ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Nguyễn Thị Kim Sơn

VỀ MÔ HÌNH CỦA MỘT SỐ MIỀN CÓ NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT VÀ HÌNH THÁI BIÊN CỦA HÀM SQUEEZING

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9460101.02.

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Hà Nội - 2025

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội.

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Ninh Văn Thu - Đại học Bách Khoa Hà Nội

Phản biện: PGS.TS. Phạm Đức Thoan - Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

Phản biện: PGS.TS. Hà Hương Giang - Trường Đại học Điện Lực

Phản biện: TS. Nguyễn Văn Hoàng - Trường Đại học FPT

Luận án đã được bảo vệ trước Hội đồng cấp Đại học Quốc gia chấm luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN vào hồi 9h giờ 00 ngày 07 tháng 7 năm 2025.

Có thể tìm luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Trung tâm thông tin - Thư viện, Đại học Quốc gia Hà Nội.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Nghiên cứu tính chất hình học của các nhóm biến đổi của các đa tạp phức hiện đang là một trong những hướng nghiên cứu sôi động của cả Hình học phức và Giải tích phức nhiều biến. Cho Ω là miền trong $\mathbb{C}^n$. Tập hợp tất cả các tự đẳng cấu của Ω, kí hiệu bởi $\mathrm{Aut}(\Omega)$, cùng với phép toán hai ngôi là phép hợp thành của hai tự đẳng cấu tạo thành một nhóm và nhóm này là nhóm tôpô với tôpô hội tụ đều trên các tập compact của Ω.

Trong những năm của thập kỉ 80 của thế kỉ trước, các nhà toán học đã phân loại được các miền bị chặn kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ dựa theo nhóm tự đẳng cấu không compact. Cụ thể hơn, B. Wong và J. P. Rosay đã chứng minh được rằng các miền giả lồi chặt với nhóm tự đẳng cấu không compact đều song chỉnh hình với hình cầu trong $\mathbb{C}^n$. Sau đó, các nhà toán học như E. Bedford, S. Pinchuk, K. T. Kim, F. Berteloot, H. Gaussier đã sử dụng phương pháp scaling của S. Pinchuk để mở rộng Định lý Wong-Rosay cho miền kiểu hữu hạn. Cụ thể, họ đã chứng minh được rằng mọi miền bị chặn giả lồi có kiểu hữu hạn với nhóm tự đẳng cấu không compact đều song chỉnh hình với các mô hình đơn giản. Các công trình trong những năm qua đã chỉ ra rằng tính chất hình học địa phương của điểm biên tụ quỹ đạo cho chúng ta thông tin toàn cục về miền.

Tuy nhiên, nhiều kỹ thuật của E. Bedford và S. Pinchuk không áp dụng được cho các miền không bị chặn. Vì thế, bài toán phân loại miền dựa theo nhóm tự đẳng cấu đối với các miền không bị chặn đòi hỏi phải có cách tiếp cận khác. Trong khoảng 20 năm qua, nhiều nhà toán học đã cố gắng đưa ra những cách tiếp cận mới và vì vậy, vấn đề đã được giải quyết trong một số trường hợp riêng. Hiện tại, theo hướng này chúng ta còn rất nhiều bài toán được đặt ra để nghiên cứu.

Một chủ đề nghiên cứu khác của luận án là nghiên cứu các bất biến song chỉnh hình trên các miền bị chặn, bao gồm các metric bất biến, hàm squeezing, bất biến Fridman, nhân p-Bergman và không gian L^p các hàm chỉnh hình khả tích. Những bất biến này cho chúng ta thông tin về một số tính chất giải tích và tính chất hình học quan trọng của các miền bị chặn và các họ chỉnh hình của chúng, đồng thời đóng vai trò quan trọng trong các công trình nghiên cứu gần đây về phân loại các miền bị chặn.

Các metric bất biến như metric Kobayashi, metric Bergman, metric Kahler-Einstein đóng vai trò quan trọng Hình học phức, Hình học vi phân và Giải tích phức nhiều biến. Việc tính toán cũng như ước lượng các metric này tại các điểm gần biên thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới. Trong luận án này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu chủ đề trên cho trường hợp tổng quát hơn.

Gần đây, để nghiên cứu các tính chất hình học và giải tích của miền bị chặn, năm 2012 các tác giả F. Deng, A. Guan và L. Zhang đã đưa ra khái niệm về một bất biến song chỉnh hình mới đó là hàm squeezing. Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và một điểm $p \in \Omega$. Với một phép nhúng chỉnh hình $f\colon \Omega \to \mathbb{B}^n := B(0;1)$ mà $f(p) = 0$, ta đặt

$$\sigma_{\Omega,f}(p) := \sup\left\{r > 0\colon B(0;r) \subset f(\Omega)\right\},$$

trong đó, $B^n(z;r) \subset \mathbb{C}^n$ là hình cầu tâm z có bán kính r. Khi đó, hàm squeezing $\sigma_\Omega :$ $\Omega \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$\sigma_\Omega(p) := \sup_f \left\{\sigma_{\Omega,f}(p)\right\}.$$

Từ định nghĩa trên ta thấy $0 < \sigma_\Omega(z) \leq 1$ với mọi $z \in \Omega$ và hàm squeezing bất biến qua song chỉnh hình. Miền Ω trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là miền chính quy, thuần nhất, chỉnh hình (HHR) nếu $\inf_{z\in\Omega} \sigma_\Omega(z) > 0$. Tính chất HHR được bảo toàn qua song chỉnh hình và kéo theo tính đầy và tính tương đương của các metric bất biến cổ điển như metric Carathéodory, metric Kobayashi, metric Bergman và metric Kahler-Einstein. Hơn nữa, chúng ta biết rằng lớp các miền thuần nhất bị chặn, miền lồi, miền giả lồi chặt đều là các miền HHR và các tài liệu trong đó). Trong luận án này, chúng tôi muốn mở rộng lớp miền HHR và khảo sát ước lượng biên cho hàm squeezing ở gần các điểm cực.

Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, chúng tôi chọn đề tài luận án là: *"Về mô hình của một số miền có nhóm tự đẳng cấu không compact và hình thái biên của hàm squeezing"* là để tiếp tục giải quyết hai bài toán sau đây:

Bài toán 1. Nghiên cứu đặc trưng của các miền trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact.

Bài toán 2. Nghiên cứu dáng điệu biên của hàm squeezing trên các miền bị chặn và metric Kobayashi tổng quát trên các miền h-thác triển được trong $\mathbb{C}^n$.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích đầu tiên của chúng tôi khi thực hiện luận án này là nghiên cứu về đặc trưng của các miền giả lồi có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ bởi dáng điệu biên của các quỹ đạo tự đẳng cấu bằng cách sử dụng kĩ thuật scaling của S. Pinchuk. Tiếp theo, luận án nghiên cứu để tìm cách mở rộng lớp miền HHR và khảo sát dáng điệu biên của hàm squeezing và của các metric Kobayashi tổng quát.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các miền trong $\mathbb{C}^n$. Trong luận án, tư tưởng chính xuyên suốt là khảo sát các tính chất hình học của một miền.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu và kĩ thuật truyền thống của Hình học phức cùng với các kĩ thuật và kết quả của Giải tích phức nhiều biến và Lý thuyết hàm hình học. Đặc biệt, chúng tôi đã áp dụng linh hoạt kĩ thuật scaling của S. Pinchuk cho từng trường hợp cụ thể. Ngoài ra, chúng tôi cũng sáng tạo ra những kĩ thuật mới và các ví dụ minh họa.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Luận án gồm ba chương.

Chương 1 trình bày một số kiến thức cần thiết liên quan đến các vấn đề nghiên cứu của luận án.

Chương 2 dành cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu Bài toán 1 của luận án về đặc trưng của các miền trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact.

Theo định lí cổ điển của H. Cartan, với một miền bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$, $\mathrm{Aut}(\Omega)$ là nhóm không compact khi và chỉ khi tồn tại điểm $a \in \Omega$, điểm $p \in \partial\Omega$ và các tự đẳng cấu $\varphi_j \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\varphi_j(a) \to p$ khi $j \to \infty$. Khi đó, điểm p được gọi là *điểm biên tụ quỹ đạo*. Tính chất hình học địa phương của các điểm biên tụ quỹ đạo mang đến những thông tin toàn cục về đặc trưng của các miền. Cụ thể, Greene và Krantz đã đặt ra giả thuyết rằng nếu một miền giả lồi, bị chặn, trơn với một nhóm tự đẳng cấu không compact thì điểm biên tụ quỹ đạo có kiểu hữu hạn theo nghĩa D'Angelo.

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu bài toán đưa ra đặc trưng cho các miền trong $\mathbb{C}^n$ với các nhóm tự đẳng cấu không compact. Các kết quả chính xung quanh bài toán này có được là nhờ B. Wong và J. P. Rosay, E. Bedford và S. Pinchuk, K.-T. Kim, F. Berteloot, A. Isaev và S. Krantz, Đ. T. Do và V. T. Ninh, V. T. Ninh và Q. D. Nguyen. Hầu hết các kết quả trước đây đều yêu cầu tính hữu hạn của kiểu và hoặc là tính giả lồi chặt (thậm chí là lồi), hoặc tính giả lồi chỉ trong không gian 2 chiều. Khác với các kết quả này, chúng tôi đưa ra một đặc trưng mới của các miền giả lồi yếu có kiểu hữu hạn bởi dáng điệu biên của các quỹ đạo tự đẳng cấu bằng việc sử dụng kĩ thuật scaling được giới thiệu bởi S. Pinchuk.

Kĩ thuật scaling có thể được mô tả ngắn gọn như sau. Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $\{\varphi_j(a)\}$ là dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ tới điểm biên ξ_0. Cố định một lân cận nhỏ U_0 của ξ_0. Bằng cách sử dụng phép đổi biến thích hợp, kí hiệu là T_j, của các tự đẳng cấu đa thức của $\mathbb{C}^{n+1}$, bao gồm các phép tịnh tiến và các phép co giãn, dãy các miền $D_j := T_j(U_0 \cap \Omega)$ hội tụ chuẩn tắc tới mô hình M_P, được cho bởi

$$M_P := \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\omega) + P(z, \bar{z}) < 0\},$$

trong đó P là đa thức nhận giá trị thực trên $\mathbb{C}^n$. Khi P là đa thức đa điều hòa dưới thuần nhất thì M_P được gọi là mô hình thuần nhất địa phương tại điểm ξ_0.

Dãy $\{F_j := T_j \circ \varphi_j\}$ được gọi là dãy scaling Pinchuk. Với các miền giả lồi có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$, khó khăn lớn nhất là chứng minh dãy Pinchuk scaling $\{F_j\}$ chuẩn tắc, nghĩa là, tồn tại một dãy con của $\{F_j\}$ hội tụ đều trên tập con compact từ Ω vào

M_P. Trước hết, ta giả sử tạm thời rằng Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, cách tiếp cận của E. Bedford và S. Pinchuk được chia thành hai bước. Trong bước thứ nhất, bằng cách gián tiếp, E. Bedford và S.Pinchuk đã xét sự hội tụ của dãy scaling ngược $\{F_j^{-1}\}$. Do tính bị chặn của Ω, định lý Montel đã khẳng định rằng dãy $\{F_j^{-1}\}$ chứa một dãy con hội tụ. Tiếp theo, giới hạn đó, kí hiệu là G, đã được chứng minh là ánh xạ một-một từ M_P vào Ω bằng cách sử dụng ước lượng đều của metric Kobayshi, hoặc metric Sibony cho các miền có đối hạng bằng 1) trên họ các miền scaling $\{D_j\}$. Ngoài ra, sự tồn tại của hàm vét cạn đa điều hòa dưới của Ω kéo theo ánh xạ chỉnh hình G là toàn ánh. Trong bước thứ hai, họ đã xét một nhóm con một chiều $\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ được xác định bởi $\{h_t\}(z) = G(G(z) + (0', it)), z \in \Omega$. Nhóm con này là parabolic theo nghĩa là $\{h_t\}(z)$ hội tụ đến điểm biên $p \in \partial\Omega$ khi $j \to \pm\infty$ với $z \in \Omega$ tùy ý. Sự phân tích về trường véctơ chỉnh hình $H(z) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h_t(z)$, xác định trên Ω và tiếp xúc với $\partial\Omega$, tại điểm parabolic cố định ξ_0 cho thấy đa thức P là đa thức thuần nhất theo trọng sao cho $P(z_1, \bar{z_1}) = c|z_1|^{2m}$ với $n = 1$ và $P(z, \bar{z}) = c|z_1|^{2m} + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2$ với các miền có đối hạng bằng 1, trong đó c là hằng số dương.

Chú ý rằng kĩ thuật trên không áp dụng được cho các miền không bị chặn. Do đó, một cách tiếp cận khác là chứng minh trực tiếp tính chuẩn tắc của $\{F_j\}$ và khi đó tính taut của Ω kéo theo $\{F_j^{-1}\}$ cũng chuẩn tắc.

Năm 1991, S. Pinchuk đã xét cho trường hợp ξ_0 là điểm giả lồi chặt.

Với các miền giả lồi yếu bị chặn có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^2$, F. Berteloot đã đạt được những bước tiến đáng kể.

Gần đây, V. T. Ninh và Q. D. Nguyen đã nghiên cứu miền giả lồi $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ có đa kiểu Catlin hữu hạn ở gần điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$. Khi M_P là mô hình thuần nhất có kiểu hữu hạn thì tồn tại hàm peak đa điều hòa dưới cho M_P tại điểm gốc tọa độ. Do đó, tính hút của các đĩa giải tích kéo theo tính chuẩn tắc của dãy Pinchuk scaling. Kết quả là, Ω là miền song chỉnh hình với mô hình M_P nếu dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ Λ-không tiếp xúc tới điểm ξ_0.

Chúng ta lưu ý rằng dáng điệu biên của $\{\varphi_j(a)\}$ quyết định sự lựa chọn các phép co giãn. Mục đích của chương này là đưa ra đặc trưng cho các mô hình thuần nhất địa phương khi quỹ đạo tự đẳng cấu $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ tới điểm ξ_0 theo hướng "rất" tiếp xúc với $\partial\Omega$.

Kết quả mới thứ nhất của luận án trong Chương 2 chỉ ra rằng chỉ có hình cầu đơn vị mới có một quỹ đạo tự đẳng cấu tại điểm ξ_0 hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới $\partial\Omega$. Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lí sau.

Định lí 2.1.1. *Cho Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^{n+1}$ với biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Cho $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm biên h-thác triển mạnh có đa kiểu Catlin hữu hạn $(2m_1, \cdots, 2m_n, 1)$ và $\Lambda = (\frac{1}{2m_1}, \cdots, \frac{1}{2m_n})$. Giả sử tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ Λ-tiếp xúc đều* *tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$. Khi đó, miền Ω song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$.*

Bây giờ, chúng tôi chuyển sang xét các miền giả lồi, có đối hạng bằng 1 trong $\mathbb{C}^{n+1}$ bao gồm các miền giả lồi, có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^2$. Khi đó, ξ_0 là điểm h-thác triển được. Ngoài ra, nếu $n = 1$ và ξ_0 là điểm h-thác triển mạnh thì Ω là miền song chỉnh hình với $\mathbb{B}^2$ theo Định lí 2.1.1. Tuy nhiên, nếu không có tính h-thác triển mạnh thì khái niệm về sự hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu là cần thiết để xác định xem miền Ω có song chỉnh hình với $\mathbb{B}^{n+1}$ hay không.

Kết quả mới thứ hai của luận án trong Chương 2 chỉ ra rằng Định lí 2.1.1 vẫn còn đúng nếu ξ_0 là điểm có kiểu D'Angelo hữu hạn và dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại điểm ξ_0 và dãy $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$. Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lí sau.

Định lí 2.2.1. *Cho Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^{n+1}$ với biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử ξ_0 là điểm biên của Ω có kiểu D'Angelo hữu hạn sao cho dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là 1 tại ξ_0 và tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$.*

Bây giờ, cho $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ là miền giả lồi có kiểu $2m$ hữu hạn ở gần điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$. Khi đó, khái niệm sự hội tụ $\left(\frac{1}{2m}\right)$-tiếp xúc đều chính là sự hội tụ $\left(\frac{1}{2m}\right)$-tiếp xúc. Do đó, từ Định lí 2.2.1 ta suy ra hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.2. *Cho Ω là miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ với biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ có kiểu hữu hạn $2m$. Giả sử tồn tại dãy $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho dãy $\varphi_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới ξ_0 với $a \in \Omega$. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^2$.*

Trong trường hợp dãy $\{\varphi_j(a)\}$ không hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$ thì chúng ta chứng minh Ω là miền song chỉnh hình với một mô hình được xác định bởi một đa thức thuần nhất có bậc lớn hơn hoặc bằng 2. Đó là kết quả mới thứ ba của luận án trong chương này.

Mệnh đề 2.3.1. *Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ có biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm có kiểu hữu hạn $2m$. Giả sử tồn tại số $2 \le \nu \le m, a \in \Omega$ và dãy $f_j \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp 2ν tới điểm ξ_0. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với một mô hình có dạng*

$$M_Q := \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(\omega) + Q(z) < 0\},$$

trong đó Q là đa thức thuần nhất bậc 2ν và không điều hòa.

Chương 3 dành cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu Bài toán 2 của luận án. Đó là các kết quả liên quan đến dáng điệu biên của hai bất biến song chỉnh hình trên các miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ là hàm squeezing và metric Kobayashi tổng quát.

Trong phần đầu tiên của Chương 3, chúng tôi trình bày hai kết quả mới liên quan đến hàm squeezing. Một trong những chủ đề trung tâm của giải tích phức nhiều biến và hình học phức là nghiên cứu các metric bất biến song chỉnh hình cổ điển như metric Carathéodory, metric Bergman, metric Kobayashi và metric Kähler-Einstein trên các miền trong $\mathbb{C}^n$ hoặc các đa tạp phức. Để phân biệt các miền hoặc các đa tạp phức, các metric bất biến cổ điển có thể ước lượng được được các nhà nghiên cứu giải tích phức quan tâm và đã được nghiên cứu rộng rãi trong nhiều tài liệu. Trong các nghiên cứu đó, một khái niệm có tên là miền chính quy, thuần nhất, chỉnh hình (viết tắt là HHR), đã thu hút được sự chú ý đáng kể trong thời gian vừa qua.

Tính chất HHR được bảo toàn qua các ánh xạ song chỉnh hình. Do đó, kéo theo tính đầy và tính tương đương của các metric bất biến cổ điển như metric Carathéodory, metric Kobayashi, metric Bergman và metric Kahler-Einstein. Vì vậy, chúng ta mong muốn biết được khi nào thì một đa tạp phức hoặc một miền bị chặn sẽ có tính chất HHR.

Năm 2009, Yeung đã chỉ ra rằng các miền thuần nhất bị chặn, các miền bị chặn phủ một đa tạp phức compact, các miền lồi chặt bị chặn và trơn lớp $\mathcal{C}^2$ đều là các đa tạp HHR.

Gần đây, bằng cách nghiên cứu dáng điệu biên của hàm squeezing, người ta đã chứng minh được rằng các miền giả lồi chặt có biên thuộc lớp $\mathcal{C}^2$ và miền lồi bị chặn cũng là các miền HHR.

Tiếp tục hướng nghiên cứu trên, trong chương này chúng tôi đã đưa ra được một lớp mới các miền HHR. Để làm được như vậy, với các số nguyên $m_1, \ldots, m_{n-1}$ ta xét ellipsoid tổng quát D_P trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ được xác định bởi

$$D_P := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \colon |z_n|^2 + P(z') < 1\},$$

trong đó $P(z')$ là đa thức $(1/2m_1, \ldots, 1/2m_{n-1})$-thuần nhất và nhận giá trị thực trên $\mathbb{C}^{n-1}$ được cho bởi

$$P(z') = \sum_{wt(K)=wt(L)=1/2} a_{KL} {z'}^K \bar{z}'^L, \tag{1}$$

với $a_{KL} \in \mathbb{C}$, $a_{KL} = \bar{a}_{LK}$ và $P(z') > 0$ khi $z' \neq 0$. Ở đây và trong các phần sau $z' := (z_1, \ldots, z_{n-1})$.

Để đưa ra kết quả mới đầu tiên của luận án trong chương này ta cần một số định nghĩa sau.

Định nghĩa A. *Miền Ω trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là miền WB (weighted-bumped) hoặc miền kiểu đường chéo hữu hạn thuần nhất (homogeneous finite diagonal type) nếu*

$$\Omega = \left\{(z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z_n) + P\left(z'\right) < 0\right\}$$

và tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$P(z') - \delta(|z_1|^{2m_1} + \cdots + |z_{n-1}|^{2m_{n-1}}) \text{ là đa điều hoà dưới trên } \mathbb{C}^{n-1},$$

nghĩa là, P là đa điều hoà dưới chặt bên ngoài các trục toạ độ.

Lưu ý rằng miền $\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(z_2) + P(z_1) < 0\}$ là miền WB nếu nó giả lồi chặt tại mọi điểm biên ở bên ngoài tập hợp $\partial\Omega \cap \{(0, it) \in \mathbb{C}^2 \colon t \in \mathbb{R}\}$.

Định nghĩa B. *Miền D_P được gọi là miền $\widetilde{WB}$ nếu D_P là miền giả lồi chặt tại mọi điểm biên ở bên ngoài tập hợp $\{(0', e^{i\theta}) \colon \theta \in \mathbb{R}\}$.*

Chú ý rằng ellipsoid $E_{1m} := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1|^{2m} + |z_2|^2 < 1\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ là một miền $\widetilde{WB}$. Mặc dù $\Omega := \{z \in \mathbb{C}^3 \colon |z_1|^4 + |z_2|^4 + |z_3|^2 < 1\}$ là một miền WB nhưng nó không là miền $\widetilde{WB}$-domain vì điểm biên $(1, 0, 0) \in \partial\Omega \setminus \{(0, 0, e^{i\theta}) \colon \theta \in \mathbb{R}\}$ không giả lồi chặt. Như vậy, khái niệm miền $\widetilde{WB}$ chặt hơn khái niệm miền WB trong không gian chiều lớn hơn 2.

Kết quả mới đầu tiên của luận án trong Chương 3 là định lí sau. Định lí chỉ ra rằng nếu D_P là miền $\widetilde{WB}$ thì D_P là miền HHR.

Định lí 3.1.2. *Cho P là một đa thức thuần nhất theo trọng với trọng $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ được cho bởi (**??**) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0'\}$. Nếu D_P là miền $\widetilde{WB}$ thì D_P là miền HHR.*

Tiếp theo, chúng tôi khảo sát dáng điệu của hàm squeezing gần điểm cực toàn cục. Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$ gần điểm biên $p \in \partial\Omega$. Ta nhắc lại, điểm biên p được gọi là điểm *cực cầu* nếu tồn tại hình cầu $B(c(p); R)$ trong $\mathbb{C}^n$ bán kính R, tâm tại điểm $c(p)$ sao cho $\Omega \subset B(c(p); R)$ và $p \in \partial\Omega \cap \partial B(c(p); R)$. Năm 2016, K.T. Kim, L. Zhang đã chứng minh được rằng $\lim_{\Omega \ni q \to p} \sigma_\Omega(q) = 1$ nếu p là một điểm biên cực cầu của Ω. Tuy nhiên, điểm biên cực cầu nói chung không tồn tại, ngay cả với một miền giả lồi trơn có kiểu hữu hạn.

Điều đó dẫn đến định nghĩa sau đây.

Định nghĩa C. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$), $p \in \partial\Omega$, $P(z')$ là đa thức được cho trong (**??**), và $r \in (0, 1]$. Ta nói p là điểm cực (P, r) nếu tồn tại phép nhúng chỉnh hình $f \colon \overline{\Omega} \to \overline{E_P}$ sao cho $f(p) = (0', 0)$ và $D(r) \subset f(\Omega)$, trong đó*

$$E(p) := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon P(z') < 2\mathrm{Re}(z_n)\};$$

$$D(r) := D_{P,r} = \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon |z_n - r|^2 + P(z') < r^2\}.$$

Trong trường hợp này, ta kí hiệu $\Gamma(r, c) := f^{-1}(D(r) \cap \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n \colon |\mathrm{Im}(z_n)| \leq c|\mathrm{Re}(z_n)|\})$ với $c > 0$.

Vì $D(r') \subset D(r)$ với $0 < r' < r \leq 1$ nên ta suy ra rằng nếu p là điểm cực (P, r) thì nó cũng là điểm cực (P, r') với mọi $0 < r' < r \leq 1$. Hơn nữa, p là điểm cực cầu khi và chỉ khi nó là điểm cực $(\|z'\|^2, r)$ với $0 < r \leq 1$.

Kết quả mới thứ hai của luận án trong chương này là định lí dưới đây.

Định lí 3.1.3. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) và $p \in \partial\Omega$ là một điểm cực*

(P, r) *với* $0 < r \leq 1$. *Khi đó, với mọi* $0 < r' < r$ *và* $c > 0$ *tồn tại* $\epsilon_0, \gamma_0 > 0$ *sao cho*

$$\sigma_\Omega(q) > \gamma_0, \quad \forall q \in \Gamma(r', c) \cap B(p; \epsilon_0).$$

Trong phần tiếp theo của chương này, chúng tôi trình bày các kết quả mới liên quan đến các metric Kobayashi tổng quát.

Cho Ω là một miền giả lồi, trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $\xi_0 \in \partial\Omega$. Giả sử ρ là một hàm xác định biên địa phương của Ω ở gần điểm ξ_0 và đa kiểu $\mathcal{M}(\xi_0) = (1, m_1, \ldots, m_n)$ hữu hạn. Khi đó, tồn tại một hệ tọa độ $z = (z_0, z')$ với $z' = (z_1, \ldots, z_n)$ sao cho $\xi_0 = 0$ và hàm $\rho(z)$ có thể khai triển ở gần điểm 0 như sau

$$\rho(z) = \mathrm{Re}(z_0) + P(z') + R(z),$$

trong đó P là một đa thức đa điều hòa dưới, $(1/m_1, \ldots, 1/m_n)$-thuần nhất và không chứa các hạng tử đa điều hòa, R là hàm trơn và thỏa mãn

$$|R(z)| \leq C\left(|z_0| + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{m_j}\right)^{\gamma},$$

với hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$.

Miền Ω được gọi là *h-thác triển được* tại điểm p nếu mô hình

$$M_P := \{z = (z_0, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \colon \mathrm{Re}(z_0) + P(z') < 0\}$$

có kiểu hữu hạn. Kết quả là M_P *suy biến*, nghĩa là, biên ∂M_P không chứa tập giải tích không tầm thường đi qua gốc tọa độ, và M_P là miền taut.

Với $s, M, N > 0$, ta kí hiệu

$$\Gamma(s; M, N) = \{z \in \Omega \colon |\mathrm{Im}(z_0)| \leq M|\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)|, \sigma(z') \leq N|\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)|^s\},$$

trong đó $\sigma(z') := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{m_j}$.

Để đơn giản, ta định nghĩa Λ-nón có đỉnh tại ξ_0 bởi $\Gamma := \Gamma(1; M, N)$ và kí hiệu là $\Gamma^s := \Gamma(s; M, N)$ với $M, N > 0$ nào đó. Chúng ta lưu ý rằng $|z_j|^{m_j} \lesssim |\mathrm{dist}(z, \partial\Omega)|, j = 1, \ldots, n$, với $z \in \Gamma$.

Cố định một lân cận đủ nhỏ U của ξ_0 trong $\mathbb{C}^{n+1}$, ta có thể giả sử rằng với điểm $\eta \in U \cap \Omega$ bất kì, tồn tại một số thực dương $\epsilon(\eta) > 0$ sao cho điểm $\tilde{\eta} := (\eta_0 + \epsilon(\eta), \eta_1, \ldots, \eta_n)$ thuộc siêu mặt $\{\rho = 0\}$. Chú ý rằng $\epsilon(\eta) = |\rho(\eta)| \approx \mathrm{dist}(\eta, \partial\Omega)$.

Tiếp theo, chúng ta nhắc lại khái niệm các metric Kobayashi bậc cao sau đây.

Định nghĩa D. *Với mỗi số nguyên* $k \geq 1$, *metric Kobayashi bậc* k *được định nghĩa bởi*

$$F_\Omega^k(z, X) = \inf\left\{\frac{1}{\lambda} \colon \lambda > 0, \exists \varphi \in \mathrm{Hol}(\Delta, \Omega),\ \varphi(0) = z, \nu(\varphi) \geq k, \varphi^{(k)}(0) = k!\lambda X\right\},$$

trong đó Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$ và $\nu(\varphi)$ là cấp triệt tiêu của φ tại 0. Chúng ta lưu ý rằng $F_\Omega := F^1_\Omega$ chính là metric Kobayashi.

Bây giờ, chúng ta định nghĩa phép co giãn

$$\pi_t(z_1,\dots,z_n) = \left(t^{1/m_1}z_1,\dots,t^{1/m_n}z_n\right),\ t\geq 0.$$

Khi đó, với mọi dãy $\{\eta_j\}\subset\Gamma$ hội tụ về đỉnh ξ_0, tồn tại dãy con $\{\eta_{j_\ell}\}\subset\{\eta_j\}$ sao cho

$$\lim_{\ell\to\infty}\pi_{1/\epsilon(\eta_{j_\ell})}(\eta'_{j_\ell}) = \alpha\in\mathbb{C}^n.$$

(Chúng ta lưu ý rằng $\alpha = 0$ nếu $\{\eta_{j_\ell}\}\subset\Gamma^s$ với $s>1$.) Khi đó, mô hình liên kết $M_{P,\alpha}$ được định nghĩa bởi

$$M_{P,\alpha} = \{(z_0,z')\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\colon \mathrm{Re}(z_0)+P(z'+\alpha)-P(\alpha)<0\}.$$

Để đơn giản, ta viết M_P thay cho $M_{P,0}$.

Năm 1975, I. Graham đã đưa ra giới hạn biên có trọng cho metric Kobayashi trên các miền giả lồi chặt. Kể từ đó, đã có nhiều ước lượng cho metric Kobayashi trên một số lớp miền giả lồi yếu, đặc biệt là các giới hạn của metric Kobayashi trên các miền giả lồi có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^2$, các miền lồi, bị chặn, trơn, có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ ($n\geq 2$). Đối với các miền giả lồi yếu tổng quát có kiểu hữu hạn, chưa có một giới hạn rõ ràng nào được biết đến.

Năm 1995, J. Yu đã nghiên cứu bài toán tương tự cho các metric Kobayshi tổng quát trên các miền giả lồi yếu. Trong tài liệu đó, J. Yu tập trung vào mối liên hệ giữa các giới hạn biên (có trọng) của các metric và các bất biến Levi của miền theo cách tương tự các kết quả trong bài báo năm 1975 của I. Graham. Khó khăn lớn nhất trong trường hợp miền giả lồi yếu là tính chất hình học Levi địa phương của miền nói chung phức tạp hơn nhiều và vẫn chưa được hiểu rõ. Đặc biệt, không có mô hình chung cho tất cả các miền giả lồi yếu.

Để vượt qua được khó khăn đó, đầu tiên J. Yu đã dựa vào đa kiểu của miền để thiết lập lại miền và sau đó đưa miền đó trở thành một miền taut (nhưng mô hình không bị chặn). Để đạt được giới hạn mong muốn, tác giả đã phải nghiên cứu bài toán tính ổn định và tính địa phương của các metric. Ưu điểm của phương pháp này là không chỉ áp dụng được cho các metric Kobayashi, mà còn có thể áp dụng được cho các metric bất biến khác. Kết quả chính của bài báo đó là mở rộng kết quả trong bài báo năm 1975 của I. Graham cho một lớp các miền giả lồi yếu rộng lớn, có tên là các miền h-thác triển được, miền bao gồm hầu hết tất cả các miền được đề cập ở trên. Giới hạn trong định lí chính trong bài báo năm 1995 của J. Yu là giới hạn rõ ràng nhất cho một miền giả lồi yếu tổng quát. Định lí được phát biểu như sau.

Định lý E (J. Yu). *Cho Ω là một miền taut trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và cho $p\in\partial\Omega$ là điểm có kiểu hữu hạn với đa kiểu $\mathscr{M}(p) = (1,m_1,\dots,m_n)$. Giả sử (Ω,p) là miền h-thác triển được.*

Khi đó, với mọi nón không tiếp xúc Γ trong Ω có đỉnh tại điểm p và mọi hàm $V(z)$ nhận giá trị trong $\mathbb{C}^{n+1}$, liên tục tại điểm p, ta có

$$\lim_{\Omega\cap\Gamma\ni z\to p} F_\Omega\left(z, (H_p)_{*z}^{-1}(\Pi_d)_{*q}(H_p)_{*z}V(z)\right) = F_{D_p}\left(0, (H_p)_{*p}V(p)\right), \tag{2}$$

trong đó H_p là các tọa độ phân biệt được xác định như trên, $D_p = \{(z,w) : \operatorname{Re} w + P(z) < 1\}$ là mô hình liên kết với miền (Ω, p) theo các tọa độ phân biệt $q = H_p(z)$ và $\Pi_{d*} = \operatorname{diag}\left[d^{1/m_n}, \dots, d^{1/m_1}, d\right]$ với $d = \operatorname{dist}(q, \partial(H_p(\Omega)))$.

Phương trình (2) cho thấy giới hạn biên có trọng của mọi metric Kobayashi bậc cao trên miền h-thác triển chính là giá trị của metric trên mô hình liên kết tại điểm 0.

Trong bài báo năm 1995 của J. Yu, các giới hạn biên có trọng của các metric Kobayashi tổng quát được lấy trên tất cả các điểm trong một nón không tiếp xúc. Kết quả mới thứ ba của luận án trong chương này khẳng định rằng kết quả của J. Yu vẫn đúng với các giới hạn Λ-không tiếp xúc. Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lí sau.

Định lí 3.2.3. *Cho Ω là một miền giả lồi, có biên trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và $\xi_0 \in \partial\Omega$ sao cho Ω là h-thác triển được tại điểm ξ_0. Giả sử đa kiểu của điểm ξ_0 là $(1, m_1, \dots, m_n)$ mà $m_n < +\infty$ và cho $\Lambda = (1/m_1, \dots, 1/m_n)$. Giả sử hàm xác định biên địa phương ρ của miền Ω ở gần điểm 0 có dạng*

$$\rho(z) = \operatorname{Re}(z_0) + P(z') + R(z),$$

trong đó P là đa thức đa điều hòa dưới Λ-thuần nhất không chứa hạng tử đa điều hòa, R là hàm trơn và thỏa mãn

$$|R(z)| \le C\left(|z_0| + \sum_{j=1}^n |z_j|^{m_j}\right)^\gamma,$$

với hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$. Cho $\{\eta_j\} = \{(\eta_{j0}, \eta_j')\} \subset \Omega\cap U\cap\Gamma$ là một dãy các điểm hội tụ đến điểm 0 sao cho

$$\lim_{j\to\infty} \pi_{1/\epsilon(\eta_j)}(\eta_j') = \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma\ni\eta_j\to 0} F^k_{\Omega\cap U}\left(\eta_j, (\pi_{\epsilon(\eta_j)})_* X\right) &= F^k_{M_{P,\alpha}}((0', -1), X)\\ &= F^k_{M_P}\left((-1 - P(\alpha), \alpha), X\right),\ \forall\ X \in \mathbb{C}^{n+1}.\end{aligned}$$

Luận án cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh theo hướng nghiên cứu này.

6. Cấu trúc luận án

Cấu trúc của luận án bao gồm ba chương chính được viết theo tư tưởng kế thừa.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2. Đặc trưng của các miền trong $\mathbb{C}^n$ có nhóm tự đẳng cấu không compact.

Chương 3. Dáng điệu biên của hàm squeezing và của các metric Kobayashi tổng quát.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Sự hội tụ chuẩn tắc của một dãy các miền và của một dãy các ánh xạ

Định nghĩa 1.1.1. *Cho* $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ *là một dãy các miền trong* $\mathbb{C}^n$*. Dãy* $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ *được gọi là* hội tụ chuẩn tắc *tới miền* $\Omega_0 \subset \mathbb{C}^n$ *nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) Nếu tập compact K *được chứa trong phần trong của* $\bigcap_{j\geq m} \Omega_j$ *với số nguyên dương* m *nào đó thì* $K \subset \Omega_0$*;*

(ii) Nếu tập con compact $K' \subset \Omega_0$ *thì tồn tại hằng số* $m > 0$ *sao cho* $K' \subset \bigcap_{j\geq m} \Omega_j$*.*

Ngoài ra, khi dãy các ánh xạ $\varphi_j : \Omega_j \to \mathbb{C}^m$ *hội tụ đều trên các tập compact tới ánh xạ* $\varphi : \Omega_0 \to \mathbb{C}^m$ *thì ta nói dãy* $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ hội tụ chuẩn tắc *tới* φ*.*

1.2 Tính lồi và tính giả lồi

Định nghĩa 1.2.4. *Cho* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *là một miền có biên trơn lớp* $\mathcal{C}^2$ *và điểm* $p \in \partial\Omega$*. Giả sử* ρ *là một hàm xác định biên địa phương cho* Ω*. Ta nói biên* $\partial\Omega$ *là giả lồi (Levi) tại điểm* p *nếu*

$$L_\rho(p)(w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p)\omega_j \bar{\omega}_k \geq 0 \quad \forall w \in \mathcal{T}_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega). \tag{1.1}$$

Biểu thức bên vế trái của (1.1) được gọi là dạng Levi.

Điểm p *được gọi là giả lồi chặt Levi nếu biểu thức bên vế trái của (1.1) dương với mọi* $\omega \in \mathcal{T}_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$*.*

Một miền được gọi là giả lồi Levi (tương ứng giả lồi chặt Levi) nếu mọi điểm biên của nó giả lồi Levi (tương ứng giả lồi chặt Levi).

1.3 Kiểu theo nghĩa D'Angelo

Định nghĩa 1.3.1. *Giả sử* (M, p) *là một mầm tại điểm* p *của siêu mặt thực trơn trong* $\mathbb{C}^n$ *và* r *là hàm xác định biên địa phương của* M *ở gần điểm* p*. Cấp tiếp xúc của đường* *cong γ với M tại điểm p được xác định bởi*

$$\tau(M,\gamma,p) := \frac{\nu(r\circ\gamma)}{\nu(\gamma)},$$

trong đó $\nu(\gamma)$ là cấp triệt tiêu của $\gamma(t)-\gamma(0)$ tại $t=0$ và $\nu(r\circ\gamma)$ là cấp triệt tiêu của $r\circ\gamma(t)$ tại $t=0$. Kiểu D'Angelo của M tại p được định nghĩa bởi

$$\tau(M,p) = \sup_{\gamma}\tau(M,\gamma,p) = \sup_{\gamma}\frac{\nu(r\circ\gamma)}{\nu(\gamma)},$$

trong đó supremum được lấy trên tất cả các mầm $\gamma:\Delta\to\mathbb{C}^n$ của các đường cong chỉnh hình khác hằng thỏa mãn $\gamma(0)=p$.
Ta nói p là điểm có kiểu D'Angelo hữu hạn nếu $\tau(M,p)<+\infty$ và có kiểu D'Angelo vô hạn nếu ngược lại.

1.4 Đa kiểu Catlin

Giả sử r là hàm xác định biên địa phương trơn cho miền $\Omega=\{z : r(z)<0\}$. Ta kí hiệu Γ_n là tập của tất các bộ n số $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ với $1\le\lambda_i\le+\infty$ sao cho

i) $\lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n$;

ii) với mỗi k, hoặc $\lambda_k=+\infty$ hoặc tồn tại các số nguyên không âm $a_1,\dots,a_k$ với $a_k>0$ sao cho
$$\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{\lambda_j}=1.$$

Dễ thấy rằng, với mỗi số $T<\infty$ và mỗi $i=1,\dots,n$ thì khi Λ thuộc Γ_n chỉ có hữu hạn các giá trị hữu tỉ có thể có của λ_i thỏa mãn $\lambda_i\le T$. Các phần tử của Γ_n được gọi là *trọng*. Tập các trọng có thể được sắp xếp theo thứ tự từ điển, nghĩa là, với $\Lambda'=(\lambda'_1,\dots,\lambda'_n)$ và $\Lambda''=(\lambda''_1,\dots,\lambda''_n)$ thì $\Lambda'<\Lambda''$ nếu với k nào đó, $\lambda'_i=\lambda''_i$ với mọi $i<k$, nhưng $\lambda'_k<\lambda''_k$.

Bây giờ, giả sử z_0 là một điểm biên cho trước của Ω với hàm xác định biên địa phương r. Trọng $\Lambda\in\Gamma_n$ được gọi là *phân biệt được* nếu tồn tại hệ tọa độ chỉnh hình $(z_1,\dots,z_n)$ quanh điểm z_0 mà z_0 được ánh xạ thành điểm gốc tọa độ sao cho

$$D^\alpha\bar{D}^\beta r(z_0)=0 \text{ khi } \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i+\beta_i}{\lambda_i}<1, \tag{1.2}$$

trong đó, D^α và $\bar{D}^\beta$ kí hiệu cho các toán tử đạo hàm riêng

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\dots\partial z_n^{\alpha_n}} \quad \text{và} \quad \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar{z}_1{}^{\beta_1}\dots\partial \bar{z}_n{}^{\beta_n}}$$

tương ứng.

Định nghĩa 1.4.1. *Đa kiểu $\mathcal{M}(z_0)$ của điểm biên $z_0 \in \partial\Omega$ là trọng nhỏ nhất $\mathcal{M} = (m_1, \ldots, m_n)$ trong Γ_n (nhỏ nhất theo cách sắp xếp "từ điển") sao cho $\mathcal{M} \geq \Lambda$ với mọi trọng Λ phân biệt được.*

1.5 Hàm peak chỉnh hình và hàm peak đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.5.2. *Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và p là một điểm biên của Ω. Nếu tồn tại một hàm liên tục $h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:*

(i) h là đa điều hòa dưới trên Ω và

(ii) $h(p) = 0$ và $h(z) < 0$ với mỗi $z \in \bar{\Omega} \backslash \{0\}$,

thì ta nói h là hàm peak đa điều hòa dưới tại p của Ω. Trong trường hợp này, điểm p được gọi là điểm peak đa điều hòa dưới của miền Ω.

1.6 Miền h-thác triển được

Một đa chỉ số $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ được gọi là một đa trọng nếu $1 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

Định nghĩa 1.6.1. *Giả sử $f(z)$ là một hàm số trên $\mathbb{C}^n$ và $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ là một đa trọng. Với mỗi số thực $t \geq 0$, ta đặt*

$$\pi_t(z) = \left(t^{\lambda_1} z_1, t^{\lambda_2} z_2, \ldots, t^{\lambda_n} z_n\right).$$

Ta nói f là hàm Λ-thuần nhất theo trọng α nếu $f(\pi_t(z)) = t^\alpha f(z)$ với mỗi $t \geq 0$ và $z \in \mathbb{C}^n$. Trong trường hợp $\alpha = 1$, hàm f được gọi là hàm Λ-thuần nhất.

Với đa trọng Λ, hàm số

$$\sigma(z) = \sigma_\Lambda(z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{1/\lambda_j}$$

là một ví dụ tiêu biểu cho lớp hàm Λ-thuần nhất.

Ngoài ra, với đa trọng Λ và hàm Λ-thuần nhất nhận giá trị thực P, chúng ta định nghĩa một mô hình thuần nhất $D_{\Lambda,P}$ như sau

$$D_{\Lambda,P} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) + P(z) < 0\}.$$

Định nghĩa 1.6.2. *Giả sử $D_{\Lambda,P}$ là một mô hình thuần nhất. Khi đó, $D_{\Lambda,P}$ được gọi là h-thác triển được nếu tồn tại một hàm $a(z)$ là Λ-thuần nhất thuộc lớp $\mathcal{C}^1$ trên $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $a(z) > 0$ *khi* $z \neq 0$*;*

(ii) $P(z) - a(z)$ *là hàm đa điều hòa dưới trên* $\mathbb{C}^n$*.*

Khi đó, hàm $a(z)$ *được gọi là hàm bumping.*

Kí hiệu (Ω, p) là một miền điểm trong $\mathbb{C}^{n+1}$, với Ω là một miền giả lồi trơn trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và điểm $p \in \partial\Omega$. Giả sử ρ là hàm xác định biên địa phương của Ω ở gần điểm p và đa kiểu $\mathcal{M}(p) = (1, m_1, \ldots, m_n)$ hữu hạn.

Theo định nghĩa đa kiểu, tồn tại một hệ tọa độ $(z, w) = (z_1, \ldots, z_n, w)$ sao cho $p = 0$ và hàm $\rho(z, w)$ có thể khai triển được ở gần điểm 0 như sau

$$\rho(z, w) = \mathrm{Re}(w) + P(z) + R(z, w),$$

trong đó P là một đa thức $(1/m_1, \ldots, 1/m_n)$-thuần nhất, đa điều hòa dưới không chứa hạng tử đa điều hòa, R là hàm trơn và thỏa mãn

$$|R(z, w)| \leq C \left(|w| + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{m_j} \right)^{\gamma},$$

với các hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$.

Định nghĩa 1.6.3. *Ta gọi* $M_P = \{(z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : \mathrm{Re}(w) + P(z) < 0\}$ *là một mô hình liên kết với* (Ω, p)*. Nếu miền điểm* (Ω, p) *có mô hình liên kết của* Ω *tại* $p \in \partial\Omega$ *là h-thác triển được thì ta nói* (Ω, p) *là h-thác triển được. Trong trường hợp này, p được gọi là điểm biên h-thác triển được.*

1.7 Hội tụ Λ-không tiếp xúc

Định nghĩa 1.7.1. *Cho* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^{n+1}$ *và* $p \in \partial\Omega$ *là một điểm biên h-thác triển được. Ta nói dãy* $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ *hội tụ* Λ*-không tiếp xúc tới điểm p nếu* $|\mathrm{Im}\,(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}\,(\eta_j, \partial\Omega)|$ *và* $\sigma(\alpha_j) \lesssim |\mathrm{dist}\,(\eta_j, \partial\Omega)|$*, trong đó* $\sigma(z) = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^{m_k}$ *.*

CHƯƠNG 2
MÔ HÌNH CỦA CÁC MIỀN TRONG $\mathbb{C}^n$ CÓ NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT

Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các kết quả chính (Định lí 2.1.1, Định lí 2.2.1, Mệnh đề 2.3.1) trong việc nghiên cứu Bài toán 1 của luận án. Các kết quả của chương này được viết dựa trên bài báo [3] trong mục "Các công trình đã công bố liên quan đến luận án". Đồng thời, chúng tôi cũng giới thiệu các khái niệm cần thiết phục vụ cho việc phát biểu và chứng minh các kết quả này (Định nghĩa 2.1.1, Định nghĩa 2.1.2, Định nghĩa 2.2.1 và Định nghĩa 2.3.1).

2.1 Dáng điệu của các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ tới điểm biên của miền h-thác triển được trong $\mathbb{C}^n$

2.1.1 Hội tụ Λ-tiếp xúc đều

Định nghĩa 2.1.1. *Ta nói dãy các điểm $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ với $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn})$* hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm ξ_0 *nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(a) $|\mathrm{Im}(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)|$;

(b) $\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega) = o(|\alpha_{jk}|^{2m_k})$ *với* $1 \le k \le n$;

(c) $|\alpha_{j1}|^{2m_1} \approx |\alpha_{j2}|^{2m_2} \approx \ldots \approx |\alpha_{jn}|^{2m_n}$.

Kí hiệu
$$\sigma(z) := \sum_{k=1}^{n} |z_k|^{2m_k}.$$

Định nghĩa 2.1.2. *Điểm biên $\xi_0 \in \partial\Omega$ được gọi là điểm h-thác triển mạnh nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho $P(z) - \delta\sigma(z)$ là hàm đa điều hòa dưới, nghĩa là $dd^cP \ge \delta dd^c\sigma$.*

Để chứng minh Định lí 2.1.1, ta cần các bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.1. *Cho $f(z, w)$ là hàm trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$, xác định trong một lân cận của điểm gốc tọa độ trong $\mathbb{C}^{n+1}$, triệt tiêu tới cấp theo trọng lớn hơn hoặc bằng 1 tại gốc tọa độ. Khi đó, ta có*
$$f(\tau_{j1}z_1, \ldots, \tau_{jn}z_n, \epsilon_j w) = o(\epsilon_j).$$

Với các đơn thức có cấp của trọng ≤ 1, ta có các bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.1.2. *Cho $p, q \in \mathbb{N}^n$ là hai đa chỉ số. Khi đó, với mọi đa thức P ta có*

$$\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q P(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| \to 0$$

với $|p| + |q| > 2$. Ngoài ra, nếu $|p| = |q| = 1$ thì

$$\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q P(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| \lesssim 1.$$

Hơn nữa, nếu $P(z) - \delta\sigma(z)$ là đa điều hòa dưới với $\delta > 0$ thì

$$\epsilon_j^{-1} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(\alpha_j) \tau_{jk} \tau_{jl} w_k \bar{w}_l \gtrsim m_1^2 |w_1|^2 + \cdots + m_n^2 |w_n|^2.$$

Bổ đề 2.1.3. *Cho $Q(z)$ là đa thức theo biến $z \in \mathbb{C}^n$ sao cho $Q \in \mathcal{O}(1, \Lambda)$. Khi đó, ta có*

$$\epsilon_j^{-1} \left| D^p \overline{D}^q Q(\alpha_j) \tau_j^{p+q} \right| \to 0$$

khi $j \to \infty$ với $|p| + |q| \geq 2$.

2.1.2 Mô hình của một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ có một điểm biên h-thác triển mạnh

Trong mục này, chúng tôi xét một miền giả lồi có biên trơn lớp C^∞ và có dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ đều Λ-tiếp xúc đến điểm biên. Cụ thể, chúng tôi chứng minh Định lí 2.1.1 sau đây.

Định lí 2.1.1. *Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^{n+1}$ có biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm h-thác triển mạnh với đa kiểu Catlin hữu hạn $(2m_1, \cdots, 2m_n, 1)$ và $\Lambda = (\frac{1}{2m_1}, \cdots, \frac{1}{2m_n})$. Giả sử tồn tại một dãy các tự đẳng cấu $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $\{\varphi_j(a)\}$ hội tụ Λ-tiếp xúc đều tới điểm ξ_0 với $a \in \Omega$. Khi đó, Ω là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^{n+1}$.*

2.2 Dáng điệu của các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ tới một điểm biên của miền giả lồi có đối hạng Levi bằng 1 trong $\mathbb{C}^{n+1}$

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết để từ đó phát biểu và chứng minh kết quả chính thứ hai của Chương 2.

Cho Ω là một miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ sao cho gần điểm ξ_0 biên $\partial\Omega$ là giả lồi có kiểu hữu hạn và có đối hạng Levi bằng 1.

2.2.1 Hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu

Định nghĩa 2.2.1. *Ta nói dãy các điểm* $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ *với* $\alpha_j = (\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{jn})$, hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu tới điểm ξ_0 *nếu*

(a) $|\mathrm{Im}(\beta_j)| \lesssim |\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)|$;

(b) $|\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)| = o(|\alpha_{j1}|^{2m})$;

(c) $\Delta P(\alpha_{j1}) \gtrsim |\alpha_{j1}|^{2m-2}$.

2.2.2 Đa thức điều hòa dưới thuần nhất

Trong mục này, chúng ta nhắc lại một bổ đề cần dùng cho chứng minh Định lí 2.2.1 ở mục sau.

Bổ đề 2.2.1. *Ta có*

$$\left|\frac{\partial^k P}{\partial z^l \partial \bar{z}^{k-l}}(\alpha_j)\right| \epsilon_j^{-1} \tau_j^k \lesssim \left(\frac{|\alpha_j|^{2m}}{\epsilon_j}\right)^{1-\frac{k}{2}}, \ k \geq 3.$$

Ngoài ra, nếu $k = 2$ *và* $j = 1$ *thì*

$$\left|\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial \bar{z}}(\alpha_j)\right| \epsilon_j^{-1} \tau_j^2 = (2m)^2 g(\theta_j) + g_{\theta\theta}(\theta_j).$$

2.2.3 Mô hình của một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ có đối hạng Levi bằng 1

Trong mục này, chúng tôi xét các miền giả lồi trong $\mathbb{C}^{n+1}$ với biên $\partial\Omega$ trơn C^∞ có đối hạng Levi bằng 1 tại một điểm biên và có dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ tiếp xúc cầu tới điểm biên đó. Cụ thể, chúng tôi chứng minh Định lí 2.2.1 sau đây.

Định lí 2.2.1. *Cho* Ω *là một miền giả lồi trong* $\mathbb{C}^{n+1}$ *với biên* $\partial\Omega$ *trơn lớp* $\mathcal{C}^\infty$. *Giả sử* ξ_0 *là một điểm biên của* Ω *có kiểu D'Angelo hữu hạn sao cho dạng Levi có đối hạng nhiều nhất là* 1 *tại điểm* ξ_0 *và tồn tại một dãy các tự đẳng cấu* $\{\varphi_j\} \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ *sao cho* $\{\varphi_j(a)\}$ *hội tụ* $\frac{1}{2m}$*−tiếp xúc cầu tới điểm* ξ_0 *với* $a \in \Omega$, *trong đó* $2m$ *là kiểu của* $\partial\Omega$ *tại điểm* ξ_0. *Khi đó,* Ω *là miền song chỉnh hình với hình cầu đơn vị* $\mathbb{B}^{n+1}$.

2.3 Dáng điệu của các quỹ đạo tự đẳng cấu hội tụ đến điểm biên của một miền trong $\mathbb{C}^2$

Trong phần này, chúng tôi sẽ giới hạn việc nghiên cứu cho các miền trong $\mathbb{C}^2$.

2.3.1 Hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp cao

Trong mục này, chúng tôi xét một miền song chỉnh hình với một mô hình được xác định bởi một đa thức thuần nhất có bậc lớn hơn 2. Với mục đích này, chúng tôi đưa ra một dạng khác của Định nghĩa 2.2.1 như sau.

Định nghĩa 2.3.1. *Một dãy các điểm $\{\eta_j = (\alpha_j, \beta_j)\} \subset \Omega$ được gọi là hội tụ $\frac{1}{2m}$-tiếp xúc cầu cấp 2ν $(2 \le \nu \le m)$ tới điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) $|\mathrm{Im}(\beta_j)| \le \mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)$;

(ii) $\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega) = o(|\alpha_j|^{2m})$;

(iii) nếu $l + l' < 2\nu$ thì

$$\lim_{j\to\infty} \left(\frac{\mathrm{dist}(\eta_j, \partial\Omega)}{|\alpha_j|^{2m}}\right)^{\frac{l+l'}{2\nu}-1} (g_{l,l'}(\theta_j) + h_{l,l'}(|\alpha_j|, \theta_j)) = 0,$$

trong đó $\theta_j := \arg(\alpha_j)$;

(iv) tồn tại l_0, l'_0 với $l_0 + l'_0 = 2\nu, \max(l_0, l'_0) \ge 1$ sao cho

$$\liminf_{j\to\infty} |g_{l_0,l'_0}(\theta_j)| > 0.$$

2.3.2 Mô hình của một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ có một điêmt biên có kiểu hữu hạn

Trong mục này, chúng tôi chứng minh Mệnh đề 2.3.1. sau đây.

Mệnh đề 2.3.1. *Cho Ω là một miền giả lồi trong $\mathbb{C}^2$ có biên $\partial\Omega$ trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$. Giả sử $\xi_0 \in \partial\Omega$ là điểm có kiểu hữu hạn $2m$. Giả sử tồn tại một số $2 \le \nu \le m, a \in \Omega$ và một dãy các tự đẳng cấu $f_j \subset \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f_j(a)$ hội tụ $\frac{1}{2m}-$tiếp xúc cầu cấp 2ν tới điểm ξ_0. Khi đó, miền Ω song chỉnh hình với một mô hình có dạng*

$$M_Q := \{(z, \omega) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(\omega) + Q(z) < 0\},$$

trong đó Q là một đa thức thuần nhất điều hoà dưới bậc 2ν nhưng không chứa hạng tử điều hòa.

2.3.3 Miền kiểu Kohn-Nirenberg

Trong mục này, chúng tôi đưa ra một ví dụ (Ví dụ 2.3.1) để chỉ ra rằng nếu dãy các quỹ đạo tự đẳng cấu không hội tụ Λ-tiếp xúc cầu tới một điểm biên, thì miền Ω không song chỉnh hình với hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^2$ nhưng song chỉnh hình với một mô hình $M_Q = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \colon \mathrm{Re}(w) + Q(z) < 0\}$, trong đó Q là đa thức điều hòa dưới, thuần nhất có $\deg(Q) \ge 4$. Ví dụ này cũng mô tả cho trường hợp khi Mệnh đề 2.3.1 xảy ra.

CHƯƠNG 3

DÁNG ĐIỆU BIÊN CỦA HÀM SQUEEZING VÀ CỦA METRIC KOBAYASHI

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả chính (Định lí 3.1.2, Định lí 3.1.3 và Định lí 3.2.3) liên quan đến Bài toán 2 của luận án. Kết quả của chương này được viết dựa trên các bài báo [1] và [2] trong mục "Các công trình đã công bố liên quan đến luận án".

3.1 Dáng điệu biên của hàm squeezing gần điểm cực toàn cục

3.1.1 Một số tính chất của hàm squeezing

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Kí hiệu $r(z,\Omega)$ và $R(z,\Omega)$ tương ứng bởi

$$r(z,\Omega) = \sup\{r > 0\colon B(z,r) \subset \Omega\} \text{ và } R(z,\Omega) = \inf\{R > 0\colon B(z,R) \supset \Omega\}.$$

Với tập con $K \subset \Omega$, ta đặt

$$r(K,\Omega) = \inf_{z\in K} r(z,\Omega);\ R(K,\Omega) = \sup_{z\in K} R(z,\Omega).$$

Bổ đề 3.1.1. *Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và K là một tập con compact tương đối của Ω. Khi đó, ta có $r(z,\Omega)/R(z,\Omega) \leq \sigma_\Omega(z) \leq 1$ với $z \in \Omega$ và $\inf_{z\in K} \sigma_\Omega(z) \geq \dfrac{r(K,\Omega)}{R(K,\Omega)} > 0$.*

Định nghĩa 3.1.1. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và Σ là một tập con của Ω. Ta nói Ω là miền chính quy thuần nhất chỉnh hình (HHR) trên Σ nếu $\inf_{z\in\Sigma} \sigma_\Omega(z) > 0$. Đặc biệt, nếu Ω là miền HHR trên Ω thì ta nói Ω là miền HHR.*

Mệnh đề 3.1.1. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử tồn tại một tập con $\Sigma \subset \Omega$ thỏa mãn $\forall z \in \Omega\ \exists f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f(z) \in \Sigma$. Khi đó, Ω là miền HHR nếu Ω là miền HHR trên Σ.*

Định lí 3.1.1. *Nếu miền bị chặn Ω trong $\mathbb{C}^n$ có một cơ sở lân cận Stein chứa một điểm biên giả lồi chặt p thì $\lim_{z\to p} \sigma_\Omega(z) = 1$.*

Kết quả sau đây như một hệ quả của Định lí 3.1.1, Bổ đề 3.1.1 và Mệnh đề 3.1.1.

Hệ quả 3.1.1. *Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ có một cơ sở lân cận Stein. Giả sử tồn tại một tập con $M \subset \Omega$ thỏa mãn $\forall z \in \Omega\ \exists f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ sao cho $f(z) \in M$. Nếu mọi điểm $p \in \overline{M} \cap \partial\Omega$ đều là điểm giả lồi chặt thì Ω là miền HHR.*

3.1.2 Hàm squeezing của ellipsoid tổng quát

Trong mục này, chúng tôi phát biểu và chứng minh kết quả chính đầu tiên của Chương 3; đó là Định lí 3.1.2 sau đây.

Định lí 3.1.2. *Cho P là một đa thức thuần nhất có trọng $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ được cho bởi (1) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0'\}$. Nếu D_P là miền WB thì D_P là miền HHR.*

Để chứng minh Định lí 3.1.2, chúng ta cần một số bổ đề sau.

Bổ đề 3.1.2. *Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ được cho trước bởi (1) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0'\}$. Khi đó, ánh xạ chỉnh hình ψ được xác định bởi*

$$(z', z_n) \mapsto \left(\frac{2^{1/2m_1}}{(1+z_n)^{1/m_1}} z_1, \ldots, \frac{2^{1/2m_{n-1}}}{(1+z_n)^{1/m_{n-1}}} z_{n-1}, \frac{1-z_n}{1+z_n} \right),$$

là một ánh xạ song chỉnh hình từ D_P vào E_P.

Bổ đề 3.1.3. *Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1, \ldots, m_{n-1})$ được cho bởi (1) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0'\}$. Khi đó, $\mathrm{Aut}(D_P)$ chứa các tự đẳng cấu $\Phi_{a,\theta}$ sau đây, được xác định bởi*

$$(z', z_n) \mapsto \left(\frac{(1-|a|^2)^{1/2m_1}}{(1-\bar{a}z_n)^{1/m_1}} z_1, \ldots, \frac{(1-|a|^2)^{1/2m_{n-1}}}{(1-\bar{a}z_n)^{1/m_{n-1}}} z_{n-1}, e^{i\theta} \frac{z_n - a}{1-\bar{a}z_n} \right), \tag{3.1}$$

trong đó $a \in \Delta := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ và $\theta \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, $\mathrm{Aut}(E_P)$ chứa các phép co giãn Λ_λ, $\lambda > 0$, được xác định bởi

$$\Lambda_\lambda(z', z_n)) = \left(\frac{z_1}{\lambda^{1/2m_1}}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{\lambda^{1/2m_{n-1}}}, \frac{z_n}{\lambda} \right).$$

3.1.3 Dáng điệu của hàm squeezing gần điểm cực trị toàn cục

Phần này được dành hoàn toàn để giới thiệu kết quả chính thứ hai của Chương 3; đó là Định lí 3.1.3 sau đây.

Định lí 3.1.3. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ và $p \in \partial\Omega$ là một điểm cực (P, r) với $0 < r \leq 1$. Khi đó, với mọi $0 < r' < r$ và $c > 0$ tồn tại $\epsilon_0, \gamma_0 > 0$ sao cho*

$$\sigma_\Omega(q) > \gamma_0, \quad \forall q \in \Gamma(r', c) \cap B(p; \epsilon_0).$$

3.2 Dáng điệu biên của các metric Kobayashi trên miền h-thác triển được

Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày kết quả chính thứ ba liên quan đến Bài toán 2 của luận án. Phần này được viết dựa trên bài báo [2] trong mục "Các công trình đã công bố liên quan đến luận án".

3.2.1 Tính ổn định của các metric Kobayashi

Trong phần này, chúng ta tập trung chú ý vào tính ổn định của metric Kobayashi tổng quát. Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lí quan trọng sau đây.

Định lí 3.2.1. *Giả sử $\{D_j\}$ là một dãy các miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ hội tụ đến mô hình M_P có kiểu hữu hạn. Khi đó, ta có*

$$\lim_{j\to\infty} F^k_{D_j}(z,X) = F^k_{M_P}(z,X),\ \forall\ (z,X) \in D \times \mathbb{C}^{n+1},\ k \geq 1.$$

Hơn nữa, sự hội tụ là đều trên các tập con compact của $D \times \mathbb{C}^{n+1}$.

Để chứng minh Định lí 3.2.1, chúng ta cần sử dụng mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.2.1. *Cho $\{D_j\}$ là một dãy các miền trong $\mathbb{C}^{n+1}$ hội tụ tới mô hình M_P có kiểu hữu hạn. Giả sử ω là một miền trong $\mathbb{C}^k$ và $\sigma_j : \omega \to D_j$ là một dãy các ánh xạ chỉnh hình sao cho $\{\sigma_j(a)\} \Subset M_P$ với $a \in \omega$. Khi đó, dãy $\{\sigma_j\}$ chứa một dãy con hội tụ đều đến một ánh xạ chỉnh hình $\sigma : \omega \to M_P$.*

3.2.2 Giới hạn biên có trọng của metric Kobayashi tổng quát

Trong phần này, chúng tôi xét trường hợp miền giả lồi có điểm biên h-thác triển có đa kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^{n+1}$. Cụ thể, chúng tôi chứng minh Định lí 3.2.3 và nêu hệ quả sau của nó.

Định lí 3.2.3. *Cho Ω là một miền giả lồi có biên trơn lớp $\mathcal{C}^\infty$ trong $\mathbb{C}^{n+1}$ và điểm $\xi_0 \in \partial\Omega$ sao cho Ω là miền h-thác triển tại điểm ξ_0. Giả sử đa kiểu của điểm ξ_0 là $(1, m_1, \ldots, m_n)$ mà $m_n < +\infty$ và cho $\Lambda = (1/m_1, \ldots, 1/m_n)$. Giả sử hàm xác định biên địa phương ρ của miền Ω gần điểm 0 có dạng*

$$\rho(z) = \mathrm{Re}(z_0) + P(z') + R(z),$$

trong đó P là đa thức đa điều hòa dưới, Λ-thuần nhất, không chứa hạng tử đa điều hòa, R là hàm trơn và thỏa mãn

$$|R(z)| \leq C\left(|z_0| + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^{m_j}\right)^{\gamma},$$

với hằng số $\gamma > 1$ và $C > 0$. Giả sử $\{\eta_j\} = \{(\eta_{j0}, \eta'_j)\} \subset \Omega \cap U \cap \Gamma$ là một dãy các điểm hội tụ đến điểm 0 sao cho

$$\lim_{j\to\infty} \pi_{1/\epsilon(\eta_j)}(\eta'_j) = \alpha \in \mathbb{C}^n.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma\ni\eta_j\to 0} F^k_{\Omega\cap U}\left(\eta_j, (\pi_{\epsilon(\eta_j)})_* X\right) &= F^k_{M_{P,\alpha}}((0', -1), X)\\ &= F^k_{M_P}\big((-1 - P(\alpha), \alpha), X\big),\ \forall\ X \in \mathbb{C}^{n+1}.\end{aligned}$$

Hệ quả 3.2.1. *Giả sử Ω, ξ_0, Γ^s như trong Định lí 2.2.3. Nếu $s > 1$ thì ta có*

$$\lim_{\Omega\cap U\cap\Gamma^s\ni\eta\to 0} F_{\Omega\cap U}(\eta, X)\, |\rho(\eta)| = F_{M_P}((-1, 0'), X_N(0)),\ \forall\ X \in \mathbb{C}^{n+1},$$

trong đó $X_N(0)$ là thành phần pháp tuyến phức của X tại $\xi_0 = 0$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Luận án đã đạt được một số kết quả sau:

1) Sử dụng linh hoạt kĩ thuật scaling của S. Pinchuk để nghiên cứu tính đặc trưng mới của các miền giả lồi yếu có kiểu hữu hạn trong $\mathbb{C}^n$ bởi dáng điệu biên của các quỹ đạo tự đẳng cấu, trong đó kết quả chính là các Định lí 2.1.1, Định lí 2.2.1, Mệnh đề 2.3.1 và đưa ra các ví dụ minh họa.

2) Đưa ra và chứng minh một định lí về một lớp mới các miền chính quy, thuần nhất, chỉnh hình (miền HHR), trong đó kết quả chính là Định lí 3.1.2.

3) Đưa ra và chứng minh một định lí về ước lượng dưới đều cho hàm squeezing ở gần điểm cực (P, r), trong đó kết quả chính là Định lí 3.1.3.

4) Sử dụng kĩ thuật scaling để chứng minh sự tồn tại giới hạn Λ-không tiếp xúc của các metric Kobayashi tổng quát tại điểm biên h-thác triển được, trong đó kết quả chính là Định lí 3.2.3.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

1) Trong Định lí 3.1.3, sự hội tụ của dãy các điểm trong $\Gamma(r, c)$ đến điểm p là sự hội tụ Λ-không tiếp xúc. Với trường hợp khi $\{a_j\} \subset f^{-1}(D(r)) \subset \Omega$ không hội tụ Λ-không tiếp xúc tới $p = 0$, nghĩa là, với mọi $0 < r' < r$ và $c > 0$ tồn tại $j_{r',c} \in \mathbb{N}$ sao cho $a_j \notin \Gamma(r', c)$ với mọi $j \geq j_{r',c}$, chúng ta không biết được dáng điệu của $\{\sigma_\Omega(a_j)\}$. Do đó, câu hỏi tự nhiên được đặt ra là liệu $\liminf_{f^{-1}(D(r)) \ni z \to p} \sigma_\Omega(z) > 0$ hay không và đó vẫn là bài toán mở. Vì vậy, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu để tìm cách mô tả dáng điệu biên của hàm squeezing khi dãy điểm $\Gamma(r, c)$ không hội tụ Λ-không tiếp xúc tới điểm p.

2) Cho đến nay, bài toán về ước lượng các metric mới chỉ dừng lại xem xét cho các miền giả lồi có kiểu hữu hạn. Đối với miền giả lồi có kiểu vô hạn thì bài toán ước lượng các metric này vẫn còn là bài toán mở và chỉ mới đạt được một số kết quả cho các miền đặc biệt. Trong những năm gần đây, N. V. Thu cũng quan tâm đến chủ đề này và đạt được một số kết quả ban đầu (xem các tài liệu [19] và [71]). Trong thời gian tới, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu chủ đề này cho các miền có kiểu vô hạn tổng quát hơn.

3) Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu để đưa ra đặc trưng cho cho các miền giả lồi trong $\mathbb{C}^n$ khi quĩ đạo tự đẳng cấu $\varphi_j(a)$ không hội tụ Λ-tiếp xúc đều đến điểm biên ξ_0.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Ninh Van Thu, Nguyen Thi Kim Son and Chu Van Tiep, *Boundary behavior of the squeezing function near a global extreme point*, Complex Variables and Elliptic Equations, 2023, Vol. 68, Issue 3, pp. 351-360.

[2] Ninh Van Thu, Do Khanh Huyen and Nguyen Thi Kim Son, *Boundary behavior of general Kobayashi metrics in h-extendible domains*, VNU Journal of Science: Mathematics - Physics, 2024, Vol. 40, No. 3, pp. 106-115.

[3] Ninh Van Thu, Nguyen Thi Kim Son and Nguyen Quang Dieu, *Pinchuk scaling method on domains with non-compact automorphism groups*, International Journal of Mathematics, 2025, Vol.36, No. 01, 2450063.

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI CÁC HỘI NGHỊ

1. Báo cáo "Boundary behavior of the squeezing function near a global extreme point", Trường hè Giải tích và Hình học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, 11-14/06/2020.

2. Báo cáo "Pinchuk scaling method on domains with non-compact automorphism groups", Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ X, Đà Nẵng, 8-12/8/2023.