
$$\|u(k+1)\| - \|u(k)\| \le \frac{1-2j}{2j+1}\|u(k)\| \le \frac{1-2j}{2(2j+1)}\|y(k)\| \le \frac{-1}{2(2s+1)}\|y(k)\|,$$

nên theo Định lý 3.4.3, hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.20) là ổn định tiệm cận.

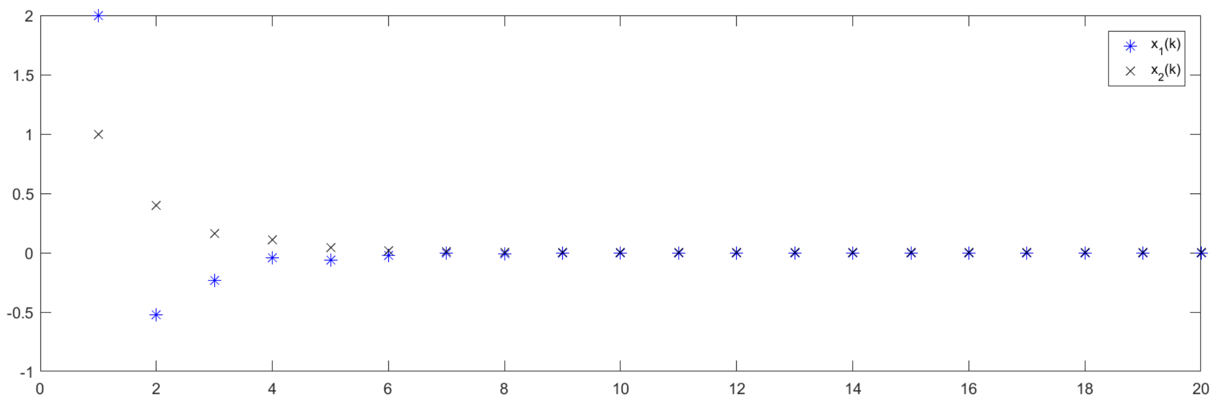
Ta sẽ mô tả nghiệm của hệ SDLS này trong trường hợp $\underline{N} = \{1, 2\}$ với quy tắc chuyển mạch cụ thể $\sigma_1(k) = (k \mod 2) + 1$. Chọn giá trị ban đầu $x(0) = (2, 1)^\top$. Ở đây, ta xét quy tắc chuyển mạch dạng đơn giản đó là chuyển mạch tuần hoàn:

nếu k chẵn, xét hệ $E_2x(k+1) = A_1x(k) + f_1(x(k))$, ngược lại, ta lấy hệ $E_1x(k+1) = A_2x(k) + f_2(x(k))$. Ở mỗi hệ, tại thời điểm k, ta suy ra được mối quan hệ giữa $x_1(k)$ và $x_2(k)$ và $x_2(k)$ được tìm dựa vào $x_1(k-1), x_2(k-1)$. Ta thấy, nghiệm của hệ hội tụ về 0, xem Hình 3.2.

Ngoài ra, chúng tôi cũng minh họa nghiệm ổn định của hệ khi xét quy tắc chuyển mạch $\sigma_2(k) = \begin{cases} 2, & \text{nếu } k \vdots 3 \\ 1, & \text{nếu } k \not\vdots 3 \end{cases}$ và chọn giá trị ban đầu $x(0) = (2,1)^\top$ như Hình 3.3. Giả thuật toán cho các hình vẽ minh họa nghiệm ổn định của hệ tương tự như Thuật toán 1 trong Ví dụ 3.1.1.



Hình 3.2: Minh họa nghiệm ổn định $X(x_1, x_2)$ với $\sigma_1(k)$.



Hình 3.3: Minh họa nghiệm ổn định $X(x_1, x_2)$ với $\sigma_2(k)$.

Ví dụ 3.4.2. Ở ví dụ này, chúng ta sử dụng chuẩn vô cùng của ma trận.

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) có nhiễu dạng (3.20) với quy tắc chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \{1, 2\} = \underline{N}$ và

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

và $f_i(x) = \dfrac{2x_1 + 3\sin\frac{x_2}{4}}{3(i+1)(i+2)}(0, 0, 1)^\top, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3,\ i \in \underline{N}.$
Ta tìm được

$$\begin{aligned}
&\ker E_1 = \ker E_2 = \operatorname{span}\{(0, 0, 1)^\top\},\\
&\quad \mathcal{S}_{11} = \operatorname{span}\{(1, 0, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top\}, \mathcal{S}_{1,2} = \operatorname{span}\{(3, 2, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top\},\\
&\quad \mathcal{S}_{2,1} = \operatorname{span}\{(-1, 1, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top\}, \mathcal{S}_{2,2} = \operatorname{span}\{(-1, 3, 0)^\top, (0, 1, 0)^\top\}.
\end{aligned}$$

Rõ ràng $\mathcal{S}_{i,j} \cap \ker E_i = \{0\}, \forall i, j \in \underline{N}$ và $\operatorname{rank} E_i = 2 < 3$, do đó hệ SDLS thuần nhất tương ứng với hệ (3.20) với dữ liệu ở trên có chỉ số 1. Ta có

$$V_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_{1,2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_{2,2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_{i,j} = Q, \quad P_{i,j} = I_3 - Q_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Q_{i,j,m} = Q, \forall i, j, m \in \underline{N}.$$

Ta tính toán được

$$G_{i,1,m} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{i,1,m}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_{i,2,m} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{i,2,m}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 & 0 \\ -1/21 & 4/21 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall i, m \in \underline{N}.$$

Hơn nữa, hàm $f_i(x)$ liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz $L_i = \dfrac{11}{12(i+1)(i+2)}, i \in \underline{N}$.
Ta thấy

$$\omega_i := L_i \max\{\|Q_{i,j,m}G_{i,j,m}^{-1}\|\} = L_i, K_i := \omega_i(L_i + \|A_i\|)L_i^{-1}(1-\omega_i)^{-1},$$

do đó $K_1 = \dfrac{25}{11}$, $K_2 = \dfrac{49}{23}$, $\|P_{1,m}G_{i,1,m}^{-1}\| = \dfrac{5}{9}$, $\|P_{2,m}G_{i,2,m}^{-1}\| = \dfrac{3}{7}$.
Suy ra $\mu = \max\{L_i(1+K_i)\|P_{j,m}G_{i,j,m}^{-1}\| : i, j, m \in \underline{N}\} = \max\left\{\dfrac{5}{18}, \dfrac{3}{14}, \dfrac{55}{414}, \dfrac{33}{322}\right\} = \dfrac{5}{18}$.
Đặt

$$\Phi_{i,j,m} := P_{j,m}G_{i,j,m}^{-1}A_i = P_{\sigma(l),\sigma(l+1)}.G_{\sigma(l-1),\sigma(l),\sigma(l+1)}^{-1}A_{\sigma(l-1)},$$

ta có

$$\Phi_{1,1,m} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/9 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2,1,m} = \begin{pmatrix} -1/9 & 2/9 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{1,2,m} = \begin{pmatrix} 2/7 & -3/7 & 0 \\ -1/21 & 5/21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{2,2,m} = \begin{pmatrix} -3/7 & -1/7 & 0 \\ 5/21 & 4/21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\|\Phi_{1,1,m}\| = \frac{4}{9}, \quad \|\Phi_{2,1,m}\| = \frac{2}{3}, \quad \|\Phi_{1,2,m}\| = \frac{5}{7}, \quad \|\Phi_{2,2,m}\| = \frac{4}{7}.$$

Do vậy, nếu ta chọn $\lambda = \max\{\|\Phi_{i,j,m}\| : i, j, m \in \underline{N}\} = \dfrac{5}{7}$ và $M = 1$ thì

$$\|\Phi_\sigma(k,h)\| \le \prod_{l=h+1}^{k} \|P_{\sigma(l),\sigma(l+1)}G_{\sigma(l-1),\sigma(l),\sigma(l+1)}^{-1}A_{\sigma(l-1)}\| \le \left(\frac{5}{7}\right)^{k-h} = M\lambda^{k-h},$$

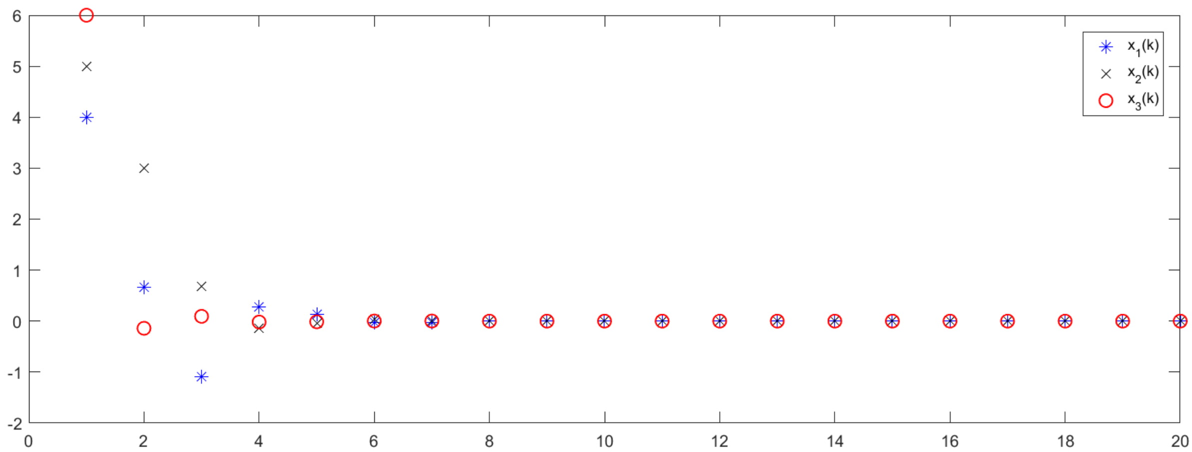
với mọi $k \ge h \ge k_0$. Hơn nữa ta có

$$M\mu = \frac{5}{18} < 1 - \lambda = \frac{2}{7}.$$

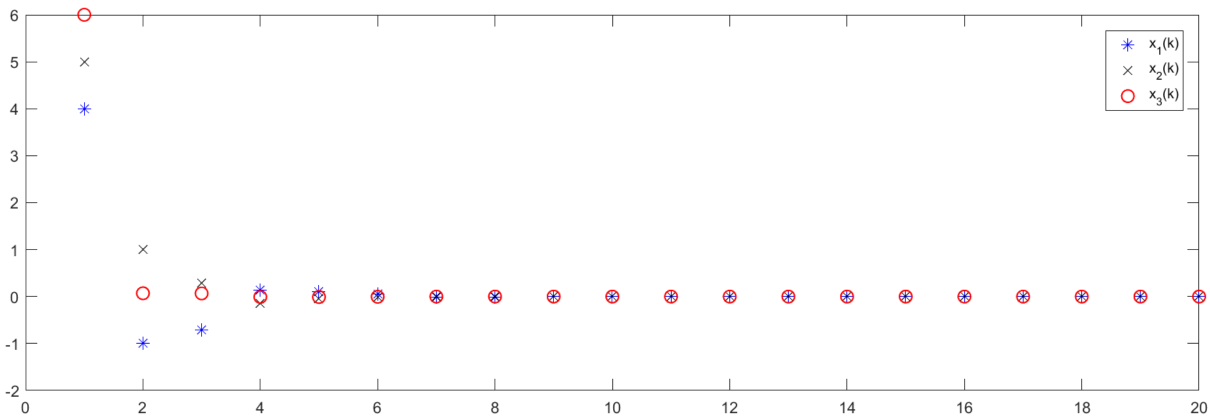
Theo Định lý 3.4.4, hệ SDLS có nhiễu với dữ liệu $\{(E_i, A_i, f_i)\}_{i=1,2}$ đã cho là ổn định mũ.

Để minh họa, ta xét quy tắc chuyển mạch cụ thể $\sigma_1(k) = (k \mod 2) + 1$ và chọn giá trị ban đầu $x(0) = (4, 5, 6)^\top$. Nếu k chẵn thì ta giải hệ $E_2x(k+1) = A_1x(k) + f_1(x(k))$, ngược lại ta xét hệ $E_1x(k+1) = A_2x(k) + f_2(x(k))$. Ta thấy, nghiệm của hệ hội tụ về 0, xem Hình 3.4.

Ngoài ra, chúng tôi cũng minh họa nghiệm ổn định của hệ khi xét quy tắc chuyển mạch $\sigma_2(k) = \begin{cases} 2, & \text{nếu } k \,\vdots\, 3 \\ 1, & \text{nếu } k \not\vdots\, 3 \end{cases}$ và chọn giá trị ban đầu $x(0) = (4, 5, 6)^\top$, như Hình 3.5.



Hình 3.4: Minh họa nghiệm ổn định $X(x_1, x_2, x_3)$ với $\sigma_1(k)$.



Hình 3.5: Minh họa nghiệm ổn định $X(x_1, x_2, x_3)$ với $\sigma_2(k)$.

Kết luận chương

Trong chương này chúng tôi đã nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu Lipschitz trong hai trường hợp: quy tắc chuyển mạch ở cặp ma trận hệ số giống nhau và khác nhau. Chúng tôi đã chỉ ra tính giải được của hệ với điều kiện hệ số Lipschitz của nhiễu $f_{\sigma(k)}(x(k))$ đủ nhỏ, việc xây dựng công thức nghiệm của hệ SDLS có nhiễu là không dễ, chúng tôi đưa ra công thức biến thiên hằng số cho nghiệm cũng như chỉ ra đa tạp nghiệm của hệ. Sau đó, sử dụng phương pháp hàm Lyapunov cũng như đánh giá nghiệm chúng tôi nghiên cứu được tính ổn định, ổn định tiệm cận, ổn định mũ của hệ. Phần cuối, luận án cũng đã đưa ra các ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết.

Kết luận và kiến nghị

Kết quả đạt được của luận án

Trong luận án này, chúng tôi đã nghiên cứu và giải được hai bài toán của hệ chuyển mạch rời rạc suy biến.

- Bài toán 1 nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương. Chúng tôi đã nghiên cứu tính ổn định của hệ này thông qua phương pháp LP (linear programing) cùng với các tính chất của hệ có chỉ số 1, thiết lập điều kiện ổn định với thời gian dừng nhỏ nhất. Sau đó, luận án đưa ra định nghĩa về dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận, từ đó thiết lập điều kiện cần và đủ cho tính ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1.

- Bài toán 2 nghiên cứu tính giải được và ổn định của lớp hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu với phần tuyến tính có chỉ số 1 trong hai trường hợp: quy tắc chuyển mạch ở cặp ma trận hệ số giống nhau và khác nhau. Chúng tôi đưa ra kết quả cho tính giải được của lớp hệ này bằng cách sử dụng các tính chất của phép chiếu, tính chất của hệ chỉ số 1 của hệ thuần nhất và nguyên lý ánh xạ co. Sau đó, luận án thiết lập điều kiện ổn định, ổn định đều, ổn định tiệm cận của hệ dựa vào phương pháp hàm Lyapunov. Cuối cùng, chúng tôi đề xuất điều kiện ổn định mũ của hệ bằng cách sử dụng công thức biến thiên hằng số cho nghiệm, đánh giá nghiệm và sử dụng bất đẳng thức Gronwall dạng rời rạc.

Các kết quả nhận được là kết quả mới, có ý nghĩa khoa học, được các nhà toán học quan tâm. Trong luận án, ở mỗi chương, chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết.

Một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc suy biến phi tuyến dạng $E_{\sigma(k)}x(k+1) = F_{\sigma(k)}(x(k))$.
- Ổn định hóa hệ chuyển mạch rời rạc suy biến chỉ số 1 bằng quy luật chuyển mạch thích hợp hoặc bằng điều khiển phản hồi.
- Nghiên cứu tính ổn định, ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc suy biến không có chỉ số 1.

Danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

[CT1] D.D. Thuan, **N.T. Thu** (2024), *Stability and stabilizability of positive switched discrete-time linear singular systems*, Systems & Control Letters, Vol.185, article number 105725, https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2024.105725.

[CT2] D.D. Thuan, **N.T. Thu** (2024), *Solvability and stability of switched discrete time linear singular systems under Lipschitz perturbations*, Journal of Difference Equations and Applications, 2024, Vol. 30, No. 7, pp. 849–869, https://doi.org/10.1080/10236198.2024.2336478.

[CT3] **N.T. Thu** (2024), *Solvability and Stability of Switched Discrete–time Singular Systems with the Same Switching Rules in Coefficient Matrices*, VNU Journal of Science: Mathematics – Physics, Vol. 40, No. 2, pp. 106–115.

Tài liệu tham khảo

[*] **Tiếng Việt**

[1] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu (2003), *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, Nhà xuất bản giáo dục Hà Nội.

[2] Phạm Thị Linh (2019), *Tính ổn định của một số lớp hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1*, Luận án tiến sĩ, Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] H.T.N. Yen (2009), *Phương trình sai phân tuyến tính ẩn*, Luận án tiến sĩ, Đại học Quốc gia Hà Nội.

[*] **Tiếng Anh**

[4] P.K. Anh, D.S. Hoang (2006), *Stability of a Class of Singular Difference Equations*, International Journal of Difference Equations, Vol. 1, No. 2, pp. 181–193.

[5] P.K. Anh, P.T. Linh, D.D. Thuan, S. Trenn (2019), *The one-step-map for switched singular systems in discrete-time*, Proceedings of the 58th IEEE conference on decision and control, pp. 605–610.

[6] P.K. Anh, P.T. Linh, D.D. Thuan, S. Trenn (2020), *Stability analysis for switched discrete-time linear singular systems*, Automatica 119, page 1–9, article 109100.

[7] P.K. Anh, P.T. Linh (2017), *Stability of periodically switched discrete-time linear singular systems*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 23, No. 10, 1680–1693.

[8] P.K. Anh, H.T.N. Yen (2006), *Floquet theorem for linear implicit nonautonomous difference systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 321, pp. 921–929.

[9] M.S. Branicky (1998), *Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 4, pp. 475–482.

[10] A. Berman, R.J. Plemmons (1979), *Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences*, Academic Press, New York.

[11] S.L. Campbell (1980), *Singular systems of differential equations*, Research notes in mathematics: vol. 40. Boston, Mass: Pitman (Advanced Publishing Program).

[12] S.L. Campbell, C.D. Meyer (2009),*Generalized Inverses of Linear Transformations*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[13] B. Cantó, C. Coll, E. Sánchez (2005), *Drazin inverse and periodic collection of matrices*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol. 27, No. 2, pp. 413–423.

[14] M. Darouach, M. Chadli (2013), *Admissibility and control of switched discrete-time singular systems*, Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal, Vol. 1, No. 1, pp. 43–51.

[15] T.S. Doan, A. Kalauch, M. Klose, S. Siegmund (2015), *Stability of positive linear switched systems on ordered Banach spaces*, Systems & Control Letters, Vol. 75, pp. 14–19.

[16] M.P. Drazin (1958), *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups*, American Mathematical Monthly, Vol. 65, No.7, pp. 506–514.

[17] G.R. Duan, R.J. Patton (1998), *A Note on Hurwitz Stability of Matrices*, Automatica, Vol. 34, No. 4, pp. 509–511.

[18] L. Fang, H. Lin, P.J. Antsaklis (2004), *Stabilization and performance analysis for a class of switched systems*, Proceedings of the 43rd IEEE conference on decision and control, pp. 3265–3270.

[19] M. Fekete (1923), *Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahlingen Koeffizienten*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 17, pp. 228–249.

[20] E. Fornasini, M.E. Valcher (2012),*Stability and Stabilizability Criteria for Discrete-Time Positive Switched Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, pp. 1208–1221.

[21] S.S. Ge, Z. Sun, T.H. Lee (2001), *On reachability and stabilization of switched linear discrete-time systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46, No. 9, pp. 1437–1441.

[22] C. Gokcek (2004), *Stability analysis of periodically switched linear systemdcsing Floquet theory*, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 1, pp. 1–10.

[23] E. Griepentrog, R. Marz (1986), *Differential-algebraic equations and their numerical treatment*, Teubner-Texte Math., Vol. 88, Teubner, Leipzig.

[24] P. Gu, S. Tian (2018), *Iterative learning control for discrete-time switched singular systems*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 24, No. 9, pp. 1414–1428, http://dx.doi.org/ 10.1080/10236198.2018.1494165.

[25] L. Gurvits (1995), *Stability of discrete linear inclusions*, Linear Algebra and its Applications 231, 47–85.

[26] J. P. Hespanha, A. S. Morse (1999), *Stability of switched systems with average dwell-time*, Proceedings of the 38th IEEE conference on decision and control, pp. 2655–2660.

[27] L.V. Hien, Q.P. Ha, V.N. Phat (2009), *Stability and stabilization of switched linear dynamic systems with time delay and uncertainties*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 210, pp. 223–231.

[28] D. Hinrichsen, N.K. Son (1998), *Stability radii of positive discrete-time systems under affine parameter perturbations*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 8, pp. 1169–1188.

[29] R. Jungers (2009), *The joint spectral radius: Theory and applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[30] T. Kaczorek (1993), *Theory of Control and Systems*, PWN, Warszawa, (in Polish).

[31] D. Koenig, B. Marx (2009), *Hinf-filtering and state feedback control for discrete-time switched descriptor systems*, IET Control Theory & Application, Vol. 3, No. 6, pp. 661–670, http://dx.doi.org/10.1049/iet-cta.2008.0132.

[32] R. Kruse, M. Scheutzow (2018), *A discrete stochastic Gronwall lemma*, Mathematics and Computers in Simulation 143, pp. 149–157.

[33] P. Kunkel, V. Mehrmann (2006), *EMS textbooks in mathematics, Differential–algebraic equations. Analysis and numerical solution*, Zürich: European Mathematical Society (EMS).

[34] Y. Li, H. Zhang (2019), *Dwell time stability and stabilization of interval discrete-time switched positive linear systems*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 33, pp. 116–129.

[35] S. Li, Z. Xiang (2020), *Positivity, exponential stability and disturbance attenuation performance for singular switched positive systems with time-varying distributed delays*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 372, article 124981.

[36] D. Liberzon, S. Trenn (2009), *On stability of linear switched differential algebraic equations*,Proceedings of the 48th IEEE conference on decision and control, pp. 2156–2161.

[37] D. Liberzon, S. Trenn, F. Wirth (2011), *Commutativity and asymptotic stability for linear switched DAEs*, Proceedings of the 50th IEEE conference on decision and control, pp. 417–422.

[38] P.T. Linh (2018), *Stability of Arbitrarily Switched Discrete-time Linear Singular Systems of Index-1*, VNU Journal of Science: Mathematics – Physics Vol. 34, No. 4, pp. 84–91.

[39] D.G. Luenberger (1977), *Dynamic equations in descriptor form*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, pp. 312–321.

[40] D.G. Luenberger (1986), *Control of linear dynamic market systems*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 10, pp. 339–351.

[41] O.L. Mangasarian (1968), *Characherizations of real matrices of monotone kind*, SIAM Review, Vol. 10, No. 4, pp. 439–441.

[42] B. Men, Q. Zhang, G. Wang, J. Zhou (2013), *Stabilization of discretetime switched linear singular systems via a stochastic approach*, Applied Mathematics & Information Sciences, Vol. 7, pp. 631–637.

[43] J. W. Nieuwenhuis (1984), *About positive invariance and asymptotic stability*, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 12, pp. 81–87.

[44] V.N. Phat, L.V. Hien (2009), *An application of Razumikhin theorem to exponential stability for linear non-autonomous systems with arbitrary time-varying delays*, Applied Mathematics Letters, Vol. 22, pp. 1412-1417.

[45] V.N. Phat, K. Ratchagit (2011), *Stability and stabilization of switched linear discrete-time systems with interval time-varying delay*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 5, pp. 605–612.

[46] G. Polya, G. Szego (1998), *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer, Berlin, Heidelberg.

[47] M.A. Rami, D. Napp (2012), *Characterization and stability of autonomous positive descriptor systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, No. 10, pp. 2668–2673.

[48] M. A. Rami, D. Napp (2014), *Positivity of discrete singular systems and their stability: An LP-based approach*, Automatica, Vol. 50, pp. 84–91.

[49] M. A. Rami, F. Tadeo & A. Benzaouia (2007), *Control of constrained positive discrete systems*, American control conference, ACC, pp. 5851–5856.

[50] G.C. Rota, W.G. Strang (1960), *A note on the joint spectral radius*, Indagationes Mathematicae, Vol. 22, pp. 379–381.

[51] R. Shorten, K. Narendra (1999), *Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems*, Proceedings of the American Control Conference, pp. 1410–1414.

[52] R. Shorten, K. Narendra, O. Mason (2003), *A result on common quadratic Lyapunov functions*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, pp. 110–113.

[53] N.K. Son, L.V. Ngoc (2020), *On robust stability of switched linear systems*, IET Control Theory & Applications, Vol. 14, pp. 19–29.

[54] J.R. Stern (1982), *A note on positively invariant cones*, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 9, pp. 67–72.

[55] Z. Sun, S. S. Ge (2005), *Switched Linear Systems: Control and Design*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, Series Communications and Control Engineering.

[56] S. Sutrisno, S. Trenn (2024), *Switched linear singular systems in discrete time: Solution theory and observability notions*, Systems & Control Letters, Vol. 183, article 105674.

[57] N.T. Thanh, V.N. Phat (2019), *Switching law design for finite-time stability of singular fractional-order systems with delay*, IET Control Theory & Applications, Vol. 13, pp. 1367–1373.

[58] D.D. Thuan, L.V. Ngoc (2019), *Robust stability and robust stabilizability for periodically switched linear systems*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 361, No. 15, pp. 112–130 .

[59] Y. Tong, C. Wang, L. Zhang (2012), *Stabilisation of discrete-time switched positive linear systems via time- and state-dependent switching laws*, IET Control Theory & Application, Vol. 6, pp. 1603–1609.

[60] S. Trenn (2012), *Switched differential algebraic equations*, in Vasca, Francesco; Iannelli, Luigi (eds.) Dynamics and Control of Switched Electronic Systems - Advanced Perspectives for Modeling, Simulation and Control of Power Converters, London, pp. 189–216.

[61] K. Weierstraß (1868), *Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, Berl. Monatsb, pp. 310–338.

[62] G. Zhai, X. Xu (2010), *A unified approach to stability analysis of switched linear descriptor systems under arbitrary switching*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, Vol. 20, No. 2, pp. 249–259.

[63] G. Zhai, X. Xu, D. W.C. Ho (2012), *Stability of switched linear discrete-time descriptor systems: a new commutation condition*, International Journal of Control, Vol. 85, pp. 1779–1788.