ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NINH THỊ THU

MỘT SỐ BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH HÓA ĐƯỢC CỦA CÁC HỆ CHUYỂN MẠCH RỜI RẠC SUY BIẾN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Hà Nội - 2025

Công trình được hoàn thành tại: Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

1. PGS. TS. Đỗ Đức Thuận

2. GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh

Phản biện 1: PGS. TS. Hoàng Thế Tuấn, Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Phản biện 2: GS. TS. Cung Thế Anh, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

Phản biện 3: PGS. TS. Đỗ Lân, Trường Đại học Thủy Lợi.

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội.

Vào hồi 09 giờ 00 ngày 28 tháng 06 năm 2025.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Mở đầu

Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Để mô tả các hệ phức hợp trong tự nhiên, kinh tế, năng lượng, hàng không, ... khó có thể dùng các hệ đơn lẻ, mà phải kết hợp nhiều hệ con kèm theo các ràng buộc. Một hệ chuyển mạch bao gồm một tập hữu hạn các hệ con và quy luật chuyển mạch giữa chúng. Các hệ con có thể liên tục hay rời rạc, không suy biến hay suy biến. Quy luật chuyển mạch là một hàm hằng từng khúc phụ thuộc vào các biến thời gian, giá trị của nó trong quá khứ, trạng thái $x(t)$ của mỗi hệ con đơn lẻ hoặc chuyển mạch ngẫu nhiên với hàm phân phối cho trước.

Trong thực tế, việc chuyển mạch có thể xảy ra do những thay đổi đột ngột, không dự báo được của hệ thống, ví dụ do hỏng hóc một thành phần nào đó của hệ thống hay do một hệ con nào đó tình cờ bị kích hoạt. Trong những trường hợp này, để đảm bảo sự an toàn của hệ thống, người ta phải thiết kế sao cho hệ ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch. Tính ổn định của hệ chuyển mạch thực chất là tính vững với mọi nhiễu động của chuyển mạch. Một trong các bài toán quan trọng khi nghiên cứu hệ chuyển mạch là tìm các điều kiện để hệ chuyển mạch ổn định với quy luật chuyển mạch bất kỳ. Ngoài ra, trong thực tế có những hệ con không ổn định, ta cần thiết kế những chuyển mạch để hệ chung thu được ổn định, bài toán này được gọi là bài toán ổn định hóa hệ chuyển mạch.

Xét hệ chuyển mạch tuyến tính liên tục không suy biến dạng

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t)$$

và hệ chuyển mạch tuyến tính rời rạc không suy biến có dạng

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k),$$

trong đó σ là quy tắc chuyển mạch nhận các giá trị trong tập $\underline{N} := \{1, 2, \ldots, s\}$. Một số kết quả tiêu biểu về sự ổn định, ổn định hóa hệ chuyển mạch tuyến tính phải kể đến như: Ge, Sun & Lee, 2001 ([21]), Shorten & Narendra, 2002 ([52]), Liberzon, 2003 ([37]), Gökcek, 2004 ([22]), Phat & Hien, 2009 ([44]), ... Theo đó, điều kiện cần để hệ chuyển mạch tuyến tính không suy biến ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch σ là từng hệ con phải ổn định, tức là A_i, $i \in \underline{N}$ là các ma trận Hurwitz với trường hợp hệ liên tục theo thời gian và A_i, $i \in \underline{N}$ là các ma trận Schur với hệ rời rạc theo thời gian. Các điều kiện cần và đủ để hệ chuyển mạch ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch σ được phát biểu thông qua sự tồn tại của hàm Lyapunov toàn phương chung. Tuy nhiên, việc đưa ra điều kiện tồn tại cho hàm Lyapunov không đơn giản. Các kết quả đầu tiên được Shorten và Narendra thu được trong [51, 52] cho hệ chuyển mạch hai chiều, với hai ma trận Hurwitz A_1, A_2. Các kết quả này được mở rộng cho hệ hai chiều với n ma trận $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và hệ n chiều với hai ma trận A_1, A_2. Ngoài ra, bằng việc đưa ra định nghĩa hàm Lyapunov toàn phương chuyển mạch, Lin và các cộng sự đưa ra các điều kiện dưới dạng bất đẳng thức ma trận tuyến tính để hệ chuyển mạch ổn định (xem [18]). Trong [26], các tác giả Hespanha và Morse nghiên cứu tính ổn định hóa thông qua các điều kiện cho thời gian dừng trung bình τ_a.

Liberzon và Trenn [36] thu được những kết quả đầu tiên cho hệ chuyển mạch suy biến tuyến tính liên tục có dạng

$$E_\sigma \dot{x}(t) = A_\sigma x(t),$$

trong đó E_σ là các ma trận suy biến. Nếu chỉ giới hạn trong lớp hàm liên tục tuyệt đối, thì phần lớn các hệ chuyển mạch suy biến dạng trên không có lời giải nào khác ngoài nghiệm tầm thường. Để giải quyết bài toán này, các tác giả đưa ra khái niệm nghiệm suy rộng là các hàm trơn từng khúc và từ đó thiết lập công thức nghiệm cho hệ. Phát triển kết quả này, trong [37], Liberzon và các cộng sự đã đưa ra các điều kiện đủ để hệ ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch σ thông qua các hàm Lyapunov $\mathcal{V}_p$ của từng hệ con, đồng thời sử dụng biến đổi Kronecker đưa ra điều kiện giao hoán để hệ chuyển mạch ổn định. Ngoài ra, trong [42], các tác giả Zhou, Ho và Zhai đã đưa ra điều kiện cho hệ ổn định dựa trên thời gian dừng trung bình τ_a.

Ngày nay, với sự ra đời của nhiều hệ thống lấy mẫu hiện đại, cho ta dữ liệu tại những thời điểm rời rạc; đây cũng là một trong nhiều lý do dẫn đến sự cần thiết của việc nghiên cứu hệ suy biến rời rạc.

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) dạng

$$E_{\sigma(k)} x(k+1) = A_{\sigma(k)} x(k), \tag{1}$$

trong đó $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ là quy tắc chuyển mạch. Giả sử các ma trận E_i suy biến với mọi $i \in \underline{N}$.

Năm 2010, Zhai và Xu ([62]) đưa ra điều kiện giao hoán để xét tính ổn định của hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến cho trường hợp hệ có dạng

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= A_1 x(k) \\ Ex(k+1) &= A_2 x(k). \end{aligned} \tag{2}$$

Ngoài ra, trong [63], Zhai và các cộng sự xét hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến gồm hai hệ con dạng

$$\begin{aligned} E_1 x(k+1) &= A_1 x(k) \\ E_2 x(k+1) &= A_2 x(k). \end{aligned} \tag{3}$$

Giả sử hai hệ con ứng với cặp ma trận (E_i, A_i) ổn định mũ. Khi đó, nếu các ma trận E_1, E_2 có hạng bằng nhau và các ma trận E_1, E_2, A_1, A_2 từng đôi một giao hoán, tức là

$$E_i E_j = E_j E_i, \quad E_i A_j = A_j E_i, \quad A_i A_j = A_j A_i, \quad i, j \in \{1, 2\},$$

thì hệ (3) ổn định với mọi quy tắc chuyển mạch.

Gần đây, trong [5, 6], Anh và các cộng sự đã nghiên cứu hệ SDLS chỉ số 1 dạng (1), đưa ra các tính chất của hệ SDLS chỉ số 1 và đưa ra công thức nghiệm của hệ thông qua ánh xạ một bước. Sau đó, các tác giả nghiên cứu sự ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dựa trên bán kính phổ của một họ các cặp ma trận và phương pháp hàm Lyapunov. Ở đó, các tác giả đã khẳng định giả thiết mỗi mode chỉ số 1 không đủ để đảm bảo sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ SDLS (1) và đưa ra điều cần và đủ mạnh hơn bằng định nghĩa hệ chỉ số 1, cụ thể $\mathcal{S}_i \cap \ker E_j = \{0\}$, với mọi $i, j \in \underline{N}$, trong đó $\mathcal{S}_i = A_i^{-1}(\operatorname{im} E_i) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : A_i\xi \in \operatorname{im} E_i\}$. Các kết quả trên được đưa ra với giả thiết tín hiệu chuyển mạch bất kỳ. Năm 2024, các tác giả Sutrisno và Trenn ([56]) đã mở rộng các kết quả quan trọng này cho trường hợp tín hiệu chuyển mạch có ràng buộc. Cụ thể, các tác giả nghiên cứu hai tình huống: 1) dãy mode cho trước, còn thời gian chuyển mạch bất kỳ và 2) toàn bộ tín hiệu chuyển mạch đã cho trước (cả dãy mode và thời gian chuyển mạch đã cho). Trong cả hai trường hợp, tác giả đưa ra điều kiện cho các ma trận của hệ để đảm bảo sự tồn tại và duy nhất của nghiệm bằng các khái niệm "*chỉ số 1 tuần tự*" và "*chỉ số 1 chuyển mạch*". Sau đó, các tác giả cũng mở rộng ý tưởng ánh xạ một bước được giới thiệu bởi Anh và các cộng sự (xem [5]) cho hai trường hợp này.

Bên cạnh các kết quả cho tính ổn định của hệ chuyển mạch suy biến, còn có một số công trình nghiên cứu bài toán ổn định hóa hệ chuyển mạch suy biến. Các tác giả Gu và Koenig đã đề xuất ổn định hóa hệ chuyển mạch bằng cách thiết kế điều khiển phản hồi (xem [24, 31]). Năm 2017, trong [7], Anh và Linh đã nghiên cứu tính ổn định của hệ chuyển mạch tuần hoàn và đề xuất ổn định hóa hệ chuyển mạch bằng cách chọn quy luật chuyển mạch tuần hoàn phù hợp hoặc bằng các điều khiển phản hồi.

Hệ chuyển mạch cũng được nhiều nhà khoa học trong nước đặc biệt quan tâm. Chẳng hạn, nhóm nghiên cứu của GS. Vũ Ngọc Phát và các học trò nghiên cứu bài toán điều khiển hệ chuyển mạch có trễ biến thiên bằng cách sử dụng công cụ hàm Lyapunov-Krasovskii và bất đẳng thức ma trận tuyến tính (xem [27, 57, 45], ...). Nhóm nghiên cứu của GS. Nguyễn Khoa Sơn và các học trò nghiên cứu về tính ổn định vững và ổn định hóa được vững của hệ chuyển mạch tuyến tính không suy biến (xem [53, 58], ...).

Nhìn chung, với hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến, nếu không có điều kiện tất cả các trạng thái đều dương, đã có nhiều kết quả về tính ổn định và ổn định hóa của hệ, chẳng hạn các công trình của Meng & Zhang (2006), Liberzon & Treen (2012), Zhou, Ho & Zhai (2013), Tawani & Treen (2017), ... cho trường hợp hệ liên tục theo thời gian; hay các công trình của Xia & Zhang (2008), Zhai, Xu & Ho (2012), Darouch & Chadli (2013), Anh & Linh (2017), ... cho trường hợp hệ rời rạc theo thời gian.

Tuy nhiên, ta cần đến hệ với ràng buộc dương ở tất cả các trạng thái để mô phỏng các hệ trong thực tế, chẳng hạn như hệ biểu diễn các đại lượng vật lý như nồng độ, mật độ và khối lượng vật chất, kích thước quần thể, hay các gói dữ liệu trong hệ thống mạng, ... Do vậy, việc nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc suy biến dương là cần thiết và có nhiều ý nghĩa trong thực tế.

Trong [20], các tác giả Fornasini và Valcher đã đưa ra một số kết quả nền tảng cho hệ chuyển mạch rời rạc dương không suy biến dạng $x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k)$, trong đó $\sigma(k)$ là quy tắc chuyển mạch bất kỳ, nhận giá trị trong tập hữu hạn $\underline{N}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n_+$ là biến trạng thái tại thời gian k, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận dương với mọi $i \in \underline{N}$. Đầu tiên, các tác giả nghiên cứu các điều kiện đủ để kiểm tra tính ổn định của hệ dựa vào sự tồn tại của lớp hàm Lyapunov chung. Sau đó, các tác giả giới thiệu khái niệm tính ổn định hóa của hệ và chứng minh được rằng, nếu hệ là ổn định hóa được, thì có thể ổn định hóa được hệ bằng một dãy chuyển mạch tuần hoàn, dãy chuyển mạch này sẽ đưa quỹ đạo nghiệm về 0 từ mọi trạng thái ban đầu dương.

Một số kết quả được đưa ra cho hệ chuyển mạch suy biến dương với ràng buộc lên ma trận E là hằng và nghiên cứu cho trường hợp thời gian liên tục, như công trình của Li & Xiang (xem [35]).

Theo hiểu biết của chúng tôi, các kết quả cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến dương dạng (1) còn khá ít. Do đó, như một sự tiếp tục, chúng tôi mong muốn nghiên cứu được tính dương, tính ổn định và ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến dạng (1). Chúng tôi vẫn đặt thêm điều kiện chỉ số 1 cho hệ (1), giả thiết này liên quan đến tính nhân quả tương ứng với tín hiệu chuyển mạch, tức là: sự thay đổi tín hiệu chuyển mạch trong tương lai không làm thay đổi nghiệm tại thời điểm hiện tại (hay trong quá khứ). Phát triển cách tiếp cận trong [6] và [48], chúng tôi sử dụng ánh xạ một bước và điều kiện ổn định dạng Lyapunov để nghiên cứu tính dương và sự ổn định của hệ SDLS chỉ số 1. Sau đó bằng cách mở rộng bổ đề Fekete, chúng tôi định nghĩa dưới bán kính phổ cho một họ các cặp ma trận $\{(E_i, A_i)\}_{i=1}^s$ và từ đó đưa ra các đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ SDLS dương.

Ở khía cạnh khác, ta thấy các tác giả trong [5, 6] đã nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ SDLS dạng (1), ở đó quy tắc chuyển mạch trong ma trận E và A là giống nhau. Trong thực tế, hệ có thể chịu các nhiễu không mong muốn. Do vậy, chúng tôi mong muốn nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu. Hơn nữa, nếu quy tắc chuyển mạch trong các ma trận E và A khác nhau thì bài toán sẽ phức tạp hơn. Điều này xảy ra khi động lực học của x_{k+1} phụ thuộc vào ma trận dẫn E tại thời điểm $k+1$, chẳng hạn trong trường hợp ta rời rạc hóa hệ liên tục bằng phương pháp Euler ẩn. Trong [38], Linh đã đề xuất một số kết quả cho trường hợp này với hệ SDLS không có nhiễu. Theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có kết quả nào về tính giải được của hệ SDLS có nhiễu Lipschitz $f_{\sigma(k)}(x(k))$. Do vậy, chúng tôi nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu trong hai trường hợp: trường hợp 1 với quy tắc chuyển mạch ở ma trận E và A giống nhau dạng

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{4}$$

và trường hợp 2 với quy tắc chuyển mạch ở ma trận E và A khác nhau dạng

$$E_{\sigma(k+1)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{5}$$

Quy tắc chuyển mạch khác nhau trong các ma trận hệ số E và A trong (5) cùng với động lực học của (5) bị ràng buộc và kết hợp giữa các hệ con suy biến gây nên một số khó khăn trong việc nghiên cứu tính giải được cũng như sự ổn định của hệ. Chúng tôi sẽ mở rộng và phát triển cách tiếp cận trong [4, 6, 38] để nghiên cứu tính giải được của hệ SDLS có nhiễu Lipschitz. Sự tồn tại duy nhất nghiệm của (5) sẽ được chứng minh dựa vào nguyên lý ánh xạ co. Sau đó, các đặc trưng về tính ổn định của (5) sẽ được đề xuất bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lyapunov, đánh giá nghiệm và sử dụng bất đẳng thức Gronwall dạng rời rạc.

Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án tập trung nghiên cứu hai bài toán của hệ chuyển mạch suy biến.

- Bài toán 1 nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương, nghiên cứu tính ổn định của hệ, xây dựng dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận, từ đó đưa ra các đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ, cũng như điều kiện để hệ ổn định hóa được.

- Bài toán 2 nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu Lipschitz.

Bố cục của luận án

Luận án được viết dựa trên các kết quả của ba bài báo [CT1, CT2, CT3]. Luận án gồm phần mở đầu, kết luận chung và ba chương lần lượt như sau:

- **Chương 1. Kiến thức chuẩn bị**. Trong chương này, chúng tôi trình bày lại một số khái niệm cơ bản về bán kính phổ của ma trận, bán kính phổ của một họ các ma trận, dưới bán kính phổ của một họ các ma trận, một số ma trận đặc biệt, tích Kronecker, toán tử **vec**, nghịch đảo Drazin, nghịch đảo Moore – Penrose, hệ chuyển mạch tuyến tính thường cùng với các điều kiện để hệ ổn định. Tiếp theo chúng tôi trình bày lại các kết quả về phương trình sai phân suy biến tuyến tính với các khái niệm chỉ số, bài toán giá trị ban đầu cho phương trình sai phân suy biến tuyến tính chỉ số 1 và hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương.

- **Chương 2. Tính ổn định và ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương**. Đầu tiên chúng tôi trình bày lại định nghĩa hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1, công thức nghiệm và một số tính chất quan trọng của hệ suy biến chỉ số 1 thông qua ánh xạ một bước và phép chiếu. Sau đó, luận án nghiên cứu tính dương và tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1. Chúng tôi định nghĩa dưới bán kính phổ cho một họ các cặp ma trận, từ đó đưa ra một số đặc trưng cho tính ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương. Cuối cùng chúng tôi đưa ra một số ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết.

- **Chương 3. Tính giải được và tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu Lipschitz**. Chúng tôi nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu Lipschitz với quy tắc chuyển mạch giống nhau ở ma trận hệ số. Sau đó, chúng tôi xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 với quy tắc chuyển mạch khác nhau ở ma trận hệ số, nghiên cứu tính giải được của hệ, thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính ổn định của hệ. Cuối cùng chúng tôi đưa ra một số ví dụ minh họa cho các kết quả lý thuyết.

Các kết quả chính của luận án được công bố trong ba bài báo [CT1-CT3] trên các tạp chí *Systems & Control Letters* ([CT1]), *Journal of Difference Equations and Applications* ([CT2]), *VNU Journal of Science: Mathematics – Physics* ([CT3]). Ngoài ra, nội dung của luận án đã được trình bày tại các hội nghị, hội thảo:

1. Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 10, Đà Nẵng, 08 – 2023.

2. Hội thảo Tối ưu và tính toán khoa học, Ba Vì – Hà Nội, 04 – 2024.

3. Hội thảo Gặp gỡ Toán học, Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Vĩnh Phúc, 09 – 2024.

4. Hội nghị Toán học, Khoa Toán – Cơ – Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, 10 – 2024.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Một số khái niệm cơ bản

1.2. Hệ phương trình sai phân suy biến tuyến tính hệ số hằng

Xét hệ rời rạc tuyến tính suy biến dạng

$$Ex(k+1) = Ax(k), \tag{1.1}$$

trong đó các ma trận $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cho trước, E là ma trận suy biến.

1.2.1. Tính giải được của hệ suy biến tuyến tính chỉ số 1

Định nghĩa 1.2.1 (xem [61]). Cặp ma trận $(E, A) \in \big(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}\big)$ được gọi là chính quy nếu đa thức đặc trưng $\det(\lambda E - A)$ không đồng nhất 0.

Bổ đề 1.2.1 (xem [61]). *Cặp ma trận $(E, A) \in \big(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}\big)$ là chính quy khi và chỉ khi tồn tại các ma trận khả nghịch $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho*

$$(UEV, UAV) = \left(\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & I_{n-r} \end{bmatrix}\right), \tag{1.2}$$

trong đó $J \in \mathbb{R}^{r\times r}$ là ma trận chuẩn Jordan và $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ là ma trận lũy linh cũng có dạng chuẩn Jordan.

Bổ đề 1.2.2 (xem [23]). *Các khẳng định sau là tương đương với $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $\mathcal{S} := A^{-1}(\operatorname{im} E)$.*

i) Cặp ma trận (E, A) là chính quy và có chỉ số 1.

ii) $\mathcal{S} \cap \ker E = \{0\}$.

iii) $\mathcal{S} \oplus \ker E = \mathbb{R}^n$.

Bổ đề 1.2.3 (xem [61]). *Giả sử cặp ma trận (E, A) là chính quy chỉ số 1. Khi đó, hệ rời rạc tuyến tính suy biến (1.1) với điều kiện đầu $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0 \in \mathcal{S}$ và nghiệm được cho bởi công thức*

$$x(k) = \Phi^k_{(E,A)} x_0, \quad \text{với } \Phi_{(E,A)} := V \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^{-1},$$

trong đó V và J là các ma trận trong khai triển dạng (1.2) và $\Phi_{(E,A)}$ không phụ thuộc vào cách chọn các ma trận V và J.

1.2.2. Tính giải được của hệ sai phân suy biến tổng quát

Định lý 1.2.1 (xem [11]). *Hệ suy biến (1.1) có nghiệm duy nhất với mỗi điều kiện ban đầu chấp nhận được nếu và chỉ nếu cặp ma trận (E, A) là chính quy (tức là, tồn tại $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $(\lambda E - A)^{-1}$ tồn tại). Hơn nữa, tập điều kiện ban đầu chấp nhận được cho bởi* $\mathrm{im}\left(\widehat{E}^D \widehat{E}\right)$ *và các nghiệm của hệ (1.1) có dạng*

$$x(k) = \left(\widehat{E}^D \widehat{A}\right)^k \widehat{E}^D \widehat{E} v,$$

trong đó v là vectơ bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$, các ma trận $\widehat{A}$ và $\widehat{E}$ được xác định bởi

$$\widehat{E} = (\lambda E - A)^{-1} E, \quad \widehat{A} = (\lambda E - A)^{-1} A, \tag{1.3}$$

với $\lambda \in \mathbb{C}$ sao cho $(\lambda E - A)^{-1}$ tồn tại và $\widehat{E}^D$ là nghịch đảo Drazin của $\widehat{E}$.

Đặt $P := \widehat{E}^D \widehat{E}$ và $\overline{A} := \widehat{E}^D \widehat{A}$. Bổ đề dưới đây trình bày một số tính chất quan trọng cho các ma trận này.

Bổ đề 1.2.4 (xem [47]). *Các tính chất sau là đúng.*

i) P là một phép chiếu ($P^2 = P$).

ii) $P\overline{A} = \overline{A}P = \overline{A}$.

iii) Với mọi nghiệm $x(k)$ của hệ (1.1) ta có $Px(k) = x(k)$.

1.2.3. Tính dương của hệ suy biến

Định nghĩa 1.2.2 (xem [48]). Ta nói hệ (1.1) là dương nếu với mọi điều kiện ban đầu chấp nhận được không âm $x(0) \in \mathcal{X}_0 = \mathrm{im}(P) \cap \mathbb{R}^n_+$ ta có $x(k) \geq 0$ với mọi $k \geq 0$.

Bổ đề 1.2.5 (xem [41]). *Cho M, N là các ma trận có cỡ thích hợp. Các khẳng định dưới đây là tương đương:*

i) $Mx \geq 0$ suy ra $Nx \geq 0$, với x có cỡ thích hợp;

ii) Tồn tại $H \geq 0$ thỏa mãn phương trình ma trận $N = HM$.

Bây giờ, chúng ta xét hệ

$$\begin{cases} x(k+1) = \overline{A}x(k), \\ x(0) \in \operatorname{im} P \end{cases} \tag{1.4}$$

Định lý 1.2.2 (xem [48]). *Các khẳng định dưới đây là tương đương.*

i) Hệ (1.1) (hoặc hệ (1.4)) là dương với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được không âm $\mathcal{X}_0 = \operatorname{im}(P) \cap \mathbb{R}^n_+$.

ii) Tồn tại một ma trận H sao cho

$$\begin{cases} H \geq 0, \\ \overline{A} = HP. \end{cases} \tag{1.5}$$

Bổ đề 1.2.6 (xem [47, 48]). *Hệ phương trình ma trận $XM = N$ có nghiệm theo biến X nếu và chỉ nếu $N(I - M^+M) = 0$, trong đó M^+ là nghịch đảo Moore – Penrose. Hơn nữa, tất cả các nghiệm được xác định bởi $X = NM^+ + D(I - MM^+)$, với D là một ma trận bất kỳ.*

Định lý 1.2.3 (xem [48]). *Các khẳng định dưới đây là tương đương.*

i) Hệ (1.1) (hoặc hệ (1.4)) là dương với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được không âm $\mathcal{X}_0 = \operatorname{im} P \cap \mathbb{R}^n_+$.

ii) Tồn tại một ma trận D sao cho

$$\overline{A} + D(I - P) \geq 0.$$

1.2.4. Tính ổn định của hệ suy biến dương

Định nghĩa 1.2.3 (xem [48]). Ta nói hệ (1.1) là ổn định nếu với bất kì điều kiện ban đầu $x(0) \in \mathcal{X}_0$ ta có $x(k) \to 0$ khi $k \to \infty$.

Mệnh đề 1.2.1 (xem [48]). *Cho N là ma trận không âm và xét hệ tuyến tính không suy biến dạng*

$$z(k+1) = Nz(k). \tag{1.6}$$

Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.

i) N là ma trận Schur, hay hệ (1.6) là ổn định với mọi điều kiện ban đầu.

ii) Tồn tại vectơ $\nu \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\nu > 0 \quad \text{và} \quad (N - I)\nu < 0.$$

iii) Tồn tại vectơ $\gamma \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\gamma > 0 \quad \text{và} \quad \gamma^\top (N - I) < 0.$$

Định lý 1.2.4 (xem [48]). *Giả sử rằng, tồn tại véc-tơ $v \in \mathbb{R}^n$ sao cho $Pv > 0$. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương.*

i) Hệ (1.1) (hay (1.4)) là dương và ổn định với tập điều kiện ban đầu chấp nhận được $\mathcal{X}_0 = \operatorname{im} P \cap \mathbb{R}^n_+$.

ii) Tồn tại một ma trận D sao cho

$$H := \overline{A} + D(I - P) \quad \text{là ma trận Schur không âm.} \tag{1.7}$$

iii) Tồn tại véc tơ $\gamma \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ và ma trận $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho

$$\begin{cases} \gamma^\top(\overline{A} - I) + \mathbb{1}_n^\top Z(I - P) < 0, \\ \operatorname{diag}(\gamma)\overline{A} + Z(I - P) \geq 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

trong đó $\mathbb{1}_n = [1, \ldots, 1]^\top \in \mathbb{R}^n$.

1.3. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương (DPSS) dạng

$$x(k + 1) = A_{\sigma(k)}x(k), \tag{1.9}$$

$\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ là quy tắc chuyển mạch, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là ma trận dương với mọi $i \in \underline{N}$.

1.3.1. Tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương

Định nghĩa 1.3.1 (xem [20]). Hệ (1.9) là *ổn định tiệm cận* nếu với mọi quy tắc chuyển mạch σ và điều kiện ban đầu $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ ta có $x(k) \to 0$ khi $k \to \infty$.

Định nghĩa 1.3.2 (xem [20]). Một hàm $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm đồng dương nếu $V(x) > 0$ với mọi $x > 0$ và $V(0) = 0$. Hàm đồng dương $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là hàm Lyapunov chung cho hệ DPSS (1.9) nếu

$$\forall x > 0, \forall i \in \underline{N} \quad \Delta V_i(x) := V(A_i x) - V(x) < 0,$$

hoặc tương đương

$$\forall x > 0, \qquad \max_{i\in\underline{N}} \Delta V_i(x) < 0.$$

Mệnh đề 1.3.1 (xem [20]). *Hệ DPSS* (1.9) *là ổn định tiệm cận nếu tồn tại* $v \in \mathbb{R}^n$ *sao cho*

$$v > 0 \quad \text{và} \quad v^\top(A_i - I) < 0, \quad \forall i \in \underline{N}.$$

1.3.2. Tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương theo thời gian dừng nhỏ nhất

Định lý 1.3.1 (xem [59]). *Giả sử, với hằng số* $0 < \tau \in \mathbb{N}$ *cho trước, tồn tại một tập các véc tơ* $v_1, v_2, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n, v_i > 0, i \in \underline{N}$ *sao cho*

$$v_i^\top(A_i - I) < 0,\ \forall i \in \underline{N} \tag{1.10}$$

và

$$v_i^\top A_i^\tau - v_j^\top < 0,\ \forall\, i, j \in \underline{N}. \tag{1.11}$$

Khi đó, hệ (1.9) *ổn định tiệm cận với mọi dãy thời điểm chuyển mạch* $\{k_q\}_{q\in\mathbb{N}}$ *thỏa mãn* $\tau_q \geq \tau$.

Định lý 1.3.2 (xem [34]). *Cho trước hằng số* $0 < \tau \in \mathbb{N}$. *Các khẳng định dưới đây là tương tương:*

i) Tồn tại một tập các véc tơ $v_i \in \mathbb{R}^n, v_i > 0, i \in \underline{N}$ *sao cho*

$$\begin{cases} v_i^\top(A_i - I) < 0,\ \forall i \in \underline{N}, \\ v_i^\top A_i^\tau - v_j^\top < 0,\ \forall i, j \in \underline{N}; \end{cases}$$

ii) Tồn tại một tập các véc tơ $v_{i,l} \in \mathbb{R}^n,\ v_{i,\tau} > 0,\ i \in \underline{N}, l = 0, 1, \ldots \tau$ *sao cho*

$$\begin{cases} v_{j,0} - v_{i,\tau} < 0,\ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{i,\tau}^\top(A_i - I) < 0,\ \forall i \in \underline{N}, \\ v_{i,l+1}^\top A_i - v_{i,l}^\top \leq 0,\ \forall i \in \underline{N}, 0 \leq l \leq \tau - 1. \end{cases}$$

Hơn nữa, khi một trong các khẳng định trên đúng, hệ DPSS (1.9) *là ổn định tiệm cận với dãy thời điểm chuyển mạch* $\{k_q\}_q$ *thỏa mãn* $\tau_q \geq \tau$.

1.3.3. Tính ổn định hóa được bằng quy tắc chuyển mạch của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương

Định nghĩa 1.3.3 (xem [20]). Hệ DPSS (1.9) là *ổn định hóa được* nếu với mọi điều kiện ban đầu dương $x(0)$, tồn tại một dãy chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ sao cho quỹ đạo trạng thái $x(k)$ hội tụ về 0.

Định nghĩa 1.3.4 (xem [20]). Hệ DPSS (1.9) là *ổn định hóa được nhất quán* nếu tồn tại một dãy chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ sao cho với mọi điều kiện ban đầu dương $x(0)$, quỹ đạo trạng thái tương ứng $x(k)$ hội tụ về 0.

Mệnh đề 1.3.2 (xem [20]). *Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính dương* (1.9), *các khẳng định sau là tương đương:*

i) hệ ổn định hóa được;

ii) hệ ổn định hóa được nhất quán;

iii) tồn tại $T > 0$ và bộ chỉ số $i_0, i_1, \ldots, i_{T-1} \in \underline{N}$ sao cho ma trận tích $A_{i_{T-1}} A_{i_{T-2}} \ldots A_{i_1}$ là một ma trận Schur dương;

iv) tồn tại một dãy chuyển mạch tuần hoàn đưa quỹ đạo trạng thái tương ứng với mọi điều kiện ban đầu dương hội tụ về 0.

Chương 2

Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến dương chỉ số 1

2.1. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1

2.1.1. Định nghĩa hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1

Ta xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) dạng

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \tag{2.1}$$

trong đó $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, và $\sigma : \mathbb{N}\cup\{0\} \to \underline{N} := \{1, 2, \ldots, s\}, s \in \mathbb{N}$, là quy tắc chuyển mạch. Giả sử các ma trận E_i suy biến với mọi $i \in \underline{N}$. Ta xét hệ (2.1) với điều kiện ban đầu

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Định nghĩa 2.1.1. Nghiệm của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến dạng (2.1) là dãy $\{x(k)\}_k$ thỏa mãn hệ (2.1) với mỗi $k = 1, 2, \ldots$ và với mọi quy tắc chuyển mạch $\sigma(k) \in \underline{N}$ bắt đầu từ trạng thái $x(0)$ tương thích.

Định nghĩa 2.1.2 (xem [5, 6]). Hệ (2.1) được gọi là hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến chỉ số 1 nếu

$$\mathcal{S}_i \cap \ker E_j = \{0\}, \quad \text{với mọi } \ i, j \in \underline{N}, \tag{2.3}$$

trong đó $\mathcal{S}_i = A_i^{-1}(\operatorname{im} E_i) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : A_i\xi \in \operatorname{im} E_i\}$.

Bổ đề 2.1.1 (xem [5, 6]). *Giả sử hệ chuyển mạch tuyến tính suy biến* (2.1) *có chỉ số 1. Khi đó ta có các khẳng định sau*

i) $\operatorname{rank} E_i = const =: r$,

ii) $\mathcal{S}_i \oplus \ker E_j = \mathbb{R}^n$, $\forall i, j \in \underline{N}$.

2.1.2. Ánh xạ một bước cho hệ SDLS chỉ số 1

Định nghĩa 2.1.3 (xem [5]). Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dạng (2.1). Khi đó ánh xạ một bước từ mode j đến mode i được định nghĩa bởi

$$\Phi_{i,j} := \Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_j} \Phi_{(E_j,A_j)},$$

trong đó $\Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_j}$ là phép chiếu chính tắc lên $\mathcal{S}_i$ song song với $\ker E_j$, và $\Phi_{(E_j,A_j)}$ là ánh xạ một bước tại mode j tương ứng như trong Bổ đề 1.2.3.

Định lý 2.1.1 (xem [5, 6]). *Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính chỉ số 1 có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x(0) = x_0 \in \mathcal{S}_{\sigma(0)}$. Khi đó ta có công thức*

$$x(k+1) = \Phi_{\sigma(k+1),\sigma(k)} x(k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

trong đó, $\Phi_{i,j}$ là ánh xạ một bước từ mode j đến mode i được xác định như trong Định nghĩa 2.1.3.

Định nghĩa 2.1.4 (xem [5, 6]). Ma trận chuyển trạng thái $\overline{\Phi}_\sigma(k,h)$ cho hệ (2.1) được xác định bởi

$$\overline{\Phi}_\sigma(k,h) = \Phi_{\sigma(k),\sigma(k-1)} \Phi_{\sigma(k-1),\sigma(k-2)} \cdots \Phi_{\sigma(h+1),\sigma(h)},$$

với $k > h$ và $\overline{\Phi}_\sigma(h,h) = \Pi_{\mathcal{S}_{\sigma(h)}}^{\ker E_{\sigma(h)}}$.
Khi đó, mọi nghiệm của hệ được cho bởi công thức

$$x(k) = \overline{\Phi}_\sigma(k,0) x(0). \tag{2.5}$$

Chú ý rằng, với $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ta có $x(0) = x_0$ khi và chỉ khi $x_0 \in \mathcal{S}_{\sigma(0)}$. Nói chung $x(0)$ phải thỏa mãn

$$x(0) = \Pi_{\mathcal{S}_{\sigma(0)}}^{\ker E_{\sigma(0)}} x_0. \tag{2.6}$$

Bổ đề 2.1.2 (xem [5, 6]). *Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dạng (2.1). Với $i \in \underline{N}$, gọi $V_i := [s_i^1, \ldots, s_i^r, h_i^{r+1}, \ldots, h_i^n]$ là ma trận có các cột tương ứng $\{s_i^1, \ldots, s_i^r\}$ là các véc tơ cơ sở của $\mathcal{S}_i$ và $\{h_i^{r+1}, \ldots, h_i^n\}$ là các véc tơ cơ sở của $\ker E_i$. Ký hiệu $P := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q := I_n - P$. Đặt $P_i := V_i P V_i^{-1}$, $Q_i := I - P_i$ và $Q_{i,j} := V_j Q V_i^{-1}$, ta có $P_i = \Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_i}$, $Q_i = \Pi_{\ker E_i}^{\mathcal{S}_i}$, với $i, j \in \underline{N}$. Khi đó, với mọi $i, j \in \underline{N}$ ta có các tính chất*

i) $G_{i,j} := E_i + A_i Q_{i,j}$ *là ma trận không suy biến,*

ii) $\Pi_{\mathcal{S}_i}^{\ker E_j} = I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i$,

iii) $\Phi_{(E_i,A_i)} = P_i G_{i,i}^{-1} A_i$,

iv) $\Phi_{i,j} = \left(I - Q_{i,j} G_{i,j}^{-1} A_i\right) P_j G_{j,j}^{-1} A_j$, *v)* $P_i\Phi_{i,j} = \Phi_{i,j},\ \ \Phi_{i,j}P_j = \Phi_{i,j},$

vi) $E_iP_i = E_i;$

vii) $P_i = G_{i,j}^{-1}E_i;$

viii) $V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_iV_jQ = Q.$

Mệnh đề 2.1.1 (xem [6]). *Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có chỉ số 1 dạng* (2.1) *và gọi* V_i, $G_{i,j}$ *là các ma trận được cho trong Bổ đề* 2.1.2. *Khi đó*

$$\overline{A}_{i,j} = V_i^{-1}G_{i,j}^{-1}A_iV_j = \begin{bmatrix} \overline{A}_{i,j}^1 & 0 \\ \overline{A}_{i,j}^2 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

với $\overline{A}_{i,j}^1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ *và* $\overline{A}_{i,j}^2 \in \mathbb{R}^{(n-r)\times r}$. *Hơn nữa, ta thấy rằng* $x(\cdot)$ *là nghiệm của hệ* (2.1) *khi và chỉ khi* $v(\cdot)$ *là nghiệm của hệ*

$$v(k+1) = \overline{A}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}v(k), \tag{2.8}$$

trong đó

$$x(k) = V_{\sigma(k-1)}\begin{bmatrix} v(k) \\ -\overline{A}_{\sigma(k),\sigma(k-1)}^2 v(k) \end{bmatrix}.$$

2.2. Tính dương và tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1

Định nghĩa 2.2.1. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (SDLS) (2.1) được gọi là dương nếu với mọi tín hiệu chuyển mạch σ và với mọi điều kiện ban đầu chấp nhận được $x(0) \in \mathcal{S}_{\sigma(0)} \cap \mathbb{R}^n_+$, ta có $x(k) \geq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Định lý 2.2.1. *Giả sử rằng hệ SDLS* (2.1) *có chỉ số 1. Các khẳng định sau là tương đương.*

i) Hệ SDLS (2.1) *là hệ dương.*

ii) Tồn tại các ma trận $H_{i,j}$ *thỏa mãn điều kiện dưới đây*

$$\begin{cases} H_{i,j} \geq 0, \\ \Phi_{i,j} = H_{i,j}P_j, \end{cases} \quad \forall i,j \in \underline{N}.$$

iii) Tồn tại các ma trận $D_{i,j}$ *sao cho*

$$\Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0, \quad \forall i,j \in \underline{N}.$$

Định nghĩa 2.2.2. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến (2.1) được gọi là ổn định tiệm cận nếu với mọi tín hiệu chuyển mạch σ và điều kiện ban đầu $x(0) \in \mathcal{S}_{\sigma(0)}$, ta có $x(k) \to 0$ khi $k \to \infty$.

Định lý 2.2.2. *Giả sử rằng hệ SDLS (2.1) có chỉ số 1, và với mọi $i, j \in \underline{N}$ tồn tại ma trận $D_{i,j}$ sao cho*

$$H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j)$$

là ma trận không âm và $H_{i,j} \leq H$ với H là ma trận Schur. Khi đó, hệ (2.1) là hệ dương và ổn định.

Định lý 2.2.3. *Giả sử rằng hệ SDLS (2.1) có chỉ số 1 và tồn tại véc tơ $v \in \mathbb{R}^n$, $v > 0; Z_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho*

$$\begin{cases} v^\top(\Phi_{i,j} - I) + \mathbb{1}_n^\top Z_{i,j}(I - P_j) < 0, \\ \operatorname{diag}(v)\Phi_{i,j} + Z_{i,j}(I - P_j) \geq 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

với mọi $i, j \in \underline{N}$, trong đó $\mathbb{1}_n = [1, \ldots, 1]^\top$. Khi đó, hệ SDLS (2.1) là hệ dương và ổn định.

Định lý 2.2.4. *Giả sử rằng hệ SDLS (2.1) có chỉ số 1. Với hằng số $0 < \tau \in \mathbb{N}$ cho trước, các khẳng định sau là tương đương:*

i) Tồn tại ma trận $D_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và một tập các véc tơ $v_{i,j} \in \mathbb{R}^n, v_{i,j} > 0, i, j \in \underline{N}$ sao cho

$$\begin{cases} H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0, \ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{i,j}^\top(H_{i,j} - I) < 0, \ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{i,j}^\top H_{i,j}^\tau - v_{h,k}^\top < 0, \ \forall i, j, h, k \in \underline{N}; \end{cases}$$

ii) Tồn tại ma trận $D_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và một tập các véc tơ $v_{i,j,l} \in \mathbb{R}^n, v_{i,j,\tau} > 0, i, j \in \underline{N}, l = 0, 1, \ldots \tau$ sao cho

$$\begin{cases} H_{i,j} := \Phi_{i,j} + D_{i,j}(I - P_j) \geq 0, \ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{h,k,0} - v_{i,j,\tau} < 0, \ \forall i, j, h, k \in \underline{N}, \\ v_{i,j,\tau}^\top(H_{i,j} - I) < 0, \ \forall i, j \in \underline{N}, \\ v_{i,j,l+1}^\top H_{i,j} - v_{i,j,l}^\top \leq 0, \ \forall i, j \in \underline{N}, 0 \leq l \leq \tau - 1. \end{cases}$$

Hơn nữa, khi một trong các khẳng định trên đúng, hệ SDLS (2.1) là hệ dương và ổn định với mọi mọi dãy thời điểm chuyển mạch $\{k_q\}$ thỏa mãn $\tau_q \geq \tau$.

2.3. Tính ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương

Ta định nghĩa tập điều kiện ban đầu không âm chấp nhận được
$\mathcal{S} = \cup_{i\in\underline{N}} S_i \cap \mathbb{R}^n_+$.

Định nghĩa 2.3.1. i) Hệ SDLS chỉ số 1 dương (2.1) được gọi là *ổn định hóa được* nếu với mỗi điều kiện ban đầu dương $x(0) \in \mathcal{S}$ tồn tại một dãy chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ sao cho quỹ đạo trạng thái $x(k)$ hội tụ về 0.

ii) Hệ SDLS chỉ số 1 dương (2.1) được gọi là *ổn định hóa được nhất quán* nếu tồn tại một dãy chuyển mạch $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ sao cho với mỗi $i \in \underline{N}$, với mọi điều kiện ban đầu dương $x(0) \in S_i \cap \mathbb{R}^n_+$, quỹ đạo trạng thái tương ứng $x(k)$ hội tụ về 0.

Định lý 2.3.1. *Giả sử hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến* (2.1) *là hệ dương và có chỉ số 1. Khi đó, các khẳng định sau tương đương:*

i) hệ ổn định hóa được;

ii) hệ ổn định hóa được nhất quán;

iii) tồn tại $T > 0$ và bộ chỉ số $i_0, i_1, \ldots, i_M \in \underline{N}$ thỏa mãn $i_T = i_0$ sao cho

$$\|\Phi_{i_T, i_{T-1}} \Phi_{i_{T-1}, i_{T-2}} \ldots \Phi_{i_1, i_0}\| < 1;$$

iv) với mỗi $p \in \underline{N}$, và điều kiện ban đầu dương $x(0) \in \mathcal{S}_p \cap \mathbb{R}^n_+$, tồn tại một quy tắc chuyển mạch tuần hoàn để hệ ổn định.

Định nghĩa 2.3.2. Dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận $\{(E_i, A_i)\}_1^s$ cho hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dạng (2.1) được định nghĩa như sau

$$\check{\rho}(\{(E_i, A_i)\}_1^s) := \lim_{k\to\infty} \min_{i_0, i_1, \ldots, i_k \in \underline{N}} \|\Phi_{i_k, i_{k-1}} \Phi_{i_{k-1}, i_{k-2}} \ldots \Phi_{i_1, i_0}\|^{\frac{1}{k}},$$

trong đó $\Phi_{i,j}$ là ánh xạ một bước từ mode j đến mode i.

Bổ đề 2.3.1. *(Bổ đề Fekete mở rộng) Cho $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ là dãy số thực sao cho*

$$a_{i+j+1} \le c + a_i + a_j, \quad \forall i, j \ge 1,$$

trong đó c là hằng số. Khi đó, giới hạn $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{k}$ tồn tại và bằng $\inf\limits_{k\ge 1} \left\{\dfrac{a_k + c}{k}\right\}$.

Hệ quả 2.3.1. *Cho $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ là dãy số dương và $c > 0$ sao cho*

$$a_{i+j+1} \le c a_i a_j, \quad \text{với mọi } i, j \ge 1.$$

Khi đó, giới hạn $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k)^{\frac{1}{k}}$ tồn tại.

Định lý 2.3.2. *Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến dương có chỉ số 1 dạng* (2.1) *ổn định hóa được khi và chỉ khi*

$$\check{\rho}\left(\{(E_i, A_i)\}_1^s\right) < 1.$$

Hệ quả 2.3.2. *Giả sử hệ SDLS dạng* (2.1) *là hệ dương và có chỉ số 1. Xét hệ giản lược* (2.8)*. Khi đó*

$$\check{\rho}\left(\{(E_i, A_i)\}_{i=1}^s\right) = \lim_{k\to\infty} \min_{i_{-1}, i_0, \ldots, i_{k-1} \in \underline{N}} \|\overline{A}^1_{i_{k-1}, i_{k-2}} \ldots \overline{A}^1_{i_0, i_{-1}}\|^{\frac{1}{k}},$$

trong đó $\overline{A}^1_{i_{k-1}, i_{k-2}}, \ldots, \overline{A}^1_{i_0, i_{-1}}$ xác định như trong Mệnh đề 2.1.1, và hệ (2.1) *là ổn định hóa được khi và chỉ khi dưới bán kính phổ này nhỏ hơn 1.*

Chương 3

Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu

3.1. Hệ chuyển mạch suy biến có nhiễu với cặp ma trận hệ số có quy tắc chuyển mạch giống nhau.

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu dạng

$$E_{\sigma(k)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{3.1}$$

trong đó $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ là tín hiệu chuyển mạch, $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là nhiễu với $i \in \underline{N}$. Giả sử rằng, các ma trận E_i là các ma trận suy biến với mọi $i \in \underline{N}$. Ta xét hệ (3.8) với điều kiện ban đầu

$$P_{\sigma(k_0-1)}x(k_0) = P_{\sigma(k_0-1)}\gamma, \tag{3.2}$$

với γ là véc-tơ bất kì trong $\mathbb{R}^n$ và k_0 là số nguyên không âm cố định.

3.1.1. Tính giải được

Định lý 3.1.1. *Cho $f_{\sigma(k)}(x)$ là hàm liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz đủ nhỏ, tức là,*

$$\|f_i(x) - f_i(\tilde{x})\| \le L_i\|x - \tilde{x}\|, \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n, i \in \underline{N}, \tag{3.3}$$

và

$$\omega_i := L_i \max\{\|Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}\| : j \in \underline{N}\} < 1, \forall i \in \underline{N}. \tag{3.4}$$

Khi đó, bài toán giá trị ban đầu (3.1) – (3.2) *có nghiệm duy nhất.*

Với $i \in \underline{N}$, ta đặt

$$\Delta_i := \{x \in \mathbb{R}^n : Q_jx = -Q_{i,j}G_{i,j}^{-1}(f_i(x) + A_iP_jx), \text{ với } j \in \underline{N}\}. \tag{3.5}$$

Mệnh đề 3.1.1. *Xét đa tạp nghiệm* Δ_i *được định nghĩa trong* (3.5). *Khi đó, các khẳng định sau là đúng:*

i) $\Delta_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) + A_i x \in \operatorname{im} E_i\}$.

ii) $\Delta_i \cap \ker E_j = \{0\}$.

Nghiệm duy nhất của bài toán giá trị ban đầu (3.1) – (3.2) được ký hiệu bởi $x(k) = x(k, k_0; \gamma)$.

3.1.2. Tính ổn định

Định nghĩa 3.1.1. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu dạng (3.1) được gọi là

(i) *ổn định* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, $k_0 \geq 0$ bất kì và với mọi quy tắc chuyển mạch σ, luôn tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, k_0) \in (0, \varepsilon]$ sao cho $\|P_{\sigma(k_0-1)}\gamma\| < \delta$ thì ta có $\|x(k, k_0; \gamma)\| < \varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$;

(ii) *ổn định đều* nếu hệ *ổn định* và δ không phụ thuộc vào k_0;

Ta định nghĩa $\mathcal{K}$ là lớp các hàm tăng $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sao cho $\psi(0) = 0, \psi(x) > 0$ với $x \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} \psi(x) = 0$.

Bổ đề 3.1.1. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.1) *là ổn định nếu và chỉ nếu tồn tại hàm* $\psi \in \mathcal{K}$, *sao cho với mỗi số nguyên không âm* k_0 *và với mọi quy tắc chuyển mạch, bất đẳng thức sau đúng*

$$\|x(k)\| \leq \psi(\|x(k_0)\|), \quad \forall k \geq k_0. \tag{3.6}$$

Định lý 3.1.2. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.1) *là ổn định nếu và chỉ nếu tồn tại hàm Lyapunov* $V_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *liên tục theo biến thứ hai tại* $\gamma = 0$ *và các hàm* $a, \psi_k \in \mathcal{K}$, *sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq \psi_k(\|y\|), \ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma$,

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall \sigma$, *với* $y(k)$ *là nghiệm của* (3.1) *tương ứng với* σ.

Định lý 3.1.3. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.1) *là ổn định đều nếu và chỉ nếu tồn tại các hàm* $a, b \in \mathcal{K}$ *và hàm Lyapunov* $V_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, *sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq b(\|y\|), \ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma$,

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall \sigma$, *với* $y(k)$ *là nghiệm của* (3.1) *tương ứng với* σ.

3.2. Hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất với cặp ma trận hệ số có quy tắc chuyển mạch lệch nhau.

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất với cặp ma trận hệ số có quy tắc chuyển mạch lệch nhau dạng

$$E_{\sigma(k+1)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \tag{3.7}$$

trong đó $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$ là quy tắc chuyển mạch, $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Giả sử rằng E_i là các ma trận suy biến với mọi $i \in \underline{N}$.

Ta giả sử (3.7) là hệ có chỉ số 1 (xem [8, 38]), tức là, các giả thiết sau được thỏa mãn

i) $\operatorname{rank} E_i = r < n, \forall i \in \underline{N}$,

ii) $\mathcal{S}_{i,j} \cap \ker E_i = \{0\}, \forall i, j \in \underline{N}$,
trong đó $\mathcal{S}_{i,j} = A_i^{-1}(\operatorname{im} E_j) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : A_i\xi \in \operatorname{im} E_j\}$.

Trong [38], tác giả chứng minh được rằng, từ giả thiết (ii) suy ra

$$\mathcal{S}_{i,j} \oplus \ker E_i = \mathbb{R}^n, \forall i, j \in \underline{N}.$$

Gọi $V_{i,j} = \{s^1_{i,j}, \dots, s^r_{i,j}, h^{r+1}_i, \dots, h^n_i\}$ là ma trận gồm các cột tương ứng là các vectơ cơ sở của $\mathcal{S}_{i,j}$ và $\ker E_i$ và $Q = \operatorname{diag}(0_r, I_{n-r}), P = I_n - Q$, với 0_r là ma trận không cỡ $r \times r$ và I_{n-r} là ma trận đơn vị cỡ $(n-r) \times (n-r)$.
Khi đó, ma trận $Q_{i,j} := V_{i,j}QV^{-1}_{i,j}$ xác định một phép chiếu lên $\ker E_i$ dọc theo $\mathcal{S}_{i,j}$ (tức là, $Q^2_{i,j} = Q_{i,j}$ và $\operatorname{im} Q_{i,j} = \ker E_i$) và $P_{i,j} := I_n - Q_{i,j}$ là phép chiếu lên $\mathcal{S}_{i,j}$ dọc theo $\ker E_i$. Hơn nữa, ta xác định toán tử nối $Q_{i,j,k} := V_{i,j}QV^{-1}_{j,k}$.

Định lý 3.2.1 (xem [38]). *Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất chỉ số 1 dạng* (3.7)*, với mọi $i, j, m \in \underline{N}$, các khẳng định sau là đúng:*

i) $G_{i,j,m} = E_j + A_iQ_{i,j,m}$ *là ma trận không suy biến;*

ii) $E_jP_{j,m} = E_j$;

iii) $P_{j,m} = G^{-1}_{i,j,m}E_j$;

iv) $V^{-1}_{j,m}G^{-1}_{i,j,m}A_iV_{i,j}Q = Q$.

3.3. Tính giải được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu

Xét hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu dạng

$$E_{\sigma(k+1)}x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + f_{\sigma(k)}(x(k)), \tag{3.8}$$

trong đó $\sigma : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \underline{N}$, là quy tắc chuyển mạch, $E_i, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là nhiễu, với $i \in \underline{N}$. Giả sử rằng E_i là các ma trận suy biến với mọi $i \in \underline{N}$ và hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến thuần nhất tương ứng có chỉ số 1.

Ta xét hệ (3.8) với điều kiện ban đầu

$$P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}x(k_0) = P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma, \tag{3.9}$$

với γ là véc-tơ bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$ và k_0 là số nguyên không âm cố định.

Định lý 3.3.1. *Cho $f_{\sigma(k)}(x)$ là hàm liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz đủ nhỏ, tức là,*

$$\|f_i(x) - f_i(\tilde{x})\| \leq L_i\|x - \tilde{x}\|, \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n i \in \underline{N}, \tag{3.10}$$

và

$$\omega_i := L_i \max\{\|Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}\| : j, m \in \underline{N}\} < 1, \forall i \in \underline{N}. \tag{3.11}$$

Khi đó bài toán giá trị ban đầu (3.8) – (3.9) *có nghiệm duy nhất.*

Ta định nghĩa toán tử Cauchy liên kết với hệ (3.8)

$$\Phi_\sigma(k,h) = \prod_{l=h+1}^{k} P_{\sigma(l)\sigma(l+1)}G^{-1}_{\sigma(l-1)\sigma(l)\sigma(l+1)}A_{\sigma(l-1)} \text{ và } \Phi_\sigma(h,h) = P_{\sigma(h)\sigma(h+1)}. \tag{3.12}$$

Hệ quả 3.3.1. *Nghiệm duy nhất của hệ* (3.8) *với điều kiện ban đầu* (3.9) *thỏa mãn phương trình*

$$\begin{aligned} x(k) =& \Phi_\sigma(k,k_0)P_{\sigma(k_0)\sigma(k_0+1)}\gamma \\ &+ \sum_{i=k_0}^{k-1} \Phi_\sigma(k,i+1)P_{\sigma(i+1)\sigma(i+2)}G^{-1}_{\sigma(i)\sigma(i+1)\sigma(i+2)}f_{\sigma(i)}(x(i)) \\ &- Q_{\sigma(k)\sigma(k+1)\sigma(k+2)}G^{-1}_{\sigma(k)\sigma(k+1)\sigma(k+2)}(f_{\sigma(k)}(x(k)) + A_{\sigma(k)}P_{\sigma(k)\sigma(k+1)}x(k)). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Đặt

$$\Delta_i := \{x \in \mathbb{R}^n : Q_{i,j}x = -Q_{i,j,m}G^{-1}_{i,j,m}(f_i(x) + A_iP_{i,j}x), \text{với } j, m \in \underline{N}\}. \tag{3.14}$$

Mệnh đề 3.3.1. *Xét đa tạp nghiệm Δ_i được định nghĩa trong* (3.14)*. Khi đó, các khẳng định sau là đúng:*

(i) $\Delta_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) + A_ix \in \operatorname{im} E_j,\ \textit{với } j \in \underline{N}\}$.

(ii) $\Delta_i \cap \ker E_i = \{0\}$.

Nghiệm duy nhất của bài toán giá trị ban đầu (3.8) – (3.9) được kí hiệu bởi $x(k) = x(k, k_0; \gamma)$.

3.4. Tính ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 có nhiễu

Định nghĩa 3.4.1. Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu dạng (3.8) được gọi là

i) *ổn định* nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, $k_0 \geq 0$ bất kỳ và với mọi quy tắc chuyển mạch, luôn tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, k_0) \in (0, \varepsilon]$ sao cho $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma\| < \delta$ thì ta có $\|x(k, k_0; \gamma)\| < \varepsilon$ với mọi $k \geq k_0$, *ổn định đều* nếu nghiệm *ổn định* và δ không phụ thuộc vào k_0;

ii) *ổn định tiệm cận* nếu nghiệm *ổn định* và với bất kỳ $k_0 \geq 0$, với mọi quy tắc chuyển mạch, tồn tại $\delta = \delta(k_0) > 0$ sao cho $\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma\| < \delta$ thì ta có $\|x(k, k_0; \gamma)\| \to 0$ khi $k \to +\infty$;

iii) *ổn định mũ* nếu tồn tại $M > 0$, $0 < \lambda < 1$ sao cho với mọi $k \geq k_0$ và mọi quy tắc chuyển mạch ta có $\|x(k, k_0; \gamma)\| \leq M\lambda^{k-k_0}\|P_{\sigma(k_0),\sigma(k_0+1)}\gamma\|$.

Ta định nghĩa $\mathcal{K}$ là lớp các hàm tăng $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sao cho $\psi(0) = 0, \psi(x) > 0$ với $x \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} \psi(x) = 0$.

Bổ đề 3.4.1. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.8) *là ổn định nếu và chỉ nếu tồn tại hàm $\psi \in \mathcal{K}$, sao cho với mỗi số nguyên không âm k_0 và với mọi quy tắc chuyển mạch, bất đẳng thức sau đúng*

$$\|x(k)\| \leq \psi(\|x(k_0)\|), \quad \forall k \geq k_0. \tag{3.15}$$

Định lý 3.4.1. *Hệ SDLS* (3.8) *là ổn định nếu và chỉ nếu tồn tại của hàm Lyapunov $V_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ liên tục theo biến thứ hai tại $\gamma = 0$ và các hàm $a, \psi_k \in \mathcal{K}$, sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq \psi_k(\|y\|), \ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma,$

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall \sigma$, *với $y(k)$ là nghiệm của* (3.8) *tương ứng với σ.*

Định lý 3.4.2. *Hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.8) *là ổn định đều nếu và chỉ nếu tồn tại hai hàm $a, b \in \mathcal{K}$ và hàm Lyapunov $V_\sigma : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq b(\|y\|), \ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma,$

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq 0, \forall k \geq 0, \forall \sigma$, *với $y(k)$ là nghiệm của* (3.8) *ứng với σ.*

Định lý 3.4.3. *Giả sử rằng tồn tại hàm Lyapunov $V_\sigma : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ và các hàm $a, c, \psi_k \in \mathcal{K}$ sao cho*

i) $a(\|y\|) \leq V_\sigma(k, y) \leq \psi_k(\|y\|), \ \forall k \geq 0, \forall y \in \Delta_{\sigma(k)}, \forall \sigma,$

ii) $\Delta V_\sigma(k, y(k)) := V_\sigma(k+1, y(k+1)) - V_\sigma(k, y(k)) \leq -c(\|y(k)\|), \forall k \geq 0, \forall \sigma$, *với* $y(k)$ *là nghiệm của* (3.8) *ứng với* σ.

Khi đó, hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu (3.8) *là ổn định tiệm cận.*

Ta định nghĩa

$$\mu = \max\{L_i(1+K_i)\|P_{j,m}G_{i,j,m}^{-1}\| : i, j, m \in \underline{N}\}.$$

Định lý 3.4.4. *Xét hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.8). *Giả sử các điều kiện của Định lý 3.3.1 được thỏa mãn. Nếu tồn tại* $M > 0, 0 < \lambda < 1$ *sao cho*

$$\|\Phi_\sigma(k, h)\| \leq M\lambda^{k-h}, \ \forall k \geq h \geq k_0,$$

và $M\mu < 1 - \lambda$, *thì hệ SDLS chỉ số 1 có nhiễu* (3.8) *là ổn định mũ.*

Kết luận và kiến nghị

Kết quả đạt được của luận án

Trong luận án này, chúng tôi đã nghiên cứu và giải được hai bài toán của hệ chuyển mạch rời rạc suy biến.

- Bài toán 1 nghiên cứu hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1 dương. Chúng tôi đã nghiên cứu tính ổn định của hệ này thông qua phương pháp LP (linear programing) cùng với các tính chất của hệ có chỉ số 1, thiết lập điều kiện ổn định với thời gian dừng nhỏ nhất. Sau đó, luận án đưa ra định nghĩa về dưới bán kính phổ của một họ các cặp ma trận, từ đó thiết lập điều kiện cần và đủ cho tính ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1.

- Bài toán 2 nghiên cứu tính giải được và ổn định của lớp hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến có nhiễu với phần tuyến tính có chỉ số 1 trong hai trường hợp: quy tắc chuyển mạch ở cặp ma trận hệ số giống nhau và khác nhau. Chúng tôi đưa ra kết quả cho tính giải được của lớp hệ này bằng cách sử dụng các tính chất của phép chiếu, tính chất của hệ chỉ số 1 của hệ thuần nhất và nguyên lý ánh xạ co. Sau đó, luận án thiết lập điều kiện ổn định, ổn định đều, ổn định tiệm cận của hệ dựa vào phương pháp hàm Lyapunov. Cuối cùng, chúng tôi đề xuất điều kiện ổn định mũ của hệ bằng cách sử dụng công thức biến thiên hằng số cho nghiệm, đánh giá nghiệm và sử dụng bất đẳng thức Gronwall dạng rời rạc.

Một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

- Nghiên cứu tính giải được và ổn định của hệ chuyển mạch rời rạc suy biến phi tuyến dạng $E_{\sigma(k)}x(k+1) = F_{\sigma(k)}(x(k))$.

- Ổn định hóa hệ chuyển mạch rời rạc suy biến chỉ số 1 bằng quy luật chuyển mạch thích hợp hoặc bằng điều khiển phản hồi.

- Nghiên cứu tính ổn định, ổn định hóa được của hệ chuyển mạch rời rạc suy biến không có chỉ số 1.

Danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

[CT1] D.D. Thuan, **N.T. Thu** (2024), *Stability and stabilizability of positive switched discrete-time linear singular systems*, Systems & Control Letters, Vol.185, article number 105725,
https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2024.105725.

[CT2] D.D. Thuan, **N.T. Thu** (2024), *Solvability and stability of switched discrete time linear singular systems under Lipschitz perturbations*, Journal of Difference Equations and Applications, 2024, Vol. 30, No. 7, pp. 849–869,
https://doi.org/10.1080/10236198.2024.2336478.

[CT3] **N.T. Thu** (2024), *Solvability and Stability of Switched Discrete–time Singular Systems with the Same Switching Rules in Coefficient Matrices*, VNU Journal of Science: Mathematics – Physics, Vol. 40, No. 2, pp. 106–115.

Tài liệu tham khảo

[*] **Tiếng Việt**

[1] Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu (2003), *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, Nhà xuất bản giáo dục Hà Nội.

[2] Phạm Thị Linh (2019), *Tính ổn định của một số lớp hệ chuyển mạch rời rạc tuyến tính suy biến chỉ số 1*, Luận án tiến sĩ, Đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] H.T.N. Yen (2009), *Phương trình sai phân tuyến tính ẩn*, Luận án tiến sĩ, Đại học Quốc gia Hà Nội.

[*] **Tiếng Anh**

[4] P.K. Anh, D.S. Hoang (2006), *Stability of a Class of Singular Difference Equations*, International Journal of Difference Equations, Vol. 1, No. 2, pp. 181–193

[5] P.K. Anh, P.T. Linh, D.D. Thuan, S. Trenn (2019), *The one-step-map for switched singular systems in discrete-time*, Proceedings of the 58th IEEE conference on decision and control, pp. 605–610.

[6] P.K. Anh, P.T. Linh, D.D. Thuan, S. Trenn (2020), *Stability analysis for switched discrete-time linear singular systems*, Automatica 119, page 1–9, article 109100.

[7] P.K. Anh, P.T. Linh (2017), *Stability of periodically switched discrete-time linear singular systems*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 23, No. 10, 1680–1693.

[8] P.K. Anh, H.T.N. Yen (2006), *Floquet theorem for linear implicit nonautonomous difference systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 321, pp. 921–929.

[9] M.S. Branicky (1998), *Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 4, pp. 475–482.

[10] A. Berman, R.J. Plemmons (1979), *Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences*, Academic Press, New York.

[11] S.L. Campbell (1980), *Singular systems of differential equations*, Research notes in mathematics: vol. 40. Boston, Mass: Pitman (Advanced Publishing Program).

[12] S.L. Campbell, C.D. Meyer (2009),*Generalized Inverses of Linear Transformations*, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[13] B. Cantó, C. Coll, E. Sánchez (2005), *Drazin inverse and periodic collection of matrices*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol. 27, No. 2, pp. 413–423.

[14] M. Darouach, M. Chadli (2013), *Admissibility and control of switched discrete-time singular systems*, Systems Science & Control Engineering: An Open Access Journal, Vol. 1, No. 1, pp. 43–51.

[15] T.S. Doan, A. Kalauch, M. Klose, S. Siegmund (2015), *Stability of positive linear switched systems on ordered Banach spaces*, Systems & Control Letters, Vol. 75, pp. 14–19.

[16] M.P. Drazin (1958), *Pseudo-inverses in associative rings and semigroups*, American Mathematical Monthly, Vol. 65, No.7, pp. 506–514.

[17] G.R. Duan, R.J. Patton (1998), *A Note on Hurwitz Stability of Matrices*, Automatica, Vol. 34, No. 4, pp. 509–511.

[18] L. Fang, H. Lin, P. J. Antsaklis (2004), *Stabilization and performance analysis for a class of switched systems*, Proceedings of the 43rd IEEE conference on decision and control, pp. 3265–3270.

[19] M. Fekete (1923), *Uber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahlingen Koeffizienten*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 17, pp. 228–249.

[20] E. Fornasini, M.E. Valcher (2012),*Stability and Stabilizability Criteria for Discrete-Time Positive Switched Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, pp. 1208–1221.

[21] S.S. Ge, Z. Sun, T.H. Lee (2001), *On reachability and stabilization of switched linear discrete-time systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 46, No. 9, pp. 1437–1441.

[22] C. Gokcek (2004), *Stability analysis of periodically switched linear systemdcsing Floquet theory*, Mathematical Problems in Engineering, Vol. 1, pp. 1–10.

[23] E. Griepentrog, R. Marz (1986), *Differential-algebraic equations and their numerical treatment*, Teubner-Texte Math., vol. 88, Teubner, Leipzig.

[24] P. Gu, S. Tian (2018), *Iterative learning control for discrete-time switched singular systems*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 24, No. 9, pp. 1414–1428, http://dx.doi.org/ 10.1080/10236198.2018.1494165.

[25] L. Gurvits (1995), *Stability of discrete linear inclusions*, Linear Algebra and its Applications 231, 47–85.

[26] J. P. Hespanha, A. S. Morse (1999), *Stability of switched systems with average dwell-time*, Proceedings of the 38th IEEE conference on decision and control, pp. 2655–2660.

[27] L.V. Hien, Q.P. Ha, V.N. Phat (2009), *Stability and stabilization of switched linear dynamic systems with time delay and uncertainties*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 210, pp. 223–231.

[28] D. Hinrichsen, N.K. Son (1998), *Stability radii of positive discrete-time systems under affine parameter perturbations*, International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 8, pp. 1169–1188.

[29] R. Jungers (2009), *The joint spectral radius: Theory and applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[30] T. Kaczorek (1993), *Theory of Control and Systems*, PWN, Warszawa, (in Polish).

[31] D. Koenig, B. Marx (2009), *Hinf-filtering and state feedback control for discrete-time switched descriptor systems*, IET Control Theory & Application, Vol. 3, No. 6,pp. 661–670, http://dx.doi.org/10.1049/iet-cta.2008.0132.

[32] R. Kruse, M. Scheutzow (2018), *A discrete stochastic Gronwall lemma*, Mathematics and Computers in Simulation 143, pp. 149–157.

[33] P. Kunkel, V. Mehrmann (2006), *EMS textbooks in mathematics, Differential–algebraic equations. Analysis and numerical solution*, Zürich: European Mathematical Society (EMS).

[34] Y. Li, H. Zhang (2019), *Dwell time stability and stabilization of interval discrete-time switched positive linear systems*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 33, pp. 116–129.

[35] S. Li, Z. Xiang (2020), *Positivity, exponential stability and disturbance attenuation performance for singular switched positive systems with time-varying distributed delays*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 372, article 124981.

[36] D. Liberzon, S. Trenn (2009), *On stability of linear switched differential algebraic equations*,Proceedings of the 48th IEEE conference on decision and control, pp. 2156–2161.

[37] D. Liberzon, S. Trenn, F. Wirth (2011), *Commutativity and asymptotic stability for linear switched DAEs*, Proceedings of the 50th IEEE conference on decision and control, pp. 417–422.

[38] P.T. Linh (2018), *Stability of Arbitrarily Switched Discrete-time Linear Singular Systems of Index-1*, VNU Journal of Science: Mathematics – Physics Vol. 34, No. 4, pp. 84–91.

[39] D.G. Luenberger (1977), *Dynamic equations in descriptor form*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 22, pp. 312–321.

[40] D.G. Luenberger (1986), *Control of linear dynamic market systems*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 10, pp. 339–351.

[41] O.L. Mangasarian (1968), *Characherizations of real matrices of monotone kind*, SIAM Review, Vol. 10, No. 4, pp. 439–441.

[42] B. Men, Q. Zhang, G. Wang, J. Zhou (2013), *Stabilization of discretetime switched linear singular systems via a stochastic approach*, Applied Mathematics & Information Sciences, Vol. 7, pp. 631–637.

[43] J. W. Nieuwenhuis (1984), *About positive invariance and asymptotic stability*, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 12, pp. 81–87.

[44] V.N. Phat, L.V. Hien (2009), *An application of Razumikhin theorem to exponential stability for linear non-autonomous systems with arbitrary time-varying delays*, Applied Mathematics Letters, Vol. 22, pp. 1412-1417.

[45] V.N. Phat, K. Ratchagit (2011), *Stability and stabilization of switched linear discrete-time systems with interval time-varying delay*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol. 5, pp. 605–612.

[46] G. Polya, G. Szego (1998), *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer, Berlin, Heidelberg.

[47] M.A. Rami, D. Napp (2012), *Characterization and stability of autonomous positive descriptor systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 57, No. 10, pp. 2668–2673.

[48] M. A. Rami, D. Napp (2014), *Positivity of discrete singular systems and their stability: An LP-based approach*, Automatica, Vol. 50, pp. 84–91.

[49] M. A. Rami, F. Tadeo & A. Benzaouia (2007), *Control of constrained positive discrete systems*, American control conference, ACC, pp. 5851–5856.

[50] G.C. Rota, W.G. Strang (1960), *A note on the joint spectral radius*, Indagationes Mathematicae, Vol. 22, pp. 379–381.

[51] R. Shorten, K. Narendra (1999), *Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems*, Proceedings of the American Control Conference, pp. 1410–1414.

[52] R. Shorten, K. Narendra, O. Mason (2003), *A result on common quadratic Lyapunov functions*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 48, pp. 110–113.

[53] N.K. Son, L.V. Ngoc (2020), *On robust stability of switched linear systems*, IET Control Theory & Applications, Vol. 14, pp. 19–29.

[54] J.R. Stern (1982), *A note on positively invariant cones*, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 9, pp. 67–72.

[55] Z. Sun, S. S. Ge (2005), *Switched Linear Systems: Control and Design*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, Series Communications and Control Engineering.

[56] S. Sutrisno, S. Trenn (2024), *Switched linear singular systems in discrete time: Solution theory and observability notions*, Systems & Control Letters, Vol. 183, article 105674.

[57] N.T. Thanh, V.N. Phat (2019), *Switching law design for finite-time stability of singular fractional-order systems with delay*, IET Control Theory & Applications, Vol. 13, pp. 1367–1373.

[58] D.D. Thuan, L.V. Ngoc (2019), *Robust stability and robust stabilizability for periodically switched linear systems*, Applied Mathematics and Computation, Vol. 361, No. 15, pp. 112–130 .

[59] Y. Tong, C. Wang, L. Zhang (2012), *Stabilisation of discrete-time switched positive linear systems via time- and state-dependent switching laws*, IET Control Theory & Application, Vol. 6, pp. 1603–1609.

[60] S. Trenn (2012), *Switched differential algebraic equations*, in Vasca, Francesco; Iannelli, Luigi (eds.) Dynamics and Control of Switched Electronic Systems - Advanced Perspectives for Modeling, Simulation and Control of Power Converters, London, pp. 189–216.

[61] K. Weierstraß (1868), *Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, Berl. Monatsb, pp. 310–338.

[62] G. Zhai, X. Xu (2010), *A unified approach to stability analysis of switched linear descriptor systems under arbitrary switching*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, Vol. 20, No. 2, pp. 249–259.

[63] G. Zhai, X. Xu, D. W.C. Ho (2012), *Stability of switched linear discrete-time descriptor systems: a new commutation condition*, International Journal of Control, Vol. 85, pp. 1779–1788.