ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN HẢI HÀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH GIẢI BAO HÀM THỨC ĐƠN ĐIỆU VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9460112.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ NGÀNH TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2025

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG Hà Nội

Người hướng dẫn khoa học:

1. **TS. Đặng Văn Hiếu**
2. **GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh**

Phản biện 1: **GS. TS. Phạm Ngọc Anh**

Phản biện 2: **GS. TS. Đặng Quang Á**

Phản biện 3: P**GS. TS. Nguyễn Năng Tâm**

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp Đại học Quốc gia chấm luận án tiến sĩ họp tại ....vào hồi giờ ngày tháng năm

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam

- Trung tâm Thông tin – Thư viện Đại học Quốc gia Hà Nội

Mở đầu

Luận án này nghiên cứu một số phương pháp hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng sau đây.

Bài toán 0.1 (VI - Variational Inclusion) *Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực. $\mathcal{A}: \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ và $\mathcal{B}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lần lượt là các toán tử đa trị và đơn trị trên $\mathcal{H}$. Bài toán* VI *được phát biểu như sau:*

$$\textit{Tìm điểm } x^* \in \mathcal{H} \textit{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x^*) + \mathcal{B}(x^*). \tag{VI}$$

Phương pháp cổ điển và đơn giản nhất giải bài toán này trong trường hợp $\mathcal{B} = 0$ là phương pháp điểm gần kề, được đề xuất bởi B. Martinet năm 1970 trong giải bài toán bất đẳng thức biến phân và được nghiên cứu mở rộng bởi Rockafellar năm 1976 cho bài toán tìm không điểm của toán tử $\mathcal{A}$ đơn điệu cực đại, có dạng:

$$x^{k+1} = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}} x^k \quad k = 0, 1, \dots,$$

trong đó $\lambda_k > 0$ đươc gọi là *cỡ bước* và $J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}$ là giải thức của toán tử $\mathcal{A}$ ứng với tham số λ_k, cho bởi $J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}} := (I + \lambda_k \mathcal{A})^{-1}$ trong đó I là toán tử đồng nhất trên $\mathcal{H}$. Phương pháp điểm gần kề đã mở ra một hướng tiếp cận hiệu quả cho việc nghiên cứu thuật giải cho bài toán VI, đó là sử dụng nguyên lý điểm bất động dựa trên toán tử giải thức.

Năm 2018, C. Zhang và Y. Wang đã đề xuất phương pháp co gần kề sau đây cho bài toán VI:

$$\begin{cases} y^k = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k \mathcal{B}(x^k)), \\ d(x^k, y^k) = x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)), \\ x^{k+1} = x^k - \gamma \beta_k d(x^k, y^k), \end{cases}$$

với $\gamma \in (0, 2)$, $\beta_k = \frac{\phi(x^k, y^k)}{||d(x^k, y^k)||^2}$, $\phi(x^k, y^k) = \langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \rangle$, $\{\lambda_k\}$ là dãy các cỡ bước thoả mãn một số điều kiện cho trước và $\liminf\limits_{k \to \infty} \lambda_k \geq \bar{\lambda} > 0$. Với một số điều kiện nhất định, các tác giả đã chứng minh rằng dãy $\{x^k\}$ sinh bởi phương pháp đề xuất hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán VI.

Gần đây, để tăng tốc độ hội tụ của phương pháp lặp, người ta thường sử dụng kỹ thuật quán tính. F. Alvarez và H. Attouch [4] đã đề xuất kĩ thuật này, xuất phát từ hệ động lực bậc hai có tên là "quả cầu nặng có ma sát". Phương pháp này sau đó được sử dụng rộng rãi nhằm mục đích tăng tốc độ hội tụ của các thuật toán lặp. Năm 2021, B. Jiang và các cộng sự đã dựa trên các phương pháp chỉnh lặp dưới đạo hàm tăng cường (RSEGM - regularized subgradient extragradient method) và chỉnh lặp đạo hàm tăng cường kiểu Tseng (RTEGM - regularized Tseng's extragradient method) của Đặng Văn Hiếu và các cộng sự để đề xuất các thuật toán RSEGM quán tính đa bước và RTEGM quán tính đa bước.

Trong luận án này, ta cũng quan tâm nghiên cứu phương pháp giải bài toán bao hàm thức biến phân tách (SVI - split variational inclusion) trong hai không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x^*) \text{ và } 0 \in \mathcal{B}_2\mathcal{T}(x^*), \tag{SVI}$$

trong đó $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}_1 \to 2^{\mathcal{H}_1}$ và $\mathcal{B}_2 : \mathcal{H}_2 \to 2^{\mathcal{H}_2}$ là hai toán tử đơn điệu cực đại và $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Tập nghiệm của bài toán SVI được kí hiệu là Ω_{SVI} và luôn được giả thiết khác rỗng. Bài toán VI có thể đưa được về bài toán SVI bằng cách đặt $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ và $\mathcal{B}_2$ là toán tử đồng nhất bằng 0. Bài toán này được đề xuất bởi A. Moudafi năm 2011 và sau đó Y. Censor và các cộng sự trong năm 2012 đã đề xuất và nghiên cứu bài toán bất đẳng thức biến phân tách và bài toán không điểm tách (SZP - split zero problem).

Gần đây, C-S. Chuang trong năm 2016 đã đề xuất thuật toán gần kề sau để giải bài toán (SVI) trong không gian Hilbert:

Thuật toán 0.1
Khởi tạo: *Lấy* $x^0 \in \mathcal{H}_1$ *và* $\{\beta_k\} \subset [\beta, +\infty) \subset (0, +\infty)$.

Các bước lặp:

Bước 1. Tính $y^k = J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_1}\left(x^k - \gamma_k \mathcal{T}^*\left(I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(x^k)\right)$, *với* $\gamma_k > 0$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\gamma_k \left\| \mathcal{T}^*\left(I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^*\left(I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(y^k)\right\| \le \delta\|x^k - y^k\|,\ 0 < \delta < 1.$$

Bước 2. Nếu $x^k = y^k$, *dừng thuật toán. Nếu không, tới Bước 3.*
Bước 3. Tính $x^{k+1} = J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_1}\left[x^k - \lambda_k D(x^k, \gamma_k)\right]$, *trong đó*

$$D(x^k, \gamma_k) = x^k - y^k - \gamma_k\left[\mathcal{T}^*\left(I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^*\left(I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(y^k)\right],$$
$$\lambda_k = \frac{\langle x^k - y^k, D(x^k, \gamma_k)\rangle}{||D(x^k, \gamma_k)||^2}.$$

Bước 4. Cập nhật $k := k + 1$ *và quay trở lại Bước 1.*

Dãy $\left\{x^k\right\}$ sinh bởi Thuật toán trên hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán (SVI) dưới một vài điều kiện phù hợp được đặt lên toán tử giá và các tham số điều khiển.

Trong luận án này, ta cũng nghiên cứu thuật giải cho bài toán cân bằng (EP-equilibrium problem). Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert và C là một tập con lồi đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$. Cho $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là một song hàm cân bằng trên C, tức là $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$. Xét bài toán sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \text{ với mọi } y \in C. \tag{EP(f, C)}$$

Ta kí hiệu $Sol(f, C)$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng EP(f, C) và luôn giả sử rằng tập này là khác rỗng. Năm 1992, tên gọi Bài toán cân bằng chính thức xuất hiện trong công trình của Lê Dũng Mưu và W. Oettli.

Năm 2022, Đặng Văn Hiếu và các cộng sự đã đề xuất một phương pháp chỉnh lặp (IRM - iterative regularization method) hội tụ mạnh giải bài toán EP đơn điệu có dạng: lấy $x^0, y^0 \in C$, với mỗi $k \geq 0$, tính x^{k+1} và y^{k+1} bởi

$$\begin{cases} x^{k+1} = \text{prox}_{\lambda_k(f(y^k,\cdot)+\alpha_k g(x^k,\cdot))}(x^k), \\ y^{k+1} = \text{prox}_{\lambda_{k+1}(f(y^k,\cdot)+\alpha_k g(x^{k+1},\cdot))}(x^k), \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $g : C \times C \to \mathbb{R}$ là một song hàm đơn điệu mạnh và $\lambda_k \in \left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] \subset (0, +\infty)$, $\alpha_k > 0$ là các tham số phù hợp, còn prox_h được cho bởi

$$\text{prox}_h u = \text{argmin}\left\{h(v) + \frac{1}{2}\left\|v - u\right\|^2 : v \in C\right\}.$$

Trong những năm trở lại đây, phương pháp hệ động lực đã được nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như tối ưu lồi, lý thuyêt trò chơi, lý thuyết điểm bất động, phương trình đạo hàm riêng. Năm 2022, Phạm Kỳ Anh và các cộng sự đã trình bày một hệ động lực hiệu chỉnh liên kết với bài toán EP, có dạng

$$\begin{cases} y(t) = \text{prox}_{\lambda(t)(f(x(t),\cdot)+\alpha(t)g(x(t),\cdot))}(x(t)), \\ \dot{x}(t) + x(t) = y(t), \\ x(0) = x^0 \in C, \end{cases} \tag{2}$$

trong đó $\lambda : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ là một hàm liên tục, $\alpha : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ là hàm khả vi liên tục, thoả mãn

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0; \ \int_0^{+\infty} \lambda(t)\alpha(t) = +\infty; \ \lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda(t)}{\alpha(t)} = 0; \ \lim_{t\to+\infty} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\lambda(t)\alpha^2(t)} = 0.$$

Hệ (2) có thể được rời rạc hoá dưới dạng

$$\begin{cases} y^k = \text{prox}_{\lambda_k(f(x^k,\cdot)+\alpha_k g(x^k,\cdot))}(x^k), \\ x^{k+1} = (1 - h_k)x^k + h_k y^k, \end{cases} \tag{3}$$

với $\{\alpha_k\}$ và $\{\lambda_k\}$ là các dãy số thực dương dần về 0. Các tác giả đã chỉ ra rằng thuật toán (3) là hội tụ mạnh.

Từ các thuật toán hội tụ yếu đã biết, ta cải tiến và tích hợp nhằm phát triển các thuật toán hội tụ mạnh mới, không quá phức tạp nhưng hiệu quả. Ý tưởng về giải các bài toán đặt không chỉnh trong luận án là chọn một nghiệm của bài toán ban đầu thông qua việc tìm nghiệm của một bài toán hai cấp đặt chỉnh, ý tưởng này bắt nguồn từ việc tham khảo công trình của các tác giả Bùi Văn Định, Phạm Gia Hưng, Lê Dũng Mưu (2014). Những công cụ mà chúng ta quan tâm là phương pháp co gần kề, kĩ thuật hiệu chỉnh, phương pháp đạo hàm tăng cường, phương pháp hệ động lực. Bên cạnh đó, chúng ta cũng quan tâm đến phương pháp chọn cỡ bước phù hợp cho thuật toán dựa trên *điều kiện cỡ bước dự đoán* (PSC). Các thuật toán đề xuất sẽ được áp dụng vào một số bài toán cụ thể. Cuối cùng, ta thực hiện các thử nghiệm số để minh họa tính hiệu quả của các phương pháp thu được và so sánh với các thuật toán đã biết.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận án được chia thành ba chương. Kết quả chính tập chung trong các Chương 2 và 3.

Bố cục của luận án

Mở đầu

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.

Chương 2. Các phương pháp hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân và bao hàm thức biến phân tách.

Chương 3. Phương pháp hệ động lực hiệu chỉnh giải bài toán cân bằng.

Kết luận

Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan tới luận án.

Tài liệu tham khảo.

Các kết quả chính của luận án được công bố trong 5 tạp chí thuộc danh mục SCIE và SCOPUS và được báo cáo tại:

1. Xêmina của bộ môn Toán học tính toán và Toán ứng dụng, Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

2. Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 21, Ba Vì, 20-22/4/2023.

3. International Conference on Optimization and Variational Analysis with Applications (ICOVAA), VIASM, Hanoi, July 12-15, 2023.

4. Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 10, Đà Nẵng, 8-12/8/2023.

5. Gặp gỡ Toán học 2024 - Hội thảo Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Vĩnh Phúc, 28-29/9/2024.

6. Hội nghị Khoa học Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội, 09/10/2024.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Một số kiến thức cơ bản

1.1.1. Một số khái niệm cơ bản trong không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1 Cho hàm chính thường $\varphi : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ và $x^* \in \mathrm{dom}(\varphi)$. Khi đó, vectơ $y \in \mathcal{H}$ được gọi là *dưới đạo hàm* của hàm φ tại x^* nếu với mọi $x \in \mathcal{H}$, ta có $\langle y, x - x^* \rangle \le \varphi(x) - \varphi(x^*)$.
Tập hợp tất cả dưới đạo hàm của hàm φ tại x^*, kí hiệu là $\partial\varphi(x^*)$, được gọi là *dưới vi phân* của φ tại x^*. Hàm φ được gọi là *khả dưới vi phân* tại x^*, nếu $\partial\varphi(x^*) \neq \emptyset$.

Bổ đề 1.1.1 (Quy tắc Fermat). *Cho $\varphi : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ là hàm lồi, chính thường. Khi đó $x^* \in \operatorname{argmin} \varphi$ khi và chỉ khi $0 \in \partial\varphi(x^*)$. Nói cách khác, ta có* $\operatorname{argmin} \varphi = \mathrm{zer}(\partial\varphi) := \{x^* \in \mathcal{H} : 0 \in \partial\varphi(x^*)\}$.

Ta có hệ quả sau đây của Bổ đề 1.1.1, áp dụng cho $\varphi := g + \iota_C$, trong đó $\iota_C : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ được gọi là *hàm chỉ* của C, cho bởi

$$\iota_C(u) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } u \in C, \\ +\infty & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Hệ quả 1.1.1. *Cho C là tập lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ và $h : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới, chính thường. Giả sử h liên tục tại một điểm nào đó của C hoặc tồn tại một điểm trong của C mà h là hữu hạn. Khi đó, x^* là nghiệm của bài toán tối ưu lồi* $\min\{h(x) : x \in C\}$ *khi và chỉ khi $0 \in \partial h(x^*) + N_C(x^*)$.*

1.1.2. Phép chiếu metric, toán tử và giải thức của toán tử

Định nghĩa 1.2 Cho $C \subset \mathcal{H}$ là lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó, ánh xạ

$$\begin{aligned} P_C : \mathcal{H} &\to C \\ x &\mapsto \operatorname{argmin}\{\|y - x\| : y \in C\} \end{aligned}$$

được gọi là *phép chiếu metric* (hay đơn giản là phép chiếu) từ $\mathcal{H}$ lên C.

Định nghĩa 1.3 Cho toán tử đa trị $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$. *Giải thức* của $\mathcal{A}$ ứng với số $\lambda > 0$ kí hiệu là $J_\lambda^{\mathcal{A}}$ ($J^{\mathcal{A}}$ trong trường hợp $\lambda = 1$), là toán tử $\mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ cho bởi $J_\lambda^{\mathcal{A}} x = (I + \lambda\mathcal{A})^{-1}x$.

Ta có các kết quả sau

Bổ đề 1.1.2. *Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đơn điệu cực đại, khi đó với mọi $\lambda > 0$, giải thức $J_\lambda^{\mathcal{A}}$ là đơn trị, $\operatorname{dom}(J_\lambda^{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$ và không giãn vững (nên hiển nhiên là không giãn).*

Bổ đề 1.1.3. *Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đơn điệu cực đại và $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử đơn điệu và liên tục Lipschitz. Khi đó toán tử $\mathcal{S} := \mathcal{A} + \mathcal{B}$ là đơn điệu cực đại.*

Bổ đề 1.1.4. *Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đơn điệu cực đại và $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử đơn trị. Với mỗi $\lambda > 0$, ta xác định toán tử $\mathcal{J}(x) := J_\lambda^{\mathcal{A}}(x - \lambda\mathcal{B}(x))$ với mọi $x \in \mathcal{H}$. Khi đó*

$$x^* \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}(0) \Leftrightarrow x^* \in \operatorname{Fix}(\mathcal{J}).$$

Trong đó $\operatorname{Fix}(\mathcal{J})$ là tập điểm bất động của $\mathcal{J}$.

Bổ đề 1.1.5. *Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đơn điệu cực đại, và điểm $x \in \mathcal{H}$. Khi đó $\mathcal{A}(x)$ là tập lồi và đóng.*

Bây giờ, ta nhắc lại khái niệm toán tử gần kề của hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới.

Định nghĩa 1.4 Cho $\varphi : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên $\mathcal{H}$. *toán tử gần kề* (hoặc *ánh xạ gần kề*) của φ là toán tử $\operatorname{prox}_\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ cho bởi $\operatorname{prox}_\varphi(x) = \operatorname{argmin}\left\{\varphi(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 : y \in \mathcal{H}\right\}$.

Ta có các kết quả sau đây về toán tử gần kề.

Bổ đề 1.1.6. *Cho φ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên $\mathcal{H}$ và cho $x, p \in \mathcal{H}$. Khi đó, $p = \operatorname{prox}_\varphi(x)$ khi và chỉ khi $x - p \in \partial\varphi(p)$. Nói cách khác, ta có $\operatorname{prox}_\varphi = (I + \partial\varphi)^{-1} = J^{\partial\varphi}$.*

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathcal{H}$ và φ là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên $\mathcal{H}$ sao cho $\mathrm{dom}(\varphi) \cap C \neq \emptyset$. Dễ thấy $\varphi + \iota_C$ cũng là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên $\mathcal{H}$. Khi đó ta kí hiệu $\mathrm{prox}_{\varphi+\iota_C}$ là $\mathrm{prox}_{\varphi}^{C}$.

Bổ đề 1.1.7. *Cho $C \subset \mathcal{H}$ là tập lồi, đóng, khác rỗng và $\varphi : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới. Khi đó, bất đẳng thức*

$$\varphi(y) - \varphi(\mathrm{prox}_{\varphi}^{C}(x)) \geq \langle x - \mathrm{prox}_{\varphi}^{C}(x), y - \mathrm{prox}_{\varphi}^{C}(x)\rangle$$

được thỏa mãn với mọi $x \in \mathcal{H}$ và mọi $y \in C$.

1.1.3. Một số kiến thức cơ bản về song hàm

Cho $C \subset \mathcal{H}$ là tập lồi, đóng, khác rỗng. Xét một *song hàm*, tức là một ánh xạ $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Song hàm f thoả mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$ được gọi là *song hàm cân bằng trên C*.

Định nghĩa 1.5 Cho $C \subset \mathcal{H}$ là tập lồi, đóng, khác rỗng. Song hàm $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ được gọi là

(i) *thoả mãn điều kiện Lipschitz theo Antipin* hay *thoả mãn điều kiện Lipschitz mạnh* (SLC - strong Lipschitz-type condition) trên C nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho với mọi $x, y, z, t \in C$, ta có

$$|f(x, y) - f(z, y) - f(x, t) + f(z, t)| \leq L\|x - z\|\|y - t\|; \tag{1.1}$$

(ii) *thoả mãn điều kiện Lipschitz* (LC - Lipschitz-type condition) trên C nếu tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho với mọi $x, y, z \in C$, ta có

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - L\|x - y\|\|y - z\|; \tag{1.2}$$

(iii) *thoả mãn điều kiện Lipschitz theo Mastroeni* (MLC - Mastroeni's Lipschitz-type condition) trên C nếu tồn tại hai hằng số $c_1, c_2 > 0$ sao cho

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1\|x - y\|^2 - c_2\|y - z\|^2.$$

Để cho ngắn gọn, ta sẽ gọi việc một song hàm thoả mãn điều kiện Lipschitz theo Antipin với hệ số L là L-(SLC), thoả mãn điều kiện Lipschitz với hệ số L là L-(LC) và thoả mãn điều kiện Lipschitz theo Mastroeni là (MLC).

1.2. Bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh

Khái niệm bài toán đặt chỉnh và đặt không chỉnh lần đầu tiên được đưa ra vào đầu thế kỉ 20 bởi J. Hadamard (1932) như sau:

Định nghĩa 1.6 Cho F là một ánh xạ từ không gian tôpô $\mathcal{X}$ vào không gian tôpô $\mathcal{Y}$. Xét phương trình:

$$F(x) = y. \tag{1.3}$$

Ta nói rằng phương trình trên là *đặt chỉnh* nếu

(i) với mỗi $y \in \mathcal{Y}$, nghiệm $x \in \mathcal{X}$ của phương trình $F(x) = y$ tồn tại;

(ii) ứng với mỗi $y \in \mathcal{Y}$, nghiệm $x \in \mathcal{X}$ là duy nhất;

(iii) x phụ thuộc liên tục vào y.

Bài toán 1.3 được gọi là *đặt không chỉnh* nếu ít nhất một trong ba điều kiện (i), (ii) hoặc (iii) bị vi phạm.

Trong số các phương pháp đã được nghiên cứu và ứng dụng để giải bài toán đặt không chỉnh, ta có thể kể đến các phương pháp hiệu chỉnh. Ý tưởng chính của phương pháp hiệu chỉnh là thay bài toán đặt không chỉnh ban đầu bằng một họ các bài toán đặt chỉnh mà nghiệm của bài toán đặt chỉnh đó hội tụ về nghiệm của bài toán ban đầu, khi tham số hiệu chỉnh dần tới không.

1.3. Một số tính chất của các bài toán được nghiên cứu trong luận án

1.3.1. Bài toán bao hàm thức biến phân

Cho không gian Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ lần lượt là các toán tử đa trị và đơn trị trên $\mathcal{H}$. Xét bài toán bao hàm thức biến phân

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x^*) + \mathcal{B}(x^*). \tag{VI}$$

Gọi Ω là tập nghiệm của bài toán VI. Xét trường hợp $\Omega \neq \emptyset$ và toán tử $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ là đơn điệu cực đại. Khi đó, toán tử $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}$ cũng đơn điệu cực đại nên theo Bổ đề 1.1.5, ta có $\Omega = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}(0)$ là tập lồi và đóng. Nói riêng, nếu $\mathcal{A}$ đơn điệu cực đại và $\mathcal{B}$ đơn điệu và liên tục Lipschitz thì theo Bổ đề 1.1.3, $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ là đơn điệu cực đại nên Ω là tập lồi và đóng.

Bổ đề 1.3.1. *Nếu $\mathcal{A}$ là đơn điệu cực đại và $\mathcal{B}$ là γ-đơn điệu mạnh và L-liên tục Lipschitz thì bài toán (VI) có duy nhất nghiệm.*

1.3.2. Bài toán bao hàm thức biến phân tách

Xét bài toán bao hàm thức biến phân tách sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x^*) \text{ và } 0 \in \mathcal{B}_2\mathcal{T}(x^*), \qquad \text{(SVI)}$$

trong đó $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}_1 \to 2^{\mathcal{H}_1}$ và $\mathcal{B}_2 : \mathcal{H}_2 \to 2^{\mathcal{H}_2}$ là hai ánh xạ đa trị đơn điệu cực đại và $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Cho $\beta > 0$, ta xét ánh xạ $\mathcal{S} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ cho bởi

$$\mathcal{S}(x) = \mathcal{T}^* \left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right) \mathcal{T}(x)$$

với mọi $x \in \mathcal{H}_1$. Ta có kết quả sau đây.

Bổ đề 1.3.2. *(i)* $\langle \mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(y), x - y\rangle \ge \left\| \left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right) \mathcal{T}(x) - \left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right) \mathcal{T}(y)\right\|^2$ *với mọi* x*,* $y \in \mathcal{H}_1$*.*

(ii) $\|\mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(y)\|^2 \le \|\mathcal{T}\|^2 \langle \mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(y), x - y\rangle$ *với mọi* x*,* $y \in \mathcal{H}_1$*.*

1.3.3. Bài toán cân bằng

Xét bài toán EP trong trường hợp song hàm f thỏa mãn các điều kiện sau đây:

($\bar{\text{A}}$1). f là song hàm cân bằng và giả đơn điệu;

($\bar{\text{A}}$2). f là (MLC);

($\bar{\text{A}}$3). $f(\cdot, y)$ nửa liên tục trên yếu theo dãy trên C với mỗi $y \in C$, tức là,

$$\limsup_{n\to\infty} f(x^k, y) \le f(x, y)$$

với mỗi dãy $\{x^k\} \subset C$ và $x^k \rightharpoonup x$;

($\bar{\text{A}}$4). $f(x, \cdot)$ lồi và khả dưới vi phân trên C với mỗi $x \in C$ cố định.

Ta có kết quả sau đây về tính lồi đóng của tập nghiệm $Sol(f, C)$ cho bài toán EP giả đơn điệu.

Bổ đề 1.3.3. *Nếu song hàm f thỏa mãn các điều kiện* ($\bar{\text{A}}$1) $-$ ($\bar{\text{A}}$4)*, thì tập nghiệm $Sol(f, C)$ lồi và đóng.*

Ta cũng có kết quả sau đây về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán EP(f, C).

Bổ đề 1.3.4. *Cho $C \subset \mathcal{H}$ là tập lồi, đóng, khác rỗng, $f : C\times C \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ là song hàm cân bằng, giả đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện: với mọi $x \in C$, hàm số $f(\cdot, x)$ hemi-liên tục và hàm số $f(x, \cdot)$ lồi, nửa liên tục dưới trên C và khả dưới vi phân tại một điểm nào đó thuộc $\mathcal{H}$. Khi đó, bài toán* EP(f, C) *có đúng một nghiệm.*

Chương 2

Các phương pháp hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân và bao hàm thức biến phân tách

2.1. Phương pháp co gần kề hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn cảm sinh $\| \cdot \|$. Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đa trị và $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử đơn trị. Trong mục này, chúng ta xét bài toán bao hàm thức biến phân (VI-variational inclusion) sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x^*) + \mathcal{B}(x^*). \tag{VI}$$

Giả sử tập nghiệm Ω của bài toán VI là khác rỗng. Chúng ta nghiên cứu bài toán VI với toán tử $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ và toán tử $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ thoả mãn các giả thiết sau:

(A1) Toán tử $\mathcal{A}$ đơn điệu cực đại;
(A2) Toán tử $\mathcal{B}$ đơn điệu và liên tục Lipschitz;
(A3) Tập nghiệm Ω của bài toán VI khác rỗng.

2.1.1. Bài toán bao hàm thức hiệu chỉnh và tính chất của dãy nghiệm hiệu chỉnh

Để giải bài toán VI và chọn một nghiệm cụ thể trong Ω, chúng ta quan tâm đến việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp (BVIP- bilevel variational inequality problem) sau đây:

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \Omega \text{ sao cho } \left\langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^* - x^\dagger \right\rangle \geq 0, \ \forall x^* \in \Omega, \tag{BVIP}$$

trong đó $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là một toán tử γ-đơn điệu mạnh và $\tilde{L}$-liên tục Lipschitz. Do Ω là tập lồi, đóng và khác rỗng (đã giả thiết ở trên) nên bài toán BVIP có duy nhất nghiệm $x^\dagger$.

Để thiết lập sự hội tụ của phương pháp được trình bày, chúng ta sử dụng kĩ thuật hiệu chỉnh. Cụ thể là, với mỗi $\alpha > 0$, ta liên kết bài toán VI với bài toán bao hàm thức biến phân hiệu chỉnh (RVI- regularized variational inclusion) sau đây:

$$\text{Tìm } x \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) + \alpha\mathcal{F}(x). \tag{RVI}$$

Dưới các giả thiết đã xét, với mỗi $\alpha > 0$, bài toán RVI có nghiệm duy nhất phụ thuộc vào tham số hiệu chỉnh α, kí hiệu bởi x_α. Lưới nghiệm $\{x_\alpha\}$ có các tính chất sau đây.

Bổ đề 2.1.1. (i) *Dãy $\{x_\alpha\}$ bị chặn.*

(ii) *Tồn tại một số thực $M > 0$ sao cho, với mọi $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, ta có*

$$\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| \leq \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{\alpha_1} M.$$

(iii) $\omega(x_\alpha) \subset \Omega$, *trong đó $\omega(x_\alpha)$ là tập các điểm tụ yếu của dãy $\{x_\alpha\}$.*

(iv) $\lim_{\alpha \to 0^+} x_\alpha = x^\dagger$.

2.1.2. Phát biểu thuật toán và sự hội tụ

Cho $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là toán tử γ-đơn điệu mạnh và $\tilde{L}$-liên tục Lipschitz. Ngoài ra, ta lấy một dãy $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$ sao cho

$$\text{(C1)} : \lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0; \qquad \text{(C2)} : \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty; \qquad \text{(C3)} : \lim_{k\to\infty} (\alpha_k - \alpha_{k-1})\alpha_k^{-2} = 0.$$

Dãy $\alpha_k = \frac{1}{k^p}$ với $0 < p < 1$ thoả mãn các điều kiện (C1)-(C3). Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, đặt $\mathcal{B}^{\mathcal{F}}_{\alpha_k} = \mathcal{B} + \alpha_k\mathcal{F}$. Để giải bài toán VI, chúng tôi đề xuất phương pháp sau đây.

Thuật toán 2.1 (Phương pháp co gần kề hiệu chỉnh (RPCM - regularization proximal contraction method))
Khởi tạo: *Cho $x^0 \in \mathcal{H}$, $r \in (0, 2)$, $\beta > 0$.*
Các bước lặp:
Bước 1. Tính $y^k = J^{\mathcal{A}}_{\lambda_k}(x^k - \lambda_k \mathcal{B}^{\mathcal{F}}_{\alpha_k}(x^k))$, với $\lambda_k > 0$.

Bước 2. Tính $x^{k+1} = x^k - r\beta_k d(x^k, y^k)$, trong đó

$$\begin{cases} d(x^k, y^k) = x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)), \\ \phi(x^k, y^k) = \left\langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \right\rangle, \\ \beta_k = \min\left\{\beta, \frac{\phi(x^k,y^k)}{\|d(x^k,y^k)\|^2}\right\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Bước 3. Tăng k lên 1 đơn vị và quay trở lại Bước 1.

Ta nói rằng $\{\lambda_k\}$ trong Thuật toán 2.1 thoả mãn *điều kiện cỡ bước dự đoán* (PSC - predicted stepsize condition), nếu tồn tại hai số thực $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, và một số nguyên k_0 sao cho

$$\phi(x^k, y^k) \geq c_1\|x^k - y^k\|^2 \text{ và } \beta_k \geq c_2, \quad \forall k \geq k_0; \tag{2.2}$$

và dãy cỡ bước $\{\lambda_k\}$ thoả mãn điều kiện sau:

$$0 < \underline{\lambda} \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda} < +\infty, \quad \forall k \geq k_0. \tag{2.3}$$

Bây giờ chúng ta sẽ trình bày ba phương án lựa chọn λ_k thoả mãn các điều kiện (2.2) và (2.3).

Bổ đề 2.1.2. *Cho L là hệ số Lipschitz của $\mathcal{B}$. Nếu $\{\lambda_k\} \subset [a, b] \subset \left(0, \frac{1}{L}\right)$, thì các điều kiện (2.2) và (2.3) được thỏa mãn.*

Bổ đề 2.1.3. *Cho $\sigma > 0$, $l \in (0, 1)$, $\mu \in (0, 1)$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, cho λ_k là giá trị λ lớn nhất trong tập $\left\{\sigma, \sigma l, \sigma l^2, \ldots\right\}$ sao cho*

$$\lambda_k\|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\| \leq \mu\|x^k - y^k\|. \tag{2.4}$$

Khi đó, các điều kiện (2.2) và (2.3) được thỏa mãn.

Bổ đề 2.1.4. *Cho $\mu \in (0, 1)$, $\lambda_0 > 0$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta cập nhật*

$$\lambda_{k+1} = \min\left\{\lambda_k, \frac{\mu\|x^k - y^k\|}{\|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|}\right\}.$$

Khi đó các điều kiện (2.2) và (2.3) được thỏa mãn.

Bây giờ, chúng ta phát biểu định lý chính của mục này

Định lý 2.1.1. *Giả sử các giả thiết* (A1)-(A3), (C1)-(C3) *và các điều kiện (2.2)-(2.3) được thoả mãn. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh đến nghiệm $x^\dagger \in \Omega$ của bài toán* VI *và đồng thời cũng là nghiệm duy nhất của bài toán* BVIP.

2.1.3. Áp dụng cho bài toán tối ưu

Trong mục này, ta xét bài toán tối ưu của tổng hai hàm số sau đây

$$\min_{x\in\mathcal{H}}(\Gamma(x)+\Lambda(x)), \tag{OP}$$

trong đó $\Gamma : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi và khả dưới vi phân, còn $\Lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi khả vi có gradient liên tục Lipschitz. Bài toán (OP) có thể được đưa về bài toán VI với $\mathcal{A} = \partial\Gamma$ và $\mathcal{B} = \nabla\Lambda$. Với mỗi $\alpha > 0$, ta đặt $\nabla\Lambda_\alpha^{\mathcal{F}} = \nabla\Lambda + \alpha\mathcal{F}$.

2.1.4. Áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân

Bất đẳng thức biến phân là một trường hợp riêng của bài toán VI. Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng trong $\mathcal{H}$. Nếu $\mathcal{A} = N_C$, là nón pháp tuyến của C, bài toán bao hàm thức biến phân

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } 0 \in N_C(x^*) + \mathcal{B}(x^*)$$

sẽ trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle \mathcal{B}(x^*), u - x^* \rangle \geq 0,\ \forall u \in C. \tag{VIP(f,C)}$$

2.2. Phương pháp quán tính đa bước hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân

Trong mục này, chúng ta đề xuất phương pháp quán tính đa bước hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân của tổng hai toán tử trong không gian Hilbert. Phương pháp này có thể được xem như là sự kết hợp giữa phương pháp co gần kề, phương pháp hiệu chỉnh và kĩ thuật quán tính đa bước. Các giả thiết về $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$, $\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ và $\Omega = (\mathcal{A}+\mathcal{B})^{-1}(0)$ được giữ nguyên như trong mục 2.1. Phương pháp trong mục này được phát triển từ phương pháp RPCM trong Thuật toán 2.1 của Mục 2.1 kết hợp với kĩ thuật quán tính đa bước. Cụ thể, cho trước số nguyên dương N và điểm xuất phát $x^0 \in \mathcal{H}$, giả sử ta đã tính được các xấp xỉ $x^1, \cdots, x^k$ của phép lặp, ta sử dụng một tổ hợp trung gian

$$z^k = x^k + \sum_{i=1}^{\min\{k,N\}} \theta_{i,k}(x^{k-i+1} - x^{k-i}), \tag{2.5}$$

2.2.1. Thuật toán chỉnh lặp gần kề quán tính đa bước

Trong phần này, chúng ta trình bày một phương pháp hiệu chỉnh-lặp với hiệu ứng quán tính đa bước. Để thiết kế thuật toán, ta cần một toán tử $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ γ - đơn điệu mạnh và $\tilde{L}$ - liên tục Lipschitz.

Thuật toán 2.2 (Phương pháp gần kề quán tính đa bước hiệu chỉnh (RMSIPM-regularization multi-step inertial proximal method))
Khởi tạo: *Lấy* $x^0,\ x^1 \in \mathcal{H}$ *bất kì,* $r \in (0,2)$, $\theta_0 > 0$, $\sigma > 0$ *và một số nguyên dương* $N > 0$. *Với mỗi* $i = 1, 2, \ldots, N$, *chọn một dãy các số dương* $\mu_{i,k}$ *sao cho*

$$\text{(C4)} : \lim_{k\to\infty} \frac{\mu_{i,k}}{\alpha_k} = 0 \quad \textit{và} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{i,k} < +\infty.$$

Các bước lặp: *Tính* x^{k+1} *với* $k \geq 1$ *như sau*
Bước 1. *Tính*

$$z^k = x^k + \sum_{i=1}^{\min\{k,N\}} \theta_{i,k}(x^{k-i+1} - x^{k-i}),$$

trong đó

$$\theta_{i,k} = \begin{cases} \dfrac{\mu_{i,k}}{\|x^{k-i+1} - x^{k-i}\|} & \textit{nếu} \ \ x^{k-i+1} \neq x^{k-i} \\ \theta_0 & \textit{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Bước 2. *Tính* $y^k = J^{\mathcal{A}}_{\lambda_k}(z^k - \lambda_k(\mathcal{B}(z^k) + \alpha_k \mathcal{F}(z^k)))$, *trong đó* $\lambda_k > 0$.
Bước 3. *Tính* $x^{k+1} = z^k + r\sigma_k q(y^k, z^k)$, *trong đó*

$$\begin{cases} q(y^k, z^k) = y^k - z^k - \lambda_k(\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)) \\ D(y^k, z^k) = \langle y^k - z^k, q(y^k, z^k)\rangle \\ \sigma_k = \min\left\{\sigma, \dfrac{D(y^k, z^k)}{\|y^k - z^k\|^2}\right\}. \end{cases}$$

Bổ đề 2.2.1. *Các điều kiện PSC được thoả mãn, nếu một trong các trường hợp sau đây xảy ra:*

(i) $\{\lambda_k\} \subset [a, b] \subset \left(0, \frac{1}{L}\right)$, *trong đó* L *là hệ số Lipschitz của* $\mathcal{B}$.

(ii) *Cho* $\sigma > 0$, $l \in (0,1)$, $\mu \in (0,1)$. *Với mỗi* $k \geq 0$, λ_k *là giá trị* $\lambda \in \left\{\sigma, \sigma l, \sigma l^2, \cdots\right\}$ *lớn nhất sao cho*

$$\lambda_k \|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\| \leq \mu \|y^k - z^k\|.$$

(iii) *Cho* $\lambda_0 > 0$, $\mu \in (0,1)$, $\{\kappa_k\} \subset [0,+\infty)$ *là một dãy khả tổng. Với mỗi* $k \geq 0$, *ta lấy*

$$\lambda_{k+1} = \min\left\{\lambda_k + \kappa_k, \frac{\mu\|y^k - z^k\|}{\|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\|}\right\}. \tag{2.6}$$

Định lý 2.2.1. *Giả sử rằng các điều kiện* (C1)-(C4) *được thoả mãn và dãy* $\{\lambda_k\}$ *thoả mãn các điều kiện PSC. Khi đó dãy* $\{x^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 2.2 hội tụ mạnh đến một nghiệm* $x^\dagger \in \Omega$ *của bài toán VI, đồng thời cũng là nghiệm duy nhất của bài toán BVIP.*

2.2.2. Một vài ứng dụng

Trong mục này, ta áp dụng Thuật toán 2.2 cho Bài toán tối ưu (OP) và Bài toán tối ưu hai cấp (BOP - bilevel optimization problem).

2.3. Phương pháp hiệu chỉnh kiểu gần kề giải bài toán bao hàm thức biến phân tách

Trong mục này ta xét bài toán bao hàm thức biến phân tách trong hai không gian Hilbert thực $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x^*) \text{ và } 0 \in \mathcal{B}_2\mathcal{T}(x^*), \tag{SVI}$$

trong đó $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}_1 \to 2^{\mathcal{H}_1}$ và $\mathcal{B}_2 : \mathcal{H}_2 \to 2^{\mathcal{H}_2}$ là hai ánh xạ đa trị đơn điệu cực đại và $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Tập nghiệm của bài toán SVI được kí hiệu bởi Ω_{SVI} và sẽ luôn được giả thiết rằng khác rỗng. Để giải bài toán SVI và chọn một phần tử cụ thể trong tập nghiệm Ω_{SVI}, ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân sau đây:

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \Omega_{\text{SVI}} \text{ sao cho } \left\langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^* - x^\dagger \right\rangle \geq 0 \ \ \forall x^* \in \Omega_{\text{SVI}}, \tag{BVIP2}$$

trong đó $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ là γ-đơn điệu mạnh và $\tilde{L}$- liên tục Lipschitz.

2.3.1. Mối liên hệ giữa hai bài toán bao hàm thức biến phân (VI) và bao hàm thức biến phân tách (SVI)

Cố định một số $\beta > 0$, xét bài toán bao hàm thức biến phân:

$$\text{Tìm } x \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x) + \mathcal{T}^*\left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(x), \tag{VI2}$$

với I là ánh xạ đồng nhất trong $\mathcal{H}_2$. Do $\mathcal{B}_2$ là đơn điệu cực đại nên theo Bổ đề 1.1.2, toán tử $J_\beta^{\mathcal{B}_2}$ đơn điệu và không giãn vững, từ đó suy ra toán tử $\mathcal{T}^*\left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}$ là đơn điệu và liên tục Lipschitz. Ta có kết quả sau đây:

Bổ đề 2.3.1. *Hai bài toán* SVI *và* VI2 *tương đương với nhau theo nghĩa nghiệm của bài toán này cũng là nghiệm của bài toán kia và ngược lại.*

Tiếp theo, ta lấy một số $\beta > 0$ và liên kết bài toán SVI với bài toán bao hàm thức biến phân RVI2 sau đây:

$$\text{Tìm } x \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x) + \mathcal{T}^*\left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(x) + \alpha\mathcal{F}(x), \quad \text{(RVI2)}$$

trong đó $\alpha > 0$ là một tham số hiệu chỉnh, I là ánh xạ đồng nhất trong $\mathcal{H}_2$, và $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ là γ-đơn điệu mạnh và $\tilde{L}$- liên tục Lipschitz. Bài toán RVI2 có duy nhất nghiệm với mỗi $\alpha > 0$. Ta gọi nghiệm duy nhất này là x_α. Lưới nghiệm hiệu chỉnh $\{x_\alpha\}_{\alpha>0}$ cũng có các tính chất tương tự như trong Bổ đề 2.1.1.

2.3.2. Phát biểu thuật toán và sự hội tụ

Trong mục này chúng ta trình bày thuật toán kiểu gần kề giải bài toán SVI trong không gian Hilbert và phát biểu định lý về sự hội tụ mạnh của phương pháp. Thuật toán được phát biểu như sau.

Thuật toán 2.3 [Thuật toán kiểu gần kề hiệu chỉnh (RPA- regularization proximal-like algorithm)]
Khởi tạo: *Lấy* $x^0 \in \mathcal{H}_1$, $\beta > 0$, $\lambda_0 > 0$, $r \in (0, 2)$, *và một dãy* $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$ *thoả mãn các điều kiện (C1)-(C3) cho trong Thuật toán 2.1.*
Các bước lặp:

1. Tính $y^k = J_{\gamma_k}^{\mathcal{B}_1}\left(x^k - \gamma_k\mathcal{T}^*\left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(x^k) - \gamma_k\alpha_k\mathcal{F}(x^k)\right)$, *với* $\gamma_k > 0$ *thỏa mãn*

$$\gamma_k\|\mathcal{T}^*\left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^*\left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(y^k)\| \le \delta\|x^k - y^k\|,\ 0 < \delta < 1. \tag{2.7}$$

2. Tính $x^{k+1} = x^k - \lambda_k r D(x^k, \gamma_k)$, *trong đó*

$$D(x^k, \gamma_k) = x^k - y^k - \gamma_k\left[\mathcal{T}^*\left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^*\left(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2}\right)\mathcal{T}(y^k)\right], \tag{2.8}$$

$$\lambda_k = \min\left\{\lambda_{k-1} + p_{k-1}, \frac{\langle x^k - y^k, D(x^k, \gamma_k)\rangle}{\|D(x^k, \gamma_k)\|^2}\right\}, \tag{2.9}$$

với $\{p_k\} \subset [0,+\infty)$ *sao cho* $\sum_{k=0}^{\infty} p_k < +\infty$.

3. Tăng k lên 1 *đơn vị và quay trở lại Bước 1.*

Nhận xét 2.3.1. Nếu ta chọn γ_k sao cho $0 < \gamma_k \leq \frac{\delta}{\|\mathcal{A}\|^2}$, thì điều kiện (2.7) được thoả mãn. Trong trường hợp $\|\mathcal{A}\|^2$ không thể tính hoặc ước lượng được, ta lấy $s > 0$ và $0 < l < 1$. Ở bước lặp thứ k, sau khi tính y^k, ta chọn γ là giá trị lớn nhất của tập $\{s, sl, sl^2, ...\}$ sao cho

$$\gamma\|\mathcal{A}^*(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2})\mathcal{A}x^k - \mathcal{A}^*(I - J_\beta^{\mathcal{B}_2})\mathcal{A}y^k\| \leq \delta\|x^k - y^k\|,\ 0 < \delta < 1. \quad (2.10)$$

Khi đó ta lấy $\gamma_k = \gamma$.

Định lý 2.3.1. *Cho* $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ *là hai không gian Hilbert thực, cho* $\mathcal{A} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *là một toán tử tuyến tính bị chặn với toán tử liên hợp* $\mathcal{A}^*$, *và cho* $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}_1 \to 2^{\mathcal{H}_1}$ *và* $\mathcal{B}_2 : \mathcal{H}_2 \to 2^{\mathcal{H}_2}$ *là hai toán tử đa trị đơn điệu cực đại. Cho* $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ *là một toán tử* γ*-đơn điệu mạnh và* $\tilde{L}$*-liên tục Lipschitz. Giả sử rằng* $\{\gamma_k\}$ *là một dãy trong* $\left[\gamma_{min}, \frac{\delta}{\|\mathcal{A}\|^2}\right] \subset (0,+\infty)$ *hoặc được chọn theo (2.10). Khi đó dãy* $\{x^k\}$ *sinh bởi Thuật toán 2.3 hội tụ mạnh đến một nghiệm* $x^\dagger$ *của bài toán SVI, là nghiệm duy nhất của bài toán BVIP2.*

2.3.3. Một số ứng dụng

Trong mục này chúng ta trình bày một số ứng dụng của các kết quả đã đạt được ở Mục 2.3.2 cho các bài toán chấp nhận tách (SFP - split feasible problem) và bài toán tối ưu tách (SOP - split optimization problem).

2.4. Thử nghiệm số

Trong phần này ta thực hiện một thử nghiệm số để so sánh Thuật toán 2.1 và Thuật toán 2.3 với một số thuật toán hội tụ mạnh đã biết. Kết quả số cho thấy tính ưu việt của các thuật toán được đề xuất với các thuật toán còn lại.

Kết luận chương

Trong chương này, ta đã trình bày một số phương pháp mới cho sự hội tụ mạnh trong không gian Hilbert để giải bài toán bao hàm thức biến phân (VI), cũng như bài toán bao hàm thức biến phân tách (SVI). Các phương pháp này dựa trên kĩ thuật hiệu chỉnh, kết hợp với các phương pháp phù hợp như chiếu, co gần kề, quán tính và phương thức chọn tham số điều khiển phù hợp. Hiệu quả tính toán của các phương pháp cũng được minh họa bởi một vài ví dụ số trong các không gian Hilbert, cả hữu hạn chiều và vô hạn chiều.

Chương 3

Phương pháp hệ động lực hiệu chỉnh giải bài toán cân bằng

3.1. Bài toán cân bằng hiệu chỉnh và tính chất của dãy nghiệm hiệu chỉnh

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert và C là một tập con lồi đóng khác rỗng của $\mathcal{H}$. Cho $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm cân bằng trên C. Ta xét bài toán cân bằng EP(f, C) sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \text{ với mọi } y \in C.$$

Sau đây, tập nghiệm của bài toán cân bằng $Sol(f, C)$ sẽ luôn được giả thiết là khác rỗng.

Với mỗi $\alpha > 0$, bài toán EP được liên kết với bài toán cân bằng hiệu chỉnh (REP - regularized equilibrium problem) sau đây:

$$\text{Tìm } x \in C \text{ sao cho } f(x, y) + \alpha g(x, y) \geq 0, \ \forall y \in C. \tag{REP}$$

Chú ý rằng, nếu f đơn điệu trên $C \times C$, g đơn điệu mạnh trên $C \times C$, $f(x, \cdot)$ và $g(x, \cdot)$ là hàm lồi và nửa liên tục dưới yếu với mọi $x \in C$, $f(\cdot, y)$ và $g(\cdot, y)$ là các hàm nửa liên tục trên yếu với mọi $y \in C$, thì bài toán hiệu chỉnh (REP) có duy nhất nghiệm với mỗi $\alpha > 0$. Ta gọi nghiệm này là x_α.

Tiếp theo, ta trình bày một vài tính chất của lưới nghiệm $\{x_\alpha\}$ khi α thay đổi. Đầu tiên, cho $g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một song hàm đơn điệu mạnh và tồn tại một hàm không giảm và liên tục $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho

$$|g(x, y)| \leq \varphi(\|x\|)\|x - y\|, \ \forall x, y \in C. \tag{3.1}$$

Bổ đề 3.1.1. *Giả sử f và g là các hàm cân bằng từ $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ đến $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ sao cho f là đơn điệu trên $C \times C$ và g là γ-đơn điệu mạnh trên $C \times C$. Ta* *cũng giả sử rằng với mọi $x, y \in C$, ta có $f(x,\cdot)$, $g(x,\cdot)$ là các hàm lồi và nửa liên tục dưới yếu; $f(\cdot, y)$ và $g(\cdot, y)$ là các hàm nửa liên tục trên yếu. Ngoài ra, g thoả mãn điều kiện (3.1). Khi đó*

(i) *Lưới $\{x_\alpha\}$ bị chặn.*

(ii) *Tồn tại một số dương $M > 0$ sao cho, với mọi $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$,*

$$\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| \leq \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{\alpha_1} M.$$

(iii) $\omega(x_\alpha) \subset Sol(f, C)$, *trong đó $\omega(x_\alpha)$ là tập các điểm tụ yếu của dãy $\{x_\alpha\}$.*

(iv) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} x_\alpha = x^\dagger$, *trong đó $x^\dagger \in Sol(g, Sol(f, C))$.*

Cuối cùng, ta xét trường hợp mà điều kiện (3.1) được thay bằng một giả thiết khác. Bây giờ, ta giả sử rằng $g(x,\cdot)$ là một hàm khả dưới vi phân trên C với mọi $x \in C$. Ta giả sử thêm rằng các hàm số $\partial g(x,\cdot)(x)$ và $g(\cdot, y)$ bị chặn trên các tập con bị chặn của C với mọi $x, y \in C$. Khi đó chúng ta có kết quả sau đây (Anh P.K., Hai T.N, Dung V.T. (2022), *Qual. Theory Dyn. Syst.* 21(160)).

Bổ đề 3.1.2. *Giả sử song hàm cân bằng f là đơn điệu, song hàm cân bằng g là đơn điệu mạnh trên $C \times C$. Ta cũng giả sử rằng với mọi $x, y \in C$, các hàm số $f(x,\cdot)$, $g(x,\cdot)$ là lồi và nửa liên tục dưới yếu; các hàm số $f(\cdot, y)$ và $g(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên yếu. Giả thiết thêm rằng với mọi $x, y \in C$, hàm $g(x,\cdot)$ khả dưới vi phân trên C; ánh xạ $\partial g(x,\cdot)(x)$ cũng như hàm số $g(\cdot, y)$ đều bị chặn trên tập bị chặn của C. Khi đó các khẳng định của Bổ đề 3.1.1 vẫn đúng. Hơn nữa, nếu $\alpha(t) : [0, \infty) \to (0, \infty)$ là một hàm khả vi thoả mãn $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$, ta có*

$$\left\| \frac{d}{dt} x_{\alpha(t)} \right\| \leq M \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\alpha(t)} \quad \forall t \geq 0. \tag{3.2}$$

3.2. Phương pháp hệ động lực hiệu chỉnh kiểu đạo hàm tăng cường

Ta xét hệ động lực liên hết với bài toán EP sau đây:

$$\begin{cases} z(t) = \operatorname{prox}_{\lambda(t)(f(x(t),\cdot)+\alpha(t)g(x(t),\cdot))}(x(t)), \\ y(t) = \operatorname{prox}_{\lambda(t)(f(z(t),\cdot)+\alpha(t)g(x(t),\cdot))}(x(t)), \\ \dot{x}(t) + x(t) = y(t), \end{cases} \tag{3.3}$$

trong đó $\alpha(t) > 0$ và $\lambda(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$.

3.2.1. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh toàn cục

Một *nghiệm mạnh toàn cục* của hệ (3.3) là một hàm $x : [0, +\infty) \to \mathcal{H}$ thoả mãn

(i) $x \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}([0, +\infty), \mathcal{H})$, nghĩa là, hàm $x(t)$ liên tục tuyệt đối trên mỗi đoạn $[0, T]$, với mọi $0 < T < +\infty$;

(ii) Hệ (3.3) đúng với hầu khắp mọi $t \in [0, +\infty)$;

(iii) $x(0) = x_0$.

Giả sử α^* và λ^* là hai số thực dương, sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh toàn cục của hệ động lực (3.3) sẽ đạt được với giả thiết sau đây.

Giả thiết 3.1

(A1) f là một song hàm L-(SLC) trên $\mathcal{H}$;

(A2) g là một song hàm một song hàm K-(SLC) trên $\mathcal{H}$;

(A3) Với mọi $x \in \mathcal{H}$, các hàm số $f(x, \cdot)$, $g(x, \cdot)$ là lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, và khả dưới vi phân trên C. Hơn nữa, các hàm này bị chặn trên các tập con bị chặn của $\mathcal{H}$;

(A4) $\alpha(t) : [0, +\infty) \to (0, \alpha^*) \subset (0, +\infty)$ và $\lambda(t) : [0, +\infty) \to (0, \lambda^*) \subset (0, +\infty)$ là các hàm liên tục.

Bây giờ ta phát biểu sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh toàn cục.

Định lý 3.2.1. *Giả sử rằng Giả thiết 3.1 được thoả mãn và bài toán $Sol(g, Sol(f, C))$ có duy nhất nghiệm. Khi đó với mỗi $x_0 \in C$, hệ động lực (3.3) có duy nhất nghiệm mạnh toàn cục.*

3.2.2. Sự hội tụ mạnh của quỹ đạo

Ta xét giả thiết sau:

Giả thiết 3.2

(B1) Song hàm cân bằng f đơn điệu và L-(LC) trên C;

(B2) Song hàm cân bằng g là γ- đơn điệu mạnh và K-(LC) trên C;

(B3) Với mọi $x, y \in C$, hàm $g(x, \cdot)$ là lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, và khả dưới vi phân trên C, ánh xạ $\partial g(x, \cdot)(x)$ và hàm $g(\cdot, y)$ bị chặn trên các tập con bị chặn của C, hàm số $f(x, \cdot)$ là lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, và khả dưới vi phân, các hàm $f(\cdot, y)$, $g(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên yếu trên C;

(B4) Hàm $\alpha(t)$ đi từ $[0, +\infty)$ vào $(0, +\infty)$, là khả vi liên tục và thoả mãn các điều kiện

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0; \ \int_0^{+\infty} \alpha(t)dt = +\infty; \ \lim_{t \to +\infty} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha^2(t)} = 0;$$

ngoài ra, $\lambda(t)$ là hàm liên tục đi từ $[0, +\infty)$ vào đoạn hữu hạn $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subset \left(0, \frac{1}{L}\right)$.

Định lý 3.2.2. *Giả sử rằng giả thiết 3.2 được thoả mãn và hệ (3.3) có một nghiệm mạnh toàn cục duy nhất $x(t)$. Khi đó $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \hat{x}$, trong đó $\hat{x}$ là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng hai cấp $EP(g, Sol(f, C))$.*

3.3. Phương pháp chỉnh lặp kiểu đạo hàm tăng cường

Để giải bài toán EP, ta xét các điều kiện sau đặt lên các song hàm f và g đi từ $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ vào $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

Giả thiết 3.3

(H1) f đơn điệu và $f(x, x) = 0$ với mỗi $x \in C$;

(H2) g là γ-đơn điệu mạnh và $g(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$;

(H3) g bị chặn đều;

(H4) $f(x, \cdot)$, $g(x, \cdot)$ là các hàm lồi và nửa liên tục dưới yếu, các hàm $f(\cdot, y)$, $g(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên yếu với mọi $x, y \in C$;

(H5) Tập nghiệm $Sol(f, C)$ khác rỗng.

Thuật toán 3.1 (Phương pháp kiểu đạo hàm tăng cường hiệu chỉnh nới lỏng (RREM - relaxed regularized extragradient-type method))
Khởi tạo: *Lấy $x^0 \in C$ tuỳ ý. Cho $\{\tau_k\}$, $\{\alpha_k\}$ và $\{\lambda_k\}$ là các dãy số dương sao cho $\{\tau_k\} \subset [a, b] \subset (0, 1)$.*
Các bước lặp: *Với mỗi $k \geq 0$, tính x^{k+1} bởi*

$$\begin{cases} z^k = \operatorname{prox}_{\lambda_k(f(x^k, \cdot) + \alpha_k g(x^k, \cdot))}(x^k), \\ y^k = \operatorname{prox}_{\lambda_k(f(z^k, \cdot) + \alpha_k g(x^k, \cdot))}(x^k), \\ x^{k+1} = (1 - \tau_k)x^k + \tau_k y^k. \end{cases} \tag{3.4}$$

Để đảm bảo sự hội tụ của Thuật toán 3.1, sau đây, ta giả thiết rằng f là (MLC) với các hệ số c_1, c_2. Ta lấy dãy $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$ thoả mãn các điều kiện (C1)-(C3) như ở Chương 2. Trong trường hợp các hệ số (MLC) là c_1 và c_2 của f đã biết, ta có thể chọn một dãy $\{\lambda_k\}$ sao cho

$$\{\lambda_k\} \subset [\,\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\,] \subset \left(0, \frac{1}{2.\max\{c_1, c_2\}}\right) \tag{ST1}$$

với mọi $k > k_0$, trong đó k_0 là một số nguyên dương nào đó. Ngược lại, khi gặp khó khăn trong việc tính toán cụ thể hoặc tìm các xấp xỉ cho các hệ số c_1 và c_2, ta cần một phương thức khác để xây chọn dãy cỡ bước. Xuất phát từ một số $\lambda_0 > 0$ bất kì, dãy $\{\lambda_k\}$ có thể được cập nhật tại mỗi bước lặp bằng công thức sau đây

$$\lambda_{k+1} = \min\left\{\lambda_k + r_k, \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2[f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k)]_+}\right\} \tag{ST2}$$

trong đó $\mu \in (0, 1)$, $\{r_k\} \subset \mathbb{R}^+$ thoả mãn $\sum_{i=0}^{\infty} r_k < +\infty$ và $[a]_+ = \max\{a, 0\}$.

Bổ đề 3.3.1. *Giả sử rằng giả thiết 3.3 được thoả mãn. Hơn nữa, f là (MLC) với các hệ số dương c_1, c_2 và g là K-(LC). Khi đó dãy $\{\lambda_k\}$ sinh bởi phương thức* (ST2) *có các tính chất sau đây:*
(i) *Tồn tại hai số dương $\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$ sao cho với mọi k,*

$$\underline{\lambda} \le \lambda_k \le \overline{\lambda}. \tag{3.5}$$

(ii) *Dãy $\{\lambda_k\}$ hội tụ.*
(iii) *Với mọi k, ta có*

$$f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k) \le \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2\lambda_{k+1}}. \tag{3.6}$$

Bây giờ ta phát biểu định lý chính của mục này.

Định lý 3.3.1. *Giả sử các điều kiện của Bổ đề 3.3.1 được thoả mãn. Hơn nữa, các dãy $\{\tau_k\} \subset [a, b] \subset (0, 1)$, $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$ thoả mãn các điều kiện* (C1)-(C3). *Dãy $\{\lambda_k\}$ được chọn theo một trong hai phương thức* (ST1) *hoặc* (ST2). *Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1 hội tụ mạnh đến một nghiệm $x^\dagger$ của bài toán* EP *thoả mãn $x^\dagger \in Sol(g, Sol(f, C))$.*

3.4. Thử nghiệm số

Trong phần này chúng ta thực hiện một thử nghiệm số để so sánh Thuật toán 3.1, có dãy cỡ bước $\{\lambda_k\}$ được tính theo cả hai phương thức (ST1) và

(ST2), với một số thuật toán hội tụ mạnh kiểu đạo hàm tăng cường đã biết. Trong ba ví dụ đầu, kết quả số cho thấy tính ưu việt của thuật toán được đề xuất với các thuật toán còn lại. Tuy nhiên, ở ví dụ cuối, Thuật toán 3.1 với dãy cỡ bước tính theo (ST2) không cho kết quả tốt hơn so với các phương pháp được so sánh.

Kết luận chương

Trong chương này, dựa trên một phương pháp hệ động lực kiểu đạo hàm tăng cường kết hợp với kĩ thuật hiệu chỉnh, ta đã trình bày một hệ động lực liên tục giải bài toán EP. Với các điều kiện khá chặt đặt lên song hàm f của bài toán ban đầu và song hàm g của thành phần hiệu chỉnh, ta chứng minh được hệ động lực có duy nhất một nghiệm mạnh toàn cục. Trong trường hợp các điều kiện đặt lên f và g nhẹ hơn và với giả thiết hệ động lực đã có nghiệm mạnh toàn cục duy nhất, chúng ta chỉ ra rằng quỹ đạo của hệ động lực (hay chính là nghiệm mạnh toàn cục) hội tụ theo chuẩn đến một nghiệm của bài toán EP.

Ở phần tiếp theo của chương, ta trình bày một phương pháp lặp hiệu chỉnh nới lỏng (RREM) là phiên bản rời rạc hoá của phương pháp hệ động lực kể trên. Dãy cỡ bước $\{\lambda_k\}$ được chọn theo một trong hai phương thức (ST1), (ST2) và cũng thoả mãn điều kiện bị chặn. Phương pháp này được chứng minh là hội tụ theo chuẩn đến một nghiệm của bài toán EP với dãy tham số nới lỏng $h_k \in (0, 1)$. Cuối cùng, ta trình bày một vài thử nghiệm số để minh hoạ sự hội tụ của phương pháp được đề xuất và so sánh với các phương pháp đã biết.

Kết luận chung

Luận án đề xuất một số phương pháp hiệu chỉnh giải các bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng (VI), bao hàm thức biến phân tách (SVI) và một số trường hợp riêng của bài toán VI bao gồm bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) và bài toán cân bằng (EP).

Các kết quả chính thu được của luận án bao gồm:

1. Phương pháp co gần kề hiệu chỉnh (RPCM) giải bài toán VI và sự hội tụ;

2. Phương pháp gần kề quán tính đa bước hiệu chỉnh (RMSIPM) giải bài toán VI và sự hội tụ;

3. Phương pháp kiểu gần kề hiệu chỉnh (RPA) giải bài toán SVI và sự hội tụ;

4. Phương pháp hệ động lực kiểu đạo hàm tăng cường cấp một hiệu chỉnh giải bài toán EP và sự hội tụ mạnh của quỹ đạo. Rời rạc phương pháp này, ta được phương pháp chỉnh lặp kiểu đạo hàm tăng cường (REM) giải bài toán EP hội tụ mạnh.

Một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:

1. Mở rộng các phương pháp giải bài toán bao hàm thức đơn điệu có cấu trúc tổng cho trường hợp tổng quát hơn là bao hàm thức giả đơn điệu có cấu trúc tổng.

2. Mở rộng các phương pháp lặp được nghiên cứu trong luận án cho trường hợp các biến là ngẫu nhiên.

3. Nghiên cứu phương pháp đánh giá tốc độ hội tụ của các phương pháp lặp được trình bày trong luận án.

4. Đề xuất phương pháp tự thích nghi để hàm cỡ bước $\lambda(t)$ sử dụng trong phương pháp hệ động lực là bị chặn trong trường hợp không biết hằng số kiểu Lipschitz của song hàm f.

Danh mục các công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

1. Hieu D.V., Anh P.K., Ha N.H. (2021), "Regularization proximal method for monotone variational inclusions", *Networks and Spatial Economics* 21, pp. 905-932 (SCIE).

2. Hieu D.V., Reich S., Anh P.K., Ha N.H. (2022), "A new proximal-like algorithm for solving split variational inclusion problems", *Numerical Algorithms* 89, pp. 811-837 (SCIE).

3. Hieu D.V., Cho Y.J., Quy P.K., Ha N.H. (2022), "An effective iterative projection method for variational inequalities in Hilbert spaces", *Soft Computing* 26, pp. 10207-10221 (SCIE).

4. Ha N.H., Hieu D.V., Muu L.D. (2024), "An accelerated regularization method for variational inclusions", *Journal of Applied and Numerical Optimization* 6, pp. 97-113 (SCOPUS).

5. Hieu D.V., Ha N.H. (2024), "The relaxed regularized method of extragradient type for equilibrium problems", *Applied Set-Valued Analysis and Optimization* 6, pp. 385-412 (SCOPUS).