ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỀU TRUNG THỦY

LƯỢC ĐỒ XẤP XỈ EULER-MAUYAMA KHỐNG CHẾ TƯƠNG THÍCH CHO MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN VỚI HỆ SỐ KHÔNG CHÍNH QUY

Chuyên ngành: Lí thuyết xác suất và thống kê toán học

Mã số: 9460112.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội, 2025

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. Ngô Hoàng long
GS. TS. Nguyễn Hữu Dư

Phản biện: GS. TSKH. Đoàn Thái Sơn
Viện Toán học, Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Phản biện: PGS. TS. Dương Anh Tuấn
Đại học Bách Khoa Hà Nội

Phản biện: PGS. TS. Nguyễn Thanh Diệu
Đại học Vinh

Luận án đã được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN vào hồi ...

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam.

- Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội.

MỞ ĐẦU

1. Lí do lựa chọn đề tài

Giải tích ngẫu nhiên và phương trình vi phân ngẫu nhiên được giới thiệu bởi Kiyosi Itô [33] và được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực ứng dụng như toán tài chính, vật lý, sinh học, điều khiển tối ưu, lý thuyết lọc,... Các phương trình ngày càng được cải tiến để phù hợp với thực tế. Ví dụ, trong lý thuyết định giá cổ phiếu trong toán tài chính của Black - Scholes [4] và Merton [57], giá của một cổ phiếu ban đầu được mô hình hóa bằng một phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính. Nhưng sau đó, người ta thấy rằng phương trình này không phản ánh chặt chẽ thực tế và do đó mô hình biến động ngẫu nhiên [19] đã được giới thiệu. Mô hình mới này mô tả giá cổ phiếu bằng các phương trình phức tạp hơn với các hệ số không thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục. Các phương trình có hệ số không thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục cũng xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác.

Khi giải các bài toán thực tế liên quan đến phương trình vi phân ngẫu nhiên, chúng ta thường phải tính toán các đại lượng có dạng $\mathbb{E}[f(X)]$ trong đó X là nghiệm của phương trình mô hình hóa đại lượng ngẫu nhiên mà chúng ta quan tâm và f là một hàm nào đó. Việc tính toán chính xác đại lượng trên chỉ có thể thực hiện được với một số lượng rất nhỏ các phương trình cũng như các hàm f. Do đó, chúng ta thường phải xây dựng một lược đồ phù hợp dạng Monte Carlo để xấp xỉ phép tính. Cụ thể, chúng ta xấp xỉ X bằng một đại lượng $X^{(n)}$ có thể mô phỏng trên máy tính, trong đó n tỷ lệ thuận với số phép tính cần thiết để xác định $X^{(n)}$. Sau đó, chúng ta ước lượng như sau

$$\mathbb{E}[f(X)] \approx \mathbb{E}\left[f\left(X^{(n)}\right)\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(X^{(n,i)}\right)$$

trong đó $X^{(n,i)}$, với $i = 1, \ldots, N$, là N bản sao độc lập của $X^{(n)}$ được tạo trên máy tính. Để thiết kế một thuật toán tối ưu, tức là chọn giá trị của n và N sao cho sai số của phép xấp xỉ không vượt quá một mức nhất định với số phép tính cần thực hiện nhỏ nhất, chúng ta cần đánh giá để có được sai số của hai phép xấp xỉ trên. Sai số của phép xấp xỉ thứ hai, còn được gọi là phép xấp xỉ Monte Carlo, có thể được kiểm soát bằng định lý giới hạn trung tâm hoặc thông qua bất đẳng thức độ đo. Sai số của phép xấp xỉ đầu tiên khó xác định hơn vì nó phụ thuộc vào tính chính quy của các hệ số phương trình vi phân ngẫu nhiên cũng như tính trơn của hàm f.

Gần đây, Giles [20] đã giới thiệu một phương pháp Monte Carlo đa cấp để xấp xỉ $\mathbb{E}[f(X)]$. Phương pháp mới này có số lượng tính toán thấp hơn nhiều so với phương pháp Monte Carlo cổ điển. Một trong những điểm chính để áp dụng phương pháp Monte Carlo đa cấp là chúng ta phải đánh giá tốc độ hội tụ trong không gian L^p của nghiệm xấp xỉ với nghiệm đúng.

Khi xấp xỉ nghiệm của một phương trình vi phân ngẫu nhiên, chúng ta muốn nghiệm xấp xỉ không chỉ hội tụ mà còn bảo toàn các tính chất của nghiệm đúng, chẳng hạn như tính ổn định hoặc các tính chất hình học của miền giá trị. Nhìn chung, lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama cổ điển thường không bảo toàn các tính chất này. Khi các hệ số của phương trình thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục, nhiều lược đồ Euler-Maruyama cải tiến đã được xây dựng, chẳng hạn như lược đồ Euler-Maruyama ẩn, nửa ẩn, lược đồ Euler-Maruyama chiếu, ... Tuy nhiên, các kết quả nghiên cứu tương ứng cho các phương trình có hệ số không chính quy vẫn còn khá hạn chế.

Các phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov cũng đã thu hút được rất nhiều sự chú ý gần đây. Chúng mô tả hành vi giới hạn của các hạt riêng lẻ tương tác với nhau trong trường trung bình, cái gọi là "Kết quả lan truyền hỗn loạn". Chúng là các phương trình vi phân ngẫu nhiên phi tuyến với các hệ số liên quan đến luật của chính quá trình đó. Chúng được sử dụng trong nhiều lĩnh vực như vật lý thống kê, khoa học thần kinh và tài chính và một số những lĩnh vực khác. Kết quả sau này cũng mở đường (còn nhiều kết quả khác) cho giải số của các phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKeanVlasov như vậy thông qua phép xấp xỉ hệ các hạt tương tác liên quan. Mặc dù phép xấp xỉ số trong khoảng thời gian hữu hạn cho phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov đã được một số tác giả nghiên cứu gần đây (xem [32, 67] và các tài liệu tham khảo trong đó), phép xấp xỉ của nó trong khoảng thời gian vô hạn vẫn là một vấn đề rất khó khăn. Chúng tôi nghĩ rằng vấn đề này có thể được giải quyết bằng cách sử dụng một vài thay đổi của lược đồ xấp xỉ tương thích khống chế được giới thiệu trong [36].

Vì những lý do trên, nghiên cứu sinh và các thầy hướng dẫn đã chọn chủ đề nghiên cứu cho luận án là: **"Lược đồ xấp xỉ Euler-Mauyama khống chế tương thích cho một số lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên với hệ số không chính quy"**.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu chính của luận án là thiết lập các định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm; đưa ra các lược đồ xấp xỉ cho các lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên, phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy, trong đó hệ số dịch chuyển tăng trên tuyến tính, liên tục Lipschitz địa phương; Hệ số khuếch tán là liên tục Hölder, liên tục Hölder địa phương, xác định tính ổn định theo mômen của nghiệm và nghiệm xấp xỉ cho lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên có hệ số dịch chuyển Lipschitz một phía với hệ số âm.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên có dạng

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,\ X_0 = x_0;$$

và

$$dX_t = x_0 + b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t + c\,(X_{t-})\,dZ_t,\ X_0 = x_0.$$

trong đó hệ số dịch chuyển $b(x)$ và hệ số khuếch tán $\sigma(x)$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

- $b(x)$ Lipschitz địa phương và liên tục Lipschitz một phía; $\sigma(x)$ liên tục $(1/2+\alpha)$-Hölder địa phương.
- $b(x)$ Lipschitz địa phương and liên tục Lipschitz một phía; $\sigma(x)$ liên tục $(1/2+\alpha)$-Hölder địa phương and $c(x)$ is liên tục Lipschitz.
- $b(x)$ và $\sigma(x)$ liên tục Lipschitz không toàn cục và tăng trên tuyến tính và $c(x)$ liên tục Lipschitz.

4. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của luận án bao gồm giải tích ngẫu nhiên, phương trình vi phân ngẫu nhiên và xấp xỉ số. Các kết quả chính của luận án là về cả tính chất định lượng và định tính của các nghiệm đúng và các nghiệm xấp xỉ của lược đồ Euler-Maruyama cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên có hệ số không chính quy và cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Phân tích các nghiên cứu gần đây về phương trình vi phân ngẫu nhiên với hệ số không chính quy và phương pháp xấp xỉ.
- Thực hiện mô phỏng máy tính để phân tích, đánh giá và đề xuất các thuật toán xấp xỉ mới.
- Tham gia các hoạt động trao đổi khoa học như hội nghị và hội thảo để trao đổi, thảo luận và cập nhật các phương pháp và kết quả nghiên cứu mới trong các lĩnh vực chuyên môn.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Kết quả của luận án góp phần làm phong phú thêm hướng nghiên cứu về giải số cho một số lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên. Dự kiến luận án sẽ có một số đóng góp mới:

- Đề xuất một lược đồ xấp xỉ hội tụ mạnh trong cả khoảng thời gian hữu hạn và vô hạn cho một số lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên một chiều với hệ số dịch chuyển liên tục Lipschitz địa phương và hệ số khuếch tán liên tục Hölder địa phương;

- Đề xuất một lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama tương thích khống chế cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy trong đó σ là liên tục Hölder địa phương; σ và b là tăng trên tuyến tính và c là liên tục Lipschitz;

- Đề xuất một lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama tương thích khống chế cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy trong đó σ và b là liên tục Lipschitz không toàn cục và tăng trên tuyến tính, và c là liên tục Lipschitz.

Luận án có thể được sử dụng để tham khảo trong các nghiên cứu liên quan của sinh viên và các nhà khoa học trong lĩnh vực lý thuyết xác suất và thống kê toán học và trong lĩnh vực phân tích số.

7. Cấu trúc luận án

Cấu trúc của luận án gồm ba chương. Chương 1 trình bày tổng quan về các kết quả trước đây và giới thiệu các kết quả đạt được trong luận án. Hai chương còn lại trình bày chi tiết về các kết quả mới của luận án.

- **Chương 1:** Tổng quan
- **Chương 2:** Lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế cho các các phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy với các hệ số không chính quy.
- **Chương 3:** Lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy với các hệ số không chính quy.

Luận án được viết dựa trên 03 bài báo đã công bố.

Chương 1

TỔNG QUAN

Trong chương này, chúng tôi sẽ tóm tắt một số kết quả trước đây và kết quả mới thu được trong mỗi bài toán.

1.1 Phương trình vi phân ngẫu nhiên

Cho $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ là một không gian xác suất đầy đủ với một lọc $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ thỏa mãn các điều kiện thông thường. Cho $W_t = \left(W_t^1, W_t^2 \ldots, W_t^m\right)^\top$, $t \geq 0$ là một chuyển động Brown có m chiều được xác định trên không gian này. Cho $0 \leq t_0 < T < \infty$ và x_0 là một biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_{t_0}-$đo được nhận giá trị trong R^d sao cho $\mathbb{E}\left[\|x_0\|^2\right] < \infty$. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên d-chiều dạng Itô

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad \text{on } t_0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

với giá trị ban đầu $x(t_0) = x_0$. Theo định nghĩa của vi phân ngẫu nhiên, phương trình này tương đương với phương trình tích phân ngẫu nhiên sau:

$$X(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(s, X(s))ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, X(s))dW(s) \quad \text{on } t_0 \leq t \leq T. \tag{1.2}$$

Định lý 1.1.11 *Giả sử tồn tại hai hằng số dương K và $\overline{K}$ sao cho*

(i) *(Điều kiện Lipschitz)) với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d$ và $t \in [t_0, T]$*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\|^2 \vee \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|^2 \leq \overline{K}\|x-y\|^2. \tag{1.3}$$

(ii) *(Điều kiện tăng trên tuyến tính)) cho mọi $x, y \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$*

$$\|b(t,x)\|^2 \vee |\sigma(t,x)|^2 \leq K(1 + \|x\|^2). \tag{1.4}$$

Khi đó, tồn tại một nghiệm duy nhất $X(t)$ của phương trình (1.1) và nghiệm đó thỏa mãn

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^T \|X_s\|^2 ds\right] < \infty. \tag{1.5}$$

Theorem 1.1.14. *Let $p \geq 2$ and $x_0 \in L^p\left(\Omega; \mathbb{R}^d\right)$. Assume that there exists a constant $\alpha > 0$ such that for all $(t,x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^d$,*

$$x^\top b(t,x) + \frac{p-1}{2}\|\sigma(t,x)\|^2 \leq \alpha\left(1 + \|x\|^2\right). \tag{1.6}$$

Then

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] \leq 2^{\frac{p-2}{2}}\left(1 + \mathbb{E}\left[|x_0|^p\right]\right)e^{p\alpha(t-t_0)} \qquad \text{for all } t \in [t_0, T]. \tag{1.7}$$

1.2 Phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu tóm tắt một số kiến thức cơ bản về phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy được sử dụng trong luận án.

Đầu tiên, chúng tôi trình bày hai biểu diễn quan trọng của quá trình Lévy.

Mệnh đề 1.2.23. (**Khai triển Lévy-Itô**) *Cho $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ là một quá trình Lévy trên $\mathbb{R}^d$ và ν là độ đo Lévy của nó.*

- *ν là một độ đo Radon trên $\mathbb{R}_0^d$ và thỏa mãn:*

$$\int_{\mathbb{R}_0^d}(1 \wedge |z|^2)\nu(dz) < \infty.$$

- *Độ đo nhảy của Z, được ký hiệu là N, là một độ đo ngẫu nhiên Poisson trên $[0,\infty] \times \mathbb{R}^d$ với độ đo cường độ nhảy $\nu(dz)dt$.*

- *Tồn tại một vectơ γ và một chuyển động Brown d chiều $(W_t)_{t\geq 0}$ với ma trận hiệp phương sai A sao cho*

$$Z_t = \gamma t + W_t + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(ds,dz) + \int_0^t \int_{|z|<1} z\widetilde{N}(ds,dz). \tag{1.8}$$

Các số hạng trong (1.8) là độc lập.

Chú ý rằng, trong trường hợp $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ là một quá trình Lévy nhảy d chiều mà độ đo Lévy ν thỏa mãn $\int_{\mathbb{R}^d}\left(1 \wedge |z|^2\right)\nu(dz) < +\infty$, thì khai triển Lévy-Itô của Z được xác định bởi

$$Z_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} z(N(ds,dz) - \nu(dz)ds).$$

Mệnh đề 1.2.24. (**Biểu diễn Lévy-Khinchin**) *Cho $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ là một quá trình Lévy trên $\mathbb{R}^d$. Tồn tại một hàm liên tục $\psi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ được gọi là số mũ đặc trưng của Z, sao cho:*

$$\mathbb{E}\left[e^{iuZ_t}\right] = e^{t\psi(u)}, \quad u \in \mathbb{R}^d. \tag{1.9}$$

trong đó

$$\psi(u) = i\gamma u - \frac{1}{2}u \cdot Au + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{iuz} - 1 - iuz\mathbf{1}_{\{|z|\leq 1\}}\right) \nu(dz)$$

Bộ ba (A, ν, γ) được gọi là *bộ ba đặc trưng* hoặc *bộ ba Lévy* của quá trình Z_t.

Tiếp theo, chúng ta phát biểu bất đẳng thức Burkholder-Davis-Gundy cho tích phân ngẫu nhiên Poisson được bù, bất đẳng thức này sẽ hữu ích trong luận án.

Bổ đề 1.2.25. *Cho $\mathcal{B}(\mathbb{R}_0^d)$ là đại số Borel σ của $\mathbb{R}_0^d$ và $\mathcal{P}$ là $\sigma-$đại số trên $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Cho g là hàm $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_0^d)$-đo được thỏa mãn $\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0^d} |g(s,z)|^2 \nu(dz)ds < \infty$ $\mathbb{P}$-h.c.c. với mọi $T \geq 0$. Khi đó, với mọi $p \geq 2$, tồn tại một hằng số dương C_p sao cho*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} g(s,z)\widetilde{N}(ds,dz)\right|^p\right] \\
&\leq C_p \left(\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0^d} |g(s,z)|^2 \nu(dz)ds\right)^{\frac{p}{2}}\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0^d} |g(s,z)|^p \nu(dz)ds\right]\right).
\end{aligned}$$

Hơn nữa, với bất kỳ $1 \leq p < 2$ nào, tồn tại một hằng số dương C_p sao cho

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} g(s,z)\widetilde{N}(ds,dz)\right|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}_0^d} |g(s,z)|^2 \nu(dz)ds\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

Tiếp theo, xét các quá trình $X = (X_t)_{t\geq 0}$ có biểu diễn tích phân ngẫu nhiên dưới dạng

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} c(X_{s^-}, z)\widetilde{N}(ds,dz). \tag{1.10}$$

Định lý 1.2.26. Công thức Itô một chiều. *Cho $X = (X_t)_{t\geq 0}$, là quá trình Itô-Lévy được đưa ra bởi (1.10) và cho $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm trong $C^{1,2}((0,\infty) \times \mathbb{R})$ và định nghĩa*

$$Y_t := f(t, X_t), \quad t \geq 0.$$

Khi đó, quá trình $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, cũng là một quá trình Itô-Lévy và dạng vi phân của nó được xác định bởi

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)b(X_t)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)\sigma^2(X_t)dt \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)\sigma(X_t)dW_t \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_0} \left[f(t, X_t + c(X_{t^-}, z)) - f(t, X_t) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)c(X_{t^-}, z)\right] \nu(dz)dt \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_0} \left[f(t, X_{t^-} + c(X_{t^-}, z)) - f(t, X_{t^-})\right] \widetilde{N}(dt,dz).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Định lý 1.2.27. Công thức Itô nhiều chiều. *Cho $X = (X_t)_{t\geq 0}$, là một quá trình Itô-Lévy d chiều. Cho $f : (0,\infty)\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ là một hàm trong $C^{1,2}\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^d\right)$ và định nghĩa*

$$Y_t := f(t, X_t), \quad t \geq 0.$$

Khi đó quá trình $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, là quá trình Itô-Lévy một chiều và dạng vi phân của nó được xác định bởi

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t)b_i(X_t)dt + \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t)\sigma_{ij}(X_t)dW_t^j \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t, X_t)\left(\sigma\sigma^T\right)_{ij}(X_t)dt + \sum_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}_0}\left[f\left(t, X_t + c^{(j)}(X_{t^-}, z)\right)\right. \\ &\left. - f(t, X_t) - \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}f(t, X_t)c_{ij}(X_{t^-}, z)\right]\nu_j\left(dz_j\right)dt \\ &+ \sum_{j=1}^{d}\int_{\mathbb{R}_0}\left[f\left(t, X_{t^-} + c^{(j)}(X_{t^-}, z)\right) - f\left(t, X_{t^-}\right)\right]\widetilde{N}_j\left(dt, dz_j\right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

trong đó $c^{(j)}$ là cột thứ j của ma trận $d\times d$ $c = [c_{ij}]$.

Cuối cùng, chúng ta xét một quá trình $X = (X_t)_{t\geq 0}$, là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy trong $\mathbb{R}^d$:

$$dX_t = b\left(X_t\right)dt + \sum_{j=1}^{d}\sigma_j\left(X_t\right)dW_t^j + \int_{\mathbb{R}_0}c\left(X_{t-}, z\right)\widetilde{N}(dt, dz),$$

với điều kiện ban đầu $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$. Các hệ số $\sigma_j, b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ và $c : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}^d$ là các hàm đo được thỏa mãn các điều kiện tăng trên tuyến tính và Lipschitz: với mọi $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\max_j\left\{\left|\sigma_j(x) - \sigma_j(y)\right|^2; |b(x) - b(y)|^2; \int_{\mathbb{R}_0}|c(x,z) - c(y,z)|^2\nu(dz)\right\} \leq K|x-y|^2$$

và

$$\max_j\left\{\left|\sigma_j(x)\right|^2; |b(x)|^2; \int_{\mathbb{R}_0}|c(x,z)|^2\nu(dz)\right\} \leq K\left(1 + |x|^2\right).$$

Định lý 1.2.28. *Tồn tại duy nhất một quá trình Markov, càdlàg và tương thích X trên $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ thỏa mãn phương trình tích phân*

$$X_t = x_0 + \int_0^t b\left(X_s\right)ds + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_j\left(X_s\right)dW_s^j + \int_0^t\int_{\mathbb{R}_0}c\left(X_{s-}, z\right)\widetilde{N}(ds, dz).$$

Hơn nữa, với $T > 0$ bất kỳ, ta có

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t|^2\right] < \infty.$$

Chương 2

LƯỢC ĐỒ EULER-MARUYAMA TƯƠNG THÍCH KHỐNG CHẾ CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN CÓ BƯỚC NHẢY VỚI HỆ SỐ KHÔNG CHÍNH QUY

Chương này trình bày một lược đồ xấp xỉ mới cho một lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên với các hệ số không đều. Chúng tôi xem xét cả trường hợp các SDE được điều khiển bởi chuyển động Brown (nhiễu liên tục) và trường hợp tổng quát hơn của các SDE được điều khiển bởi các quá trình Lévy (bao gồm cả các bước nhảy). Vì mô hình được điều khiển bởi Brown là một trường hợp đặc biệt của mô hình Lévy và các phương pháp chứng minh song song về mặt logic, nên chương này, vì mục đích ngắn gọn, sẽ chỉ trình bày phân tích chi tiết cho trường hợp Lévy tổng quát hơn. Các kết quả tương ứng cho mô hình được điều khiển bởi Brown đơn giản hơn có thể được suy ra tương tự. Những kết quả này được viết dựa trên các bài báo [1, 2] trong phần **Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án**.

2.1 Các giả thiết của mô hình

Xét quá trình $X = (X_t)_{t\geq 0}$ là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy sau

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + \int_0^t c\left(X_{s-}\right) dZ_s. \tag{2.1}$$

Phương trình tích phân của (2.1) có thể được viết thành

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0} c\left(X_{s-}\right) z\widetilde{N}(ds, dz).$$

Giả sử rằng các hệ số b, σ, c và độ đo Lévy ν thỏa mãn các điều kiện sau:

B1. Tồn tại một hằng số dương L_0 sao cho

$$|c(x)| \leq L_0(1 + |x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

B2. Với một số $p_0 \in [2; +\infty)$, tồn tại các hằng số $\gamma \in \mathbb{R}$, $\eta \in [0; +\infty)$ sao cho

$$xb(x) + \frac{p_0 - 1}{2}\sigma^2(x) + \frac{c^2(x)}{2L_0}\int_{\mathbb{R}_0} |z| \left((1 + L_0|z|)^{p_0-1} - 1\right) \nu(dz) \leq \gamma x^2 + \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

B3. Hệ số b là Lipschitz địa phương: với mọi $R > 0$, tồn tại một hằng số dương L_R sao cho

$$|b(x) - b(y)| \leq L_R|x - y|, \quad \forall |x| \vee |y| \leq R.$$

B4. Hệ số σ là liên tục $\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$-Hölder địa phương: với bất kỳ $R > 0$, tồn tại các hằng số dương L_R và $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ sao cho

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L_R|x - y|^{1/2+\alpha}, \quad \forall |x| \vee |y| \leq R.$$

B5. Hệ số c là liên tục Lipschitz địa phương: với bất kỳ $R > 0$, tồn tại một hằng số dương L_R sao cho

$$|c(x) - c(y)| \leq L_R|x - y|, \quad \forall |x| \vee |y| \leq R.$$

B6. $\int_{|z|>1} |z|^p \nu(dz) < \infty$ với mọi $p \in [1; 2p_0]$ và $\int_{0<|z|\leq 1} |z|\nu(dz) < \infty$.

B7. Hệ số b là Lipschitz một phía: tồn tại hằng số L_1 sao cho

$$(x - y)(b(x) - b(y)) \leq L_1|x - y|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

B8. Hệ số b là liên tục Lipschitz địa phương: tồn tại hằng số dương l và L_2 sao cho

$$|b(x) - b(y)| \leq L_2 \left(1 + |x|^l + |y|^l\right) |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

B9. Hệ số σ là liên tục $(\alpha + \frac{1}{2})$-Hölder địa phương: tồn tại các hằng số dương m, L_3 và $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ sao cho

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq L_3 (1 + |x|^m + |y|^m) |x - y|^{1/2+\alpha}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

B10. Hệ số c là Lipschitz: tồn tại một hằng số dương L_4 sao cho

$$|c(x) - c(y)| \leq L_4|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2.2 Phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy với hệ số không chính quy

Định lý 2.3.1. *Giả sử rằng các hệ số b, c và σ thỏa mãn các điều kiện **B1**–**B5**. Giả sử thêm rằng độ đo Lévy thỏa mãn $\int_{\mathbb{R}_0} |z|\nu(dz) < \infty$ và $\int_{\mathbb{R}_0} z^2\nu(dz) < \infty$. Khi đó, phương trình (2.1) có duy nhất nghiệm theo quỹ đạo.*
Hơn nữa, giả sử rằng tồn tại các hằng số dương C và $\ell \in (0; \frac{p_0}{4}]$ sao cho

$$|b(x)| \vee |\sigma(x)| \vee |c(x)| \leq C \left(1 + |x|^\ell\right),$$

*với mọi $x \in \mathbb{R}$, trong đó p_0 được định nghĩa trong Điều kiện **B2**. Khi đó phương trình* (2.1) *có một nghiệm mạnh.*

2.3 Lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế

Đối với mỗi $\Delta \in (0,1)$, lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế của phương trình (2.1) được định nghĩa như sau

$$\begin{cases} t_0 = 0, \quad \widehat{X}_0 = x_0, \quad t_{k+1} = t_k + h(\widehat{X}_{t_k})\Delta, \\ \widehat{X}_{t_{k+1}} = \widehat{X}_{t_k} + b(\widehat{X}_{t_k})\left(t_{k+1} - t_k\right) + \sigma_\Delta(\widehat{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \\ \qquad\qquad + c_\Delta\left(\widehat{X}_{t_k}\right)\left(Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k}\right), \end{cases} \tag{2.2}$$

trong đó

$$h(x) = \frac{1}{(1 + |b(x)| + |\sigma(x)| + |x|^l)^2 + |c(x)|^{p_0}}, \tag{2.3}$$

Mệnh đề 2.4.1. *Giả sử tồn tại các hằng số dương L và β sao cho hệ số $b, c, \sigma, c_\Delta, \sigma_\Delta$ thỏa mãn các điều kiện sau*

T1. $|b(x)| \vee |\sigma(x)| \le L\left(1 + |x|^\beta\right)$*;*

T2. $x(b(x) - b(0)) \le L|x|^2$*;*

T3. $|\sigma_\Delta(x)| \le L|\sigma(x)|$ *và* $|c_\Delta(x)| \le |c(x)|$*;*

T4. $|\sigma_\Delta(x)| \le \dfrac{L}{\sqrt{\Delta}}$*;* $|c_\Delta(x)| \le \dfrac{L}{\sqrt{\Delta}}$ *và* $|b(x)c_\Delta(x)| \le \dfrac{L}{\sqrt{\Delta}}$*;*

cho mọi $x \in \mathbb{R}$. Giả sử thêm rằng độ đo Lévy thỏa mãn $\int_{\mathbb{R}_0} z^2 \nu(dz) < \infty$. Khi đó

$$\lim_{k \to +\infty} t_k = +\infty \quad h.c.c.$$

2.4 Các moment nghiệm

Định lý 2.5.4. *Giả sử rằng các điều kiện **T1**–**T4** và **B6** được thỏa mãn, và với một số $p_0 \in [2, +\infty)$, tồn tại các hằng số $\gamma \in \mathbb{R}$, $\eta \in [0, +\infty)$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$,*

$$xb(x) + \frac{p_0 - 1}{2}\sigma_\Delta^2(x) + \frac{c_\Delta^2(x)}{2L_0}\int_{\mathbb{R}_0} |z|\left((1 + L_0|z|)^{p_0 - 1} - 1\right)\nu(dz) \le \gamma x^2 + \eta. \tag{2.4}$$

Khi đó, với mọi số nguyên dương $k \le p_0/2$, tồn tại một hằng số dương $C = C(x_0, k, \eta, \gamma, L, L_0, p_0)$ không phụ thuộc vào t cũng như Δ sao cho

$$\mathbb{E}\left[|\widehat{X}_t|^{2k}\right] \vee \mathbb{E}\left[|\widehat{X}_{\underline{t}}|^{2k}\right] \le \begin{cases} Ce^{2k\gamma t} & \text{nếu } \gamma > 0, \\ C(1+t)^k & \text{nếu } \gamma = 0, \\ C & \text{nếu } \gamma < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.5 Sự hội tụ của lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế

Định lý 2.6.2. *Giả sử rằng các điều kiện **B2, B6–B10** thỏa mãn và* $p_0 \geq \max\{4l; 2 + 4\alpha + 4m\}$. *Giả sử rằng các hàm* $c, b, \sigma, c_\Delta, \sigma_\Delta$ *và độ đo Lévy* ν *thỏa mãn mọi điều kiện của Định lý 3.5.4, và*

$$|c(x) - c_\Delta(x)| \leq L_5 \Delta^{1/2} c^2(x)(1 + |b(x)|), \quad |\sigma(x) - \sigma_\Delta(x)| \leq L_5 \Delta^{1/2} \sigma^2(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Khi đó, đối với bất kỳ $T > 0$ *nào, tồn tại một hằng số dương* $C_T = C(x_0, L, L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, \gamma, \eta, T)$ *sao cho*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}\left[|\widehat{X}_t - X_t|\right] \leq \begin{cases} C_T \Delta^\alpha & \text{nếu} \quad 0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{C_T}{\log \frac{1}{\Delta}} & \text{nếu} \quad \alpha = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Hơn nữa, cho $\mu := \int_{\mathbb{R}_0} |z| \nu(dz)$ *và giả sử rằng* $L_1 + 2L_4\mu < 0$, $\gamma < 0$, *khi đó tồn tại một hằng số dương* $C = C(x_0, L, L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, \gamma, \eta)$ *không phụ thuộc vào* T *sao cho*

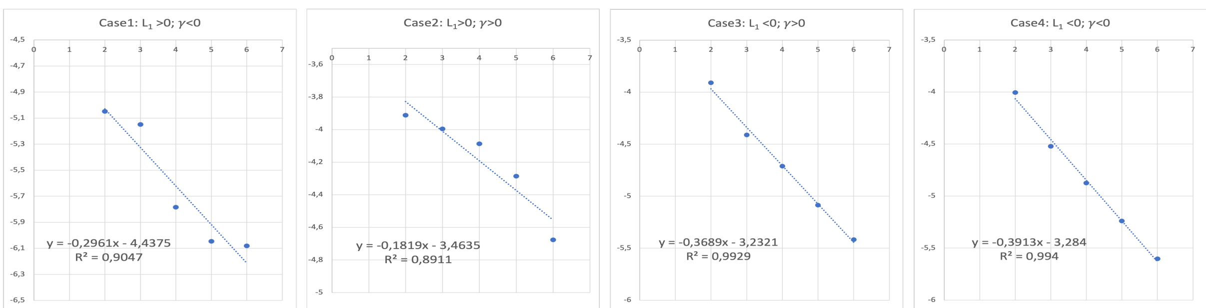
$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}\left[|\widehat{X}_t - X_t|\right] \leq \begin{cases} C \Delta^\alpha & \text{nếu} \quad 0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{C}{\log \frac{1}{\Delta}} & \text{nếu} \quad \alpha = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

2.6 Mô phỏng số

Xét bốn phương trình vi phân ngẫu nhiên với các hệ số được đưa ra trong Bảng 2.1.

Trường hợp	b	σ	c	p_0	L_1	γ	η	l	m	α
1	$-1 + x - x^3$	$1 + (1 + x)x^{2/3}$	$x + \sin(x)$	10	1	-1	31873	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{6}$
2	$-1 + x - x^3$	$1 + \sqrt{\frac{x^4 + x^{4/3}}{14}}$	$x + \sin(x)$	10	1	1	957	2	2	$\frac{1}{6}$
3	$-1 - x - x^{7/3}$	$1 + \sqrt{\frac{2x^2 + x^{10/3} + x^{4/3}}{14}}$	$x + \sin(x)$	10	-1	1	1868	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{6}$
4	$-1 - x - x^{7/3}$	$1 + \sqrt{\frac{x^{10/3} + x^{4/3}}{14}}$	$x + \sin(x)$	10	-1	-1	1583	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{6}$

Bảng 2.1: Bốn phương trình vi phân ngẫu nhiên với các tham số của chúng



Hình 2.1: Giá trị $\log_2(me(l))$ for $l = 2, 3, 4, 5, 6$.

Chương 3

LƯỢC ĐỒ EULER-MARUYAMA TƯƠNG THÍCH KHỐNG CHẾ CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN DẠNG MCKEAN-VLASOV CÓ BƯỚC NHẢY VỚI HỆ SỐ KHÔNG CHÍNH QUY

Tiếp theo việc phân tích lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy trong Chương 2, chương này trình bày các kết quả mới về việc xấp xỉ nghiệm cho một lớp phương trình đặc biệt, cụ thể là các phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy. Sự khác biệt cốt lõi là các hệ số của phương trình McKean-Vlasov phụ thuộc vào cả trạng thái và phân phối xác suất của quá trình, tạo ra một cấu trúc tương tác trường trung bình phức tạp. Trong chương này, chúng tôi tập trung vào trường hợp các hệ số trôi và khuếch tán không liên tục Lipschitz toàn cục và có sự tăng trưởng trên tuyến tính. Những kết quả này được viết dựa trên bài báo [3] trong phần **Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án**.

3.1 Các giả thiết của mô hình

Trên một không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, chúng tôi xét quá trình d-chiều $X = (X_t)_{t\geq 0}$ là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy sau

$$dX_t = b(X_t, \mathcal{L}_{X_t})dt + \sigma(X_t, \mathcal{L}_{X_t})dW_t + c\left(X_{t-}, \mathcal{L}_{X_{t-}}\right)dZ_t, \tag{3.1}$$

với $t \geq 0$, trong đó $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^d$ là giá trị ban đầu cố định, $\mathcal{L}_{X_t}$ biểu thị luật của quá trình X tại thời điểm t.

Kí hiệu $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ là không gian của tất cả các độ đo xác suất được xác định trên một không gian đo được $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, trong đó $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ là σ-trường Borel trên $\mathbb{R}^d$, và kí hiệu

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) := \left\{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \mu(dx) < \infty\right\}$$

là tập hợp con của các độ đo xác suất có mômen cấp hai hữu hạn. Như một độ đo trên không gian $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, chúng tôi sử dụng khoảng cách $\mathcal{L}_2$-Wasserstein. Nghĩa là, đối với

$\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, khoảng cách $\mathcal{L}_2$-Wasserstein giữa μ và ν được định nghĩa là

$$\mathcal{W}_2(\mu,\nu) := \inf_{\pi \in \mathcal{C}(\mu,\nu)} \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x-y|^2 \pi(dx,dy) \right)^{1/2},$$

trong đó $\mathcal{C}(\mu,\nu)$ là tập hợp tất cả các cặp μ và ν. Nghĩa là, $\pi \in \mathcal{C}(\mu,\nu)$ nếu và chỉ nếu $\pi(\cdot, \mathbb{R}^d) = \mu(\cdot)$ và $\pi(\mathbb{R}^d, \cdot) = \nu(\cdot)$.

Phương trình tích phân (3.1) được viết dưới dạng

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s, \mathcal{L}_{X_s})ds + \int_0^t \sigma(X_s, \mathcal{L}_{X_s})dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} c\left(X_{s-}, \mathcal{L}_{X_{s-}}\right) z\widetilde{N}(ds,dz),$$

với bất kỳ $t \geq 0$.

Giả sử rằng các hệ số dịch chuyển, khuếch tán và nhảy b, σ, c và độ đo Lévy ν của phương trình (3.1) thỏa mãn các điều kiện sau:

C1. Tồn tại một hằng số dương L sao cho

$$2\langle x, b(x,\mu)\rangle + |\sigma(x,\mu)|^2 + |c(x,\mu)|^2 \int_{\mathbb{R}_0^d} |z|^2 \nu(dz) \leq L\left(1 + |x|^2 + \mathcal{W}_2^2(\mu, \delta_0)\right),$$

với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^d$ và $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

C2. Tồn tại các hằng số $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$, $L_1 \in \mathbb{R}$ và $L_2 \geq 0$ sao cho

$$\begin{aligned} &2\langle x - \overline{x}, b(x,\mu) - b(\overline{x}, \overline{\mu})\rangle + \kappa_1 |\sigma(x,\mu) - \sigma(\overline{x},\overline{\mu})|^2 \\ &+ \kappa_2 |c(x,\mu) - c(\overline{x},\overline{\mu})|^2 \int_{\mathbb{R}_0^d} |z|^2 \nu(dz) \leq L_1 |x - \overline{x}|^2 + L_2 \mathcal{W}_2^2(\mu, \overline{\mu}), \end{aligned}$$

với bất kỳ $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^d$ và $\mu, \overline{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

C3. $b(x,\mu)$ là một hàm liên tục của $x \in \mathbb{R}^d$ và $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

C4. Tồn tại các hằng số $L > 0$ và $\ell \geq 1$ sao cho

$$|b(x,\mu) - b(\overline{x},\overline{\mu})| \leq L\left(1 + |x|^\ell + |\overline{x}|^\ell\right)\left(|x - \overline{x}| + \mathcal{W}_2(\mu,\overline{\mu})\right),$$

với mọi $x, \overline{x} \in \mathbb{R}^d$ và $\mu, \overline{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

C5. Tồn tại một số nguyên chẵn $p_0 \in [2, +\infty)$ sao cho $\int_{|z|>1} |z|^{p_0} \nu(dz) < \infty$ và $\int_{0<|z|\leq 1} |z| \nu(dz) < \infty$.

C6. Tồn tại một hằng số dương L_0 sao cho

$$|c(x,\mu)| \leq L_0\left(1 + |x| + \mathcal{W}_2(\mu, \delta_0)\right),$$

với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^d$ và $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

C7. Đối với số nguyên chẵn $p_0 \in [2, +\infty)$ được đưa ra trong **C5**, tồn tại các hằng số $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \geq 0$ và $\eta \geq 0$ sao cho

$$\begin{aligned}&\langle x, b(x,\mu)\rangle + \frac{p_0 - 1}{2}|\sigma(x,\mu)|^2 + \frac{1}{2L_0}|c(x,\mu)|^2 \int_{\mathbb{R}_0^d} |z| \left((1 + L_0|z|)^{p_0-1} - 1\right) \nu(dz)\\ &\leq \gamma_1|x|^2 + \gamma_2 \mathcal{W}_2^2(\mu, \delta_0) + \eta,\end{aligned}$$

với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^d$ và $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

3.2 Phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy với hệ số không chính quy

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất cho nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy (3.1).

Mệnh đề 3.3.1. *Giả sử các điều kiện **C1**, **C3** và điều kiện **C2** thỏa mãn với $\kappa_1 = \kappa_2 = 1, L_1 = L_2 > 0$. Khi đó, tồn tại một quá trình càdlàg duy nhất $X = (X_t)_{t\geq 0}$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^d$ thỏa mãn phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy (3.1) sao cho*

$$\sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq K,$$

trong đó $T > 0$ là hằng số cố định và $K := K(|x_0|^2, d, L, L_1, T)$ là hằng số dương.

Tiếp theo chúng ta sẽ trình bày các ước lượng mômen của nghiệm đúng $X = (X_t)_{t\geq 0}$.

Mệnh đề 3.3.2. *Cho $X = (X_t)_{t\geq 0}$ là một nghiệm của phương trình (3.1). Giả sử các điều kiện **C6**, **C7**, và σ bị chặn trên $C \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ đối với mọi tập con C của $\mathbb{R}^d$, và **C5** thỏa mãn với $q = 2p_0$. Khi đó với mọi $p \in [2, p_0]$, tồn tại hằng số dương C_p sao cho với mọi $t \geq 0$*

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] \leq \begin{cases} C_p(1 + e^{\gamma p t}) & \text{nếu} \quad \gamma \neq 0, \\ C_p(1 + t)^{p/2} & \text{nếu} \quad \gamma = 0, p = 2 \quad \text{hoặc} \quad \gamma = 0, \gamma_2 > 0, p \in (2, p_0], \\ C_p(1 + t)^p & \text{nếu} \quad \gamma = 0, \gamma_2 = 0, p \in (2, p_0], \end{cases} \tag{3.2}$$

trong đó $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Lưu ý rằng nếu $\gamma < 0$, ta có $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] \leq 2C_p$.

3.3 Sự lan truyền hỗn loạn

Bây giờ chúng ta xét hệ các hạt không tương tác liên kết với phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy (3.1), trong đó trạng thái $X^i = (X_t^i)_{t\geq 0}$ của hạt i được xác định bởi

$$X_t^i = x_0 + \int_0^t b(X_s^i, \mathcal{L}_{X_s^i})ds + \int_0^t \sigma(X_s^i, \mathcal{L}_{X_s^i})dW_s^i + \int_0^t c\left(X_{s-}^i, \mathcal{L}_{X_{s-}^i}\right) dZ_s^i$$

$$
\begin{aligned}
&= x_0 + \int_0^t b(X_s^i, \mathcal{L}_{X_s^i})ds + \int_0^t \sigma(X_s^i, \mathcal{L}_{X_s^i})dW_s^i \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} c\left(X_{s-}^i, \mathcal{L}_{X_{s-}^i}\right) z\widetilde{N}^i(ds, dz),
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

cho bất kỳ $t \geq 0$ và $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Đối với $\boldsymbol{x}^N := (x_1, x_2, \ldots, x_N), \boldsymbol{y}^N := (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^{dN}$, chúng ta có

$$
\mathcal{W}_2^2(\mu^{\boldsymbol{x}^N}, \delta_0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |x_i|^2 .
$$

Ở đây, độ đo thực nghiệm được định nghĩa bởi $\mu^{\boldsymbol{x}^N}(dx) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{x_i}(dx)$, trong đó δ_x kí hiệu cho độ đo Dirac tại x. Hơn nữa, một giới hạn chuẩn cho khoảng cách Wasserstein giữa hai độ đo thực nghiệm $\mu^{\boldsymbol{x}^N}, \mu^{\boldsymbol{y}^N}$ được xác định bởi

$$
\mathcal{W}_2^2(\mu^{\boldsymbol{x}^N}, \mu^{\boldsymbol{y}^N}) \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^2 = \frac{1}{N}\left|\boldsymbol{x}^N - \boldsymbol{y}^N\right|^2 ,
$$

Bây giờ, độ đo thực $\mathcal{L}_{X_t}$ tại mỗi thời điểm t được xấp xỉ bằng độ đo thực nghiệm

$$
\mu_t^{\boldsymbol{X}^N}(dx) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{X_t^{i,N}}(dx), \tag{3.4}
$$

trong đó $\boldsymbol{X}^N = (\boldsymbol{X}_t^N)_{t\geq 0} = (X_t^{1,N}, \ldots, X_t^{N,N})_{t\geq 0}^{\mathsf{T}}$, được gọi là hệ các hạt tương tác, là nghiệm cho phương trình vi phân ngẫu nhiên $\mathbb{R}^{dN}$ chiều với các thành phần $X^{i,N} = (X_t^{i,N})_{t\geq 0}$

$$
\begin{aligned}
X_t^{i,N} &= x_0 + \int_0^t b(X_s^{i,N}, \mu_s^{\boldsymbol{X}^N})ds + \int_0^t \sigma(X_s^{i,N}, \mu_s^{\boldsymbol{X}^N})dW_s^i + \int_0^t c\left(X_{s-}^{i,N}, \mu_{s-}^{\boldsymbol{X}^N}\right)dZ_s^i \\
&= x_0 + \int_0^t b(X_s^{i,N}, \mu_s^{\boldsymbol{X}^N})ds + \int_0^t \sigma(X_s^{i,N}, \mu_s^{\boldsymbol{X}^N})dW_s^i \\
&\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^d} c\left(X_{s-}^{i,N}, \mu_{s-}^{\boldsymbol{X}^N}\right) z\widetilde{N}^i(ds, dz),
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

cho bất kỳ $t \geq 0$ và $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Mệnh đề 3.4.1. *Cho $X^{i,N} = (X_t^{i,N})_{t\geq 0}$ là một nghiệm của phương trình (3.5). Giả sử các điều kiện **C6, C7** thỏa mãn và σ bị chặn trên $C \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ đối với mọi tập con C của $\mathbb{R}^d$, và **C5** thỏa mãn đối với $q = 2p_0$. Khi đó, với mọi $p \in [2, p_0]$, tồn tại hằng số dương C_p sao cho với mọi $t \geq 0$,*

$$
\max_{i\in\{1,\ldots,N\}} \mathbb{E}\left[|X_t^{i,N}|^p\right] \leq \begin{cases} C_p(1+e^{\gamma p t}) & \textit{nếu} \quad \gamma \neq 0, \\ C_p(1+t)^{p/2} & \textit{nếu} \quad \gamma = 0, p = 2 \quad \textit{hoặc} \quad \gamma = 0, \gamma_2 > 0, p \in (2, p_0], \\ C_p(1+t)^p & \textit{nếu} \quad \gamma = 0, \gamma_2 = 0, p \in (2, p_0], \end{cases}
$$

trong đó $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

Lưu ý rằng khi $\gamma < 0$, ta có $\max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_t^{i,N}|^p\right] \leq 2C_p$.

Mệnh đề 3.4.2. *Giả sử rằng tất cả các điều kiện trong Mệnh đề 3.4.1 đều đúng và Điều kiện **C2** đúng với $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$, $L_1 \in \mathbb{R}$, $L_2 \geq 0$. Khi đó, chúng ta có*

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|X_t^i - X_t^{i,N}\right|^2\right] \leq C_T \varphi(N), \tag{3.6}$$

đối với bất kỳ $N \in \mathbb{N}$ nào, trong đó hằng số dương C_T không phụ thuộc vào N.

Giả sử thêm rằng $L_1 + L_2 < 0$ và $\gamma < 0$. Khi đó, ta có

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[\left|X_t^i - X_t^{i,N}\right|^2\right] \leq C\varphi(N), \tag{3.7}$$

đối với bất kỳ $N \in \mathbb{N}$ nào, trong đó hằng số dương C không phụ thuộc vào N và T.

3.4 Lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế

Giả sử $\sigma_\Delta = (\sigma_{\Delta,ij})_{1\leq i,j\leq d} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ và $c_\Delta = (c_{\Delta,ij})_{1\leq i,j\leq d} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ là các xấp xỉ cho các hệ số σ và c tương ứng, sẽ được xác định sau. Đối với tất cả $i \in \{1,\dots,N\}$, $\Delta \in (0,1)$ và $k \in \mathbb{N}$, chúng tôi định nghĩa lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế của phương trình (3.5) bằng

$$\begin{cases} t_0 = 0, \quad \widehat{X}_0^{i,N} = x_0, \quad t_{k+1} = t_k + \mathbf{h}(\widehat{\boldsymbol{X}}_{t_k}^N, \mu_{t_k}^{\widehat{\boldsymbol{X}}^N})\Delta, \\ \widehat{X}_{t_{k+1}}^{i,N} = \widehat{X}_{t_k}^{i,N} + b(\widehat{X}_{t_k}^{i,N}, \mu_{t_k}^{\widehat{\boldsymbol{X}}^N})(t_{k+1} - t_k) + \sigma_\Delta(\widehat{X}_{t_k}^{i,N}, \mu_{t_k}^{\widehat{\boldsymbol{X}}^N})(W_{t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i) \\ \qquad\quad + c_\Delta(\widehat{X}_{t_k}^{i,N}, \mu_{t_k}^{\widehat{\boldsymbol{X}}^N})(Z_{t_{k+1}}^i - Z_{t_k}^i), \end{cases} \tag{3.8}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{X}}_{t_k}^N &= \left(\widehat{X}_{t_k}^{1,N}, \dots, \widehat{X}_{t_k}^{N,N}\right), \\ \mu_{t_k}^{\widehat{\boldsymbol{X}}^N}(dx) &:= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\widehat{X}_{t_k}^{i,N}}(dx), \\ \mathbf{h}(\widehat{\boldsymbol{X}}_{t_k}^N, \mu_{t_k}^{\widehat{\boldsymbol{X}}^N}) &= \min\left\{h(\widehat{X}_{t_k}^{1,N}, \mu_{t_k}^{\widehat{\boldsymbol{X}}^N}), \dots, h(\widehat{X}_{t_k}^{N,N}, \mu_{t_k}^{\widehat{\boldsymbol{X}}^N})\right\}, \end{aligned}$$

và

$$h(x,\mu) = \frac{h_0}{(1 + |b(x,\mu)| + |\sigma(x,\mu)| + |x|^\ell)^2 + |c(x,\mu)|^{p_0}}, \tag{3.9}$$

cho $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ và một số hằng số dương h_0. Ở đây, các hằng số ℓ và p_0 lần lượt được xác định trong Điều kiện **C4** và **C7**.

Bây giờ, chúng tôi cung cấp các điều kiện đủ để đảm bảo $t_k \uparrow \infty$ là $k \uparrow \infty$, điều này cho thấy lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama tương thích khống chế(3.8) được định nghĩa tốt.

Mệnh đề 3.5.1. *Giả sử rằng Điều kiện* ***C5*** *đúng với* $p = 2$ *và tồn tại các hằng số dương* L, β_1 *và* β_2 *sao cho các hàm* h, b, σ_Δ *và* c_Δ *thỏa mãn*

T1. $\dfrac{1}{h(x,\mu)} \le L\left(1 + |x|^{\beta_1} + \mathcal{W}_2^{\beta_2}(\mu, \delta_0)\right)$; $|b(x,\mu)|\left(1 + |b(x,\mu)|\right) h(x,\mu) \le L$;

T2. $\langle x, b(x,\mu) - b(0,\delta_0)\rangle \le L\left(|x|^2 + \mathcal{W}_2^2(\mu,\delta_0)\right)$;

T3. $|\sigma_\Delta(x,\mu)|\left(1+|x|\right) \le \dfrac{L}{\sqrt{\Delta}}$; $|c_\Delta(x,\mu)|\left(1+|x|\right) \le \dfrac{L}{\sqrt{\Delta}}$;

$|b(x,\mu)||c_\Delta(x,\mu)| \le \dfrac{L}{\sqrt{\Delta}}$;

với bất kỳ $x \in \mathbb{R}^d$ *và* $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. *Khi đó, chúng ta có*

$$\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty \quad h.c.c.$$

3.5 Các moment nghiệm

Trước tiên, chúng ta sẽ chứng minh rằng các mômen của $\widehat{X}_t^{i,N}$ phụ thuộc vào t. Để chứng minh điều này, chúng ta cần đưa ra điều kiện sau.

T4. Tồn tại một hằng số dương L sao cho $|\sigma_\Delta(x,\mu)| \le |\sigma(x,\mu)|$ và $|c_\Delta(x,\mu)| \le |c(x,\mu)|$ với mọi $x \in \mathbb{R}^d$ và $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$;

T5. Đối với một số nguyên $p_0 \in [2, +\infty)$, tồn tại các hằng số $\widetilde{L_0} > 0$, $\widetilde{\gamma}_1 \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\gamma}_2 > 0$, $\widetilde{\eta} \ge 0$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}^d$ và $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$|c_\Delta(x,\mu)| \le \widetilde{L_0}\left(1 + |x| + \mathcal{W}_2(\mu,\delta_0)\right), \tag{3.10}$$

và

$$\begin{aligned}
&\langle x, b(x,\mu)\rangle + \frac{p_0-1}{2}|\sigma_\Delta(x,\mu)|^2 + |c_\Delta(x,\mu)|^2 \int_{\mathbb{R}_0^d}\Bigg[\frac{|z|^2}{2} + \frac{1}{\widetilde{L_0}^2} \\
&\times \left(\left(1 + |z|(\widetilde{L_0}+\epsilon)\right)^{p_0-1} - 1 - |z|(\widetilde{L_0}+\epsilon)\right)\left(|z|\left(\frac{\widetilde{L_0}}{2}+\epsilon\right)+\epsilon\right)\Bigg]\nu(dz) \\
&\le \widetilde{\gamma}_1|x|^2 + \widetilde{\gamma}_2\mathcal{W}_2^2(\mu,\delta_0) + \widetilde{\eta},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

trong đó $\epsilon = \frac{1}{2\sqrt{N}}\max\{3\widetilde{L_0}, 1\}$.

Mệnh đề 3.6.9. *Giả sử các điều kiện* ***T1–T5*** *và* ***C5*** *thỏa mãn. Khi đó, với bất kỳ* $k \le p_0/2$ *dương, tồn tại một hằng số dương* $C = C(x_0, k, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\eta}, L, \widetilde{L_0}, p_0)$ *không phụ thuộc vào* Δ *cũng không phụ thuộc vào* t *sao cho với bất kỳ* $t \ge 0$,

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}}\left(\mathbb{E}\left[|\widehat{X}_t^{i,N}|^{2k}\right] \vee \mathbb{E}\left[|\widehat{X}_{\underline{t}}^{i,N}|^{2k}\right]\right) \le \begin{cases} Ce^{2k\widetilde{\gamma}t} & \textit{nếu } \ \widetilde{\gamma} > 0, \\ C(1+t)^k & \textit{nếu } \ \widetilde{\gamma} = 0, \\ C & \textit{nếu } \ \widetilde{\gamma} < 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

trong đó $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{\gamma}_2$.

3.6 Sự hội tụ của lược đồ xấp xỉ

T6. Tồn tại một hằng số dương L_3 sao cho

$$|\sigma(x,\mu) - \sigma_\Delta(x,\mu)| \le L_3 \Delta^{1/2} |\sigma(x,\mu)|^2 (1+|x|),$$
$$|c(x,\mu) - c_\Delta(x,\mu)| \le L_3 \Delta^{1/2} |c(x,\mu)|^2 \left(1+|x|+|b(x,\mu)|\right),$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^d$ và $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

Nhận xét 3.7.1. Nếu chúng ta chọn

$$\sigma_\Delta(x,\mu) = \frac{\sigma(x,\mu)}{1+\Delta^{1/2}|\sigma(x,\mu)|(1+|x|)}, \tag{3.13}$$

$$c_\Delta(x,\mu) = \frac{c(x,\mu)}{1+\Delta^{1/2}|c(x,\mu)|(1+|x|+|b(x,\mu)|)}, \tag{3.14}$$

thì các điều kiện **T3, T4** và **T6** được thỏa mãn.

Định lý 3.7.2. *Giả sử các điều kiện **C1**, **C3–C5**, **T2–T6** thỏa mãn và* $p_0 \ge 4\ell + 6$. *Giả sử thêm rằng tồn tại một hằng số* $\varepsilon > 0$ *sao cho **C2** thỏa mãn với* $\kappa_1 = \kappa_2 = 1+\varepsilon$, $L_1 \in \mathbb{R}$, $L_2 \ge 0$. *Khi đó với mọi* $T > 0$, *tồn tại các hằng số dương* $C_T = C(x_0, L, L_1, L_2, L_3, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\eta}, \widetilde{L_0}, T)$ *và* $C'_T = C'(x_0, L, L_1, L_2, L_3, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\eta}, \widetilde{L_0}, T)$ *sao cho*

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|X_t^{i,N} - \widehat{X}_t^{i,N}\right|^2\right] \le C_T \Delta, \tag{3.15}$$

và với bất kỳ $p \in (0,2)$,

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|X_t^{i,N} - \widehat{X}_t^{i,N}\right|^p\right] \le \left(\frac{4-p}{2-p}\right) (C'_T \Delta)^{p/2}. \tag{3.16}$$

Hơn nữa, nếu $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{\gamma}_2 < 0$, *và* $L_1 + L_2 < 0$, *thì tồn tại một hằng số dương* $C'' = C''(x_0, L, L_1, L_2, L_3, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\eta}, \widetilde{L_0})$, *không phụ thuộc vào* T, *sao cho*

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sup_{t\ge 0} \mathbb{E}\left[\left|X_t^{i,N} - \widehat{X}_t^{i,N}\right|^2\right] \le C'' \Delta. \tag{3.17}$$

Định lý 3.7.3. *Giả sử các điều kiện **C1**, **C3–C7**, **T2–T6** thỏa mãn và* $p_0 \ge 4\ell+6$. *Giả sử thêm rằng tồn tại hằng số* $\varepsilon > 0$ *sao cho **C2** đúng với* $\kappa_1 = \kappa_2 = 1+\varepsilon$, $L_1 \in \mathbb{R}$, $L_2 \ge 0$. *Khi đó, với mọi* $T > 0$, *tồn tại hằng số dương* $C_T = C(x_0, L, L_1, L_2, L_3, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\eta}, \widetilde{L_0}, T)$ *sao cho*

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|X_t^{i} - \widehat{X}_t^{i,N}\right|^2\right] \le C_T \left(\Delta + \varphi(N)\right), \tag{3.18}$$

với mọi $N \in \mathbb{N}$, *trong đó hằng số* $C_T > 0$ *không phụ thuộc vào* N.

Hơn nữa, giả sử rằng $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 < 0$, $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{\gamma}_2 < 0$ *và* $L_1 + L_2 < 0$. *Khi đó, tồn tại*

một hằng số dương
$C'' = C''(x_0, L, L_1, L_2, L_3, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\eta}, \widetilde{L_0})$ *không phụ thuộc vào* T *sao cho*

$$\max_{i\in\{1,\dots,N\}} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}\left[\left|X_t^i - \widehat{X}_t^{i,N}\right|^2\right] \leq C''(\Delta + \varphi(N)). \tag{3.19}$$

3.7 Mô phỏng số

Trong phần này, chúng tôi xét tốc độ hội tụ của lược đồ Euler-Maruyama tương thích khống chế (3.8),(3.9), (3.13), (3.14) trong Định lý 4.7.3 đối với các giá trị lớn cố định của N. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy sau

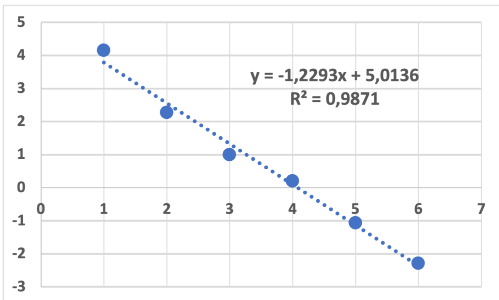
$$\begin{aligned} dX_t = &\left(-1 - 3\left(X_t + \mathbb{E}[X_t]\right) - X_t|X_t|^{0.3}\right)dt + 0.2\left(1 + |X_t|^{1.1} + \mathbb{E}[X_t]\right)dW_t \\ &+ 0.2\left(X_{t-} + \mathbb{E}[X_{t-}]\right)dZ_t. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Tức là,

$$\begin{aligned} b(x,\mu) &= -1 - 3\left(x + \int_{\mathbb{R}} z\mu(dz)\right) - x|x|^{0.3}, \\ \sigma(x,\mu) &= 0.2\left(1 + |x|^{1.1} + \int_{\mathbb{R}} z\mu(dz)\right), \qquad c(x,\mu) = 0.2\left(x + \int_{\mathbb{R}} z\mu(dz)\right), \end{aligned}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Ở đây chúng ta giả sử rằng $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ là một quá trình Gamma có hai tham số là 5 và 1. Có thể dễ dàng chứng minh các hệ số này thỏa mãn các điều kiện **A1–A7** và **T2–T6**.

Hình 3.1 hiển thị các giá trị của $\log_2 MSE(\mathbf{l}, T)$ được vẽ theo $\mathbf{l} \in \{1, 2, ..., 6\}$. Chúng ta thấy rằng $\beta \approx 0.5$.



Hình 3.1: Sai số $\log_2\mathrm{MSE}(\mathbf{l}, 10)$ với $\mathbf{l} = 1, ..., 6$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Bằng cách kết hợp các công cụ hiện đại trong giải tích ngẫu nhiên, phương trình vi phân ngẫu nhiên, giải tích số và kỹ thuật xấp xỉ của Yamada-Watanabe, luận án đã xây dựng được các lược đồ xấp xỉ phù hợp cho một số lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên có hệ số không chính quy. Các kết quả chính của luận án là cả về tính chất định lượng và định tính của các nghiệm đúng và các nghiệm xấp xỉ của lược đồ Euler-Maruyama cho phương trình vi phân ngẫu nhiên có hệ số không chính quy và cho phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:
1) Đưa ra một lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama tương thích khống chế hội tụ mạnh trong cả khoảng thời gian hữu hạn và vô hạn cho một số lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên một chiều với hệ số dịch chuyển liên tục Lipschitz địa phương và hệ số khuếch tán liên tục Hölder địa phương.
2) Đưa ra một lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama tương thích khống chế hội tụ mạnh trong cả khoảng thời gian hữu hạn và vô hạn cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên có bước nhảy trong đó b là liên tục Lipschitz địa phương; σ là liên tục Hölder địa phương và c là liên tục Lipschitz.
3) Đưa ra một lược đồ xấp xỉ Euler-Maruyama tương thích khống chế hội tụ mạnh trong cả khoảng thời gian hữu hạn và vô hạn cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng McKean-Vlasov có bước nhảy, trong đó b và σ là liên tục Lipschitz không toàn cục và tăng trên tuyến tính, c là liên tục Lipschitz.

Kiến nghị

Trong quá trình nghiên cứu các vấn đề của luận án, chúng tôi đã nghĩ đến một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Các phương pháp xấp xỉ bảo toàn các tính chất hình học và tiệm cận của một hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên có cấu trúc phức tạp, chẳng hạn như hệ các điểm ngẫu nhiên không va chạm hoặc hệ dương.
- Sự hội tụ yếu của các lược đồ xấp xỉ tương thích khống chế.
- Xây dựng các lược đồ xấp xỉ có sự hội tụ nhanh hơn cho các phương trình vi phân ngẫu nhiên có hệ số trơn và tăng trên tuyến tính.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Kieu T.T., Luong D.T., Ngo H.L. (2022), "Tamed-adaptive Euler-Maruyama approximation for SDEs with locally Lipschitz continuous drnếut and locally Hölder continuous dnếufusion coefficients", *Stoch Anal Appl* 40(4), pp. 714-734.

[2] Kieu T.T., Luong D.T., Ngo H.L., Tran N.K. (2022), "Strong convergence in infinite time interval of tamed-adaptive Euler-Maruyama scheme for Lévy-driven SDEs with irregular coefficients", *Comp. Appl. Math.* 41, 301.

[3] Tran N.K., Kieu T.T., Luong D.T., Ngo H.L. (2024), "On the infinite time horizon approximation for Lévy-driven McKean-Vlasov SDEs with non-globally Lipschitz continuous and super-linearly growth drnếut and dnếufusion coefficients", *J. Math. Anal. Appl.*, 54, paper no. 128982, 38 pp.