

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

---

NGUYỄN HẢI HÀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH  
GIẢI BAO HÀM THỨC ĐƠN ĐIỀU  
VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2025

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN HẢI HÀ

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH  
GIẢI BAO HÀM THỨC ĐƠN ĐIỀU  
VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

TS. Đặng Văn Hiếu

GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh

Hà Nội - 2025

# LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những kết quả trình bày trong luận án này, dưới sự hướng dẫn của TS. Đặng Văn Hiếu và GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh, là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình của ai khác. Những kết quả viết chung với các thầy hướng dẫn và các cộng sự đã được đồng ý khi đưa vào luận án. Các dữ liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

*Hà Nội, tháng 10 năm 2025*

**Nghiên cứu sinh**

**Nguyễn Hải Hà**

# LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới hai Thầy hướng dẫn, TS. Đặng Văn Hiếu và GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh. Tôi vô cùng biết ơn sự chỉ bảo, giúp đỡ tận tình mà các Thầy đã dành cho tôi trong suốt khoá học nghiên cứu sinh cũng như trong quá trình thực hiện luận án. Nhờ những ý tưởng mà các Thầy đã gợi mở, những góp ý, hướng dẫn của các Thầy, những tài liệu bổ ích mà các Thầy đã cung cấp cũng như những kinh nghiệm mà các Thầy truyền đạt về công việc nghiên cứu, tôi đã hoàn thành đề tài của mình. Bất chấp khoảng cách địa lí xa xôi, TS. Đặng Văn Hiếu luôn theo sát tình hình công việc, học tập của tôi và có những sự chỉ bảo, hướng dẫn kịp thời, cũng như cho tôi thấy được sự nhiệt tình, đam mê trên con đường hoạt động khoa học của Thầy. GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh đã dành cho tôi rất nhiều sự quan tâm, chỉ dẫn và giúp đỡ quý báu không chỉ trong nghiên cứu khoa học mà cả trong cuộc sống. Những khi gặp khó khăn, vấp vấp hay thậm chí thất bại, sự quan tâm, hướng dẫn và sự tin tưởng của các thầy giúp tôi có thêm động lực, niềm tin để tiếp tục công việc, là kim chỉ nam giúp tôi thực hiện quá trình nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội. Công tác quản lý đào tạo và môi trường nghiên cứu của Nhà trường đã góp phần không nhỏ để cho luận án này được hoàn thành đúng dự định. Đặc biệt, tôi xin chân thành cảm ơn GS. TSKH. Vũ Hoàng Linh, Chủ tịch Hội đồng Trường, Nguyên Hiệu trưởng Nhà trường và GS. TS. Lê Thanh Sơn, Hiệu trưởng Nhà trường. Các Thầy luôn theo sát và kịp thời đưa ra những giải pháp, xử lí những khó khăn mà các nghiên cứu sinh gặp phải. Trong các buổi xêmina chuyên ngành, GS. Vũ Hoàng Linh luôn cho chúng tôi những câu hỏi, những góp ý sâu sắc về chuyên môn. Không những là những nhà quản lý tâm huyết, các Thầy còn là tấm gương về nhà khoa học mẫu mực cho chúng tôi noi theo.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Chủ nhiệm Khoa, các thầy/cô và anh chị em trong Khoa Toán-Cơ-Tin học, ĐHKHTN nói chung và Bộ môn Toán học tính toán và Toán ứng dụng nói riêng. Sự động viên và giúp đỡ của Khoa, của Bộ môn cũng như những ý kiến quý báu của các thầy/cô và các bạn ở các kỳ Xêmina bộ môn đã giúp tôi rất nhiều trong việc hoàn thành luận án này. Đặc biệt, tôi xin gửi

lời cảm ơn chân thành đến TS. Nguyễn Trung Hiếu và TS. Hoàng Nam Dũng của Bộ môn Toán học tính toán và Toán ứng dụng, là những người thầy đã cùng với GS. Phạm Kỳ Anh trực tiếp giảng dạy tôi các môn chuyên đề nghiên cứu sinh. Ở các Thầy, tôi đã học tập và tiếp thu được những kiến thức vô cùng quý giá và bổ ích.

Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy/cô, các anh chị và các bạn trong nhóm Xêmina tổ chức tại Khoa Toán-Tin, ĐHBK Hà Nội. Nhóm đã tạo cho tôi nhiều cảm hứng trong nghiên cứu khoa học và sự gắn bó với môi trường nghiên cứu. Đặc biệt, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các Thầy/Cô: GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, PGS. TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, PGS. TS. Bùi Văn Định, PGS. TS. Trịnh Ngọc Hải, TS. Dương Việt Thông và TS. Vũ Tiến Dũng. Các Thầy/Cô đã giúp đỡ tôi rất nhiều về chuyên môn, đưa ra nhiều góp ý, nhận xét quý báu về luận án và gợi ý cho tôi những ý tưởng mới trong nghiên cứu.

Tôi xin cảm ơn các anh Quản Thái Hà và TS. Hồ Phi Tứ, các em Phan Quang Tuyền, Ngô Thị Thương và TS. Ninh Thị Thu. Chúng tôi là những người bạn đồng hành trên con đường nghiên cứu sinh, cùng nhau học tập các môn chuyên đề, cùng trao đổi, thảo luận những ý tưởng nghiên cứu, giúp đỡ nhau san sẻ những khó khăn trong công việc và cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy/cô và các anh chị em trong Bộ Môn Toán Giải tích nói riêng và Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải nói chung. Đơn vị đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi yên tâm học tập, nghiên cứu và công tác. Sự quan tâm và những lời động viên, khích lệ của các thầy/cô, các anh chị em và các bạn đã giúp tôi rất nhiều trong việc hoàn thành luận án của mình. Đặc biệt, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới TS. Nguyễn Thế Vinh, Chủ nhiệm Bộ môn Toán giải tích. Thầy đã chỉ bảo tận tình cho tôi về cách học tập và nghiên cứu các chuyên đề nghiên cứu sinh, cũng như chia sẻ cho tôi nhiều tài liệu quý báu. Thầy có nhiều góp ý rất quan trọng trong các kỳ Xêmina, giúp tôi có nhiều ý tưởng và động lực để phát triển và hoàn thành luận án của mình.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc tới thầy hướng dẫn khoá luận tốt nghiệp bậc đại học: GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên và thầy hướng dẫn Cao học: Assoc. Prof. Chua Chek Beng. Các Thầy là những người đầu tiên dìu dắt tôi trên con đường nghiên cứu khoa học và truyền đạt cho tôi những kiến thức nền tảng

về tối ưu toán học. Tôi cũng xin chân thành cảm ơn GS. TS. Cung Thế Anh đã tạo điều kiện cho tôi tham gia thảo luận và học tập trong nhóm nghiên cứu của thầy, cũng như chỉ dạy cho tôi nhiều kiến thức hiện đại và sâu sắc.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới Quỹ đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF) thuộc Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn (VNCDLL). Luận án này được hỗ trợ tài chính một phần bởi Quỹ, thông qua chương trình Học bổng Thạc sĩ, Tiến sĩ trong nước mã số VINIF.2021.TS013 và VINIF.2022.TS032. Đây là sự tài trợ rất quý báu, đồng thời cũng là sự động viên tinh thần lớn lao, giúp tôi thêm yên tâm và vững bước trên con đường nghiên cứu.

Cuối cùng, luận án này sẽ không thể hoàn thành nếu không có sự thông cảm, chia sẻ và giúp đỡ của những người thân trong gia đình. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới bố mẹ, các anh chị em hai bên gia đình nội ngoại. Đặc biệt xin cảm ơn vợ và con gái yêu quý, những người đã vì tôi mà phải chịu nhiều thiệt thòi vất vả; đã luôn cảm thông và sẻ chia gánh nặng cùng tôi suốt những năm tháng qua để tôi có thể hoàn thành khoá học nghiên cứu sinh. Luận án này, và những gì tôi đang cố gắng thực hiện, là để gửi tới cha mẹ, vợ con, anh chị em và những người thân trong gia đình, với tất cả lòng biết ơn sâu sắc nhất.

## MỤC LỤC

	Trang
Lời cam đoan	2
Lời cảm ơn	3
Mục lục	6
Bảng kí hiệu	8
Bảng các chữ viết tắt	9
Mở đầu	10
<b>Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ</b>	<b>28</b>
1.1 Một số kiến thức cơ bản	28
1.1.1 Một số khái niệm cơ bản trong không gian Hilbert	28
1.1.2 Phép chiếu metric, toán tử và giải thức của toán tử	31
1.1.3 Một số kiến thức cơ bản về song hàm	35
1.2 Bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh	37
1.3 Một số tính chất của các bài toán được nghiên cứu trong luận án	38
1.3.1 Bài toán bao hàm thức biến phân	38
1.3.2 Bài toán bao hàm thức biến phân tách	39
1.3.3 Bài toán cân bằng	40
1.4 Một số kết quả bổ trợ khác	41
<b>Chương 2. PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH GIẢI BÀI TOÁN BAO HÀM THỨC BIẾN PHÂN VÀ BAO HÀM THỨC BIẾN PHÂN TÁCH</b>	<b>43</b>
2.1 Phương pháp co gằn kề hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân	43
2.1.1 Bài toán bao hàm thức hiệu chỉnh và tính chất của dãy nghiệm hiệu chỉnh	44
2.1.2 Thuật toán và sự hội tụ	47
2.1.3 Áp dụng cho bài toán tối ưu	56
2.1.4 Áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân	57

2.2	Phương pháp quán tính đa bước hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân . . . . .	58
2.2.1	Thuật toán chỉnh lập gần kề quán tính đa bước . . . . .	60
2.2.2	Áp dụng cho bài toán tối ưu . . . . .	70
2.2.3	Áp dụng cho bài toán tối ưu hai cấp . . . . .	72
2.3	Phương pháp hiệu chỉnh kiểu gần kề giải bài toán bao hàm thức biến phân tách . . . . .	73
2.3.1	Mối liên hệ giữa hai bài toán bao hàm thức biến phân (VI) và bao hàm thức biến phân tách (SVI) . . . . .	74
2.3.2	Thuật toán và sự hội tụ . . . . .	75
2.3.3	Áp dụng cho bài toán chấp nhận tách . . . . .	78
2.3.4	Áp dụng cho bài toán tối ưu tách . . . . .	79
2.4	Thử nghiệm số . . . . .	80
2.4.1	Thử nghiệm số cho Thuật toán 2.1 . . . . .	80
2.4.2	Thử nghiệm số cho Thuật toán 2.3 . . . . .	87
2.4.3	Thử nghiệm số cho Thuật toán 2.4 . . . . .	88
 <b>Chương 3. PHƯƠNG PHÁP HỆ ĐỘNG LỰC HIỆU CHỈNH GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG</b>		<b>94</b>
3.1	Bài toán cân bằng hiệu chỉnh và tính chất của dãy nghiệm hiệu chỉnh	95
3.2	Phương pháp hệ động lực hiệu chỉnh kiểu đạo hàm tăng cường . .	97
3.2.1	Sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh toàn cục . . . . .	97
3.2.2	Sự hội tụ mạnh của quỹ đạo . . . . .	106
3.3	Phương pháp chỉnh lập kiểu đạo hàm tăng cường . . . . .	113
3.4	Thử nghiệm số . . . . .	120
 <b>Kết luận</b>		<b>129</b>
 <b>Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án</b>		<b>131</b>
 <b>Tài liệu tham khảo</b>		<b>132</b>

# BẢNG KÍ HIỆU

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ( $\  \cdot \ $ )	tích vô hướng (chuẩn sinh bởi tích vô hướng)
$\mathcal{H}$	không gian Hilbert $\mathcal{H}$
$2^{\mathcal{H}}$	tập các tập con của $\mathcal{H}$
$S(x_0, r)$ ( $B[x_0, r]$ )	mặt cầu (hình cầu đóng) tâm $x_0$ , bán kính $r$
$\arg \min \varphi$ ( $\arg \max \varphi$ )	phần tử cực tiểu (cực đại) của hàm $\varphi$
$\text{dom}(\varphi)$ ( $\text{epi}(\varphi)$ )	miền hữu hiệu (trên đồ thị) của hàm $\varphi$
$\partial\varphi(x)$	dưới vi phân của hàm $\varphi$ tại $x$
$\text{prox}_{\varphi}$	toán tử gần kề của hàm $\varphi$
$N_C(x)$	nón pháp tuyến của $C$ tại $x$
$\iota_C$	hàm chỉ của tập $C$
$P_C$	phép chiếu metric trên tập $C$
$\text{graph}(\mathcal{A})$	đồ thị của toán tử $\mathcal{A}$
$\text{zer}(\mathcal{A})$	tập không điểm của toán tử $\mathcal{A}$
$J_{\lambda}^{\mathcal{A}}$	giải thức của toán tử $\mathcal{A}$ với hệ số $\lambda$
$M \times N$	tích Đề Các của hai tập hợp $M$ và $N$
$\text{Fix}(\mathcal{S})$	tập điểm bất động của ánh xạ $\mathcal{S}$
$\text{Sol}(f, C)$	tập nghiệm của bài toán cân bằng $\text{EP}(f, C)$
$\mathbb{R}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_*^+)$	tập hợp các số thực (không âm, dương)
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclid thực $n$ -chiều
$\emptyset$	tập rỗng
$\square$	kết thúc chứng minh

# BẢNG CÁC CHỮ VIẾT TẮT

RPCM	Phương pháp co gần kề hiệu chỉnh
RPJCM	Phương pháp chiếu co hiệu chỉnh
RMSIPM	Phương pháp gần kề quán tính đa bước hiệu chỉnh
RPA	Thuật toán kiểu gần kề hiệu chỉnh
REM	Phương pháp chỉnh lặp kiểu đạo hàm tăng cường
VI (RVI)	Bài toán bao hàm thức biến phân (hiệu chỉnh)
SVI	Bài toán bao hàm thức biến phân tách
VIP (BVIP)	Bài toán bất đẳng thức biến phân (hai cấp)
OP	Bài toán tối ưu
SFP	Bài toán chấp nhận tách
SOP	Bài toán tối ưu tách
EP ( $EP(f, C)$ )	Bài toán cân bằng (cho song hàm $f$ trên tập $C$ )
REP	Bài toán cân bằng hiệu chỉnh
LC (SLC, MLC)	Điều kiện kiểu Lipschitz (mạnh, theo Mastroeni)

# MỞ ĐẦU

## 1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Luận án này nghiên cứu một số phương pháp hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng sau đây.

**Bài toán 0.1** (VI - Variational Inclusion). Cho  $\mathcal{H}$  là một không gian Hilbert thực.  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  và  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  lần lượt là các toán tử đa trị và đơn trị trên  $\mathcal{H}$ . Bài toán VI được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm điểm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x^*) + \mathcal{B}(x^*). \quad (\text{VI})$$

Bài toán bao hàm thức biến phân (VI) bắt nguồn từ bài toán tìm không điểm của ánh xạ đơn điệu cực đại được R.T. Rockafellar [93] đề cập vào năm 1976, sau đó được G.B. Passty [89] mở rộng thành bài toán tìm không điểm của tổng hai toán tử đơn điệu cực đại. Nhiều bài toán trong khoa học và kĩ thuật như bài toán LASSO (còn được biết đến là bài toán khôi phục tín hiệu thưa), bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân... [18, 45, 112] là các trường hợp riêng của bài toán VI.

Trong trường hợp toán tử tổng  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  không có tính chất đơn điệu mạnh, bài toán VI nói chung là bài toán đặt không chỉnh, tức là bài toán không ổn định theo nghĩa nghiệm của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Tính đặt không chỉnh làm cho việc giải số của bài toán trở nên khó khăn, vì chỉ một thay đổi nhỏ trong dữ liệu đầu vào cũng có thể dẫn đến một sai số rất lớn của nghiệm. Để giải các lớp bài toán đặt không chỉnh nói chung, người ta phải sử dụng các phương pháp ổn định hóa, sao cho khi sai số của dữ liệu đầu vào càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu. Một số nhà toán học đi tiên phong và đặt nền móng cho lý thuyết bài toán đặt không chỉnh có thể kể đến như A.N. Tikhonov [113], F.E. Browder [27], M.M.

Lavrentiev [74],... Bên cạnh đó, ta cũng có thể kể đến đóng góp của các nhà toán học Việt Nam như Đặng Đình Áng, Đinh Nho Hào, Đặng Đức Trọng... cho lý thuyết bài toán ngược và bài toán đặt không chỉnh đối với phương trình đạo hàm riêng. Phương pháp hiệu chỉnh do Tikhonov [113] đề xuất đã góp phần thúc đẩy mạnh mẽ cho sự phát triển của các phương pháp giải bài toán đặt không chỉnh cũng như ứng dụng của thuật giải vào các bài toán thực tế.

Chúng ta có thể tạm phân chia các nghiên cứu về bài toán VI thành hai loại: nghiên cứu định tính và nghiên cứu định lượng. Các nghiên cứu định tính bao gồm nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, sự ổn định nghiệm [73, 80]. Các nhà khoa học Việt Nam như Lâm Quốc Anh, Nguyễn Đình, Phan Quốc Khánh, Đinh Thế Lục, Hoàng Xuân Phú, Phạm Hữu Sách, Nguyễn Xuân Tấn, Nguyễn Đông Yên, ... cũng có nhiều đóng góp cho các nghiên cứu định tính của bài toán VI và các trường hợp riêng của bài toán này. Các nghiên cứu định lượng bao gồm đề xuất các thuật toán giải, nghiên cứu tốc độ hội tụ của thuật toán, áp dụng các thuật giải vào các bài toán thực tế [38, 57, 77, 93, 114]. Phương pháp cổ điển và đơn giản nhất giải bài toán này trong trường hợp  $\mathcal{B} = 0$  là phương pháp điểm gần kề, được đề xuất bởi B. Martinet [128] cho bài toán bất đẳng thức biến phân và được nghiên cứu mở rộng bởi Rockafellar [93] cho bài toán tìm không điểm của toán tử  $\mathcal{A}$  đơn điệu cực đại. Thuật toán của Rockafellar có dạng:

$$x^{k+1} = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k) \quad k = 0, 1, \dots,$$

trong đó  $\lambda_k > 0$  được gọi là *cỡ bước* và  $J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}$  là giải thức của toán tử  $\mathcal{A}$  ứng với tham số  $\lambda_k$ , cho bởi  $J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}} := (I + \lambda_k \mathcal{A})^{-1}$  trong đó  $I$  là toán tử đồng nhất trên  $\mathcal{H}$ . Bước chính của phương pháp điểm gần kề là tính giải thức của toán tử giá. Trong thực tế thì việc tính toán giải thức này thường khó thực hiện nên phương pháp điểm gần kề dường như vẫn mang nặng tính lý thuyết. Tuy nhiên, do vẻ đẹp toán học của phương pháp mà nó đã được nghiên cứu rộng rãi bởi nhiều tác giả trong các thập niên đã qua (xem [75, 121] và các tài liệu tham chiếu tương ứng trong đó). Đặc biệt, gần đây do xuất hiện một vài ý tưởng mới về tính toán giải thức, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ và khoa học máy tính nên phương pháp này trở nên hấp dẫn và phổ biến hơn.

Phương pháp điểm gần kề đã mở ra một hướng tiếp cận hiệu quả cho việc

nghiên cứu thuật giải cho bài toán VI, đó là sử dụng nguyên lý điểm bất động dựa trên toán tử giải thức. Ý tưởng này bắt nguồn từ nhận xét rằng  $x^*$  là nghiệm của bài toán VI khi và chỉ khi  $x^*$  là nghiệm của phương trình điểm bất động  $x = J_\lambda^{\mathcal{A}}(x - \lambda\mathcal{B}(x))$ . Theo hướng này, các phương pháp phân rã đã được đề xuất, nghiên cứu và phát triển, chẳng hạn như phương pháp nghịch đảo từng phần [99], phương pháp phân rã Douglas-Rachford [51]. Trong trường hợp bài toán bao hàm thức biến phân có dạng  $0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x)$  với  $\mathcal{A}$  và  $\mathcal{B}$  là các toán tử đơn điệu cực đại trên  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{B}$  đơn trị và  $\text{dom}(\mathcal{A}) \subset \text{dom}(\mathcal{B})$ , P.L. Lions và B. Mercier [77] đã đề xuất phương pháp phân rã tiến-lùi

$$x^{k+1} = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(I - \lambda_k\mathcal{B})(x^k) \quad k = 0, 1, \dots,$$

trong đó  $\lambda_k > 0$ . Phương pháp này sau đó đã được phân tích sâu hơn bởi D. Gabay [125] và Mercier [129]. Cụ thể, các tác giả này đã chỉ ra rằng nếu  $\mathcal{B}$  là  $\gamma$ -đơn điệu mạnh ngược và dãy  $\{\lambda_k\}$  là hằng số nhỏ hơn  $2\gamma$  thì dãy lặp  $\{x^k\}$  hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán ban đầu. Hơn nữa, nếu  $\mathcal{B}$  đơn điệu mạnh, thì sự hội tụ là mạnh và nghiệm của bài toán là duy nhất. H.-G. Chen và Rockafellar [38] chứng minh được rằng nếu  $\mathcal{B}$  liên tục Lipschitz,  $\text{dom}(\mathcal{B}) = \mathcal{H}$  và  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  là đơn điệu mạnh, thì phương pháp phân rã tiến-lùi sẽ hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán ban đầu, với điều kiện cỡ bước  $\lambda_k$  nhỏ hơn một ngưỡng nào đó tùy thuộc vào hệ số Lipschitz và hệ số đơn điệu mạnh.

Nhìn chung, những phương pháp phân rã kể trên được áp dụng cho nhiều lớp bài toán. Tuy nhiên sự hội tụ của các phương pháp yêu cầu một số giả thiết chặt đặt lên toán tử giá. Chẳng hạn, phương pháp phân rã tiến-lùi của Lions và Mercier [77] đòi hỏi  $\mathcal{B}$  là đơn điệu mạnh ngược, là điều kiện rất chặt. Các giả thiết này nhằm đảm bảo tính chất co hoặc một kiểu không giãn tổng quát nào đó của một toán tử liên kết tương ứng. Điều này thu hẹp khả năng ứng dụng của phương pháp. Hơn nữa, như được đề cập ở trên, việc tính giá trị của toán tử giải thức là không dễ và thường phụ thuộc chặt vào cấu trúc của bài toán đã cho. Để giảm nhẹ các điều kiện đặt lên toán tử giá, một phương án có thể sử dụng là kết hợp các phương pháp này với một số kĩ thuật khác. P. Tseng [114] đã dựa trên phương pháp phân rã tiến-lùi và ý tưởng về phương pháp đạo hàm tăng cường của G.M. Korpelevich [72] trong giải bất đẳng thức biến phân đơn điệu để đề xuất phương pháp phân rã lùi-tiến cải biên cho bài toán VI, được phát biểu như

sau:

**Phương pháp phân rã tiên-lùi cải biên.** Giả sử  $X \subset \text{dom}(\mathcal{B})$  là tập lồi, đóng sao cho  $X \cap (A + \mathcal{B})^{-1}(0) \neq \emptyset$  và  $\mathcal{B}$  thỏa mãn một trong hai điều kiện: (i)  $\mathcal{B}$  liên tục Lipschitz trên  $X \cup \text{dom}(\mathcal{A})$  hoặc (ii)  $\mathcal{B}$  liên tục (từ tôpô mạnh vào tôpô mạnh) trên  $\text{dom}(\mathcal{A})$  và  $X \subset \text{dom}(\mathcal{A})$ . Chọn  $x^0 \in X$  bất kì. Với  $k = 0, 1, \dots$ , ta xây dựng phần tử lặp  $x^{k+1}$  từ  $x^k$  theo công thức

$$\begin{aligned} y^k &= J_{\lambda_k}^A(I - \lambda_k \mathcal{B})(x^k), \\ x^{k+1} &= P_X(y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(x^k))). \end{aligned}$$

Trong đó  $P_X$  là phép chiếu metric lên tập  $X$  và  $\lambda_k$  được chọn một cách phù hợp. Tác giả cũng đưa ra một số cách chọn tập  $X$  trong những trường hợp cụ thể. Trong trường hợp đặc biệt khi  $X = \mathcal{H}$ , thuật toán của Tseng sẽ trở thành thuật toán phân rã tiên-lùi-tiến như sau:

$$\begin{aligned} y^k &= J_{\lambda_k}^A(I - \lambda_k \mathcal{B})(x^k), \\ x^{k+1} &= y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(x^k)). \end{aligned}$$

Trong vài năm trở lại đây, người ta hay nhắc đến công trình rất đáng chú ý của Y. Malitsky và M.K. Tam [83]. Ở đó, các tác giả trên đã đề xuất thuật toán phân rã tiên-phản xạ-lùi có dạng

$$x^{k+1} = J_{\lambda}^A(x^k - 2\lambda(2\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(x^{k-1}))).$$

Khác với thuật toán phân rã tiên-lùi của Lions và Mercier [77] đòi hỏi toán tử đơn trị  $\mathcal{B}$  là đơn điệu mạnh ngược, hai thuật toán của Tseng [114] và Malitsky [83] chỉ cần giả thiết  $\mathcal{B}$  là đơn điệu và liên tục Lipschitz. Đổi lại, thuật toán của Tseng phải hai lần tính giá trị của  $\mathcal{B}$ . Thuật toán của Malitsky chỉ cần một lần tính giá trị của  $\mathcal{B}$ . Tất cả các thuật toán của Lions và Mercier, của Tseng và của Malitsky và Tam kể trên đều sinh ra dãy hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán VI.

Một hướng tiếp cận khác để xây dựng thuật giải cho bài toán VI là sử dụng kỹ thuật hiệu chỉnh. Thay vì giải bài toán ban đầu, phương pháp này đã thêm một số hạng hiệu chỉnh phụ thuộc một tham số. Do vậy phương pháp này cần giải một họ các bài toán hiệu chỉnh phụ thuộc tham số để tìm một dãy các nghiệm hiệu chỉnh. Dãy này hội tụ tới một nghiệm nào đó của bài toán ban đầu khi tham

số hiệu chỉnh tiến tới không. Mặc dù bài toán hiệu chỉnh có các tính chất đẹp hơn bài toán gốc, nhưng việc tìm nghiệm hiệu chỉnh vẫn rất tốn kém. Do vậy, phương pháp này vẫn mang tính lý thuyết và khó thực hiện trong thực hành. Hơn nữa, tính hiệu quả của phương pháp có thể thấp vì nó yêu cầu giải vô số các bài toán hiệu chỉnh. Một ý tưởng đang được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu gần đây là kết hợp giữa phương pháp phân rã và kỹ thuật hiệu chỉnh để được các thuật toán hội tụ mạnh. Nhóm tác giả Đặng Văn Hiếu, Phạm Kỳ Anh, Lê Dũng Mưu và J.J. Strodiot [58] đã đề xuất hai thuật toán chỉnh lặp hội tụ mạnh sau đây để giải bài toán VI với giả thiết toán tử đa trị  $\mathcal{A}$  đơn điệu cực đại và toán tử đơn trị  $\mathcal{B}$  liên tục Lipschitz:

- **Phương pháp phân rã tiến-lùi hiệu chỉnh**

$$x^{k+1} = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) + \alpha_k \mathcal{F}(x^k))),$$

- **Phương pháp phân rã tiến-lùi-tiến hiệu chỉnh**

$$\begin{cases} y^k = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) + \alpha_k \mathcal{F}(x^k))), \\ x^{k+1} = y^k + \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)), \end{cases}$$

trong đó  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là một toán tử đơn điệu mạnh và Lipschitz tùy ý. Nếu việc tính giá trị của toán tử  $\mathcal{F}$  là đơn giản, chẳng hạn  $\mathcal{F} = I$  thì chi phí tính toán cho các thuật toán phân rã tiến-lùi hiệu chỉnh (tương ứng, thuật toán phân rã tiến-lùi hiệu chỉnh) không đắt hơn so với chi phí tính toán của thuật toán phân rã tiến lùi của Lions và Mercier (tương ứng, thuật toán phân rã tiến-lùi-tiến) nhưng lại cho các thuật toán hội tụ mạnh.

Cho  $C$  là một tập lồi đóng khác rỗng trong  $\mathcal{H}$ . Nếu  $\mathcal{A} = N_C$ , là nón pháp tuyến của  $C$ , bài toán VI sẽ trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP- variational inequality problem) sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle \mathcal{B}(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C. \quad (\text{VIP}(\mathcal{B}, C))$$

Tập nghiệm của bài toán được kí hiệu là  $\Omega_{vip}$ .

Korpelevich [72] đã đề xuất phương pháp chiếu đạo hàm tăng cường (EGM - Extragradient Method) khi nghiên cứu bài toán điểm yên ngựa. Phương pháp

EGM giải bài toán  $VIP(\mathcal{B}, C)$  được thiết kế như sau:

$$\begin{cases} y^k = P_C(x^k - \lambda \mathcal{B}(x^k)), \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda \mathcal{B}(y^k)), \end{cases} \quad (0.1)$$

trong đó  $P_C$  là phép chiếu metric lên  $C$  và  $\lambda > 0$  là tham số. Sự hội tụ của phương pháp EGM chỉ đòi hỏi tính liên tục Lipschitz và tính đơn điệu (hoặc giả đơn điệu) của toán tử  $\mathcal{B}$ . Nếu tập nghiệm  $\Omega_{vip}$  của  $VIP(\mathcal{B}, C)$  khác rỗng, dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi phép lặp (0.1) hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán  $VIP(\mathcal{B}, C)$ . Theo phương pháp này, cần phải tính toán hai phép chiếu lên  $C$  trong mỗi bước lặp. Hiển nhiên, điều này có thể ảnh hưởng đến hiệu quả tính toán của phương pháp nếu tập chấp nhận được  $C$  có cấu trúc phức tạp.

Một lớp đáng chú ý khác của các phương pháp giải bài toán VIP là các phương pháp chiếu co. Những phương pháp này đã sớm được đề xuất bởi B. He [56] và D. Sun [102] cho các bài toán VIP trong không gian Euclid. Năm 2014, X. Cai, G. Gu và B. He [31] đã phân tích và thiết lập tốc độ hội tụ của phương pháp chiếu co theo nghĩa ergodic, dựa trên điều kiện cỡ bước dự đoán. Gần đây, phương pháp này đã được mở rộng cho trường hợp không gian Hilbert vô hạn chiều [47, 49]. Phương pháp chiếu co được trình bày bởi Q.L. Dong, J. Yang và H.B Yuan [49] giải bài toán VIP có dạng sau:

$$\begin{cases} y^k = P_C(x^k - \lambda \mathcal{B}(x^k)), \\ d(x^k, y^k) = x^k - y^k - \lambda(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)), \\ x^{k+1} = x^k - \gamma \beta_k d(x^k, y^k), \end{cases} \quad (0.2)$$

trong đó  $\gamma \in (0, 1)$ ,  $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$ , và

$$\beta_k = \frac{\langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \rangle}{\|d(x^k, y^k)\|^2}.$$

Nếu  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là đơn điệu và liên tục Lipschitz, tập nghiệm  $\Omega_{vip}$  khác rỗng thì dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi phép lặp (0.2) hội tụ yếu đến nghiệm  $x^* \in \Omega_{vip}$ , trong đó  $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\Omega_{vip}}(x^k)$  (tham khảo [49]). Phương pháp này đã nhận được rất nhiều sự chú ý của một số tác giả trong những năm gần đây và được cải tiến, chỉnh sửa theo nhiều cách khác nhau [47, 48].

Các kết quả số trong [31] đã thể hiện hiệu năng tính toán ưu việt hơn của phương pháp chiếu co đối với các phương pháp đạo hàm tăng cường cổ điển,

chẳng hạn như phương pháp của Korpelevich [72]. Các phương pháp chiếu co nêu trên hầu hết đều được chứng minh là hội tụ yếu đến nghiệm đúng của bài toán ban đầu. Nhằm đạt được sự hội tụ mạnh của phương pháp chiếu co, một số tác giả đã kết hợp phương pháp này với một số kĩ thuật như phép lặp Halpern [97], phép lặp kiểu Mann [40], phương pháp gắn kết (viscosity) [110].

Quay trở lại với bài toán bao hàm thức biến phân, năm 2018, lấy ý tưởng từ các phương pháp chiếu co, C. Zhang và Y. Wang [123] đã đề xuất phương pháp co gắn kết sau đây cho bài toán VI:

$$\begin{cases} y^k = J_{\lambda_k}^A(x^k - \lambda_k \mathcal{B}(x^k)), \\ d(x^k, y^k) = x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)), \\ x^{k+1} = x^k - \gamma \beta_k d(x^k, y^k), \end{cases}$$

với  $\gamma \in (0, 2)$ ,  $\beta_k = \frac{\phi(x^k, y^k)}{\|d(x^k, y^k)\|^2}$ ,  $\phi(x^k, y^k) = \langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \rangle$ ,  $\{\lambda_k\}$  là dãy các cỡ bước thỏa mãn một số điều kiện cho trước và  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \geq \bar{\lambda} > 0$ . Với một số điều kiện nhất định, các tác giả đã chứng minh rằng dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi phương pháp đề xuất hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán VI.

Nhìn chung, các phương pháp giải bài toán VI kể trên đều chỉ sinh ra dãy lặp hội tụ yếu trong không gian vô hạn chiều. Để đạt được phương pháp hội tụ mạnh, người ta kết hợp các phương pháp hội tụ yếu với các kĩ thuật như phép lặp Halpern [39, 79, 96], phương pháp gắn kết [107]. Tuy nhiên, các kĩ thuật này cũng làm thay đổi đáng kể cấu trúc của thuật toán. Trong luận án này, chúng tôi mong muốn xây dựng được một phương pháp hội tụ mạnh là sự kết hợp giữa kĩ thuật hiệu chỉnh với thuật toán co gắn kết giải bài toán VI mà không làm thay đổi nhiều cấu trúc của thuật toán gốc.

Gần đây, để tăng tốc độ hội tụ của phương pháp lặp, người ta thường sử dụng kĩ thuật quán tính. F. Alvarez và H. Attouch [4] đã đề xuất kĩ thuật này, xuất phát từ hệ động lực bậc hai có tên là "quả cầu nặng có ma sát". Phương pháp này sau đó được sử dụng rộng rãi nhằm mục đích tăng tốc độ hội tụ của các thuật toán lặp [4, 78]. Một trong số các kết quả quan trọng nhất là thuật toán kiểu Mann quán tính đề xuất bởi P.E. Maingé [81] cho bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ

tự không gian:

$$\begin{cases} w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \\ x^{k+1} = (1 - \beta_k)w^k + \beta_k T w^k \end{cases}$$

với  $\beta_k \in (0, 1)$  và  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là ánh xạ tự không gian (xem [81, Section 2]), thoả mãn  $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$  và  $\langle x - Tx, x - q \rangle \geq \frac{1}{2\alpha} \|x - Tx\|^2 \forall (x, q) \in \mathcal{H} \times \text{Fix}(T)$ . Ở đây,  $\alpha \in (0, 1]$  và  $\text{Fix}(T)$  là tập điểm bất động của  $T$ .

Năm 2021, B. Jiang, Y. Wang và J. Yao [67] đã dựa trên các phương pháp chỉnh lập dưới đạo hàm tăng cường (RSEGM - regularized subgradient extragradient method) và chỉnh lập đạo hàm tăng cường kiểu Tseng (RTEGM - regularized Tseng's extragradient method) của Đặng Văn Hiếu và các cộng sự [59] để đề xuất các thuật toán RSEGM quán tính đa bước và RTEGM quán tính đa bước giải bài toán bất đẳng thức biến phân.

Trong luận án này, chúng ta cũng quan tâm nghiên cứu phương pháp giải bài toán bao hàm thức biến phân tách (SVI - split variational inclusion) trong hai không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}_1$  và  $\mathcal{H}_2$ :

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x^*) \text{ và } 0 \in \mathcal{B}_2 \mathcal{T}(x^*), \quad (\text{SVI})$$

trong đó  $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_1}$  và  $\mathcal{B}_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$  là hai toán tử đơn điệu cực đại và  $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn. Tập nghiệm của bài toán SVI được kí hiệu là  $\Omega_{\text{SVI}}$  và luôn được giả thiết khác rỗng. Bài toán VI có thể đưa được về bài toán SVI bằng cách đặt  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$  và  $\mathcal{B}_2$  là toán tử đồng nhất bằng 0. Bài toán SVI được đề xuất bởi A. Moudafi [85] và sau đó Y. Censor và các cộng sự [34] đã đề xuất và nghiên cứu bài toán bất đẳng thức biến phân tách và bài toán không điểm tách (SZP - split zero problem).

Các bài toán như bất đẳng thức biến phân tách, bài toán cân bằng tách, bài toán điểm bất động tách, bài toán không điểm tách, đều được có thể xem là trường hợp riêng của bài toán SVI (tham khảo [32, 35] và các tài liệu tham chiếu trong đó). Những bài toán này đã và đang được nghiên cứu sâu sắc và rộng rãi trong những năm gần đây, và chúng có thể được sử dụng để mô hình hóa các bài toán trong thực tế chẳng hạn như lập kế hoạch trong y học bức xạ - trị liệu [32], hệ cảm biến trong chụp cắt lớp vi tính và nén dữ liệu [28, 29, 32, 36, 42]. Một số nhà toán

học Việt Nam, tiêu biểu như Dương Việt Thông cũng có nhiều công trình nghiên cứu về bài toán bao hàm thức biến phân tách cùng các cộng sự [106, 108, 109].

C. Byrne, Y. Censor và A. Gibali [30] đã đề xuất thuật toán sau đây để giải bài toán (SVI) trong không gian Hilbert:

$$x^{k+1} = J_{\beta}^{\mathcal{B}_1} \left( x^k - \gamma \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) \right), \quad x^0 \in \mathcal{H}_1, \quad (0.3)$$

với  $\beta > 0$  và  $\gamma \in \left( 0, \frac{2}{\|\mathcal{T}\|^2} \right)$ . Các tác giả đã chứng minh rằng dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi (0.3) hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán (SVI). Để đạt được sự hội tụ mạnh, các tác giả đã kết hợp thuật toán (0.3) với phép lặp Halpern và đưa ra Thuật toán Halpern gần kề (HPA- Halpern proximal algorithm) sau đây để giải bài toán (SVI):

$$x^{k+1} = \alpha_k x^0 + (1 - \alpha_k) J_{\beta}^{\mathcal{B}_1} \left( x^k - \gamma \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) \right), \quad x^0 \in \mathcal{H}_1, \quad (0.4)$$

trong đó  $\beta > 0$ ,  $\gamma \in \left( 0, \frac{2}{\|\mathcal{T}\|^2} \right)$ ,  $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$  và  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ . Dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi (0.4) hội tụ mạnh đến  $x^{\dagger} = P_{\Omega}(x^0)$ , với  $P_{\Omega}$  là phép chiếu metric từ  $\mathcal{H}_1$  lên tập nghiệm  $\Omega$  của bài toán (SVI). Thuật toán gần kề gắn kết (VPA - viscosity proximal algorithm) [98] là một phương pháp mở rộng của (0.4):

$$\begin{cases} y^k = J_{\beta}^{\mathcal{B}_1} \left( x^k + \lambda \mathcal{T}^* \left( J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} - I \right) \mathcal{T}(x^k) \right), \\ x^{k+1} = \alpha_k \bar{f}(x^k) + (1 - \alpha_k) y^k, \end{cases} \quad (0.5)$$

trong đó  $x^0 \in \mathcal{H}_1$ ,  $\bar{f} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  là một ánh xạ co với hệ số  $\delta \in (0, 1)$ ,  $\beta > 0$ ,  $\lambda \in \left( 0, \frac{1}{\|\mathcal{T}\|^2} \right)$ ,  $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ , và  $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k - \alpha_{k-1}| < +\infty$ . Dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi quá trình (0.5) hội tụ mạnh đến nghiệm  $x^{\dagger} \in \Omega$  của bài toán (SVI) thỏa mãn phương trình điểm bất động  $x^{\dagger} = P_{\Omega} \bar{f}(x^{\dagger})$ . Trong trường hợp  $\bar{f}(x) = x^0$  với mọi  $x \in \mathcal{H}_1$ , thuật toán (0.5) trở thành thuật toán (0.4). Thuật toán quán tính- gắn kết- gần kề (IVPA - inertial viscosity proximal algorithm) sau đây [78] là một mở rộng khác của (0.4):

$$\begin{cases} x^0, x^1 \in \mathcal{H}_1, \\ w^k = x^k + \theta_k (x^k - x^{k-1}), \\ y^k = J_{\beta}^{\mathcal{B}_1} \left( w^k - \lambda \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(w^k) \right), \\ x^{k+1} = \alpha_k \bar{f}(x^k) + (1 - \alpha_k) y^k, \end{cases} \quad (0.6)$$

trong đó  $\beta > 0$ ,  $\lambda \in \left(0, \frac{1}{\|\mathcal{T}\|^2}\right)$ ,  $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty$ , và dãy  $\{\theta_n\} \subset [0, \theta)$  với số  $\theta > 0$  nào đó thỏa mãn điều kiện  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\theta_k}{\alpha_k} \|x^k - x^{k-1}\| = 0$ . Nếu ta lấy  $\theta_k = 0$  với mọi  $k \geq 0$ , thì thuật toán (0.6) trở thành thuật toán (0.5), và nếu mặt khác,  $\bar{f}(x) = x^0$  với mọi  $x \in \mathcal{H}_1$ , thì thuật toán (0.6) trở thành thuật toán (0.4). Dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi thuật toán (0.6) hội tụ mạnh đến nghiệm  $x^\dagger$  của bài toán (SVI), thỏa mãn phương trình điểm bất động  $x^\dagger = P_\Omega \bar{f}(x^\dagger)$ .

Gần đây, C-S. Chuang [41] đã đề xuất thuật toán gần kề sau để giải bài toán (SVI) trong không gian Hilbert:

### Thuật toán 0.1.

**Khởi tạo:** Lấy  $x^0 \in \mathcal{H}_1$  và  $\{\beta_k\} \subset [\beta, +\infty) \subset (0, +\infty)$ .

### Các bước lặp:

*Bước 1.* Tính  $y^k = J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_1} \left( x^k - \gamma_k \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) \right)$ , với  $\gamma_k > 0$  thỏa mãn điều kiện

$$\gamma_k \left\| \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(y^k) \right\| \leq \delta \|x^k - y^k\|, \quad 0 < \delta < 1.$$

*Bước 2.* Nếu  $x^k = y^k$ , dừng thuật toán. Nếu không, tới Bước 3.

*Bước 3.* Tính  $x^{k+1} = J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_1} \left[ x^k - \lambda_k D(x^k, \gamma_k) \right]$ , trong đó

$$D(x^k, \gamma_k) = x^k - y^k - \gamma_k \left[ \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta_k}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(y^k) \right],$$

$$\lambda_k = \frac{\left\langle x^k - y^k, D(x^k, \gamma_k) \right\rangle}{\|D(x^k, \gamma_k)\|^2}.$$

*Bước 4.* Cập nhật  $k := k + 1$  và quay trở lại Bước 1.

Dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 0.1 hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán (SVI) dưới một vài điều kiện phù hợp đặt lên toán tử giá và các tham số điều khiển. Nhược điểm của thuật toán trên là phải tính giải thức  $J_{\beta}^{\mathcal{B}_1}$  hai lần trong mỗi bước lặp, điều này làm tăng chi phí tính toán. Trong luận án này, chúng tôi mong muốn cải biên thuật toán trên để được phương pháp hội tụ mạnh và chỉ cần tính giải thức  $J_{\beta}^{\mathcal{B}_1}$  một lần tại mỗi bước lặp.

Trong luận án này, ta cũng nghiên cứu thuật giải cho bài toán cân bằng (EP-equilibrium problem). Cho  $\mathcal{H}$  là một không gian Hilbert và  $C$  là một tập con lồi

đóng khác rỗng của  $\mathcal{H}$ . Cho  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một song hàm cân bằng trên  $C$ , tức là  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ . Xét bài toán cân bằng sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \text{ với mọi } y \in C. \quad (\text{EP}(f, C))$$

Ta kí hiệu  $Sol(f, C)$  là tập nghiệm của bài toán  $\text{EP}(f, C)$  và luôn giả sử rằng tập này là khác rỗng.

Bài toán EP được đề xuất bởi H. Nikaido và K. Isoda [88] nhằm tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác. Tới năm 1972, nó tiếp tục được nghiên cứu bởi K. Fan [53] dưới dạng bất đẳng thức minimax. Năm 1992, tên gọi Bài toán cân bằng chính thức xuất hiện trong công trình [86] của Lê Dũng Mưu và W. Oettli. Một số bài toán quan trọng trong toán học ứng dụng như bài toán tối ưu, bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng Nash, bất đẳng thức biến phân đều là trường hợp riêng của bài toán EP (xem [68, Section 2.2]).

Do tầm quan trọng và tính phổ biến trong ứng dụng của bài toán EP, nhiều khía cạnh khác nhau của bài toán này đã được quan tâm nghiên cứu một cách sâu rộng bởi các nhà toán học trong những năm gần đây. Ở Việt Nam, bài toán EP là chủ đề thời sự, nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học, có thể kể đến như Phạm Kỳ Anh [5, 6, 8], Phạm Ngọc Anh [9, 10], Trịnh Ngọc Hải [5, 6, 8, 55], Đặng Văn Hiếu [60–62], Lê Dũng Mưu [60, 86, 87, 90], Nguyễn Văn Quý [87], Lê Xuân Thanh [50], Nguyễn Thị Thu Thủy [111], Nguyễn Thế Vinh [64, 116], Lê Hải Yến [119]... Bên cạnh việc nghiên cứu sự tồn tại của các nghiệm và tính ổn định của bài toán EP, các tác giả còn xây dựng các phương pháp lặp để giải số bài toán và nghiên cứu hiệu quả của chúng. Đầu tiên, có thể kể đến phương pháp điểm gần kề. Lấy ý tưởng từ các công trình của Martinet [128] và Rockafellar [93], các tác giả A. Moudafi [82] và I.V. Konnov [70] đã xây dựng phương pháp điểm gần kề giải bài toán cân bằng. Một hướng tiếp cận khác giải bài toán cân bằng là sử dụng phương pháp đạo hàm tăng cường. Xuất phát từ thuật toán của Korperlevich đề xuất để giải bài toán điểm yên ngựa [72], nó đã được nhiều tác giả nghiên cứu và tổng quát hóa cho bài toán cân bằng. Phương

pháp đạo hàm tăng cường áp dụng cho bài toán cân bằng [54, 90] có dạng

$$\begin{cases} x^0 \in C \\ y^k = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 \right\}, \\ x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 \right\}. \end{cases}$$

Với giả thiết song hàm  $f$  giả đơn điệu và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz theo Mastroeni với các hệ số  $c_1, c_2$ ,  $0 < \lambda < \min \left\{ \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2} \right\}$ , dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi thuật toán trên hội tụ yếu tới một nghiệm của bài toán EP. Ngoài ra, có thể kể đến một vài phương pháp khác và các phiên bản cải biên của chúng là phương pháp kiểu đạo hàm tăng cường phân rã, phương pháp đường dốc, phương pháp dưới đạo hàm [5, 71, 94]. Tuy nhiên, nhìn chung các phương pháp kể trên đều chỉ cho ta thuật toán sinh ra dãy lặp hội tụ yếu, trong khi sự hội tụ mạnh hữu ích hơn trong các không gian Hilbert vô hạn chiều. Để đạt được sự hội tụ mạnh, người ta cần sử dụng một số kỹ thuật bổ sung, chẳng hạn như kỹ thuật hiệu chỉnh, kỹ thuật gắn kết (viscosity), kỹ thuật gắn kết-lai ghép, kỹ thuật thu hẹp (xem [60, 101, 117] và các tài liệu tham chiếu tương ứng).

Trong những năm trở lại đây, phương pháp hệ động lực đã được nghiên cứu và ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như tối ưu lồi, lý thuyết trò chơi, lý thuyết điểm bất động, phương trình đạo hàm riêng (xem [3, 16, 24] và các tài liệu tham chiếu tương ứng)... Việc nghiên cứu mối liên quan giữa các hệ động lực liên tục và rời rạc đang là chủ đề toán học rất sôi động, được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu [3, 11, 14, 24, 25, 44]. Công trình tiên phong [44] của M.G. Crandall và A. Pazy đã tạo dựng một nền tảng cho nghiên cứu về các hệ động lực được điều khiển bởi toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert, vì bài báo tập trung vào giải quyết các câu hỏi về sự tồn tại và duy nhất của quỹ đạo nghiệm và liên hệ với lý thuyết nửa nhóm co phi tuyến.

Các hệ động lực được điều khiển bởi các toán tử đơn điệu cực đại được xem như công cụ hữu ích để nghiên cứu các thuật toán số cho bài toán bao hàm thức đơn điệu và các bài toán tối ưu bằng cách rời rạc hóa theo thời gian các hệ động lực liên tục. Cách tiếp cận của phương pháp này là xây dựng một bài toán Cauchy trừu tượng có duy nhất nghiệm mạnh toàn cục. Lấy giới hạn của nghiệm này khi biến thời gian đến vô cùng, ta được nghiệm của bài toán gốc. Phương pháp hệ

động lực không chỉ giúp chúng ta có sự hiểu biết tốt hơn về tính chất tiệm cận của các phương pháp giải số mà còn giúp xây dựng các phương pháp mới bằng kỹ thuật rời rạc hóa. S. Banert và R. Bot [16] đã đề xuất hệ phương trình vi phân tiên-lùi-tiến sau đây để giải bài toán bao hàm thức đơn điệu VI:

$$\begin{cases} z(t) = J_{\gamma(t)}^{\mathcal{A}}(x(t) - \gamma(t)\mathcal{B}(x(t))), \\ 0 = \dot{x}(t) + x(t) - z(t) - \gamma(t)\mathcal{B}(x(t)) + \gamma(t)\mathcal{B}(z(t)), \\ x(0) = x^0, \end{cases}$$

trong đó  $\gamma(t) : [0, +\infty) \rightarrow (0, \beta)$  là hàm đo được Lebesgue và  $x^0 \in \mathcal{H}$ . Phương pháp này được chứng minh là hội tụ yếu với giả thiết toán tử đa trị  $\mathcal{A}$  đơn điệu cực đại và toán tử đơn trị  $f$  đơn điệu và liên tục Lipschitz. Với cùng giả thiết như vậy, các tác giả Phạm Kỳ Anh và Trịnh Ngọc Hải [7] đã kết hợp phương pháp hệ động lực và kỹ thuật hiệu chỉnh để xây dựng một thuật toán hội tụ mạnh giải bài toán VI, có công thức như sau:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = J_{\gamma(t)}^{\mathcal{A}}(x(t) - \lambda(t)(\mathcal{B}(x(t)) + \alpha(t)\mathcal{F}(x(t)))), \\ x(0) = x^0. \end{cases}$$

Nhóm các tác giả Z.-Z. Tan, R. Hu, M. Zhu, Y.-P. Fang [105] cũng có một công trình rất đáng chú ý về sử dụng phương pháp hệ động lực giải bài toán chấp nhận tách. Tuy nhiên, theo những gì chúng tôi tìm hiểu được, số lượng công trình nghiên cứu về ứng dụng của phương pháp hệ động lực để giải bài toán cân bằng còn khá hạn chế [8, 115, 118]. Dường như lớp các bài toán cân bằng có thể áp dụng phương pháp này là tương đối ít. Điều này có thể do các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm mạnh toàn cục cho hệ động lực liên kết với các bài toán cân bằng là khá chặt. Một ý tưởng giúp ta vượt qua được khó khăn kể trên là sử dụng kỹ thuật hiệu chỉnh. Kỹ thuật này đã được áp dụng để giải các bài toán cân bằng [60, 65, 71]. Một điều đáng lưu ý là đối với phương pháp hiệu chỉnh, cách chọn cỡ bước đóng vai trò quan trọng trong việc tăng hiệu quả tính toán và cải thiện tốc độ hội tụ. Năm 2022, nhóm tác giả Đặng Văn Hiếu, Lê Dũng Mưu và Phạm Kim Quý [60] đã đề xuất một phương pháp chỉnh lặp (IRM- iterative regularization method) giải bài toán EP đơn điệu có dạng: lấy  $x^0, y^0 \in C$ , với mỗi

$k \geq 0$ , tính  $x^{k+1}$  và  $y^{k+1}$  bởi

$$\begin{cases} x^{k+1} = \text{prox}_{\lambda_k(f(y^k, \cdot) + \alpha_k g(x^k, \cdot))}(x^k), \\ y^{k+1} = \text{prox}_{\lambda_{k+1}(f(y^k, \cdot) + \alpha_k g(x^{k+1}, \cdot))}(x^k), \end{cases} \quad (0.7)$$

với  $g : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm đơn điệu mạnh và  $\lambda_k \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subset (0, +\infty)$ ,  $\alpha_k > 0$  là các tham số phù hợp, còn  $\text{prox}_h$  được cho bởi

$$\text{prox}_h x = \text{argmin} \left\{ h(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\}.$$

Tiếp tục với kĩ thuật chỉnh lặp, Đặng Văn Hiếu và Phạm Kim Quý [62] đã trình bày các phương pháp tối ưu một bước để giải bài toán EP. Thay vì phải xử lý hai bài toán con lồi mạnh trong mỗi bước lặp, các phương pháp trong [62] chỉ đòi hỏi giải một bài toán con. Cụ thể, thuật toán trong [62] có dạng:

$$x^{k+1} = \text{prox}_{\lambda_k(f(x^k, \cdot) + \alpha_k g(x^k, \cdot))}(x^k), \quad (0.8)$$

trong đó  $\{\lambda_k\}$ ,  $\{\alpha_k\}$  thỏa mãn một số điều kiện ràng buộc phù hợp. Với lớp bài toán cân bằng đơn điệu, các phương pháp (0.7) và (0.8) hội tụ mạnh đến nghiệm  $u^\dagger$  của bài toán cân bằng ban đầu, thỏa mãn  $u^\dagger \in \text{Sol}(g, \text{Sol}(f, C))$ . Phiên bản liên tục của (0.8) được phát triển bởi Phạm Kỳ Anh, Trịnh Ngọc Hải và Vũ Tiến Dũng [8] trong đó các tác giả đã trình bày một hệ động lực hiệu chỉnh liên kết với bài toán EP, có dạng

$$\begin{cases} y(t) = \text{prox}_{\lambda(t)(f(x(t), \cdot) + \alpha(t)g(x(t), \cdot))}(x(t)), \\ \dot{x}(t) + x(t) = y(t), \\ x(0) = x^0 \in C, \end{cases} \quad (0.9)$$

trong đó  $\lambda : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  là một hàm liên tục,  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  là hàm khả vi liên tục, thỏa mãn

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0; \int_0^{+\infty} \lambda(t)\alpha(t) = +\infty; \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)}{\alpha(t)} = 0; \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\lambda(t)\alpha^2(t)} = 0.$$

Nghiệm mạnh toàn cục của hệ (nếu tồn tại) cũng được chứng minh là hội tụ mạnh đến nghiệm của bài toán EP( $f, C$ ). Việc  $\lambda(t)$  là vô cùng bé bậc cao hơn  $\alpha(t)$  có thể là một hạn chế của phương pháp, làm giảm tốc độ hội tụ. Hệ (0.9) có thể

được rời rạc hóa dưới dạng

$$\begin{cases} y^k = \text{prox}_{\lambda_k(f(x^k, \cdot) + \alpha_k g(x^k, \cdot))}(x^k), \\ x^{k+1} = (1 - h_k)x^k + h_k y^k, \end{cases} \quad (0.10)$$

với  $\{\alpha_k\}$  và  $\{\lambda_k\}$  là các dãy số thực dương dần về 0. Các tác giả đã chỉ ra rằng thuật toán (0.10) là hội tụ mạnh.

Từ những yếu tố lịch sử và các công trình nghiên cứu đã đề cập và phân tích ở trên, một cách tự nhiên, ta có thể đặt ra những vấn đề sau cần nghiên cứu trong luận án:

- *Vấn đề thứ nhất* là xây dựng các phương pháp lặp hội tụ mạnh giải bài toán bao hàm thức biến phân đơn điệu có cấu trúc tổng và bài toán bao hàm thức biến phân đơn điệu tách dựa trên kĩ thuật hiệu chỉnh, với những điều kiện đặt lên toán tử giá là tương đối nhẹ, không đòi hỏi tính đơn điệu mạnh ngược hay đơn điệu mạnh.

- *Vấn đề thứ hai* là lựa chọn được các tham số phù hợp, đặc biệt là dãy cỡ bước cho các phương pháp được đề xuất, trong cả hai trường hợp biết và không biết hệ số Lipschitz của toán tử  $\mathcal{B}$  trong bài toán VI (đối với bài toán SVI là chuẩn của toán tử tuyến tính  $\mathcal{A}$ ).

- *Vấn đề thứ ba* là kết hợp được phương pháp giải bài toán VI với kĩ thuật quán tính nhằm làm tăng tốc độ hội tụ của thuật toán.

- *Vấn đề thứ tư* là xây dựng một phương pháp hệ động lực giải bài toán cân bằng EP và chỉ ra sự tồn tại duy nhất nghiệm mạnh toàn cục của hệ này dưới những điều kiện ràng buộc phù hợp. Ngoài ra, với giả thiết nghiệm mạnh toàn cục đã tồn tại duy nhất và các điều kiện nhẹ đặt lên song hàm  $f$ , quỹ đạo của hệ động lực hội tụ mạnh về nghiệm của bài toán EP khi biến thời gian tiến ra vô cùng. Hơn nữa, hàm cỡ bước  $\lambda(t)$  của phương pháp nhận được không quá nhỏ, theo nghĩa bị chặn bởi một số dương hoặc dần về 0 không quá nhanh. Điều này khắc phục được hạn chế trong phương pháp hệ động lực trong [8] là  $\lambda(t)$  dần về 0 nhanh.

- *Vấn đề thứ năm* là rời rạc hóa hệ động lực đã trình bày nhằm thu được một phương pháp lặp sinh ra dãy hội tụ mạnh về nghiệm của bài toán cân bằng.

## 2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu và đề xuất một số phương pháp hiệu chỉnh giải các bài toán dạng bao hàm thức đơn điệu, bài toán cân bằng trong không gian Hilbert thực và một số bài toán liên quan. Cụ thể như sau:

- Xây dựng phương pháp co gần kề hiệu chỉnh giải bài toán VI.
- Kết hợp phương pháp co gần kề hiệu chỉnh nói trên với kỹ thuật quán tính đa bước để thu được thuật toán mới có tốc độ hội tụ được cải thiện.
- Xây dựng phương pháp kiểu gần kề hiệu chỉnh giải bài toán SVI.
- Xây dựng phương pháp hệ động lực kiểu đạo hàm tăng cường hiệu chỉnh giải bài toán EP, đồng thời, xây dựng phương pháp lặp giải bài toán EP bằng cách rời rạc hóa hệ động lực trên.

Tất cả các thuật toán được đề xuất trong luận án đều được chứng minh là hội tụ mạnh. Chúng tôi cũng thực hiện thử nghiệm số để đánh giá hiệu quả của các thuật toán mới, so sánh chúng với những thuật toán đã có đồng thời áp dụng chúng vào một số mô hình rút ra từ các bài toán thực tế.

## 3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

*Đối tượng nghiên cứu:* là bài toán bao hàm thức biến phân đơn điệu có cấu trúc tổng (VI), bài toán bao hàm thức biến phân tách (SVI) cũng như bài toán cân bằng (EP).

*Phạm vi nghiên cứu:* nghiên cứu lý thuyết, kết hợp các phương pháp đã biết đồng thời đề xuất thuật toán mới để giải bài toán VI, bài toán SVI, bài toán EP và tiến tới áp dụng vào các bài toán cụ thể.

## 4. Phương pháp nghiên cứu

Từ các thuật toán hội tụ yếu đã biết, ta cải tiến và tích hợp nhằm phát triển các thuật toán hội tụ mạnh mới, không quá phức tạp nhưng hiệu quả. Ý tưởng về giải các bài toán đặt không chỉnh trong luận án là chọn một nghiệm của bài toán ban đầu thông qua việc tìm nghiệm của một bài toán hai cấp đặt chỉnh, ý tưởng này bắt nguồn từ việc tham khảo công trình [46] của các tác giả Bùi Văn

Định, Phạm Gia Hưng, Lê Dũng Mưu. Những công cụ mà chúng ta quan tâm là phương pháp co gần kề, kĩ thuật hiệu chỉnh, kĩ thuật quán tính, phương pháp đạo hàm tăng cường, phương pháp hệ động lực. Bên cạnh đó, chúng ta cũng quan tâm đến phương pháp chọn cỡ bước phù hợp cho thuật toán dựa trên *điều kiện cỡ bước dự đoán* (PSC). Các thuật toán đề xuất được áp dụng vào một số bài toán cụ thể. Cuối cùng, ta thực hiện các thử nghiệm số để minh họa tính hiệu quả của các phương pháp thu được và so sánh với các thuật toán đã biết.

## 5. Cấu trúc và kết quả của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các công trình đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương. Các kết quả chính được trình bày trong Chương 2 và Chương 3.

Trong Chương 1, ta trình bày một số kiến thức chuẩn bị và kết quả bổ trợ được sử dụng trong luận án. Cụ thể, chương này nhắc lại các tính chất hình học của không gian Hilbert, các khái niệm liên quan đến toán tử và giải thức của toán tử, một số khái niệm và tính chất của song hàm, bài toán đặt không chỉnh và kĩ thuật hiệu chỉnh. Sau đó, ta nhắc lại một số tính chất của bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng, bài toán bao hàm thức biến phân tách và bài toán cân bằng. Cuối chương, chúng ta đề cập đến một số kết quả bổ trợ về dãy số sẽ được sử dụng trong các phần sau của luận án.

Ở phần đầu Chương 2, phương pháp co gần kề hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân (VI) được đề xuất. Trong phương pháp này, ta kết hợp ý tưởng về phương pháp co gần kề trong [123] với kĩ thuật hiệu chỉnh. Trên cơ sở này, ta tiếp tục kết hợp phương pháp nhận được và kĩ thuật quán tính đa bước để thu được phương pháp đa bước hiệu chỉnh giải bài toán VI. Kĩ thuật quán tính đa bước này được lấy cảm hứng từ phương pháp đạo hàm tăng cường kiểu Tseng hiệu chỉnh quán tính đa bước (MIRTEGM - multi-step regularized Tseng's extragradient method) của Jiang và các cộng sự [67]. Ở phần tiếp theo, lấy ý tưởng từ phương pháp gần kề trong [41] kết hợp với kĩ thuật hiệu chỉnh, chúng ta đề xuất một phương pháp lặp kiểu gần kề hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân tách. Các phương pháp chọn cỡ bước phù hợp cũng được ta trình bày cho từng thuật toán.

Chương 3 đề cập tới bài toán cân bằng. Chúng ta kết hợp giữa ý tưởng về cách xây dựng hệ động lực trong [8] và phương pháp kiểu đạo hàm tăng cường của nhóm tác giả Trần Đình Quốc, Lê Dũng Mưu và Nguyễn Văn Hiền [90] để thu được hệ động lực có quỹ đạo hội tụ mạnh dưới các điều kiện nhẹ đặt lên song hàm  $f$  và cỡ bước  $\lambda(t)$ . Sau đó, ta rời rạc hóa hệ động lực trên để thu được một phương pháp lặp hội tụ mạnh đến nghiệm của bài toán cân bằng.

Cuối mỗi chương, chúng tôi thực hiện một số kết quả thử nghiệm số cho các phương pháp đề xuất và so sánh với các phương pháp đã biết khác. Tất cả các chương trình được viết bằng phần mềm MATLAB2021a và chạy trên laptop Intel(R) Core(TM) i3-7100U CPU @ 2.40GHz, RAM 4.00 GB. Chú ý rằng, việc nghiên cứu đánh giá tốc độ hội tụ cho các phương pháp hiệu chỉnh nói chung là không thực hiện được, trừ trường hợp có thêm các giả thiết về nghiệm, như kiểu "điều kiện nguồn" (source conditions) trong lý thuyết phương trình toán tử. Để minh họa ưu điểm của các thuật toán cho các bài toán chưa biết trước nghiệm, ta thường dùng một hàm đo sai số của một bài toán điểm bất động tương ứng.

Các kết quả của luận án này đã được công bố trong 5 bài báo trong danh mục công trình khoa học, trong đó có 3 bài đã được đăng trong các tạp chí thuộc danh mục SCIE và 2 bài đã được đăng trong các tạp chí thuộc danh mục SCOPUS, và cũng được báo cáo tại:

1. Xêmina của bộ môn Toán học tính toán và Toán ứng dụng, Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 21, Ba Vì, 20-22/4/2023.
3. International Conference on Optimization and Variational Analysis with Applications (ICOVAA), VIASM, Hanoi, July 12-15, 2023.
4. Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 10, Đà Nẵng, 8-12/8/2023.
5. Gặp gỡ Toán học 2024 - Hội thảo Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Vĩnh Phúc, 28-29/9/2024.
6. Hội nghị Khoa học Khoa Toán-Cơ-Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội, 09/10/2024.

## Chương 1

# KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản và kết quả bổ trợ được sử dụng trong hai chương tiếp theo. Phần đầu chương trình bày một số kiến thức trong không gian Hilbert bao gồm định nghĩa và các tính chất của phép chiếu, toán tử, song hàm, cũng như giới thiệu về bài toán đặt không chỉnh và kỹ thuật hiệu chỉnh. Phần tiếp theo của chương giới thiệu về bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng, bài toán bao hàm thức biến phân tách và bài toán cân bằng. Phần cuối của chương nhắc lại kết quả sơ cấp về dãy số được ứng dụng xuyên suốt trong cả Chương 2 và Chương 3. Các khái niệm và kết quả được trình bày trong chương này chủ yếu được tham khảo trong các tài liệu [13, 19, 23, 45, 92].

### 1.1 Một số kiến thức cơ bản

#### 1.1.1 Một số khái niệm cơ bản trong không gian Hilbert

Trong luận án này, không gian Hilbert luôn luôn được hiểu là không gian Hilbert thực. Cho  $\mathcal{H}$  là một không gian Hilbert. Ta kí hiệu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  là tích vô hướng của  $\mathcal{H}$ , tích này cảm sinh chuẩn tương ứng  $\| \cdot \|$ . Khi ta xét hai không gian Hilbert  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  và muốn tránh nhầm lẫn thì ta sẽ kí hiệu tích vô hướng và chuẩn của chúng lần lượt là  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1}, \| \cdot \|_{\mathcal{H}_1}$  và  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_2}, \| \cdot \|_{\mathcal{H}_2}$ . Trong trường hợp ngược lại, nếu không cần nhấn mạnh đến sự khác nhau giữa hai không gian, ta sẽ dùng  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  và  $\| \cdot \|$  chung cho cả  $\mathcal{H}_1$  và  $\mathcal{H}_2$ . Dãy  $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$  được gọi là hội tụ mạnh (hoặc hội tụ theo chuẩn) đến  $x \in \mathcal{H}$  nếu  $\|x^k - x\| \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$  và được viết là  $x^k \rightarrow x$ . Dãy  $\{x^k\}$  được gọi là hội tụ yếu tới  $x$ , kí hiệu  $x^k \rightharpoonup x$  nếu  $\langle y, x^k - x \rangle \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$  với mọi  $y \in \mathcal{H}$ . Mọi dãy hội tụ mạnh thì hội tụ yếu, điều ngược lại nói chung không đúng. Tuy nhiên, không gian Hilbert  $\mathcal{H}$  có tính chất Kadec-Klee, tức là với

mỗi dãy  $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ , nếu  $x^k \rightarrow x \in \mathcal{H}$  và  $\|x^k\| \rightarrow \|x\|$  thì  $x^k \rightarrow x$ . Trong không gian Hilbert hữu hạn chiều, sự hội tụ yếu và hội tụ mạnh là tương đương. Trong không gian Hilbert bất kì, mọi dãy hội tụ yếu đều bị chặn. Ngoài ra, mọi dãy bị chặn đều chứa dãy con hội tụ yếu.

Các tính chất về chuẩn sau đây là hiển nhiên

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}; \quad (1.1)$$

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\| \leq \frac{1}{2} \left( \nu \|x\|^2 + \frac{1}{\nu} \|y\|^2 \right), \quad \forall \nu > 0, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}; \quad (1.2)$$

$$\|\tau x + (1 - \tau)y\|^2 \leq \tau \|x\|^2 + (1 - \tau) \|y\|^2, \quad \forall \tau \in (0, 1), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \quad (1.3)$$

Cho  $r$  là số thực dương,  $x^0 \in \mathcal{H}$ . Kí hiệu,  $B[x^0, r] = \{x \in \mathcal{H} : \|x - x^0\| \leq r\}$ ,  $B(x^0, r) = \{x \in \mathcal{H} : \|x - x^0\| < r\}$  và  $S(x^0, r) = \{x \in \mathcal{H} : \|x - x^0\| = r\}$  lần lượt là hình cầu đóng, hình cầu mở và mặt cầu tâm  $x^0$ , bán kính  $r$ .

**Định nghĩa 1.1.** [19] Tập  $C$  trong không gian Hilbert  $\mathcal{H}$  được gọi là:

- (i) *bị chặn (giới nội)* nếu tồn tại hình cầu  $B[x^0, r]$  chứa  $C$ ;
- (ii) *đóng (tương ứng, đóng yếu)* nếu mọi dãy  $\{x^k\} \subset C$  hội tụ (hội tụ yếu) tới  $x$  thì  $x \in C$ . Tập đóng bé nhất chứa  $C$  được gọi là *bao đóng* của  $C$ , kí hiệu là  $\bar{C}$ ;
- (iii) *compact tương đối (tương ứng, tương đối yếu)* nếu mọi dãy vô hạn  $\{x^k\} \subset C$  đều chứa một dãy con hội tụ (tương ứng, hội tụ yếu). Trong không gian Hilbert, mọi tập bị chặn là compact tương đối yếu;
- (iv) *lồi* nếu với mọi  $x, y \in C$  thì  $tx + (1 - t)y \in C$  với mọi  $t \in [0, 1]$ . Nói riêng,  $\mathcal{H}$  là tập lồi và  $\emptyset$  cũng là tập lồi theo quy ước.

Nón pháp tuyến là một khái niệm quan trọng trong cả lý thuyết và ứng dụng của tối ưu lồi.

**Định nghĩa 1.2.** [19, Definition 6.37] Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là một tập con lồi khác rỗng và  $x^* \in \mathcal{H}$ . Khi đó, *nón pháp tuyến* của  $C$  tại  $x^*$  là tập cho bởi

$$N_C(x^*) = \begin{cases} \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C\} & \text{nếu } x^* \in C, \\ \emptyset & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Cho  $C \subset \mathcal{H}$  và  $C \neq \emptyset$ . Xét hàm số  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Ta gọi các tập

$$\text{dom}(\varphi) = \{x \in C : \varphi(x) < +\infty\},$$

$$\text{epi}(\varphi) = \{(x, m) \in C \times \mathbb{R} : \varphi(x) \leq m\}$$

lần lượt là *miền hữu hiệu* và *trên đồ thị* của hàm  $\varphi$ . Hàm  $\varphi$  thỏa mãn  $\text{dom}(\varphi) \neq \emptyset$  và  $\varphi(x) > -\infty$  với mọi  $x \in C$  được gọi là *hàm chính thường* trên  $C$ .

Sau đây ta nhắc lại khái niệm hàm lồi, là khái niệm quan trọng và được sử dụng xuyên suốt trong các chương sau của luận án.

**Định nghĩa 1.3.** [23] Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập lồi đóng khác rỗng. Hàm chính thường  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  được gọi là *lồi* nếu với mọi  $t \in [0, 1]$  và mọi  $x, y \in C$ ,

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y),$$

ngoài ra  $\varphi$  được gọi là *lồi chặt* nếu dấu bằng ở bất đẳng thức trên xảy ra nếu và chỉ nếu  $x = y$ .

Dễ thấy, hàm  $\varphi$  lồi khi và chỉ khi  $\text{epi}(\varphi)$  là tập con lồi của  $C \times \mathbb{R}$ . Ngoài ra, nếu  $\varphi$  là hàm lồi thì  $\text{dom}(\varphi)$  là tập lồi.

**Ví dụ 1.1.** (i) Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là một tập lồi, với  $0 \in C$  và  $C \setminus \{0\} \neq \emptyset$ . Khi đó hàm  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$  là hàm lồi.

(ii) Cho  $C$  là một tập con của  $\mathcal{H}$ . Hàm  $\iota_C : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  cho bởi

$$\iota_C(u) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } u \in C, \\ +\infty & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

được gọi là *hàm chỉ* của  $C$ .  $\iota_C$  là hàm lồi khi và chỉ khi  $C$  là tập lồi.

**Định nghĩa 1.4.** [19] Cho  $\emptyset \neq C \in \mathcal{H}$ . Hàm số  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  được gọi là

(i) *nửa liên tục dưới* (tương ứng: *nửa liên tục trên*) tại  $x^* \in C$  nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset C$  sao cho  $x^k \rightarrow x^*$  thì  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k) \geq \varphi(x^*)$  (tương ứng:  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k) \leq \varphi(x^*)$ );

(ii) *nửa liên tục dưới yếu* (tương ứng: *nửa liên tục trên yếu*) tại  $x^* \in C$  nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset C, x^k \rightharpoonup x^*$  thì  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k) \geq \varphi(x^*)$  (tương ứng:  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k) \leq \varphi(x^*)$ );

(iii) *liên tục yếu theo dãy* trên  $C$  nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset C$  thỏa mãn  $x^k \rightharpoonup x^* \in C$  thì  $\varphi(x^k) \rightarrow \varphi(x^*)$  khi  $k \rightarrow \infty$ .

Hàm  $\varphi$  là nửa liên tục dưới (nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới yếu, nửa liên tục trên yếu) trên  $C$  nếu nó nửa liên tục dưới (nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới yếu, nửa liên tục trên yếu) tại mọi điểm  $x \in C$ .

Tiếp theo, ta nhắc lại khái niệm dưới vi phân được sử dụng nhiều trong luận án.

**Định nghĩa 1.5.** [19, Definition 16.1] Cho hàm chính thường  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  và  $x^* \in \text{dom}(\varphi)$ . Khi đó, vectơ  $y \in \mathcal{H}$  được gọi là *dưới đạo hàm* của hàm  $\varphi$  tại  $x^*$  nếu với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , ta có  $\langle y, x - x^* \rangle \leq \varphi(x) - \varphi(x^*)$ .

Tập hợp tất cả dưới đạo hàm của hàm  $\varphi$  tại  $x^*$ , kí hiệu là  $\partial\varphi(x^*)$ , được gọi là *dưới vi phân* của  $\varphi$  tại  $x^*$ . Hàm  $\varphi$  được gọi là *khả dưới vi phân* tại  $x^*$ , nếu  $\partial\varphi(x^*) \neq \emptyset$ .

Ta có kết quả sau

**Bổ đề 1.1.** [19, Proposition 16.21] *Giả sử hàm  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  lồi, chính thường, nửa liên tục dưới. Khi đó,  $\varphi$  khả dưới vi phân trên  $\text{int}(\text{dom}(\varphi))$ .*

**Bổ đề 1.2** (Quy tắc Fermat). [19, Theorem 16.2] *Cho  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow (-\infty, +\infty]$  là hàm lồi, chính thường. Khi đó  $x^* \in \text{argmin } \varphi$  khi và chỉ khi  $0 \in \partial\varphi(x^*)$ . Nói cách khác, ta có  $\text{argmin } \varphi = \text{zer}(\partial\varphi) := \{x^* \in \mathcal{H} : 0 \in \partial\varphi(x^*)\}$ .*

Ta có hệ quả sau đây của Bổ đề 1.2, áp dụng cho  $\varphi := h + \iota_C$ .

**Hệ quả 1.1.** [45] *Cho  $C$  là tập lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert  $\mathcal{H}$  và  $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là hàm lồi, nửa liên tục dưới, chính thường. Giả sử  $h$  liên tục tại một điểm nào đó của  $C$  hoặc tồn tại một điểm trong của  $C$  mà  $h$  là hữu hạn. Khi đó,  $x^*$  là nghiệm của bài toán tối ưu lồi  $\min \{h(x) : x \in C\}$  khi và chỉ khi  $0 \in \partial h(x^*) + N_C(x^*)$ .*

### 1.1.2 Phép chiếu metric, toán tử và giải thức của toán tử

Cho  $C$  là tập lồi, đóng, khác rỗng trong  $\mathcal{H}$ . Khi đó, với mỗi  $x \in \mathcal{H}$ , tồn tại duy nhất  $y \in C$  sao cho  $\|y - x\| = d(x, C)$ . Từ đó, ta có định nghĩa về phép chiếu như sau.

**Định nghĩa 1.6.** [19, Definition 3.7] Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó, ánh xạ  $P_C : \mathcal{H} \rightarrow C$  cho bởi  $P_C(x) = \operatorname{argmin}\{\|y - x\| : y \in C\}$  được gọi là *phép chiếu metric* (hay đơn giản là phép chiếu) từ  $\mathcal{H}$  lên  $C$ .

**Ví dụ 1.2.** (i) Lấy  $C = B(0, 1)$  thì với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , ta có  $P_C(x) = \frac{1}{\max\{\|x\|, 1\}}x$ .  
(ii) Giả sử  $u$  là một vector khác 0 trong  $\mathcal{H}$ , và lấy  $C = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, u \rangle = \eta\}$ . Khi đó,  $P_C(x) = x + \frac{\eta - \langle x, u \rangle}{\|u\|^2}u$  với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , và vì vậy  $d(x, C) = \frac{|\langle x, u \rangle - \eta|}{\|u\|}$ .

Sau đây là một số tính chất hình học của phép chiếu  $P_C$ .

**Bổ đề 1.3.** [19, Proposition 4.8] Giả sử  $P_C$  là phép chiếu metric từ  $\mathcal{H}$  lên tập con lồi, đóng, khác rỗng  $C$ . Khi đó

- (i) Với mọi  $x, y \in \mathcal{H}$ , ta có  $\langle P_C(x) - P_C(y), x - y \rangle \geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2$ .
- (ii) Với mọi  $y \in \mathcal{H}, x \in C$ , ta có  $\|x - P_C(y)\|^2 + \|P_C(y) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2$ .
- (iii)  $z = P_C(x)$  khi và chỉ khi  $\langle x - z, z - y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$ .

Tiếp theo, ta trình bày một số khái niệm về toán tử đa trị trong không gian Hilbert. Các khái niệm tương ứng cho toán tử đơn trị được suy ra trực tiếp từ các khái niệm này vì toán tử đơn trị là trường hợp riêng của toán tử đa trị. Trong không gian Hilbert  $\mathcal{H}$ , xét toán tử đa trị  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ . Ta gọi *miền xác định* của  $\mathcal{A}$  là tập  $\operatorname{dom}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{H} : \mathcal{A}(x) \neq \emptyset\}$ . Bên cạnh đó, ta cũng có ánh xạ ngược của  $\mathcal{A}$  là toán tử  $\mathcal{A}^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ , cho bởi  $\mathcal{A}^{-1}(y) = \{x \in \mathcal{H} : y \in \mathcal{A}(x)\}$ . Đồng thời, ta gọi tập  $\operatorname{graph}(\mathcal{A}) := \{(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} : y \in \mathcal{A}(x)\}$  là *đồ thị của toán tử  $\mathcal{A}$* . Chú ý rằng trong các phần sau, ta sẽ kí hiệu  $I$  là toán tử đồng nhất trên  $\mathcal{H}$ ; với hàm  $f$  khả dưới vi phân thì ta gọi  $\partial f$  là toán tử  $\mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  cho bởi  $x \mapsto \partial f(x)$ ;  $C$  là tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathcal{H}$  thì  $N_C$  là toán tử  $\mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  cho bởi  $x \mapsto N_C(x)$ .

**Định nghĩa 1.7.** [92, Definition 12.1, Definition 12.5] Cho toán tử  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ .  $\mathcal{A}$  được gọi là

- (i) *đơn điệu* nếu  $\langle x - y, u - v \rangle \geq 0$  với mọi  $x, y \in \operatorname{dom}(\mathcal{A})$  và mọi  $u \in \mathcal{A}(x), v \in \mathcal{A}(y)$ ;
- (ii)  *$\gamma$ -đơn điệu mạnh* nếu tồn tại hằng số  $\gamma > 0$  sao cho  $\langle x - y, u - v \rangle \geq \gamma\|x - y\|^2$  với mọi  $x, y \in \operatorname{dom}(\mathcal{A})$  và mọi  $u \in \mathcal{A}(x), v \in \mathcal{A}(y)$ ;

- (iii) *c-đơn điệu mạnh ngược* (hay *c-đồng bức*) nếu tồn tại hằng số  $c > 0$  sao cho  $\langle x - y, u - v \rangle \geq c\|u - v\|^2 \forall x, y \in \text{dom}(\mathcal{A})$  và  $\forall u \in \mathcal{A}(x), v \in \mathcal{A}(y)$ . Đặc biệt, nếu  $c = 1$ , thì ta nói rằng toán tử  $\mathcal{A}$  là *không giãn vững*.
- (iv) *đơn điệu cực đại* nếu nó đơn điệu và  $\text{graph}(\mathcal{A})$  không là tập con thực sự của đồ thị của bất kì một toán tử đơn điệu nào khác. Điều này tương đương với  $\mathcal{A}$  đơn điệu và nếu tồn tại  $(x, u) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  sao cho  $\langle x - y, u - v \rangle \geq 0$  với mọi  $(y, v) \in \text{graph}(\mathcal{A})$  thì suy ra  $(x, u) \in \text{graph}(\mathcal{A})$ .

Dễ thấy, toán tử  $\mathcal{A}$  là đơn điệu (tương ứng, đơn điệu cực đại) thì  $\mathcal{A}^{-1}$  cũng là toán tử đơn điệu (tương ứng, đơn điệu cực đại). Ngoài ra, ta có một số khái niệm cho toán tử đơn trị như sau.

**Định nghĩa 1.8.** [19] Toán tử đơn trị  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  được gọi là

- (i) *liên tục yếu theo tia* hay *hemi-liên tục* tại  $x^0 \in \text{dom}(\mathcal{B})$  nếu  $\mathcal{B}(x^0 + th) \rightarrow \mathcal{B}(x^0)$  khi  $t \rightarrow 0^+$  với mọi  $h \in \mathcal{H}$  và  $x^0 + th \in \text{dom}(\mathcal{B})$ ;
- (ii) *liên tục* tại  $x^0 \in \text{dom}(\mathcal{B})$  nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset \text{dom}(\mathcal{B})$  sao cho  $x^k \rightarrow x^0$  thì  $\mathcal{B}(x^k) \rightarrow \mathcal{B}(x^0)$ ;
- (iii) *L-liên tục Lipschitz* nếu tồn tại  $L \geq 0$  sao cho  $\|\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(y)\| \leq L\|x - y\|$  với mọi  $x, y \in \text{dom}(\mathcal{B})$ . Đặc biệt, nếu  $L = 1$  thì ta nói toán tử  $\mathcal{B}$  là *không giãn*, còn nếu  $L \in [0, 1)$  thì ta nói rằng  $\mathcal{B}$  là toán tử (ánh xạ) *co*;
- (iv) *không giãn vững* nếu  $\langle x - y, \mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(y) \rangle \geq \|\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(y)\|^2 \forall x, y \in \mathcal{H}$ ;
- (v) *liên tục yếu theo dãy* tại  $x^0 \in \text{dom}(\mathcal{B})$  nếu với mọi dãy  $\{x^k\} \subset \text{dom}(\mathcal{B})$  sao cho  $x^k \rightarrow x^0$  thì  $\mathcal{B}(x^k) \rightarrow \mathcal{B}(x^0)$  khi  $k \rightarrow \infty$ .

Ta có liên tục Lipschitz  $\Rightarrow$  liên tục  $\Rightarrow$  hemi-liên tục. Từ các Định nghĩa 1.7 và 1.8, dễ thấy toán tử đơn trị *c-đơn điệu mạnh ngược* hiển nhiên là  $\frac{1}{c}$ -liên tục Lipschitz. Bên cạnh đó, không giãn vững  $\Rightarrow$  không giãn. Mặt khác, từ Bổ đề 1.3(i), ta có toán tử chiếu  $P_C$  là không giãn vững.

**Định nghĩa 1.9.** [19, Definition 23.1] Cho toán tử đa trị  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ . *Giải thức* của  $\mathcal{A}$  ứng với số  $\lambda > 0$  kí hiệu là  $J_{\lambda}^{\mathcal{A}}$  ( $J^{\mathcal{A}}$  trong trường hợp  $\lambda = 1$ ), là toán tử cho bởi  $J_{\lambda}^{\mathcal{A}}(x) = (I + \lambda\mathcal{A})^{-1}(x)$ .

Ta có các kết quả

**Bổ đề 1.4.** [19, Lemma 23.10] Cho  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  là toán tử đơn điệu cực đại, khi đó với mọi  $\lambda > 0$ , giải thức  $J_{\lambda}^{\mathcal{A}}$  là đơn trị,  $\text{dom}(J_{\lambda}^{\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$  và không giãn vững (nên hiển nhiên là không giãn).

**Bổ đề 1.5.** [124, Lemma 2.4] Cho  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  là toán tử đơn điệu cực đại và  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử đơn điệu và liên tục Lipschitz. Khi đó toán tử  $\mathcal{S} := \mathcal{A} + \mathcal{B}$  là đơn điệu cực đại.

**Bổ đề 1.6.** [19, Proposition 20.24] Cho toán tử đơn trị  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là đơn điệu và hemi-liên tục. Khi đó  $\mathcal{B}$  là đơn điệu cực đại. Nói riêng, toán tử đơn trị đơn điệu và liên tục là toán tử đơn điệu cực đại.

**Bổ đề 1.7.** [19, Theorem 20.40] Cho  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới. Khi đó, toán tử đa trị  $\partial\varphi$  là đơn điệu cực đại.

**Bổ đề 1.8.** [103, Section 4] Cho  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  là một toán tử đa trị đơn điệu cực đại và  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử đơn trị. Với mỗi số thực  $\lambda > 0$ , ta xác định toán tử  $\mathcal{J}(x) := J_{\lambda}^{\mathcal{A}}(x - \lambda\mathcal{B}(x))$  với mọi  $x \in \mathcal{H}$ . Khi đó

$$x^* \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}(0) \Leftrightarrow x^* \in \text{Fix}(\mathcal{J}).$$

Trong đó  $\text{Fix}(\mathcal{J})$  là tập điểm bất động của  $\mathcal{J}$ .

**Bổ đề 1.9.** [19, Proposition 20.31] Cho  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  là toán tử đơn điệu cực đại và điểm  $x \in \mathcal{H}$ . Khi đó  $\mathcal{A}(x)$  là tập lồi và đóng.

Bây giờ, ta nhắc lại khái niệm toán tử gần kề của hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới.

**Định nghĩa 1.10.** [19, Definition 12.23] Cho  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên  $\mathcal{H}$ . Toán tử gần kề (hoặc ánh xạ gần kề) của  $\varphi$  là toán tử  $\text{prox}_{\varphi} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  cho bởi  $\text{prox}_{\varphi}(x) = \text{argmin} \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 : y \in \mathcal{H} \right\}$ .

**Nhận xét 1.1.** Với các điều kiện của  $\varphi$  đã cho ở Định nghĩa 1.10, theo [19, Proposition 12.15], bài toán  $\text{argmin} \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 : y \in \mathcal{H} \right\}$  có duy nhất nghiệm với mỗi  $x$ . Vì vậy, toán tử gần kề là hoàn toàn xác định.

Ta chú ý đến kết quả sau đây về toán tử gần kề.

**Bổ đề 1.10.** [19, Proposition 16.34] Cho  $\varphi$  là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên  $\mathcal{H}$  và cho  $x, p \in \mathcal{H}$ . Khi đó,  $p = \text{prox}_\varphi(x)$  khi và chỉ khi  $x - p \in \partial\varphi(p)$ . Nói cách khác, ta có  $\text{prox}_\varphi = (I + \partial\varphi)^{-1} = J^{\partial\varphi}$ .

**Ví dụ 1.3.** Cho  $C$  là tập lồi, đóng, khác rỗng trong  $\mathcal{H}$ . Theo Bổ đề 1.10, ta có  $J_\lambda^{N_C} = \text{prox}_{\lambda\iota_C} = P_C$  với mọi  $\lambda > 0$ .

Cho  $C$  là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathcal{H}$  và  $\varphi$  là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên  $\mathcal{H}$  sao cho  $\text{dom}(\varphi) \cap C \neq \emptyset$ . Dễ thấy  $\varphi + \iota_C$  cũng là hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên  $\mathcal{H}$ . Khi đó ta kí hiệu  $\text{prox}_{\varphi + \iota_C}$  là  $\text{prox}_\varphi^C$ . Sau đây, ta nhắc lại một tính chất về toán tử  $\text{prox}_\varphi^C$ , được sử dụng nhiều trong các chứng minh ở Chương 3.

**Bổ đề 1.11.** [62, Lemma 1] Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập con lồi, đóng, khác rỗng và một hàm  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  lồi, chính thường và nửa liên tục dưới. Khi đó, bất đẳng thức

$$\varphi(y) - \varphi(\text{prox}_\varphi^C(x)) \geq \langle x - \text{prox}_\varphi^C(x), y - \text{prox}_\varphi^C(x) \rangle$$

được thỏa mãn với mọi  $x \in \mathcal{H}$  và mọi  $y \in C$ .

### 1.1.3 Một số kiến thức cơ bản về song hàm

Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập lồi, đóng, khác rỗng. Xét một song hàm, tức là một ánh xạ  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Nếu  $f(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$  thì  $f$  được gọi là song hàm cân bằng trên  $C$  (nếu  $C$  đã xác định, ta chỉ cần nói  $f$  là song hàm cân bằng).

**Định nghĩa 1.11.** [90] Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập con lồi, đóng, khác rỗng. Song hàm  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  được gọi là

- (i) đơn điệu trên  $C \times C$  nếu với mọi  $x, y \in C$ ,  $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$ ;
- (ii)  $\gamma$ -đơn điệu mạnh trên  $C \times C$  nếu tồn tại  $\gamma > 0$  sao cho với mọi  $x, y \in C$ ,

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\gamma\|x - y\|^2;$$

- (iii) giả đơn điệu trên  $C \times C$  nếu với mọi  $x, y \in C$ ,  $f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0$ ;
- (iv)  $\gamma$ -giả đơn điệu mạnh trên  $C \times C$  nếu tồn tại  $\gamma > 0$  sao cho với mọi  $x, y \in C$ ,

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq -\gamma\|x - y\|^2.$$

**Nhận xét 1.2.** Các khái niệm về đơn điệu trong Định nghĩa 1.11 liên hệ với nhau theo sơ đồ (ii)  $\Rightarrow$  (i)  $\Rightarrow$  (iii) và (ii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (iii) nhưng nói chung không có chiều ngược lại.

**Định nghĩa 1.12.** [60] Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập con lồi, đóng, khác rỗng. Song hàm  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  được gọi là

- (i) thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo Antipin (xem [12]) hay thỏa mãn điều kiện Lipschitz mạnh (SLC-strong Lipschitz-type condition) trên  $C$  nếu tồn tại hằng số  $L > 0$  sao cho với mọi  $x, y, z, t \in C$ , ta có

$$|f(x, y) - f(z, y) - f(x, t) + f(z, t)| \leq L\|x - z\|\|y - t\|; \quad (1.4)$$

- (ii) thỏa mãn điều kiện Lipschitz (LC-Lipschitz-type condition) trên  $C$  nếu tồn tại hằng số  $L > 0$  sao cho với mọi  $x, y, z \in C$ , ta có

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - L\|x - y\|\|y - z\|; \quad (1.5)$$

- (iii) thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo Mastroeni (MLC-Mastroeni's Lipschitz-type condition) trên  $C$  (xem [84]) nếu tồn tại hai hằng số  $c_1, c_2 > 0$  sao cho

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1\|x - y\|^2 - c_2\|y - z\|^2.$$

Kể từ giờ, để cho ngắn gọn, ta sẽ gọi việc một song hàm thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo Antipin với hệ số  $L$  là  $L$ -(SLC) (hay (SLC) trong trường hợp không cần đề cập đến hệ số Lipschitz), thỏa mãn điều kiện Lipschitz với hệ số  $L$  là  $L$ -(LC) (hay (LC) trong trường hợp không cần đề cập đến hệ số Lipschitz) và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo Mastroeni là (MLC).

**Nhận xét 1.3.** Từ Định nghĩa 1.12, ta dễ thấy rằng:

(i) Song hàm  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là  $L$ -(LC) trên  $C$  thì cũng là (MLC) trên  $C$  với các hệ số  $c_1 = c_2 = \frac{L}{2}$ .

(ii) Song hàm cân bằng  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là  $L$ -(SLC) trên  $C$  thì cũng đồng thời là  $L$ -(LC) trên  $C$ . Thật vậy, trong (1.4) cho  $t = z$ , ta được (1.5).

Sau đây, ta nhắc lại một số tính chất liên quan đến song hàm và toán tử gần kề sẽ được sử dụng trong các chứng minh ở Chương 3.

**Bổ đề 1.12.** [8, Lemma 2.2] Cho  $C$  là tập con lồi, đóng, khác rỗng của  $\mathcal{H}$ . Ngoài ra, cho  $f, g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là các song hàm cân bằng thỏa mãn: với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , các hàm  $f(x, \cdot), g(x, \cdot)$  là lồi, chính thường, nửa liên tục dưới và khả dưới vi phân trên  $C$ . Hơn nữa, giả thiết thêm rằng các hàm này bị chặn trên các tập bị chặn của  $\mathcal{H}$ . Với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , mọi  $\lambda, \alpha \geq 0$ , đặt  $T(\lambda, \alpha, x) := \text{prox}_{\lambda f(x, \cdot) + \lambda \alpha g(x, \cdot)} x$ . Khi đó, ta có

(i) với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , mọi  $\lambda, \alpha, \beta \geq 0$ ,

$$\|T(\lambda, \alpha, x) - T(\lambda, \beta, x)\|^2 \leq (\alpha - \beta)[g(x, T(\lambda, \beta, x)) - g(x, T(\lambda, \alpha, x))];$$

(ii) với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , mọi  $\lambda, \mu, \alpha \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} & \|T(\lambda, \alpha, x) - T(\mu, \alpha, x)\|^2 \\ & \leq (\lambda - \mu)[(f + \alpha g)(x, T(\mu, \alpha, x)) - (f + \alpha g)(x, T(\lambda, \alpha, x))]; \end{aligned}$$

(iii) ánh xạ  $T(\lambda, \alpha, x)$  liên tục theo  $\lambda$  và  $\alpha$ .

**Bổ đề 1.13.** [8, Lemma 2.3] Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập lồi, đóng, khác rỗng. Song hàm cân bằng  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là  $L$ -(SLC). Giả sử với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , hàm  $f(x, \cdot)$  lồi, chính thường và nửa liên tục dưới trên  $C$ . Xét toán tử  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  cho bởi

$$U(x) = \text{argmin} \left\{ f(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\} \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Khi đó,  $U$  là toán tử  $(L + 1)$ -liên tục Lipschitz trên  $\mathcal{H}$ .

## 1.2 Bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh

Khái niệm bài toán đặt chỉnh và đặt không chỉnh lần đầu tiên được đưa ra vào đầu thế kỉ 20 bởi J. Hadamard [126] như sau:

**Định nghĩa 1.13.** Cho  $F$  là một ánh xạ từ không gian tôpô  $\mathcal{X}$  vào không gian tôpô  $\mathcal{Y}$ . Xét phương trình:

$$F(x) = y. \tag{1.6}$$

Ta nói rằng phương trình trên là *đặt chỉnh* nếu

(i) với mỗi  $y \in \mathcal{Y}$ , nghiệm  $x \in \mathcal{X}$  của phương trình  $F(x) = y$  tồn tại;

(ii) ứng với mỗi  $y \in \mathcal{Y}$ , nghiệm  $x \in \mathcal{X}$  là duy nhất;

(iii)  $x$  phụ thuộc liên tục vào  $y$ .

Bài toán 1.6 được gọi là *đặt không chỉnh* nếu ít nhất một trong ba điều kiện (i), (ii) hoặc (iii) bị vi phạm.

Một bài toán đặt không chỉnh nói chung không ổn định theo nghĩa với thay đổi nhỏ của dữ liệu đầu vào  $(F, y)$  dẫn tới sự thay đổi lớn của nghiệm  $x \in \mathcal{X}$ . Trong các bài toán thực tế, dữ liệu  $(F, y)$  không biết. Tính không ổn định của lớp bài toán này đòi hỏi sự cần thiết phải nghiên cứu các phương pháp ổn định hóa, tức là tìm nghiệm xấp xỉ và thiết lập sự phụ thuộc liên tục của nghiệm xấp xỉ với dữ liệu đầu vào  $(F, y)$ . Tuy nhiên, nhiệm vụ này là không đơn giản. Trong số các phương pháp ổn định hóa đã được nghiên cứu và ứng dụng, ta có thể kể đến các phương pháp hiệu chỉnh. Ý tưởng chính của phương pháp hiệu chỉnh là thay bài toán đặt không chỉnh ban đầu bằng một họ các bài toán đặt chỉnh mà nghiệm của bài toán đặt chỉnh đó hội tụ về nghiệm của bài toán ban đầu, khi tham số hiệu chỉnh dần tới không. Tiêu biểu trong số đó, có thể kể đến phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov (được trình bày bởi A.N. Tikhonov [113] và mang tên ông). Dựa trên phương pháp hiệu chỉnh này, nhiều phương pháp khác giải bài toán đặt không chỉnh đã được xây dựng [1, 2, 15, 17, 26, 37, 52].

## 1.3 Một số tính chất của các bài toán được nghiên cứu trong luận án

### 1.3.1 Bài toán bao hàm thức biến phân

Cho không gian Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{A}$  và  $\mathcal{B}$  lần lượt là các toán tử đa trị và đơn trị trên  $\mathcal{H}$ . Xét bài toán bao hàm thức biến phân

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x^*) + \mathcal{B}(x^*). \quad (\text{VI})$$

Gọi  $\Omega$  là tập nghiệm của bài toán VI. Xét trường hợp  $\Omega \neq \emptyset$  và toán tử  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  là đơn điệu cực đại. Khi đó, toán tử  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}$  cũng đơn điệu cực đại nên theo Bổ đề 1.9, ta có  $\Omega = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}(0)$  là tập lồi và đóng. Nói riêng, nếu  $\mathcal{A}$  đơn điệu cực đại và  $\mathcal{B}$  đơn điệu và liên tục Lipschitz thì theo Bổ đề 1.5,  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  là đơn điệu cực

đại nên  $\Omega$  là tập lồi và đóng.

Bài toán VI nói chung là đặt không chính nên có thể vô nghiệm hoặc không có duy nhất nghiệm. Tuy nhiên, kết quả sau đây cho chúng ta điều kiện đủ để bài toán VI tồn tại duy nhất nghiệm.

**Bổ đề 1.14.** *Nếu  $\mathcal{A}$  là đơn điệu cực đại và  $\mathcal{B}$  là  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $L$ -liên tục Lipschitz thì bài toán (VI) có duy nhất nghiệm.*

*Chứng minh.* Do  $\mathcal{A}$  đơn điệu cực đại nên toán tử  $J_\lambda^{\mathcal{A}}$  đơn trị và không giãn. Bài toán (VI) tương đương với

$$x = J_\lambda^{\mathcal{A}}(I - \lambda\mathcal{B})(x) \quad (1.7)$$

với  $\lambda > 0$  tùy ý. Do đó, bài toán (1.7) có duy nhất nghiệm nếu tồn tại  $\lambda > 0$  sao cho toán tử  $\mathcal{J} := J_\lambda^{\mathcal{A}}(I - \lambda\mathcal{B})$  là co. Từ nhận xét này, ta thấy rằng, với mọi  $x, y \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} & \|J_\lambda^{\mathcal{A}}(I - \lambda f)(x) - J_\lambda^{\mathcal{A}}(I - \lambda\mathcal{B})(y)\|^2 \\ & \leq \|(x - \lambda\mathcal{B}(x)) - (y - \lambda\mathcal{B}(y))\|^2 \\ & = \|x - y\|^2 + \lambda^2\|\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(y)\|^2 - 2\lambda\langle x - y, \mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(y) \rangle. \end{aligned}$$

Trong đó bất đẳng thức đầu tiên thu được từ tính không giãn của  $J_\lambda^{\mathcal{A}}$ . Đánh giá trên cùng với tính  $L$ -liên tục Lipschitz và  $\gamma$ -đơn điệu mạnh của toán tử  $f$  suy ra

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(y)\|^2 & \leq \|x - y\|^2 + \lambda^2 L^2 \|x - y\|^2 - 2\lambda\gamma \|x - y\|^2 \\ & = (1 + \lambda^2 L^2 - 2\lambda\gamma) \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy, chỉ cần chọn  $0 < \lambda < \min\{\frac{1}{2\gamma}, \frac{2\gamma}{L}\}$  thì  $\|\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(y)\| \leq m\|x - y\|$  với  $m = \sqrt{1 + \lambda^2 L^2 - 2\lambda\gamma} < 1$ . Như vậy ta đã chỉ ra được  $\lambda$  để toán tử  $\mathcal{J}$  là co nên bài toán (1.7) có duy nhất nghiệm, từ đó kéo theo bài toán (VI) cũng có duy nhất nghiệm. Đó là điều phải chứng minh.  $\square$

### 1.3.2 Bài toán bao hàm thức biến phân tách

Xét bài toán bao hàm thức biến phân tách sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x^*) \text{ và } 0 \in \mathcal{B}_2\mathcal{T}(x^*), \quad (\text{SVI})$$

trong đó  $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_1}$  và  $\mathcal{B}_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$  là hai ánh xạ đa trị đơn điệu cực đại và  $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn. Cho  $\beta > 0$ , ta xét ánh xạ  $\mathcal{S} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  cho bởi

$$\mathcal{S}(x) = \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x)$$

với mọi  $x \in \mathcal{H}_1$ . Ta có kết quả sau đây.

**Bổ đề 1.15.** [39, Lemma 2.2]

- (i)  $\langle \mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(y), x - y \rangle \geq \left\| \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x) - \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(y) \right\|^2 \forall x, y \in \mathcal{H}_1$ .
- (ii)  $\| \mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(y) \|^2 \leq \| \mathcal{T} \|^2 \langle \mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(y), x - y \rangle \forall x, y \in \mathcal{H}_1$ .

Từ Bổ đề 1.15 ta thấy rằng  $\mathcal{S} = \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}$  là đơn điệu và  $\| \mathcal{T} \|^2$ -liên tục Lipschitz.

### 1.3.3 Bài toán cân bằng

Cho  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là một song hàm cân bằng trên  $C$ . Ta xét bài toán cân bằng EP( $f, C$ ) sau đây:

Tìm  $x^* \in C$  sao cho  $f(x^*, y) \geq 0$  với mọi  $y \in C$ .

Ta kí hiệu tập nghiệm của bài toán EP( $f, C$ ) là  $Sol(f, C)$ . Trong trường hợp  $C$  là tập lồi compact,  $f$  nửa liên tục trên theo biến thứ nhất và tựa lồi theo biến thứ hai thì theo bất đẳng thức Ky Fan [53], bài toán EP( $f, C$ ) có nghiệm (khái niệm hàm tựa lồi có thể được tham khảo trong [23]).

Xét bài toán EP trong trường hợp song hàm  $f$  thỏa mãn các điều kiện sau đây:

- (A1).  $f$  là song hàm cân bằng và giả đơn điệu;
- (A2).  $f$  là (MLC);
- (A3).  $f(\cdot, y)$  nửa liên tục trên yếu theo dãy trên  $C$  với mỗi  $y \in C$ , tức là,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x^k, y) \leq f(x, y)$$

với mỗi dãy  $\{x^k\} \subset C$  và  $x^k \rightharpoonup x$ ;

- (A4).  $f(x, \cdot)$  lồi và khả dưới vi phân trên  $C$  với mỗi  $x \in C$  cố định.

Ta có kết quả sau đây về tính lồi đóng của tập nghiệm  $Sol(f, C)$  cho bài toán EP giả đơn điệu.

**Bổ đề 1.16.** [22] *Nếu song hàm  $f$  thỏa mãn các điều kiện  $(\bar{A}1) - (\bar{A}4)$ , thì tập nghiệm  $Sol(f, C)$  lồi và đóng.*

Ở Chương 3, các điều kiện ràng buộc chúng ta đặt lên song hàm  $f$  có bao gồm các điều kiện  $(\bar{A}2) - (\bar{A}4)$ , và  $(\bar{A}1)$  được thay bằng điều kiện mạnh hơn, đó là song hàm  $f$  cân bằng và đơn điệu, vì vậy ta luôn có  $Sol(f, C)$  là tập lồi và đóng. Bên cạnh đó, ta có kết quả sau đây về sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán  $EP(f, C)$ .

**Bổ đề 1.17.** [87] *Cho  $C \subset \mathcal{H}$  là tập lồi, đóng, khác rỗng,  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là song hàm cân bằng, giả đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện: với mọi  $x \in C$ , hàm số  $f(\cdot, x)$  hemi-liên tục và hàm số  $f(x, \cdot)$  lồi, nửa liên tục dưới trên  $C$  và khả dưới vi phân tại một điểm nào đó thuộc  $\mathcal{H}$ . Khi đó, bài toán  $EP(f, C)$  có đúng một nghiệm.*

Về mối liên hệ giữa bài toán cân bằng và bài toán bao hàm thức biến phân, S. Takahashi và các cộng sự [104, Theorem 4.2] đã chứng minh được rằng nếu  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  là song hàm cân bằng, đơn điệu và thỏa mãn các điều kiện  $(\bar{A}1) - (\bar{A}4)$  thì bài toán cân bằng  $EP(f, C)$  sẽ tương đương với bài toán bao hàm thức biến phân có dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in A_f(x^*)$$

trong đó  $A_f : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  là toán tử đa trị đơn điệu cực đại, có  $\text{dom}(A_f) \subset C$ , cho bởi công thức

$$A_f = \begin{cases} \{z \in \mathcal{H} : f(x, y) \geq \langle y - x, z \rangle \ \forall y \in C\} & \text{nếu } x \in C, \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin C. \end{cases}$$

## 1.4 Một số kết quả bổ trợ khác

Trong mục này, ta trình bày một kết quả đã biết về dãy số và dãy trong không gian Hilbert được sử dụng để chứng minh sự hội tụ của các phương pháp đề xuất trong các Chương 2 và 3.

**Bổ đề 1.18.** [120] Giả sử  $\{\phi_k\}$  là dãy số không âm thỏa mãn bất đẳng thức

$$\phi_{k+1} \leq (1 - p_k) \phi_k + q_k, \quad \forall k \geq 0,$$

với  $\{p_k\}$  là dãy số dương và  $\{q_k\}$  là dãy số thỏa mãn  $p_k \in (0, 1)$ ,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{q_k}{p_k} \leq 0$  và  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = +\infty$ . Khi đó  $\lambda_k \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow +\infty$ .

Trong các kết quả tiếp theo,  $\mathcal{H}$  là một không gian Hilbert.

**Bổ đề 1.19.** [19, Lemma 2.37] Cho  $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$  là một dãy bị chặn. Khi đó  $\{x^k\}$  chứa dãy con hội tụ yếu.

**Bổ đề 1.20.** Cho  $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ . Nếu mọi dãy con của  $\{x^k\}$  hội tụ mạnh (tương ứng, hội tụ yếu) đến  $x \in \mathcal{H}$  thì  $x^k \rightarrow x$  (tương ứng,  $x^k \rightharpoonup x$ ) khi  $k \rightarrow \infty$ .

Tiếp theo, ta nhắc lại Bổ đề Mazur và một hệ quả của bổ đề này mà chúng ta có sử dụng trong phần sau của luận án.

**Bổ đề 1.21** (Bổ đề Mazur). [13, Theorem 3.3.11] Cho  $\{x^k\}$  là dãy hội tụ yếu trong không gian tuyến tính định chuẩn  $X$ , thỏa mãn  $x^k \rightharpoonup x$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Khi đó tồn tại các dãy  $\{N(k)\} \subset \mathbb{N}$ ,  $N(k) > k$  và  $\{\lambda_i^{(k)}\} \subset [0, 1]$  với  $\sum_{i=k}^{N(k)} \lambda_i^{(k)} = 1$  sao cho  $y^k := \sum_{i=k}^{N(k)} \lambda_i^{(k)} x^i \rightarrow x$  khi  $k \rightarrow \infty$ .

**Hệ quả 1.2.** [19, Theorem 3.32] Mọi tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian tuyến tính định chuẩn là đóng yếu. Nói riêng, mọi tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert là đóng yếu.

Ta nhắc lại Bổ đề Minty, là một kết quả quan trọng trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân.

**Bổ đề 1.22** (Bổ đề Minty). [43, Lemma 2.1] Cho  $C \subset \mathcal{H}$  lồi đóng khác rỗng và  $F : C \rightarrow \mathcal{H}$  là ánh xạ hemi-liên tục và đơn điệu. Khi đó

$$\{x^* \in C : \langle x - x^*, F(x^*) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C\} = \{x^* \in C : \langle x - x^*, F(x) \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C\}.$$

Cuối cùng, để đơn giản cho việc mô tả các phương pháp lặp ở các chương sau của luận án, ta luôn luôn áp dụng các quy ước:

$$\frac{0}{0} = +\infty \quad \text{và} \quad \frac{1}{0} = +\infty.$$

## Chương 2

# PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH GIẢI BÀI TOÁN BAO HÀM THỨC BIẾN PHÂN VÀ BAO HÀM THỨC BIẾN PHÂN TÁCH

Nội dung của chương này được viết dựa trên các bài báo số 1-4 trong Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

### 2.1 Phương pháp co gần kề hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân

Cho  $\mathcal{H}$  là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  và chuẩn cảm sinh  $\| \cdot \|$ . Cho  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  là toán tử đa trị và  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử đơn trị. Xét bài toán bao hàm thức biến phân sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x^*) + \mathcal{B}(x^*). \quad (\text{VI})$$

Sau đây, ta luôn giả thiết rằng tập nghiệm  $\Omega$  của bài toán VI là khác rỗng.

Từ Bổ đề 1.8, ta đã biết rằng  $x^*$  là nghiệm của bài toán VI nếu và chỉ nếu  $x^*$  là nghiệm của phương trình điểm bất động  $x = J_{\lambda}^{\mathcal{A}}(x - \lambda \mathcal{B}(x))$ , trong đó  $J_{\lambda}^{\mathcal{A}}$  là giải thức của  $\mathcal{A}$  liên kết với  $\lambda > 0$ . Điều này cho ta ý tưởng đưa ra một phương pháp lặp giải bài toán VI có sử dụng giải thức, và hội tụ mạnh. Trong phần sau đây, ta trình bày một phương pháp như vậy. Đầu tiên, ta đề xuất kĩ thuật hiệu chỉnh cho bài toán VI, và thiết lập một số tính chất của dãy nghiệm hiệu chỉnh. Sau đó ta xây dựng thuật toán lặp hiệu chỉnh kiểu co gần kề để giải bài toán VI trong không gian Hilbert. Cách chọn cỡ bước và tham số hiệu chỉnh ở đây được cải biên từ kĩ thuật chọn các tham số trong [123]. Sự hội tụ mạnh của phương pháp mới này được xây dựng theo các điều kiện ràng buộc như được trình bày trong [31, 123]. Dãy nghiệm xấp xỉ được sinh bởi thuật toán là nghiệm của bài

toán bất đẳng thức biến phân với tập ràng buộc chính là tập nghiệm của bài toán VI. Bên cạnh đó, ta cũng trình bày một số trường hợp cụ thể ở đó các điều kiện cỡ bước được thỏa mãn. Về mặt lý thuyết, miền giá trị của dãy cỡ bước là tương đối rộng, vì theo các điều kiện ràng buộc về cỡ bước, dãy này chỉ cần bị chặn. Đồng thời, trong Mục 2.4, ta cũng trình bày một vài thử nghiệm số để hỗ trợ và minh họa cho các kết quả đạt được. Ta nghiên cứu bài toán VI với toán tử  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$  và toán tử  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  thỏa mãn các giả thiết sau:

- (A1) Toán tử  $\mathcal{A}$  đơn điệu cực đại;
- (A2) Toán tử  $\mathcal{B}$  đơn điệu và liên tục Lipschitz;
- (A3) Tập nghiệm  $\Omega$  của bài toán VI khác rỗng.

### 2.1.1 Bài toán bao hàm thức hiệu chỉnh và tính chất của dãy nghiệm hiệu chỉnh

Để giải bài toán VI và chọn một nghiệm cụ thể trong  $\Omega$ , chúng ta quan tâm đến việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp (BVIP-bilevel variational inequality problem) sau đây:

$$\text{Tìm } x^{\dagger} \in \Omega \text{ sao cho } \langle \mathcal{F}(x^{\dagger}), x^* - x^{\dagger} \rangle \geq 0, \forall x^* \in \Omega, \quad (\text{BVIP})$$

trong đó  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là một toán tử  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $\tilde{L}$ -liên tục Lipschitz. Do  $\Omega$  là tập lồi, đóng và khác rỗng (đã giả thiết ở trên) nên bài toán BVIP có duy nhất nghiệm  $x^{\dagger}$ . Trong trường hợp đặc biệt, khi  $\mathcal{F}(x) = x - x^g$ , với  $x^g$  là một điểm cho trước trong  $\mathcal{H}$ , nghiệm duy nhất của bài toán BVIP là  $x^{\dagger} = P_{\Omega}(x^g)$ . Nếu  $\mathcal{F}(x) = x$ , thì  $x^{\dagger}$  là nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán VI. Việc xét toán tử  $\mathcal{F}$  có các tính chất được nêu ra trong bài toán BVIP giúp ta tìm được một nghiệm của bài toán VI thỏa mãn tính chất ta mong muốn. Bài toán BVIP có thể được xem như một bài toán hai cấp trong đó tập ràng buộc của bài toán chính là tập nghiệm của bài toán VI.

Để thiết lập sự hội tụ của phương pháp, ta sử dụng kỹ thuật hiệu chỉnh. Cụ thể là, với mỗi  $\alpha > 0$ , ta liên kết bài toán VI với bài toán bao hàm thức biến phân hiệu chỉnh (RVI-regularized variational inclusion) sau đây:

$$\text{Tìm } x \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) + \alpha \mathcal{F}(x). \quad (\text{RVI})$$

Dưới các giả thiết đã xét, với mỗi  $\alpha > 0$ , bài toán RVI có nghiệm duy nhất phụ thuộc vào tham số hiệu chỉnh  $\alpha$ , kí hiệu bởi  $x_\alpha$ . Lưới nghiệm  $\{x_\alpha\}$  (sau đây, để cho đơn giản, ta sẽ gọi là dãy  $\{x_\alpha\}$ ) có các tính chất sau đây.

**Bổ đề 2.1.** (i) Dãy  $\{x_\alpha\}$  bị chặn.

(ii) Tồn tại một số thực  $M > 0$  sao cho, với mọi  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ , ta có

$$\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| \leq \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{\alpha_1} M.$$

(iii)  $\omega(x_\alpha) \subset \Omega$ , trong đó  $\omega(x_\alpha)$  là tập các điểm tụ yếu của dãy  $\{x_\alpha\}$ .

(iv)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} x_\alpha = x^\dagger$ .

*Chứng minh.* (i) Với mỗi  $\alpha > 0$  và  $x^* \in \Omega$ , ta có  $0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x^*)$  và  $-\alpha \mathcal{F}(x_\alpha) \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_\alpha)$ . Vì vậy, do  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  là đơn điệu, ta suy ra  $\langle \alpha \mathcal{F}(x_\alpha), x^* - x_\alpha \rangle \geq 0$  hay  $\langle \mathcal{F}(x_\alpha), x^* - x_\alpha \rangle \geq 0$ . Do tính  $\gamma$ -đơn điệu mạnh của  $\mathcal{F}$ , ta có

$$\langle \mathcal{F}(x^*), x^* - x_\alpha \rangle \geq \gamma \|x^* - x_\alpha\|^2. \quad (2.1)$$

Từ đánh giá (2.1) và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thu được  $\gamma \|x^* - x_\alpha\|^2 \leq \|\mathcal{F}(x^*)\| \|x^* - x_\alpha\|$ , và vì vậy  $\|x^* - x_\alpha\| \leq \|\mathcal{F}(x^*)\| / \gamma$ . Do  $\|x_\alpha\| - \|x^*\| \leq \|x^* - x_\alpha\|$ , ta có  $\|x_\alpha\| \leq \|x^*\| + \|\mathcal{F}(x^*)\| / \gamma$ . Vì vậy, dãy  $\{x_\alpha\}$  bị chặn.

(ii) Với mọi  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ , ta có  $-\alpha_1 \mathcal{F}(x_{\alpha_1}) \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_{\alpha_1})$  và  $-\alpha_2 \mathcal{F}(x_{\alpha_2}) \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_{\alpha_2})$ . Vì vậy, do tính đơn điệu của toán tử  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ , ta có

$$\langle -\alpha_1 \mathcal{F}(x_{\alpha_1}) + \alpha_2 \mathcal{F}(x_{\alpha_2}), x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \rangle \geq 0,$$

hay là

$$(\alpha_2 - \alpha_1) \langle \mathcal{F}(x_{\alpha_2}), x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \rangle \geq \alpha_1 \langle \mathcal{F}(x_{\alpha_1}) - \mathcal{F}(x_{\alpha_2}), x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \rangle.$$

Vì vậy, áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và tính  $\gamma$ -đơn điệu mạnh của  $\mathcal{F}$ , ta có

$$\begin{aligned} |\alpha_2 - \alpha_1| \|\mathcal{F}(x_{\alpha_2})\| \|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| &\geq (\alpha_2 - \alpha_1) \langle \mathcal{F}(x_{\alpha_2}), x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \rangle \\ &\geq \alpha_1 \langle \mathcal{F}(x_{\alpha_1}) - \mathcal{F}(x_{\alpha_2}), x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \rangle \\ &\geq \alpha_1 \gamma \|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\|^2, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| \leq \frac{|\alpha_2 - \alpha_1| \|\mathcal{F}(x_{\alpha_2})\|}{\alpha_1 \gamma}. \quad (2.2)$$

Theo Bổ đề 2.1(i), dãy  $\{x_{\alpha_2}\}$  bị chặn. Hơn nữa, do  $\mathcal{F}$  là liên tục Lipschitz, dãy  $\{\|\mathcal{F}(x_{\alpha_2})\|\}$  bị chặn. Đặt  $M = \sup \left\{ \frac{\|\mathcal{F}(x_{\alpha_2})\|}{\gamma} : \alpha_2 > 0 \right\}$ , từ đánh giá (2.2), ta có điều phải chứng minh.

(iii) Cho  $\bar{x} \in \omega(x_\alpha)$ . Khi đó, tồn tại một dãy con  $\{x_{\alpha'}\}$  của  $\{x_\alpha\}$  hội tụ yếu đến  $\bar{x}$  khi  $\alpha' \rightarrow 0^+$ . Lấy tùy ý một phần tử  $(x, y) \in \text{graph}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ , hay  $y - \mathcal{B}(x) \in \mathcal{A}(x)$ . Do  $x_{\alpha'}$  là nghiệm của RVI, ta cũng có  $-\alpha' \mathcal{F}(x_{\alpha'}) - \mathcal{B}(x_{\alpha'}) \in \mathcal{A}(x_{\alpha'})$ . Vì vậy, do tính đơn điệu của toán tử  $\mathcal{A}$ , ta suy ra  $\langle y - \mathcal{B}(x) + \alpha' \mathcal{F}(x_{\alpha'}) + \mathcal{B}(x_{\alpha'}), x - x_{\alpha'} \rangle \geq 0$ , điều này tương đương với

$$\langle y, x - x_{\alpha'} \rangle + \alpha' \langle \mathcal{F}(x_{\alpha'}), x - x_{\alpha'} \rangle \geq \langle \mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(x_{\alpha'}), x - x_{\alpha'} \rangle.$$

Từ đó, do tính đơn điệu của  $\mathcal{B}$ , ta suy ra

$$\langle y, x - x_{\alpha'} \rangle + \alpha' \langle \mathcal{F}(x_{\alpha'}), x - x_{\alpha'} \rangle \geq 0. \quad (2.3)$$

Từ tính liên tục Lipschitz của  $\mathcal{F}$  và tính bị chặn của dãy  $\{x_{\alpha'}\}$ , ta suy ra dãy  $\{\langle \mathcal{F}(x_{\alpha'}), x - x_{\alpha'} \rangle\}$  cũng bị chặn. Qua giới hạn trong (2.3) khi  $\alpha' \rightarrow 0^+$  và chú ý rằng  $x_{\alpha'} \rightharpoonup \bar{x}$ , ta được  $\langle y, x - \bar{x} \rangle \geq 0$  với mọi  $(x, y) \in \text{graph}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ . Mặt khác, theo Bổ đề 1.5 thì  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  là đơn điệu cực đại nên ta suy ra  $\bar{x} \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}(0) = \Omega$ . Vì vậy,  $\omega(x_\alpha) \subset \Omega$ .

(iv) Chọn một điểm bất kì  $\bar{x} \in \omega(x_\alpha)$  và một dãy  $x_{\alpha'} \rightharpoonup \bar{x}$  khi  $\alpha' \rightarrow 0^+$ . Theo Bổ đề 2.1(iii),  $\bar{x} \in \Omega$ . Từ đánh giá (2.1), ta có  $\langle \mathcal{F}(x^*), x^* - x_\alpha \rangle \geq 0$  với mọi  $\alpha > 0$  và  $x^* \in \Omega$ . Qua giới hạn trong bất đẳng thức này khi  $\alpha = \alpha' \rightarrow 0^+$ , ta nhận được  $\langle \mathcal{F}(x^*), x^* - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x^* \in \Omega$ . Vì vậy, theo Bổ đề 1.22 (Bổ đề Minty), ta có

$$\langle \mathcal{F}(\bar{x}), x^* - \bar{x} \rangle \geq 0, \forall x^* \in \Omega,$$

hay  $\bar{x}$  là nghiệm của bài toán BVIP. Do nghiệm  $x^\dagger$  của bài toán BVIP là duy nhất,  $\bar{x} = x^\dagger$ . Vì  $\bar{x}$  là một điểm bất kì trong  $\omega(x_\alpha)$ , ta có  $\omega(x_\alpha) = \{x^\dagger\}$ , tức là, toàn bộ dãy  $\{x_\alpha\}$  hội tụ đến  $x^\dagger$ . Cuối cùng, sử dụng đánh giá (2.1) với  $x^* = x^\dagger$ , ta được

$$\langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^\dagger - x_\alpha \rangle \geq \gamma \|x^\dagger - x_\alpha\|^2. \quad (2.4)$$

Qua giới hạn trong (2.4) khi  $\alpha \rightarrow 0^+$ , ta có

$$0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^\dagger - x_\alpha \rangle \geq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \gamma \|x^\dagger - x_\alpha\|^2.$$

Vì vậy,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|x^\dagger - x_\alpha\|^2 = 0$ . Đó là điều phải chứng minh.  $\square$

### 2.1.2 Thuật toán và sự hội tụ

Cho  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $\tilde{L}$ -liên tục Lipschitz. Ngoài ra, ta lấy một dãy  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  sao cho

$$(C1) : \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0; \quad (C2) : \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = +\infty; \quad (C3) : \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \alpha_k^{-2} = 0.$$

Dãy  $\alpha_k = \frac{1}{k^p}$  với  $0 < p < 1$  thỏa mãn các điều kiện (C1)-(C3). Với mỗi  $k \in \mathbb{N}$ , đặt  $\mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}} = \mathcal{B} + \alpha_k \mathcal{F}$ . Để giải bài toán VI, ta đề xuất phương pháp sau đây.

**Thuật toán 2.1.** (Phương pháp co giãn kê hiệu chỉnh (RPCM-regularization proximal contraction method))

**Khởi tạo:** Cho  $x^0 \in \mathcal{H}$ ,  $r \in (0, 2)$ ,  $\beta > 0$ .

**Các bước lặp:**

Bước 1. Tính  $y^k = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x^k))$ , với  $\lambda_k > 0$ .

Bước 2. Tính  $x^{k+1} = x^k - r\beta_k d(x^k, y^k)$ , trong đó

$$\begin{cases} d(x^k, y^k) = x^k - y^k - \lambda_k (\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)), \\ \phi(x^k, y^k) = \langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \rangle, \\ \beta_k = \min \left\{ \beta, \frac{\phi(x^k, y^k)}{\|d(x^k, y^k)\|^2} \right\}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Bước 3. Tăng  $k$  lên 1 đơn vị và quay trở lại Bước 1.

**Nhận xét 2.1.** Chú ý rằng từ  $x^k = y^k$  không suy ra  $x^k$  là nghiệm của bài toán VI, mà chỉ suy ra  $x^k$  là nghiệm của bài toán RVI với  $\alpha = \alpha_k$ . Điều này sẽ được làm rõ ở chứng minh của Bổ đề 2.5 dưới đây. Vì vậy, ta dùng một số  $\beta > 0$  trong Thuật toán 2.1 nhằm mục đích cho  $\beta_k$  được hoàn toàn xác định và không quá lớn với mỗi  $k$ .

Ta nói rằng  $\{\lambda_k\}$  trong Thuật toán 2.1 thỏa mãn điều kiện cỡ bước dự đoán (PSC - predicted stepsize condition), nếu tồn tại hai số thực  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ , và một số nguyên  $k_0$  sao cho

$$\phi(x^k, y^k) \geq c_1 \|x^k - y^k\|^2 \text{ và } \beta_k \geq c_2, \quad \forall k \geq k_0; \quad (2.6)$$

và dãy cỡ bước  $\{\lambda_k\}$  thỏa mãn điều kiện sau:

$$0 < \underline{\lambda} \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda} < +\infty, \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.7)$$

Bây giờ ta sẽ trình bày ba phương án lựa chọn  $\lambda_k$  thỏa mãn các điều kiện (2.6) và (2.7).

**Bổ đề 2.2.** Cho  $L$  là hệ số Lipschitz của  $\mathcal{B}$ . Nếu  $\{\lambda_k\} \subset [a, b] \subset \left(0, \frac{1}{L}\right)$ , thì các điều kiện (2.6) và (2.7) được thỏa mãn.

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} \phi(x^k, y^k) &= \langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \rangle \\ &= \langle x^k - y^k, x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)) \rangle \\ &= \|x^k - y^k\|^2 - \lambda_k \langle x^k - y^k, \mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k) \rangle \\ &\geq \|x^k - y^k\|^2 - \lambda_k \|x^k - y^k\| \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\| \\ &\geq \|x^k - y^k\|^2 - \lambda_k L \|x^k - y^k\|^2 \\ &\geq (1 - bL) \|x^k - y^k\|^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Vì vậy, điều kiện (2.6) được thỏa mãn với  $c_1 = 1 - bL > 0$  và  $k_0 = 1$ . Hơn nữa, ta cũng có

$$\begin{aligned} \|d(x^k, y^k)\| &= \|x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k))\| \\ &\leq \|x^k - y^k\| + \lambda_k \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\| \\ &\leq \|x^k - y^k\| + \lambda_k L \|x^k - y^k\| \\ &\leq (1 + bL) \|x^k - y^k\|. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nếu  $y^k = x^k$  thì  $\beta_k = \beta$ . Ngược lại, nếu  $y^k \neq x^k$ , thì từ các đánh giá (2.8) và (2.9), ta thu được

$$\beta_k = \min \left\{ \beta, \frac{\phi(x^k, y^k)}{\|d(x^k, y^k)\|^2} \right\} \geq \min \left\{ \beta, \frac{1 - bL}{(1 + bL)^2} \right\}.$$

Vì vậy, với mọi  $k \geq k_0 = 1$ , ta có  $\beta_k \geq \min \left\{ \beta, \frac{1 - bL}{(1 + bL)^2} \right\}$ , tức là điều kiện (2.6) được thỏa mãn với  $k_0 = 1$  và số dương  $c_2 = \min \left\{ \beta, \frac{1 - bL}{(1 + bL)^2} \right\}$ .

Với giả thiết của bổ đề này, điều kiện (2.7) hiển nhiên đúng với  $\underline{\lambda} = a$  và  $\bar{\lambda} = b$ .  $\square$

**Bổ đề 2.3.** Cho  $\sigma > 0$ ,  $l \in (0, 1)$ ,  $\mu \in (0, 1)$ . Với mỗi  $k \in \mathbb{N}$ , cho  $\lambda_k$  là giá trị  $\lambda$  lớn nhất trong tập  $\{\sigma, \sigma l, \sigma l^2, \dots\}$  sao cho

$$\lambda \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\| \leq \mu \|x^k - y^k\|. \quad (2.10)$$

Khi đó, các điều kiện (2.6) và (2.7) được thỏa mãn.

*Chứng minh.* Đầu tiên, ta thấy dãy  $\{\lambda_k\}$  là hoàn toàn xác định. Thật vậy, với mỗi  $k \in \mathbb{N}$ , ta đặt

$$y_m^k = J_{\lambda_k}^A(x^k - \sigma l^m \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x^k)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Do  $\mathcal{B}$  liên tục Lipschitz, gọi  $L > 0$  là hệ số Lipschitz của  $\mathcal{B}$ , ta có đánh giá  $\|\mathcal{B}(y_m^k) - \mathcal{B}(x^k)\| \leq L \|x^k - y_m^k\|$ , hay

$$\frac{\mu}{L} \|\mathcal{B}(y_m^k) - \mathcal{B}(x^k)\| \leq \mu \|x^k - y_m^k\|.$$

Vì vậy, nếu ta lấy  $m \in \mathbb{N}$  nhỏ nhất sao cho  $\sigma l^m \leq \frac{\mu}{L}$ , thì điều kiện (2.10) được thỏa mãn. Vì vậy, điều kiện này đúng với mỗi  $k \in \mathbb{N}$ . Tương tự như các đánh giá (2.8) và (2.9), ta có

$$\phi(x^k, y^k) \geq (1 - \mu) \|x^k - y^k\|^2, \quad \text{và} \quad \|d(x^k, y^k)\| \leq (1 + \mu) \|x^k - y^k\|.$$

Do đó, với mỗi  $k \in \mathbb{N}$ , ta được  $\beta_k \geq \min \left\{ \beta, \frac{1-\mu}{(1+\mu)^2} \right\} > 0$ . Vì vậy, điều kiện PSC (2.6) đúng với  $c_1 = 1 - \mu > 0$ ,  $c_2 = \min \left\{ \beta, \frac{1-\mu}{(1+\mu)^2} \right\} > 0$ , và  $k_0 = 1$ . Từ cách xác định, ta thấy rằng  $\lambda_k \leq \sigma$  với mọi  $k \in \mathbb{N}$ . Nếu  $\lambda_k = \sigma$ , thì  $\lambda_k \geq \min \left\{ \sigma, \frac{\mu l}{L} \right\}$ . Ngược lại, nếu  $\lambda_k < \sigma$ , thì  $\frac{\lambda_k}{l}$  vi phạm quy tắc (2.10). Cho nên, ta có

$$\frac{\lambda_k}{l} \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y_{m-1}^k)\| > \mu \|x^k - y_{m-1}^k\|,$$

kết hợp điều này với tính  $L$ -liên tục Lipschitz của  $\mathcal{B}$ , ta thu được  $\frac{\lambda_k L}{l} \geq \mu$  hay  $\lambda_k > \frac{\mu l}{L} \geq \min \left\{ \sigma, \frac{\mu l}{L} \right\}$ . Vì vậy, điều kiện (2.7) được thỏa mãn với  $\bar{\lambda} = \sigma$  và  $\underline{\lambda} = \min \left\{ \sigma, \frac{\mu l}{L} \right\}$ .  $\square$

Trong bổ đề tiếp theo, ta sử dụng quy ước đã đề cập ở Chương 1, là  $\frac{0}{0} = +\infty$  và  $\frac{1}{0} = +\infty$ . Khi đó, bổ đề được phát biểu như sau.

**Bổ đề 2.4.** Cho  $\mu \in (0, 1)$ ,  $\lambda_0 > 0$ . Với mỗi  $k \in \mathbb{N}$ , ta cập nhật

$$\lambda_{k+1} = \min \left\{ \lambda_k, \frac{\mu \|x^k - y^k\|}{\|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|} \right\}.$$

Khi đó các điều kiện (2.6) và (2.7) được thỏa mãn.

*Chứng minh.* Từ cách xác định,  $\{\lambda_k\}$  là dãy không tăng. Nói riêng,  $\lambda_k \leq \lambda_0$  với mọi  $k \in \mathbb{N}$ . Từ tính liên tục Lipschitz của  $\mathcal{B}$ , ta có  $\|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\| \leq L\|x^k - y^k\|$  với mọi  $k \in \mathbb{N}$ . Vì vậy, nếu  $\mathcal{B}(x^k) \neq \mathcal{B}(y^k)$ , thì

$$\frac{\mu\|x^k - y^k\|}{\|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|} \geq \frac{\mu\|x^k - y^k\|}{L\|x^k - y^k\|} = \frac{\mu}{L}.$$

Vì vậy, từ cách xác định của  $\lambda_{k+1}$ , ta suy ra

$$\lambda_{k+1} = \min \left\{ \lambda_k, \frac{\mu\|x^k - y^k\|}{\|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|} \right\} \geq \min \left\{ \lambda_k, \frac{\mu}{L} \right\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Từ đó, theo nguyên lí quy nạp ta thu được

$$\lambda_{k+1} \geq \min \left\{ \lambda_0, \frac{\mu}{L} \right\}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Do vậy, bằng cách đặt  $\underline{\lambda} = \min \left\{ \lambda_0, \frac{\mu}{L} \right\}$  và  $\bar{\lambda} = \lambda_0$ , ta được

$$0 < \underline{\lambda} \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda} < +\infty,$$

tức là điều kiện (2.7) được thỏa mãn. Hơn nữa, do dãy  $\{\lambda_k\}$  không tăng và bị chặn dưới bởi  $\underline{\lambda}$ , tồn tại  $\lambda > 0$  sao cho  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda$ . Ta thấy rằng

$$\begin{aligned} \phi(x^k, y^k) &= \langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \rangle \\ &= \langle x^k - y^k, x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)) \rangle \\ &= \|x^k - y^k\|^2 - \lambda_k \langle x^k - y^k, \mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k) \rangle \\ &\geq \|x^k - y^k\|^2 - \lambda_k \|x^k - y^k\| \cdot \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Từ cách xác định, ta có

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\mu\|x^k - y^k\|}{\|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|},$$

hay

$$\|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\| \leq \frac{\mu\|x^k - y^k\|}{\lambda_{k+1}}. \quad (2.12)$$

Ta suy ra từ các đánh giá (2.11) và (2.12) rằng

$$\begin{aligned} \phi(x^k, y^k) &\geq \|x^k - y^k\|^2 - \lambda_k \|x^k - y^k\| \cdot \frac{\mu\|x^k - y^k\|}{\lambda_{k+1}} \\ &= \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \mu \right) \|x^k - y^k\|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Do dãy  $\{\lambda_k\}$  hội tụ đến  $\lambda > 0$ , ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \mu \right) = 1 - \mu > 0. \quad (2.14)$$

Bây giờ, chọn một số thực  $c_1 \in (0, 1 - \mu)$ , khi đó từ (2.14), tồn tại  $k_0 \in \mathbb{N}$  sao cho  $1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \mu > c_1$  với mọi  $k \geq k_0$ . Vì vậy, do đánh giá (2.13), ta được

$$\phi(x^k, y^k) \geq c_1 \|x^k - y^k\|^2, \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.15)$$

Mặt khác, do tính đơn điệu và liên tục Lipschitz của  $\mathcal{B}$ , ta có

$$\begin{aligned} d(x^k, y^k) &= \|x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k))\|^2 \\ &= \|x^k - y^k\|^2 - 2\lambda_k \langle x^k - y^k, \mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k) \rangle + \lambda_k^2 \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|^2 \\ &\leq \|x^k - y^k\|^2 + \lambda_k^2 \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|^2 \\ &\leq \|x^k - y^k\|^2 + \bar{\lambda}^2 \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\|^2 \\ &\leq \|x^k - y^k\|^2 + \bar{\lambda}^2 L^2 \|x^k - y^k\|^2 \\ &= (1 + \bar{\lambda}^2 L^2) \|x^k - y^k\|^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Từ (2.15) và (2.16) ta suy ra, với mọi  $k \geq k_0$ ,

$$\frac{\phi(x^k, y^k)}{\|d(x^k, y^k)\|^2} \geq \frac{c_1 \|x^k - y^k\|^2}{(1 + \bar{\lambda}^2 L^2) \|x^k - y^k\|^2} = \frac{c_1}{1 + \bar{\lambda}^2 L^2}.$$

Vậy ta có

$$\beta_k = \min \left\{ \beta, \frac{\Phi(x^k, y^k)}{\|d(x^k, y^k)\|^2} \right\} \geq \min \left\{ \beta, \frac{c_1}{1 + \bar{\lambda}^2 L^2} \right\} > 0, \quad \forall k \geq k_0.$$

Do đó, điều kiện (2.6) được thỏa mãn với  $c_1 \in (0, 1 - \mu)$ ,  $c_2 = \min \left\{ \beta, \frac{c_1}{1 + \bar{\lambda}^2 L^2} \right\}$ , và  $k_0 \in \mathbb{N}$  nào đó. Bổ đề được chứng minh xong.  $\square$

**Nhận xét 2.2.** Các Bổ đề 2.2 - 2.4 đưa ra ba cách chọn dãy cỡ bước  $\{\lambda_k\}$ . Khi ta biết hệ số  $L$ , một dãy bất kì  $\{\lambda_k\} \subset [a, b] \subset (0, \frac{1}{L})$  sẽ thỏa mãn điều kiện PSC. Nếu ta chưa biết  $L$  hay khó ước lượng được  $L$ , ta có thể dùng phương pháp tự thích nghi để chọn  $\{\lambda_k\}$  thỏa mãn điều kiện PSC theo cách tìm kiếm theo tia như Bổ đề 2.3 hoặc cách chọn như trong Bổ đề 2.4.

**Bổ đề 2.5.** Giả sử rằng dãy  $\{\lambda_k\}$  thỏa mãn điều kiện PSC với  $k \geq k_0$  nào đó. Nếu tồn tại một số tự nhiên  $N \geq k_0$  sao cho  $x^{k+1} = x^k$  với mọi  $k \geq N$ , thì  $x^N = x^\dagger$  là một nghiệm của bài toán VI, đồng thời cũng là nghiệm của bài toán BVIP.

*Chứng minh.* Xét  $k \geq N$ . Từ cách xác định của  $x^{k+1}$ , ta thấy rằng nếu  $x^{k+1} = x^k$ , thì  $d(x^k, y^k) = 0$ . Do  $\{\lambda_k\}$  thỏa mãn điều kiện PSC nên ta có

$$\begin{aligned} \|d(x^k, y^k)\| &\geq \|x^k - y^k\| - \lambda_k \|\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)\| \\ &\geq \|x^k - y^k\| - \lambda_k L \|x^k - y^k\| \\ &= (1 - \lambda_k L) \|x^k - y^k\|. \end{aligned}$$

Theo điều kiện PSC, dễ thấy  $1 - \lambda_k L > 0$ , lại có  $d(x^k, y^k) = 0$  nên ta dễ thấy  $\|x^k - y^k\| = 0$  hay  $x^k = y^k$ . Điều này tương đương với  $x^k = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x^k))$ , hay  $x^k = x_{\alpha_k}$ . Do đó  $x^{k+1} = x^k = x_{\alpha_k}$  với mọi  $k \geq N$ . Theo nguyên lí quy nạp, ta suy ra

$$x^N = x_{\alpha_N} = x^{N+1} = x_{\alpha_{N+1}} = x^{N+2} = x_{\alpha_{N+2}} = \dots$$

Mặt khác, kết hợp Bổ đề 2.9(iii) và Điều kiện (C1), ta suy ra  $x_{\alpha_k} \rightarrow x^\dagger$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Vì vậy, ta kết luận rằng  $x^N = x^\dagger$  như đã khẳng định.  $\square$

Từ chứng minh của Bổ đề 2.5, ta thấy rằng, với  $k$  đủ lớn,  $y^k = x^k$  không suy ra  $x^k$  là nghiệm của bài toán VI, mà chỉ suy ra  $x^k = x_{\alpha_k}$ . Điều này khẳng định tính đúng đắn của Nhận xét 2.1.

Theo Bổ đề 2.5, nếu dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.1 là hữu hạn, thì ta tìm được một nghiệm của bài toán VI. Vì vậy, không mất tính chất tổng quát, sau đây ta có thể giả sử rằng Thuật toán 2.1 sinh ra một dãy vô hạn. Bây giờ, chúng ta phát biểu và chứng minh định lý về sự hội tụ mạnh của thuật toán trên.

**Định lý 2.1.** Giả sử các giả thiết (A1)-(A3), (C1)-(C3) và các điều kiện (2.6)-(2.7) được thỏa mãn. Khi đó dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh đến nghiệm  $x^\dagger \in \Omega$  của bài toán VI và đồng thời cũng là nghiệm duy nhất của bài toán BVIP.

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 &= \|x^k - r\beta_k d(x^k, y^k) - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &= \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - 2r\beta_k \langle x^k - x_{\alpha_k}, d(x^k, y^k) \rangle + r^2 \beta_k^2 \|d(x^k, y^k)\|^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Từ cách xác định  $\beta_k$ , dễ thấy

$$\beta_k \leq \frac{\phi(x^k, y^k)}{\|d(x^k, y^k)\|^2}, \text{ tức là } \|d(x^k, y^k)\|^2 \leq \frac{\phi(x^k, y^k)}{\beta_k}.$$

Điều này cùng với đẳng thức (2.17) suy ra

$$\|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \leq \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - 2r\beta_k \langle x^k - x_{\alpha_k}, d(x^k, y^k) \rangle + r^2\beta_k\phi(x^k, y^k). \quad (2.18)$$

Do  $x_{\alpha_k}$  là nghiệm của bài toán RVI, ta có  $0 \in \mathcal{A}(x_{\alpha_k}) + \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x_{\alpha_k})$ , từ đó suy ra  $x_{\alpha_k} = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x_{\alpha_k} - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x_{\alpha_k}))$  (theo Bổ đề 1.8). Do toán tử  $J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}$  là không giãn vững, ta có

$$\begin{aligned} & \langle y^k - x_{\alpha_k}, (x^k - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x^k)) - (x_{\alpha_k} - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x_{\alpha_k})) \rangle \\ &= \langle J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x^k)) - J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x_{\alpha_k} - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x_{\alpha_k})), (x^k - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x^k)) - (x_{\alpha_k} - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x_{\alpha_k})) \rangle \\ &\geq \|J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x^k)) - J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x_{\alpha_k} - \lambda_k \mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x_{\alpha_k}))\|^2 \\ &= \|y^k - x_{\alpha_k}\|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy, từ định nghĩa của  $\mathcal{B}_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}$ , ta được

$$\begin{aligned} & \langle y^k - x_{\alpha_k}, x^k - x_{\alpha_k} - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(x_{\alpha_k})) \rangle \\ &\geq \|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \lambda_k \alpha_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Do  $\mathcal{B}$  đơn điệu và  $\lambda_k > 0$ , ta suy ra

$$\lambda_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(x_{\alpha_k}) \rangle \geq 0. \quad (2.20)$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức (2.19) và (2.20), ta thu được

$$\begin{aligned} & \langle y^k - x_{\alpha_k}, x^k - x_{\alpha_k} - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)) \rangle \\ &\geq \|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \lambda_k \alpha_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Thay  $x^k - x_{\alpha_k} = (x^k - y^k) + (y^k - x_{\alpha_k})$  vào vế trái của bất đẳng thức (2.21), ta có

$$\begin{aligned} & \langle y^k - x_{\alpha_k}, x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)) \rangle + \|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\geq \|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \lambda_k \alpha_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \rangle. \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra

$$\left\langle y^k - x_{\alpha_k}, x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)) \right\rangle \geq \lambda_k \alpha_k \left\langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle,$$

hay

$$\left\langle y^k - x_{\alpha_k}, d(x^k, y^k) \right\rangle \geq \lambda_k \alpha_k \left\langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle. \quad (2.22)$$

Từ đánh giá (2.22) và cách xác định của  $\phi(x^k, y^k)$ , ta có

$$\begin{aligned} \phi(x^k, y^k) &= \left\langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \right\rangle \\ &= \left\langle x^k - x_{\alpha_k}, d(x^k, y^k) \right\rangle - \left\langle y^k - x_{\alpha_k}, d(x^k, y^k) \right\rangle \\ &\leq \left\langle x^k - x_{\alpha_k}, d(x^k, y^k) \right\rangle - \lambda_k \alpha_k \left\langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\left\langle x^k - x_{\alpha_k}, d(x^k, y^k) \right\rangle \geq \phi(x^k, y^k) + \lambda_k \alpha_k \left\langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle. \quad (2.23)$$

Kết hợp các đánh giá (2.18) và (2.23), ta được bất đẳng thức sau đây

$$\begin{aligned} &\|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\leq \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - 2r\beta_k\phi(x^k, y^k) - 2r\beta_k\lambda_k\alpha_k \left\langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle \\ &\quad + r^2\beta_k\phi(x^k, y^k) \\ &= \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - r(2-r)\beta_k\phi(x^k, y^k) \\ &\quad - 2r\beta_k\lambda_k\alpha_k \left\langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Với mỗi  $\rho \in \left(0, \frac{2\gamma}{\tilde{L}}\right)$ , ta có

$$\begin{aligned} &\left\langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle \\ &= \left\langle y^k - x^k, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle + \left\langle x^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle \\ &\geq -\tilde{L}\|y^k - x^k\| \|x^k - x_{\alpha_k}\| + \gamma\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\geq -\frac{\tilde{L}}{2\rho}\|y^k - x^k\|^2 - \frac{\tilde{L}\rho}{2}\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \gamma\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &= \left(\gamma - \frac{\tilde{L}\rho}{2}\right)\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \frac{\tilde{L}}{2\rho}\|y^k - x^k\|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy, theo điều kiện (2.6), tồn tại  $k_0 \geq 1$  sao cho, với mọi  $k \geq k_0$ , ta có

$$\left\langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(x^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \right\rangle \geq \left(\gamma - \frac{\tilde{L}\rho}{2}\right)\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \frac{\tilde{L}}{2\rho c_1}\phi(x^k, y^k). \quad (2.25)$$

Từ các đánh giá (2.24), (2.25), cùng các điều kiện (2.6) và (2.7), ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 &\leq (1 - r(2\gamma - \tilde{L}\rho)\beta_k\lambda_k\alpha_k)\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&\quad - \left[ r(2-r)\beta_k - \frac{\tilde{L}r\beta_k\lambda_k\alpha_k}{\rho c_1} \right] \phi(x^k, y^k) \\
&\leq (1 - r(2\gamma - \tilde{L}\rho)c_2\lambda\alpha_k)\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&\quad - \left[ r(2-r)c_2 - \frac{\tilde{L}r\beta\bar{\lambda}\alpha_k}{\rho c_1} \right] \phi(x^k, y^k), \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Đặt  $\Gamma = r(2\gamma - \tilde{L}\rho)c_2\lambda$  và  $\Xi_k = r(2-r)c_2 - \frac{\tilde{L}r\beta\bar{\lambda}\alpha_k}{\rho c_1}$ . Ta có thể viết lại đánh giá (2.26) như sau:

$$\|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \leq (1 - \Gamma\alpha_k)\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \Xi_k\phi(x^k, y^k), \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.27)$$

Mặt khác, với mọi  $\rho_k \in (0, 1)$ , ta có

$$\begin{aligned}
&\|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&= \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 + 2 \left\langle x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}, x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k} \right\rangle \\
&\geq \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 - 2\|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\| \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\| \\
&\geq \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 - \rho_k \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{\rho_k} \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&= (1 - \rho_k) \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 - \frac{1 - \rho_k}{\rho_k} \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&\geq (1 - \rho_k) \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 - \frac{(1 - \rho_k) M^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\rho_k \alpha_k^2},
\end{aligned}$$

trong đó, bất đẳng thức cuối được suy ra từ Bổ đề 2.1(ii). Vì vậy

$$\|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \leq \frac{1}{1 - \rho_k} \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{M^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\rho_k \alpha_k^2} \quad (2.28)$$

với mọi  $\rho_k \in (0, 1)$ . Kết hợp các đánh giá (2.27) và (2.28), ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 &\leq \frac{1 - \Gamma\alpha_k}{1 - \rho_k} \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \frac{\Xi_k\phi(x^k, y^k)}{1 - \rho_k} \\
&\quad + \frac{M^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\rho_k \alpha_k^2}, \quad \forall \rho_k \in (0, 1). \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Do  $\alpha_k \rightarrow 0$ , tồn tại  $\bar{k}_0 \geq k_0$  ( $k_0$  lấy từ điều kiện (2.6)) sao cho  $\rho_k = 0.5\Gamma\alpha_k \in (0, 1)$  với mọi  $k \geq \bar{k}_0$ . Trong (2.29) thay  $\rho_k = 0.5\Gamma\alpha_k \in (0, 1)$  ( $k \geq \bar{k}_0$ ), ta được

$$\|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \leq \frac{1 - \Gamma\alpha_k}{1 - 0.5\Gamma\alpha_k} \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \frac{\Xi_k\phi(x^k, y^k)}{1 - 0.5\Gamma\alpha_k}$$

$$+ \frac{M^2}{0.5\Gamma} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^3}, \quad \forall k \geq \bar{k}_0. \quad (2.30)$$

Đặt  $\Psi_k = \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2$ ,  $p_k = \frac{0.5\Gamma\alpha_k}{1-0.5\Gamma\alpha_k}$ , và

$$q_k = \frac{M^2}{0.5\Gamma} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^3} - \frac{\Xi_k \phi(x^k, y^k)}{1 - 0.5\Gamma\alpha_k}.$$

Khi đó, bất đẳng thức (2.30) có thể viết lại như sau:

$$\Psi_{k+1} \leq (1 - p_k)\Psi_k + q_k, \quad \forall k \geq \bar{k}_0. \quad (2.31)$$

Từ các điều kiện (C1) và (C2), ta dễ thấy  $p_k \rightarrow 0$  và  $\sum_{k=\bar{k}_0}^{\infty} p_k = +\infty$ . Hơn nữa, theo điều kiện (C3), ta có

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{q_k}{p_k} &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{M^2(1 - 0.5\Gamma\alpha_k)}{(0.5\Gamma)^2} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^4} - \frac{\Xi_k \phi(x^k, y^k)}{0.5\Gamma\alpha_k} \right) \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{M^2(1 - 0.5\Gamma\alpha_k)}{(0.5\Gamma)^2} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^4} = 0. \end{aligned}$$

Vì vậy, từ bất đẳng thức (2.31) và Bổ đề 1.18, ta suy ra  $\Psi_k = \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Theo Bổ đề 2.1(iv) và điều kiện (C1), ta thu được  $x_{\alpha_k} \rightarrow x^\dagger$ . Vì vậy,  $x^k \rightarrow x^\dagger$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Định lý được chứng minh xong.  $\square$

### 2.1.3 Áp dụng cho bài toán tối ưu

Trong mục này, chúng ta xét bài toán tối ưu của tổng hai hàm số (OP - optimization problem) sau đây

$$\min_{x \in \mathcal{H}} (\Gamma(x) + \Lambda(x)), \quad (\text{OP})$$

trong đó  $\Gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm lồi và khả dưới vi phân, còn  $\Lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm lồi khả vi có gradient liên tục Lipschitz. Ta giả sử rằng tập nghiệm  $\Omega_{op}$  của bài toán (OP) là khác rỗng. Do  $\Lambda$  khả vi tại  $x$ , nên  $\partial\Lambda(x) = \{\nabla\Lambda(x)\}$ , trong đó  $\nabla\Lambda(x)$  là gradient của  $\Lambda$  tại  $x$ . Hơn nữa,  $\partial\Gamma$  là đơn điệu cực đại (xem Bổ đề 1.7). Nhắc lại rằng, ánh xạ gần kề của  $\Gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  (xem Định nghĩa 1.10) được cho bởi

$$\text{prox}_\Gamma(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \mathcal{H}} \left\{ \Gamma(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right\}.$$

Từ Bổ đề 1.10, ta có  $J_{\lambda}^{\partial\Gamma}(x) = \text{prox}_{\lambda\Gamma}(x)$  với mọi  $x \in \mathcal{H}$  và  $\lambda > 0$ . Theo Bổ đề 1.2, bài toán OP tương đương với bài toán tìm  $x \in \mathcal{H}$  sao cho

$$0 \in \partial(\Gamma(x) + \Lambda(x)) = \partial\Gamma(x) + \nabla\Lambda(x).$$

Bài toán (OP) có thể được đưa về bài toán VI với  $\mathcal{A} = \partial\Gamma$  và  $\mathcal{B} = \nabla\Lambda$ . Với mỗi  $\alpha > 0$ , ta đặt  $\nabla\Lambda_{\alpha}^{\mathcal{F}} = \nabla\Lambda + \alpha\mathcal{F}$ . Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.1.

**Định lý 2.2.** Cho  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz, và  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  là một dãy số thực thỏa mãn các điều kiện (C1) - (C3). Lấy  $x^0 \in \mathcal{H}$ ,  $r \in (0, 2)$ ,  $\beta > 0$ . Cho  $\{x^k\}$  là một dãy trong  $\mathcal{H}$ , xác định bởi

$$\begin{cases} y^k = \text{prox}_{\lambda_k\Gamma}(x^k - \lambda_k\nabla\Lambda_{\alpha_k}^{\mathcal{F}}(x^k)), \lambda_k > 0, \\ x^{k+1} = x^k - r\beta_k d(x^k, y^k), k \geq 0, \end{cases}$$

với  $d(x^k, y^k) = x^k - y^k - \lambda_k(\nabla\Lambda(x^k) - \nabla\Lambda(y^k))$ ,  $\phi(x^k, y^k) = \langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \rangle$ , và  $\beta_k = \min \left\{ \beta, \frac{\phi(x^k, y^k)}{\|d(x^k, y^k)\|^2} \right\}$ . Khi đó, nếu  $\{\lambda_k\}$  thỏa mãn các điều kiện (2.6)-(2.7), thì dãy  $\{x^k\}$  hội tụ mạnh đến nghiệm  $x^{\dagger} \in \Omega_{op}$  của bài toán (OP), nghiệm này thỏa mãn  $\langle \mathcal{F}(x^{\dagger}), x^* - x^{\dagger} \rangle \geq 0$ ,  $\forall x^* \in \Omega_{op}$ . Đặc biệt, nếu  $\mathcal{F}(x) = x - x^{\dagger}$  với  $x^{\dagger}$  là một điểm chọn trước trong  $\mathcal{H}$ , thì  $x^k \rightarrow x^{\dagger} = P_{\Omega_{op}}(x^{\dagger})$  khi  $k \rightarrow \infty$ .

### 2.1.4 Áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân

Như đã biết, bất đẳng thức biến phân là một trường hợp riêng của bài toán VI. Cho  $C$  là một tập lồi đóng khác rỗng trong  $\mathcal{H}$ . Nếu  $\mathcal{A} = N_C$ , là nón pháp tuyến của  $C$ , bài toán bao hàm thức biến phân

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } 0 \in N_C(x^*) + \mathcal{B}(x^*)$$

sẽ trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle \mathcal{B}(x^*), u - x^* \rangle \geq 0, \forall u \in C. \quad (\text{VIP}(\mathcal{B}, C))$$

Ta gọi  $\Omega_{vip}$  là tập nghiệm của bài toán VIP( $\mathcal{B}, C$ ). Bài toán này bao hàm nhiều bài toán như điều khiển tối ưu, bài toán tối ưu, quy hoạch toán học, các bài toán trong cơ học và tài chính. Vì tầm quan trọng của bài toán trong khoa học ứng dụng, nó đã nhận được rất nhiều sự quan tâm nghiên cứu không chỉ lý thuyết về

tồn tại và tính ổn định nghiệm, mà còn cả các phương pháp lặp để giải bài toán. Chú ý rằng với  $\mathcal{A} = N_C$ , ta có  $J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}} = P_C$ . Khi đó áp dụng Thuật toán 2.1 cho bài toán  $VIP(\mathcal{B}, C)$ , ta được thuật toán sau đây.

**Thuật toán 2.2.** (Phương pháp chiếu co hiệu chỉnh (RPJCM- regularization projection and contraction method))

**Khởi tạo:** Cho  $x^0 \in \mathcal{H}$ ,  $\beta > 0$ ,  $r \in (0, 2)$ , và hai dãy  $\{\lambda_k\} \subset [\bar{\lambda}, \underline{\lambda}] \subset (0, \frac{1}{L})$ ,  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  thoả mãn các điều kiện (C1)-(C3).

**Các bước lặp:**

Bước 1. Tính  $y^k = P_C(x^k - \lambda_k \mathcal{B}(x^k) - \alpha_k \lambda_k \mathcal{F}(x^k))$ .

Bước 2. Tính  $x^{k+1} = x^k - r\beta_k d(x^k, y^k)$ , trong đó

$$d(x^k, y^k) = x^k - y^k - \lambda_k (\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k)), \quad (2.32)$$

$$\beta_k = \min \left\{ \beta, \frac{\langle x^k - y^k, d(x^k, y^k) \rangle}{\|d(x^k, y^k)\|^2} \right\}. \quad (2.33)$$

Bước 3. Tăng  $k$  lên 1 đơn vị và quay trở lại Bước 1.

**Định lý 2.3.** Giả sử  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử đơn điệu và  $L$ -liên tục Lipschitz sao cho tập nghiệm  $\Omega_{vip}$  của bài toán  $VIP(\mathcal{B}, C)$  là khác rỗng. Cho  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $k$ -liên tục Lipschitz. Khi đó dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.2 hội tụ mạnh đến một nghiệm  $x^\dagger$  của  $VIP(\mathcal{B}, C)$ , thoả mãn  $\langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^* - x^\dagger \rangle \geq 0$ ,  $\forall x^* \in \Omega_{vip}$ .

**Chú ý 2.1.** Thuật toán 2.2 và Định lý 2.3 là các kết quả đã được trình bày trong bài báo số 4 ở danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

## 2.2 Phương pháp quán tính đa bước hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân

Trong mục này, chúng ta đề xuất phương pháp quán tính đa bước hiệu chỉnh giải bài toán bao hàm thức biến phân của tổng hai toán tử trong không gian Hilbert. Phương pháp này có thể được xem như là sự kết hợp giữa phương pháp co gần kề, phương pháp hiệu chỉnh và kỹ thuật quán tính đa bước. Các giả thiết về  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ ,  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  và  $\Omega = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}(0)$  được giữ nguyên như trong mục 2.1. Phương pháp trong mục này được phát triển từ phương pháp RPCM

trong Thuật toán 2.1 của Mục 2.1 kết hợp với kỹ thuật quán tính đa bước. Cụ thể, cho trước số nguyên dương  $N$  và điểm xuất phát  $x^0 \in \mathcal{H}$ , giả sử ta đã tính được các xấp xỉ  $x^1, \dots, x^k$  của phép lặp, ta sử dụng một tổ hợp trung gian

$$z^k = x^k + \sum_{i=1}^{\min\{k, N\}} \theta_{i,k} (x^{k-i+1} - x^{k-i}), \quad (2.34)$$

để tính xấp xỉ  $x^{k+1}$  dựa trên các tính toán của phương pháp RPCM với các tham số  $\theta_{i,k} \geq 0$  được lựa chọn phù hợp. Trong trường hợp  $\theta_{i,k} = 0$ , phương pháp mới này sẽ trở thành phương pháp RPCM. Một số phương pháp quán tính một bước ( $N = 1$ ) có thể được tìm thấy trong [4] và quán tính đa bước ( $N > 1$ ) trong [67, 76, 122]. Hầu hết các phương pháp này đều sinh ra dãy hội tụ yếu cho các trường hợp riêng của bài toán VI. Đồng thời, ta sẽ chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp dưới các điều kiện không quá chặt áp lên toán tử giá và các tham số điều khiển.

Tương tự như Mục 2.1, để tìm nghiệm của VI, ta sẽ giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp (BVIP):

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \Omega \text{ sao cho } \langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^* - x^\dagger \rangle \geq 0, \forall x^* \in \Omega.$$

với  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $k$ -liên tục Lipschitz. Trong mục này, để tìm nghiệm của bài toán BVIP, ta lại sử dụng cách tiếp cận bằng hiệu chỉnh với lớp bài toán bao hàm thức biến phân. Cụ thể, với mỗi  $\alpha > 0$ , ta liên kết VI với bài toán bao hàm thức hiệu chỉnh (RVI):

$$\text{Tìm } x \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x) + \alpha \mathcal{F}(x).$$

Với các giả thiết về toán tử  $\mathcal{F}$ , bài toán RVI có duy nhất nghiệm với mỗi  $\alpha > 0$ , kí hiệu bởi  $x_\alpha$ . Hơn nữa, theo Bổ đề 1.8, với mỗi  $\lambda > 0$ ,  $x_\alpha$  là nghiệm duy nhất của bài toán RVI khi và chỉ khi vectơ này là điểm bất động của ánh xạ  $J_\lambda^{\mathcal{A}}(I - \lambda(\mathcal{B} + \alpha \mathcal{F}))$ , tức là,

$$x_\alpha = J_\lambda^{\mathcal{A}}(x_\alpha - \lambda(\mathcal{B}(x_\alpha) + \alpha \mathcal{F}(x_\alpha))). \quad (2.35)$$

Chú ý rằng nếu  $\{\alpha_k\}$  là một dãy các số thực dương sao cho  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$  thì theo Bổ đề 2.1 (iv), ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\alpha_k} = x^\dagger. \quad (2.36)$$

Việc tính  $x_{\alpha_k}$  với mỗi  $k \geq 1$  có thể đắt và mất thời gian. Dưới đây, ta trình bày một thuật toán chỉnh lặp, sinh ra một dãy  $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$  thỏa mãn  $\|x^k - x_{\alpha_k}\| \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ .

### 2.2.1 Thuật toán chỉnh lặp gần kề quán tính đa bước

Trong phần này, chúng ta xây dựng một phương pháp chỉnh lặp với hiệu ứng quán tính đa bước. Như đã trình bày trong phần Mở đầu, kỹ thuật quán tính kết hợp với một thuật toán hội tụ mạnh giúp tăng tốc thuật toán đó. Để thiết kế thuật toán, ta cần một toán tử  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$   $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $\tilde{L}$ -liên tục Lipschitz. Ta lấy dãy  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  thỏa mãn các điều kiện (C1)-(C3) đã đưa ra ở Mục 2.1.2.

**Thuật toán 2.3.** (Phương pháp gần kề quán tính đa bước hiệu chỉnh (RMSIPM-regularization multi-step inertial proximal method))

*Khởi tạo:* Lấy  $x^0, x^1 \in \mathcal{H}$  bất kì,  $r \in (0, 2)$ ,  $\theta_0 > 0$ ,  $\sigma > 0$  và một số nguyên dương  $N > 0$ . Với mỗi  $i = 1, 2, \dots, N$ , chọn một dãy các số dương  $\mu_{i,k}$  sao cho

$$(C4) : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{i,k}}{\alpha_k} = 0 \text{ và } \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{i,k} < +\infty.$$

*Các bước lặp:* Tính  $x^{k+1}$  với  $k \geq 1$  như sau

Bước 1. Tính

$$z^k = x^k + \sum_{i=1}^{\min\{k, N\}} \theta_{i,k} (x^{k-i+1} - x^{k-i}),$$

trong đó

$$\theta_{i,k} = \begin{cases} \frac{\mu_{i,k}}{\|x^{k-i+1} - x^{k-i}\|} & \text{nếu } x^{k-i+1} \neq x^{k-i} \\ \theta_0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Bước 2. Tính  $y^k = J_{\lambda_k}^A(z^k - \lambda_k(\mathcal{B}(z^k) + \alpha_k \mathcal{F}(z^k)))$ , trong đó  $\lambda_k > 0$ .

Bước 3. Tính  $x^{k+1} = z^k + r\sigma_k q(y^k, z^k)$ , trong đó

$$\begin{cases} q(y^k, z^k) = y^k - z^k - \lambda_k(\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)) \\ D(y^k, z^k) = \langle y^k - z^k, q(y^k, z^k) \rangle \\ \sigma_k = \min \left\{ \sigma, \frac{D(y^k, z^k)}{\|y^k - z^k\|^2} \right\}. \end{cases}$$

Tương tự như ở Mục 2.1, ta nói rằng dãy  $\{\lambda_k\}$  trong Thuật toán 2.3 thỏa mãn các điều kiện cỡ bước dự đoán (PSC), nếu tồn tại bốn số dương  $c_1, c_2, \underline{\lambda}, \bar{\lambda}$  và số nguyên  $k_0 > 0$  sao cho các bất đẳng thức

$$D(y^k, z^k) \geq c_1 \|y^k - z^k\|^2 \text{ và } \sigma_k \geq c_2 \quad (2.37)$$

cùng với

$$0 < \underline{\lambda} \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda} < +\infty \quad (2.38)$$

đúng với mọi  $k \geq k_0$ .

**Bổ đề 2.6.** Các điều kiện PSC được thỏa mãn, nếu một trong các trường hợp sau đây xảy ra:

(i)  $\{\lambda_k\} \subset [a, b] \subset \left(0, \frac{1}{L}\right)$ , trong đó  $L$  là hệ số Lipschitz của  $\mathcal{B}$ .

(ii) Cho  $\sigma > 0, l \in (0, 1), \mu \in (0, 1)$ . Với mỗi  $k \geq 0, \lambda_k$  là giá trị  $\lambda \in \{\sigma, \sigma l, \sigma l^2, \dots\}$  lớn nhất sao cho

$$\lambda \|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\| \leq \mu \|y^k - z^k\|.$$

(iii) Cho  $\lambda_0 > 0, \mu \in (0, 1), \{\kappa_k\} \subset [0, +\infty)$  là một dãy khả tổng. Với mỗi  $k \geq 0$ , ta lấy

$$\lambda_{k+1} = \min \left\{ \lambda_k + \kappa_k, \frac{\mu \|y^k - z^k\|}{\|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\|} \right\}. \quad (2.39)$$

*Chứng minh.* Chứng minh của các phần (i) và (ii) đã được thực hiện trong Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.3. Ở đây, ta chỉ chứng minh phần (iii).

Đầu tiên, do  $0 < \mu < 1$ , ta có thể chọn một số  $\xi > 0$  sao cho  $(1 + \xi)\mu < 1$ . Từ (2.39), ta suy ra

$$\begin{cases} \lambda_1 & \leq \lambda_0 + \kappa_0, \\ \lambda_{k+1} & \leq \lambda_k + \kappa_k. \end{cases} \quad (2.40)$$

Vì vậy, theo nguyên lí quy nạp ta suy ra

$$\lambda_{k+1} \leq \lambda_0 + \sum_{i=0}^k \kappa_i \quad \forall k,$$

từ đó dễ thấy

$$\lambda_k \leq \lambda_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i \quad (2.41)$$

với mọi  $k$ . Ngoài ra, từ tính liên tục Lipschitz của  $\mathcal{B}$  ta được

$$\frac{\mu \|y^k - z^k\|}{\|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\|} \geq \frac{\mu \|y^k - z^k\|}{L \|y^k - z^k\|} = \frac{\mu}{L}.$$

Hiển nhiên, ta có

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min \left\{ \lambda_0 + \kappa_0, \frac{\mu \|y^0 - z^0\|}{\|\mathcal{B}(y^0) - \mathcal{B}(z^0)\|} \right\}, \\ &\geq \min \left\{ \lambda_0 + \kappa_0, \frac{\mu}{L} \right\}. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta một lần nữa sử dụng nguyên lý quy nạp để suy ra

$$\lambda_{k+1} \geq \min \left\{ \lambda_k + \kappa_k, \frac{\mu}{L} \right\} \geq \min \left\{ \lambda_k, \frac{\mu}{L} \right\} \geq \min \left\{ \lambda_0 + \kappa_0, \frac{\mu}{L} \right\} \quad (2.42)$$

với mỗi  $k \geq 0$ . Bây giờ, đặt

$$\bar{\lambda} := \lambda_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \kappa_k \text{ và } \underline{\lambda} := \min \left\{ \lambda_0 + \kappa_0, \frac{\mu}{L} \right\},$$

khi đó điều kiện (2.38) sẽ thỏa mãn theo (2.41) và (2.42). Tiếp theo, ta cần chỉ ra rằng  $\{\lambda_k\}$  hội tụ đến một số  $\lambda$ . Ta lấy một dãy  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$  xác định bởi

$$s_{k+1} := \lambda_{k+1} - \sum_{i=0}^k \kappa_i$$

với mỗi  $k \geq 0$ . Ta thấy rằng  $\{s_k\}$  là dãy không tăng. Thật vậy, theo (2.40), ta có

$$s_{k+1} - s_k = \lambda_{k+1} - (\lambda_k + \kappa_k) \leq 0.$$

Hơn nữa,  $\{s_k\}$  bị chặn dưới do

$$s_k = \lambda_k - \sum_{i=0}^{k-1} \kappa_i \geq \underline{\lambda} - \sum_{i=0}^{\infty} \kappa_i$$

với mỗi  $k \geq 1$ . Như vậy  $\{s_k\}$  là dãy không tăng và bị chặn dưới nên hội tụ. Sự hội tụ của hai dãy số  $\{s_k\}$  và  $\{\sum_{i=0}^{k-1} \kappa_i\}_{k=1}^{\infty}$  cũng đồng thời suy ra  $\{\lambda_k\}$  là dãy hội tụ.

Tiếp theo, từ cách xác định của  $D(y^k, z^k)$ , ta có

$$D(y^k, z^k) = \langle y^k - z^k, y^k - z^k - \lambda_k (\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \|y^k - z^k\|^2 - \lambda_k \langle y^k - z^k, \mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k) \rangle \\
&= \|y^k - z^k\|^2 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \lambda_{k+1} \langle y^k - z^k, \mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k) \rangle \\
&\geq \|y^k - z^k\|^2 - \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \cdot \lambda_{k+1} \|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\| \|y^k - z^k\|. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Từ cách xác định dãy  $\{\lambda_k\}$ , ta dễ thấy

$$\lambda_{k+1} \|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\| \leq \mu \|y^k - z^k\|. \tag{2.44}$$

Mặt khác, vì  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda \geq \underline{\lambda}$ , ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = 1$  nên tồn tại một số nguyên dương  $k_0$  đủ lớn sao cho với mọi  $k \geq k_0$ ,

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} < 1 + \xi. \tag{2.45}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (2.43), (2.44) và (2.45), ta suy ra

$$\begin{aligned}
D(y^k, z^k) &\geq \|y^k - z^k\|^2 - (1 + \xi)\mu \|y^k - z^k\|^2 \\
&= c_1 \|y^k - z^k\|^2 \tag{2.46}
\end{aligned}$$

với mọi  $k \geq k_0$ , trong đó  $c_1 := 1 - (1 + \xi)\mu$ , là một số dương do  $(1 + \xi)\mu < 1$ . Ngoài ra, kết hợp tính đơn điệu của toán tử  $\mathcal{B}$ , tính liên tục Lipschitz của  $\mathcal{B}$  và bất đẳng thức  $0 < \lambda_k \leq \bar{\lambda}$ , ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|q(y^k, z^k)\|^2 &= \|y^k - z^k - \lambda_k(\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k))\|^2 \\
&= \|y^k - z^k\|^2 - 2\lambda_k \langle y^k - z^k, \mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k) \rangle + \lambda_k^2 \|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\|^2 \\
&\leq \|y^k - z^k\|^2 + \lambda_k^2 \|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\|^2 \\
&\leq (1 + \bar{\lambda}^2 L^2) \|y^k - z^k\|^2.
\end{aligned}$$

Vì vậy, ta có

$$\frac{D(y^k, z^k)}{\|q(y^k, z^k)\|^2} \geq \frac{c_1 \|y^k - z^k\|^2}{(1 + \bar{\lambda}^2 L^2) \|y^k - z^k\|^2} = \frac{c_1}{1 + \bar{\lambda}^2 L^2}.$$

Đặt  $c_2 := \min\{\sigma, \frac{c_1}{1 + \bar{\lambda}^2 L^2}\}$ . Từ (2.46) ta được

$$\sigma_k = \min \left\{ \sigma, \frac{D(y^k, z^k)}{\|y^k - z^k\|^2} \right\} \geq \min \left\{ \sigma, \frac{c_1}{1 + \bar{\lambda}^2 L^2} \right\} = c_2. \tag{2.47}$$

với mọi  $k \geq k_0$ . Cuối cùng, với mỗi  $k \geq k_0$ , bất đẳng thức (2.37) được suy ra từ (2.46) và (2.47). Bổ đề được chứng minh xong.  $\square$

**Bổ đề 2.7.** Giả sử rằng dãy  $\{\lambda_k\}$  thỏa mãn điều kiện PSC với  $k \geq k_0$  nào đó. Dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.3. Nếu tồn tại một số tự nhiên  $n \geq k_0$  sao cho  $x^{k+1} = x^k$  với mọi  $k \geq n$ , thì  $x^n = x^\dagger$  là một nghiệm của bài toán VI, đồng thời cũng là nghiệm của bài toán BVIP.

*Chứng minh.* Ta chọn  $k > \max\{n, N\}$  đủ lớn sao cho  $x^{k-N} = x^{k-N+1} = \dots = x^k$ . Khi đó dễ thấy  $z^k = x^k = x^{k+1}$ , tức là

$$z^k = z^k + r\sigma_k q(y^k, z^k).$$

từ đó suy ra  $q(y^k, z^k) = 0$ . Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} \|q(y^k, z^k)\| &\geq \|y^k - z^k\| - \lambda_k \|\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(z^k)\| \\ &\geq \|y^k - z^k\| - \lambda_k L \|y^k - z^k\| \\ &= (1 - \lambda_k L) \|y^k - z^k\|. \end{aligned}$$

Do  $1 - \lambda_k L > 0$  và  $q(y^k, z^k) = 0$  nên suy ra  $\|y^k - z^k\| = 0$ , tức là  $y^k = z^k$  hay  $z^k = J_{\lambda_k}^A(z^k - \lambda_k(\mathcal{B}(z^k) + \alpha_k \mathcal{F}(z^k)))$ . Điều này có nghĩa là  $z^k$  là nghiệm của bài toán RVI2 ứng với tham số hiệu chỉnh  $\alpha_k$ , hay  $z^k = x_{\alpha_k}$ . Vì vậy, theo nguyên lý quy nạp, ta được  $x^k = x_{\alpha_k} = x^{k+1} = x_{\alpha_{k+1}} = x^{k+2} = x_{\alpha_{k+2}} = \dots$ . Từ đó, ta suy ra  $x^n = x_{\alpha_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{\alpha_j} = x^\dagger$ . Đây là điều phải chứng minh.  $\square$

Không mất tính chất tổng quát, sau đây ta sẽ giả sử rằng dãy lặp sinh bởi Thuật toán 2.3 là vô hạn. Ta phát biểu và chứng minh định lý về sự hội tụ của thuật toán.

**Định lý 2.4.** Giả sử rằng các điều kiện (C1)-(C4) được thỏa mãn và dãy  $\{\lambda_k\}$  thỏa mãn các điều kiện PSC. Khi đó dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.3 hội tụ mạnh đến một nghiệm  $x^\dagger \in \Omega$  của bài toán VI, đồng thời cũng là nghiệm duy nhất của bài toán BVIP.

*Chứng minh.* Đầu tiên, điều kiện (2.37) đảm bảo rằng  $D(y^k, z^k)$  và  $\sigma_k$  là các số dương với mọi  $k$ .

Tiếp theo, do  $\gamma > 0$  và  $k > 0$ , chúng ta có thể tìm các số dương đủ nhỏ  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  thỏa mãn

$$2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1 > 0 \text{ và } 2\gamma r c_2 - \tilde{L}\epsilon_1 r \sigma - \epsilon_2 - \epsilon_3 > 0. \quad (2.48)$$

Kí hiệu nghiệm của bài toán RVI ứng với  $\alpha = \alpha_k$  là  $u_{\alpha_k}$ , ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 &= \|z^k + r\sigma_k q(y^k, z^k) - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&= \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2r\sigma_k \langle z^k - x_{\alpha_k}, q(y^k, z^k) \rangle + r^2\sigma_k^2 \|q(y^k, z^k)\|^2 \\
&= \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2r\sigma_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, q(y^k, z^k) \rangle \\
&\quad + 2r\sigma_k \langle z^k - y^k, q(y^k, z^k) \rangle + r^2\sigma_k^2 \|q(y^k, z^k)\|^2 \\
&= \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2r\sigma_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, q(y^k, z^k) \rangle - 2r\sigma_k D(y^k, z^k) \\
&\quad + r^2\sigma_k^2 \|q(y^k, z^k)\|^2.
\end{aligned}$$

Tiếp theo, từ cách xác định dãy  $\sigma_k$ , ta có

$$\sigma_k \|q(y^k, z^k)\|^2 \leq D(y^k, z^k).$$

Kết hợp hai đánh giá trên, ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 &\leq \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2r\sigma_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, q(y^k, z^k) \rangle \\
&\quad - 2r\sigma_k D(y^k, z^k) + r^2\sigma_k D(y^k, z^k) \\
&= \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2r\sigma_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, q(y^k, z^k) \rangle \\
&\quad - r\sigma_k(2 - r)D(y^k, z^k). \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Mặt khác, do  $x_{\alpha_k}$  là nghiệm bài toán RVI nên  $0 \in \mathcal{A}(x_{\alpha_k}) + \mathcal{B}(x_{\alpha_k}) + \alpha_k \mathcal{F}(x_{\alpha_k})$ , từ đó suy ra

$$-\alpha_k \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})(x_{\alpha_k}). \tag{2.50}$$

Hơn nữa, từ  $y^k = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(z^k - \lambda_k(\mathcal{B}(z^k) + \alpha_k \mathcal{F}(z^k)))$ , ta được

$$z^k - \lambda_k(\mathcal{B}(z^k) + \alpha_k \mathcal{F}(z^k)) - y^k \in \lambda_k \mathcal{A}(y^k),$$

hay

$$z^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(z^k) - \mathcal{B}(y^k)) - \lambda_k \alpha_k \mathcal{F}(z^k) \in \lambda_k(\mathcal{A} + \mathcal{B})(y^k).$$

Vì vậy, ta có

$$-q(y^k, z^k) - \lambda_k \alpha_k \mathcal{F}(z^k) \in \lambda_k(\mathcal{A} + \mathcal{B})(y^k). \tag{2.51}$$

Kết hợp (2.50), (2.51) và tính đơn điệu của  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ , ta suy ra

$$\langle y^k - x_{\alpha_k}, -q(y^k, z^k) - \lambda_k \alpha_k \mathcal{F}(z^k) + \lambda_k \alpha_k \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \rangle \geq 0,$$

tức là

$$\langle y^k - x_{\alpha_k}, q(y^k, z^k) \rangle \leq -\lambda_k \alpha_k \langle y^k - x_{\alpha_k}, \mathcal{F}(z^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}) \rangle. \quad (2.52)$$

Bên cạnh đó, từ tính liên tục Lipschitz và tính  $\gamma$ -đơn điệu mạnh của  $\mathcal{F}$ , cùng với bất đẳng thức  $ab \leq \frac{\epsilon_1}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon_1}b^2$ , ta được

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{F}(z^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}), y^k - x_{\alpha_k} \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}(z^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}), y^k - z^k \rangle + \langle \mathcal{F}(z^k) - \mathcal{F}(x_{\alpha_k}), z^k - x_{\alpha_k} \rangle \\ &\geq -\tilde{L} \|z^k - x_{\alpha_k}\| \|y^k - z^k\| + \gamma \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\geq -\frac{\tilde{L}\epsilon_1}{2} \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \frac{\tilde{L}}{2\epsilon_1} \|y^k - z^k\|^2 + \gamma \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &= \frac{2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1}{2} \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \frac{\tilde{L}}{2\epsilon_1} \|y^k - z^k\|^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Từ các bất đẳng thức (2.52) và (2.53), ta suy ra

$$\langle y^k - x_{\alpha_k}, q(y^k, z^k) \rangle \leq -\lambda_k \alpha_k \left( \frac{2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1}{2} \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \frac{\tilde{L}}{2\epsilon_1} \|y^k - z^k\|^2 \right). \quad (2.54)$$

Thay (2.54) vào (2.49), ta thu được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 &\leq \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 - r\sigma_k(2-r)D(y^k, z^k) \\ &\quad - 2r\sigma_k\lambda_k\alpha_k \left( \frac{2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1}{2} \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \frac{\tilde{L}}{2\epsilon_1} \|y^k - z^k\|^2 \right) \\ &= (1 - r\sigma_k\lambda_k\alpha_k(2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + \frac{\tilde{L}r\sigma_k\lambda_k\alpha_k}{\epsilon_1} \|y^k - z^k\|^2 - r\sigma_k(2-r)D(y^k, z^k). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Kết hợp bất đẳng thức (2.55) và điều kiện (2.37), ta suy ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 &\leq (1 - r\sigma_k\lambda_k\alpha_k(2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + \frac{\tilde{L}r\sigma_k\lambda_k\alpha_k}{\epsilon_1} \|y^k - z^k\|^2 - r\sigma_k(2-r)c_1 \|y^k - z^k\|^2 \\ &= (1 - r\sigma_k\lambda_k\alpha_k(2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad - \sigma_k \left( r(2-r)c_1 - \frac{\tilde{L}r\lambda_k\alpha_k}{\epsilon_1} \right) \|y^k - z^k\|^2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Từ cách xác định của  $\{\sigma_k\}$  và (2.37), dễ thấy

$$c_2 \leq \sigma_k \leq \sigma \quad \forall k \geq k_0. \quad (2.57)$$

Tiếp theo, do  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_{i,k}}{\alpha_k} = 0$  với  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ ,  $\{\lambda_k\} \subset [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  theo (2.38) và  $\{\sigma_k\} \subset [c_2, \sigma]$  như đã chỉ ra ở (2.57), tồn tại một số nguyên dương  $K$  đủ lớn sao cho với mọi  $k > K$ , ta có

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \mu_{i,k} < \epsilon_2 \lambda_k \alpha_k, \\ 1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma r \sigma_k - \tilde{L} \epsilon_1) > 0, \\ 1 - r \sigma_k \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L} \epsilon_1) > 0, \\ r(2-r)c_1 - \frac{\tilde{L} r \lambda_k \alpha_k}{\epsilon_1} > 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Vì vậy, theo cách xác định của  $\{\theta_{i,k}\}$ , ta thấy rằng với mọi  $k > \max\{K, N\}$ ,

$$\begin{aligned} \|z^k - x_{\alpha_k}\|^2 &= \left\| (x^k - x_{\alpha_k}) + \sum_{i=1}^{\min\{k, N\}} \theta_{i,k} (x^{k-i+1} - x^{k-i}) \right\|^2 \\ &\leq \left( \|x^k - x_{\alpha_k}\| + \sum_{i=1}^N \theta_{i,k} \|x^{k-i+1} - x^{k-i}\| \right)^2 \\ &= \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \theta_{i,k} \|x^k - x_{\alpha_k}\| \|x^{k-i+1} - x^{k-i}\| \\ &\quad + 2 \sum_{1 < i < j < N} \theta_{i,k} \theta_{j,k} \|x^{k-i+1} - x^{k-i}\| \|x^{k-j+1} - x^{k-j}\| \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \theta_{i,k}^2 \|x^{k-i} - x^{k-i+1}\|^2 \\ &\leq \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \mu_{i,k} \|x^k - x_{\alpha_k}\| \\ &\quad + 2 \sum_{1 < i < j < N} \mu_{i,k} \mu_{j,k} + \sum_{i=1}^N \mu_{i,k}^2 \\ &\leq \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \sum_{i=1}^N (\mu_{i,k} \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \mu_{i,k}) \\ &\quad + 2 \sum_{1 < i < j < N} \mu_{i,k} \mu_{j,k} + \sum_{i=1}^N \mu_{i,k}^2 \\ &\leq \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \epsilon_2 \lambda_k \alpha_k \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \sum_{i=1}^N \mu_{i,k} \\ &\quad + 2 \sum_{1 < i < j < N} \mu_{i,k} \mu_{j,k} + \sum_{i=1}^N \mu_{i,k}^2 \\ &= (1 + \epsilon_2 \lambda_k \alpha_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \tilde{\mu}_k, \end{aligned} \quad (2.59)$$

trong đó

$$\tilde{\mu}_k = \sum_{i=1}^N \mu_{i,k} + 2 \sum_{1 < i < j < N} \mu_{i,k} \mu_{j,k} + \sum_{i=1}^N \mu_{i,k}^2.$$

Kết hợp các đánh giá (2.56) và (2.59), ta đi đến bất đẳng thức sau đây:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 &\leq (1 - r\sigma_k \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) (1 + \epsilon_2 \lambda_k \alpha_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + (1 - r\sigma_k \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) \tilde{\mu}_k \\ &\quad - \sigma_k \left( r(2-r)c_1 - \frac{\tilde{L}r\lambda_k \alpha_k}{\epsilon_1} \right) \|y^k - z^k\|^2 \\ &\leq (1 - r\sigma_k \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) (1 + \epsilon_2 \lambda_k \alpha_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + (1 - r\sigma_k \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) \tilde{\mu}_k \end{aligned} \quad (2.60)$$

với mọi  $k > \max\{K, N\}$ . Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức  $ab \leq \frac{\epsilon_3}{2}a^2 + \frac{1}{2\epsilon_3}b^2$  và kết quả từ Bổ đề 2.1(ii), ta có, với mọi  $k > \max\{K, N\}$ ,

$$\begin{aligned} &\|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\ &= \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 + 2 \left\langle x^{k+1} - x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}} \right\rangle \\ &\leq \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 + 2 \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\| \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\| \\ &\leq \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 + \epsilon_3 \alpha_k \lambda_k \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{\epsilon_3 \alpha_k \lambda_k} \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &= (1 + \epsilon_3 \alpha_k \lambda_k) \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 + \left( \frac{1}{\epsilon_3 \alpha_k \lambda_k} + 1 \right) \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\leq (1 + \epsilon_3 \alpha_k \lambda_k) \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{(1 + \epsilon_3 \alpha_k \lambda_k) M^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\epsilon_3 \alpha_k \lambda_k \alpha_k^2} \\ &= (1 + \epsilon_3 \alpha_k \lambda_k) \|x^{k+1} - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{(1 + \epsilon_3 \alpha_k \lambda_k) M^2 (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\epsilon_3 \lambda_k \alpha_k^3}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Với hằng số  $M$  được đề cập trong Bổ đề 2.1(ii). Ta suy ra từ (2.60) và (2.61) rằng, với mọi  $k > \max\{K, N\}$ ,

$$\begin{aligned} &\|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\ &\leq (1 - r\sigma_k \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) (1 + \epsilon_2 \lambda_k \alpha_k) (1 + \epsilon_3 \lambda_k \alpha_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + (1 - r\sigma_k \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1)) (1 + \epsilon_3 \lambda_k \alpha_k) \tilde{\mu}_k \\ &\quad + \frac{M^2 (1 + \epsilon_3 \lambda_k \alpha_k) (\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\epsilon_3 \lambda_k \alpha_k^3}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Hơn nữa, với mọi  $k > \max\{K, N\}$ , ta dễ thấy

$$\begin{aligned}
& (1 - r\sigma_k \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1))(1 + \epsilon_3 \lambda_k \alpha_k) \\
&= 1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_3) - r\sigma_k \lambda_k^2 \alpha_k^2 \epsilon_3 (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1) \\
&< 1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_3) < 1.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Ở đây,  $2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 > 0$  do từ (2.48) và (2.57), ta có

$$\begin{aligned}
2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 &\geq 2\gamma r c_2 - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma - \epsilon_2 \\
&\geq 2\gamma r c_2 - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma - \epsilon_2 - \epsilon_3 > 0.
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có, với mọi  $k > \max\{K, N\}$ ,

$$\begin{aligned}
& (1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma - \tilde{L}\epsilon_1))(1 + \epsilon_2 \lambda_k \alpha_k)(1 + \epsilon_3 \lambda_k \alpha_k) \\
&< (1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_3))(1 + \epsilon_2 \lambda_k \alpha_k) \\
&< 1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 - \epsilon_3).
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Từ các bất đẳng thức (2.62), (2.63) và (2.64), ta suy ra

$$\begin{aligned}
& \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\
&\leq (1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 - \epsilon_3)) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&\quad + (1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_3)) \tilde{\mu} \\
&\quad + \frac{M^2(1 + \epsilon_3 \lambda_k \alpha_k)}{\epsilon_3 \lambda_k} \cdot \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^3} \\
&\leq (1 - \lambda_k \alpha_k (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 - \epsilon_3)) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&\quad + \tilde{\mu}_k + \frac{M^2(1 + \epsilon_3 \lambda_k \alpha_k)}{\epsilon_3 \lambda_k} \cdot \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^3}.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

với mọi  $k > \max\{K, N\}$ .

Đặt  $\Psi_k = \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2$ ,  $p_k = (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 - \epsilon_3) \lambda_k \alpha_k$ , và

$$q_k = \tilde{\mu}_k + \frac{M^2(1 + \epsilon_3 \lambda_k \alpha_k)}{\epsilon_3 \lambda_k} \cdot \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^3}.$$

Khi đó, đánh giá (2.65) được viết lại dưới dạng:

$$\Psi_{k+1} \leq (1 - p_k) \Psi_k + q_k, \quad \forall k > \max\{K, N\}. \tag{2.66}$$

Từ điều kiện (C1) và các đánh giá (2.38), (2.57), ta suy ra  $p_k \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Thật vậy, với  $k > \max\{K, N\}$ , do  $\alpha_k \rightarrow 0$ , ta có

$$\begin{aligned} p_k &= (2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 - \epsilon_3)\lambda_k\alpha_k \\ &\leq (2\gamma r\sigma - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma - \epsilon_2 - \epsilon_3)\bar{\lambda}\alpha_k \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Bên cạnh đó, từ các điều kiện (C2), (C4) và các đánh giá (2.38), (2.57), ta thấy rằng tồn tại một số dương  $\bar{N} > \max\{K, N\}$  sao cho

$$\begin{aligned} \sum_{k=\bar{N}}^{\infty} p_k &= \sum_{k=\bar{N}}^{\infty} \lambda_k\alpha_k(2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 - \epsilon_3) \\ &\geq (2\gamma r\sigma - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma - \epsilon_2 - \epsilon_3)\bar{\lambda} \sum_{k=\bar{N}}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \end{aligned}$$

từ đó suy ra,

$$\sum_{k=\bar{N}}^{\infty} p_k = +\infty. \quad (2.67)$$

Từ điều kiện (C4), ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\mu}_k}{\alpha_k} = 0$ . Hơn nữa, từ các điều kiện (C3) và (C4), ta được

$$\begin{aligned} &\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{q_k}{p_k} \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\gamma r\sigma_k - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma_k - \epsilon_2 - \epsilon_3} \left( \frac{M^2(1 + \epsilon_2\lambda_k\alpha_k)}{\epsilon_2\lambda_k} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^4} + \frac{\tilde{\mu}_k}{\alpha_k} \right) \\ &\leq \frac{1}{2\gamma r\sigma - \tilde{L}\epsilon_1 r\sigma - \epsilon_2 - \epsilon_3} \limsup_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{M^2(1 + \epsilon_2\lambda_k\alpha_k)}{\epsilon_2\lambda_k} \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)^2}{\alpha_k^4} + \frac{\tilde{\mu}_k}{\alpha_k} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0$  và các đánh giá (2.66)-(2.68) nên theo Bổ đề 1.18, ta suy ra  $\Psi_k = \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Theo Bổ đề 2.1(iv) và điều kiện (C1), ta được  $x_{\alpha_k} \rightarrow x^\dagger$ . Vì vậy,  $x^k \rightarrow x^\dagger$  khi  $k \rightarrow \infty$ , đây là điều phải chứng minh.  $\square$

## 2.2.2 Áp dụng cho bài toán tối ưu

Cho  $\Gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm khả dưới vi phân trên  $\mathcal{H}$ . Như đã trình bày ở Mục 2.1.3, ta biết rằng  $\partial\Gamma$  là ánh xạ đơn điệu cực đại và  $\text{prox}_{\lambda\Gamma} = J_{\lambda}^{\partial\Gamma}$ . Đồng thời, cho

$\Lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm khả vi với gradient  $\nabla\Lambda$  liên tục Lipschitz. Tương tự như Mục 2.1.3, ta lại xét bài toán (OP):

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } x^* \in \arg \min_{x \in \mathcal{H}} (\Gamma(x) + \Lambda(x)).$$

Ta biết rằng bài toán (OP) có thể viết lại dưới dạng bài toán VI với  $\mathcal{A} = \partial\Gamma$  và  $\mathcal{B} = \nabla\Lambda$  như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in \partial\Gamma(x^*) + \nabla\Lambda(x^*).$$

Định lý sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 2.4.

**Định lý 2.5.** Cho  $\Gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm khả dưới vi phân và  $\Lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi có gradient là liên tục Lipschitz. Hơn nữa, ta cũng giả thiết rằng tập nghiệm  $\Omega = \arg \min_{\mathcal{H}} (\Gamma + \Lambda)$  khác rỗng. Lấy các số dương  $r \in (0, 2)$ ,  $\theta_0$ ,  $\sigma$ ,  $N$  tùy ý và các dãy  $\{\alpha_k\}$ ,  $\{\mu_{i,k}\}$  với  $i = 1, 2, \dots, N$  thỏa mãn các điều kiện (C1)-(C4). Chọn một toán tử  $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là  $\gamma$ -đơn điệu mạnh, liên tục Lipschitz và hai điểm xuất phát  $x^0, x^1 \in \mathcal{H}$ . Lấy  $\{x^k\}$  là một dãy trong  $\mathcal{H}$  sinh bởi quá trình lặp sau đây,

$$\begin{cases} z^k = x^k + \sum_{i=1}^{\min\{k, N\}} \theta_{i,k} (x^{k-i+1} - x^{k-i}), \\ y^k = \text{prox}_{\lambda_k \Gamma}(z^k - \lambda_k (\nabla\Lambda(z^k) + \alpha_k \mathcal{F}(z^k))), \\ x^{k+1} = z^k + r\sigma_k q(y^k, z^k), \end{cases}$$

trong đó

$$\theta_{i,k} = \begin{cases} \frac{\mu_{i,k}}{\|x^{k-i+1} - x^{k-i}\|} & \text{nếu } x^{k-i+1} \neq x^{k-i} \\ \theta_0 & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} q(y^k, z^k) = y^k - z^k - \lambda_k (\nabla\Lambda(y^k) - \nabla\Lambda(z^k)), \\ D(y^k, z^k) = \langle y^k - z^k, q(y^k, z^k) \rangle, \\ \sigma_k = \min \left\{ \sigma, \frac{D(y^k, z^k)}{\|q(y^k, z^k)\|^2} \right\}, \end{cases}$$

ở đây  $\lambda_k > 0$  và thỏa mãn các điều kiện PSC. Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  hội tụ mạnh đến  $x^\dagger \in \Omega$ , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân  $\langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^* - x^\dagger \rangle \geq 0, \forall x^* \in \Omega$ .

### 2.2.3 Áp dụng cho bài toán tối ưu hai cấp

Cho  $\mathcal{C}$  là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian  $\mathcal{H}$ . Cho  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm lồi trên  $\mathcal{C}$  và khả vi trên một lân cận của  $\mathcal{C}$  với  $\nabla\varphi$  liên tục Lipschitz. Cho  $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm lồi mạnh và khả vi sao cho  $\nabla h$  liên tục Lipschitz. Trong phần này chúng ta quan tâm đến bài toán tối ưu hai cấp (BOP - bilevel optimization problem) sau đây:

$$\min_{x \in S} h(x), \quad (\text{BOP})$$

trong đó  $S = \arg \min_{x \in \mathcal{C}} \varphi(x)$  được giả thiết là khác rỗng. Khi đó,  $S$  là tập nghiệm của bài toán tối ưu

$$\min_{x \in \mathcal{H}} (\iota_{\mathcal{C}}(x) + \varphi(x)).$$

Tương tự, bài toán (BOP) có thể được phát biểu lại dưới dạng

$$\min_{x \in \mathcal{H}} (\iota_S(x) + h(x)),$$

điều này tương đương với  $0 \in \partial(h + \iota_S)$ , tức là  $\nabla h(x) \in -\partial\iota_S(x)$ . Bao hàm thức này có thể được biến đổi thành bất đẳng thức biến phân sau đây:

$$\text{Tìm } x^\dagger \in S \text{ sao cho } \langle \nabla h(x^\dagger), x^* - x^\dagger \rangle \geq 0, \quad \forall x^* \in S. \quad (2.69)$$

Để thấy  $S$  cũng là tập nghiệm của bài toán bao hàm thức biến phân: Tìm  $x^* \in \mathcal{H}$  sao cho

$$0 \in \partial(\iota_{\mathcal{C}}(x^*) + \varphi(x^*)) = N_{\mathcal{C}}(x^*) + \nabla\varphi(x^*). \quad (2.70)$$

Để giải bài toán hai cấp (2.69) và (2.70), ta sử dụng Thuật toán 2.3 với  $\mathcal{A} = N_{\mathcal{C}}$ ,  $\mathcal{B} = \nabla\varphi$  và  $\mathcal{F} = \nabla h$ . Chú ý rằng, với mọi  $\lambda > 0$ , ta có  $J_\lambda^{N_{\mathcal{C}}} = \text{prox}_{\lambda\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}}$ . Chúng ta có kết quả sau đây được suy ra từ Định lý 2.4.

**Định lý 2.6.** Cho  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm lồi trên  $\mathcal{C}$  và khả vi trên một lân cận của  $\mathcal{C}$  sao cho  $\nabla\varphi$  là liên tục Lipschitz. Cho  $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm lồi mạnh và khả vi với  $\nabla h$  liên tục Lipschitz. Hơn nữa, giả sử rằng tập nghiệm  $S = \arg \min_{\mathcal{C}} \varphi$  là khác rỗng. Chọn các số thực dương  $r \in (0, 2)$ ,  $\theta_0, \sigma, N$  tùy ý và các dãy số  $\{\alpha_k\}, \{\mu_{i,k}\}$  với  $i = 1, 2, \dots, N$  thỏa mãn các điều kiện (C1)-(C4). Chọn tùy ý hai điểm xuất phát  $x^0, x^1 \in \mathcal{H}$ , ta lấy

$\{x^k\}$  là dãy sinh bởi quá trình lặp sau đây,

$$\begin{cases} z^k = x^k + \sum_{i=1}^{\min\{k,N\}} \theta_{i,k}(x^{k-i+1} - x^{k-i}), \\ y^k = P_C(z^k - \lambda_k(\nabla\varphi(z^k) + \alpha_k\nabla h(z^k))), \\ x^{k+1} = z^k + r\sigma_k q(y^k, z^k), \end{cases}$$

trong đó

$$\theta_{i,k} = \begin{cases} \frac{\mu_{i,k}}{\|x^{k-i+1} - x^{k-i}\|} & \text{nếu } x^{k-i+1} \neq x^{k-i} \\ \theta_0 & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} q(y^k, z^k) = y^k - z^k - \lambda_k(\nabla\varphi(y^k) - \nabla\varphi(z^k)), \\ D(y^k, z^k) = \langle y^k - z^k, q(y^k, z^k) \rangle, \\ \sigma_k = \min \left\{ \sigma, \frac{D(y^k, z^k)}{\|q(y^k, z^k)\|^2} \right\}, \end{cases}$$

với  $\lambda_k > 0$  và thỏa mãn các điều kiện PSC. Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  hội tụ theo chuẩn đến  $x^\dagger \in S$ , là nghiệm duy nhất của bài toán (BOP).

## 2.3 Phương pháp hiệu chỉnh kiểu gần kề giải bài toán bao hàm thức biến phân tách

Trong mục này ta xét bài toán bao hàm thức biến phân tách trong hai không gian Hilbert thực  $\mathcal{H}_1$  và  $\mathcal{H}_2$  sau đây:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x^*) \text{ và } 0 \in \mathcal{B}_2\mathcal{T}(x^*), \quad (\text{SVI})$$

trong đó  $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_1}$  và  $\mathcal{B}_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$  là hai ánh xạ đa trị đơn điệu cực đại và  $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn. Tập nghiệm của bài toán SVI được kí hiệu bởi  $\Omega_{\text{SVI}}$  và sẽ luôn được giả thiết rằng khác rỗng.

Lấy ý tưởng từ Thuật toán 0.1 giải bài toán SVI trong không gian Hilbert của Chuang [41], mục tiêu của chúng tôi trong phần này là đề xuất một thuật toán hội tụ mạnh giải bài toán SVI trong không gian Hilbert. Để đạt được mục đích này và để chọn một phần tử cụ thể trong tập nghiệm  $\Omega_{\text{SVI}}$ , ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân sau đây:

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \Omega_{\text{SVI}} \text{ sao cho } \langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^* - x^\dagger \rangle \geq 0 \quad \forall x^* \in \Omega_{\text{SVI}}, \quad (\text{BVIP2})$$

trong đó  $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  là  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $\tilde{L}$ - liên tục Lipschitz. Thuật toán của chúng ta dựa trên kĩ thuật hiệu chỉnh, đạt được sự hội tụ mạnh nhờ các tính chất đặc biệt của toán tử  $\mathcal{F}$ . Do việc ước lượng, tính toán giải thức của toán tử đơn điệu cực đại nói chung là khó khăn và đắt, ta cải biên và đề xuất thuật toán mới theo cách sao cho chỉ cần tính giải thức  $J_\beta^{\mathcal{B}_1}$  một lần tại mỗi bước lặp mà không phải hai lần như trong Thuật toán 0.1.

### 2.3.1 Mọi liên hệ giữa hai bài toán bao hàm thức biến phân (VI) và bao hàm thức biến phân tách (SVI)

Cô định một số  $\beta > 0$ , xét bài toán bao hàm thức biến phân:

$$\text{Tìm } x \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x) + \mathcal{T}^* \left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x), \quad (\text{VI2})$$

với  $I$  là ánh xạ đồng nhất trong  $\mathcal{H}_2$ . Do  $\mathcal{B}_2$  là đơn điệu cực đại nên theo Bổ đề 1.4, toán tử  $J_\beta^{\mathcal{B}_2}$  đơn điệu và không giãn vững, từ đó suy ra toán tử  $\mathcal{T}^* \left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}$  là đơn điệu và liên tục Lipschitz. Gọi tập nghiệm của bài toán VI2 là  $\Delta$ , ta có kết quả sau đây:

**Bổ đề 2.8.** *Hai bài toán SVI và VI2 tương đương với nhau theo nghĩa nghiệm của bài toán này cũng là nghiệm của bài toán kia và ngược lại.*

*Chứng minh.* Trước hết, ta chứng minh rằng  $\Omega_{\text{SVI}} \subseteq \Delta$ . Thật vậy, lấy  $x^* \in \Omega_{\text{SVI}}$  bất kì, ta có  $0 \in \mathcal{B}_2 \mathcal{T}(x^*)$  nên  $\mathcal{T}(x^*) \in (I + \beta \mathcal{B}_2) \mathcal{T}(x^*)$ . Vì vậy,  $\mathcal{T}(x^*) = J_\beta^{\mathcal{B}_2} \mathcal{T}(x^*)$  hay tương đương với  $\left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^*) = 0$ . Từ đó, ta được

$$\mathcal{T}^* \left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^*) = 0.$$

Mặt khác, ta cũng có  $0 \in \mathcal{B}_1(x^*)$  nên  $0 \in \mathcal{B}_1(x^*) + \mathcal{T}^* \left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^*)$ . Vì vậy,  $x^* \in \Delta$  nên suy ra  $\Omega_{\text{SVI}} \subseteq \Delta$ .

Ở chiều ngược lại, ta lấy  $\bar{x} \in \Delta$  bất kì. Do  $0 \in \mathcal{B}_1(\bar{x}) + \mathcal{T}^* \left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(\bar{x})$  nên ta có  $-\mathcal{T}^* \left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(\bar{x}) \in \mathcal{B}_1(\bar{x})$ . Lấy  $x^* \in \Omega_{\text{SVI}}$  bất kì, theo suy luận ở trên ta có  $-\mathcal{T}^* \left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^*) \in \mathcal{B}_1(x^*)$ . Đặt  $\mathcal{S} := \mathcal{T}^* \left( I - J_\beta^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}$ , từ hai bao hàm thức trên và tính đơn điệu của  $\mathcal{B}_1$ , ta suy ra

$$\langle \bar{x} - x^*, \mathcal{S}(\bar{x}) - \mathcal{S}(x^*) \rangle \leq 0. \quad (2.71)$$

Tuy nhiên, theo Bổ đề 1.15(ii), ta lại có

$$\|\mathcal{S}(\bar{x}) - \mathcal{S}(x^*)\|^2 \leq \|\mathcal{T}\|^2 \langle \bar{x} - x^*, \mathcal{S}(\bar{x}) - \mathcal{S}(x^*) \rangle. \quad (2.72)$$

Từ (2.71) và (2.72), ta suy ra  $\mathcal{S}\bar{x} = \mathcal{S}x^*$ . Kết hợp điều này và Bổ đề 1.15(i), ta có

$$\left\| \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(\bar{x}) - \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^*) \right\|^2 \leq \langle \bar{x} - x^*, \mathcal{S}(\bar{x}) - \mathcal{S}(x^*) \rangle = 0.$$

Từ đó suy ra  $\left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(\bar{x}) = \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^*) = 0$ , nên ta có  $\mathcal{T}(\bar{x}) = J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \mathcal{T}(\bar{x})$ , hay tương đương với  $0 \in \mathcal{B}_2 \mathcal{T}(\bar{x})$ .

Tiếp theo, từ  $0 \in \mathcal{B}_1(\bar{x}) + \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(\bar{x})$  và  $\mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(\bar{x}) = 0$ , ta suy ra  $0 \in \mathcal{B}_1(\bar{x})$ . Do đó,  $\bar{x} \in \Omega_{\text{SVI}}$  nên  $\Delta \subseteq \Omega_{\text{SVI}}$ . Như vậy, ta chứng minh được  $\Delta = \Omega_{\text{SVI}}$  hay nói cách khác, hai bài toán SVI và VI2 tương đương với nhau.  $\square$

Từ Bổ đề 2.8, ta thấy rằng việc giải một bài toán bao hàm thức biến phân tách hoàn toàn có thể đưa về giải bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng tương đương bằng phương pháp đã đề xuất ở Mục 2.1. Ở đây, với  $\beta > 0$  cho trước, ta liên kết bài toán SVI với bài toán bao hàm thức biến phân sau đây:

$$\text{Tìm } x \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \mathcal{B}_1(x) + \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x) + \alpha \mathcal{F}(x), \quad (\text{RVI2})$$

trong đó  $\alpha > 0$  là một tham số hiệu chỉnh và  $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  là  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $\tilde{L}$ -liên tục Lipschitz. Để thấy bài toán RVI2 có duy nhất nghiệm với mỗi  $\alpha > 0$ . Ta gọi nghiệm duy nhất này là  $x_{\alpha}$ . Tương tự như Bổ đề 2.1, lưới nghiệm hiệu chỉnh  $\{x_{\alpha}\}_{\alpha > 0}$  (để cho đơn giản, ta sẽ gọi lưới này là dãy  $\{x_{\alpha}\}$ ) có các tính chất sau.

**Bổ đề 2.9.** (i) Dãy  $\{x_{\alpha}\}_{\alpha > 0}$  bị chặn.

(ii) Với mọi số dương  $\alpha_1$  và  $\alpha_2$ , ta có  $\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| \leq \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{\alpha_1} M$ , trong đó  $M$  là một số thực dương.

(iii)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} x_{\alpha} = x^+$ , trong đó  $x^+$  là nghiệm duy nhất của bài toán (BVIP2).

*Chứng minh.* Ta lặp lại chứng minh của Bổ đề 2.1 cho  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1$  và

$$\mathcal{B} = \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}. \quad \square$$

### 2.3.2 Thuật toán và sự hội tụ

Trong mục này chúng ta trình bày thuật toán kiểu gần kề giải bài toán SVI trong không gian Hilbert và phát biểu định lý về sự hội tụ mạnh của phương pháp. Thuật toán được phát biểu như sau.

**Thuật toán 2.4.** [Thuật toán kiểu gần kề hiệu chỉnh (RPA- regularization proximal-like algorithm)]

**Khởi tạo:** Lấy  $x^0 \in \mathcal{H}_1$ ,  $\beta > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$ ,  $r \in (0, 2)$ , và một dãy  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  thỏa mãn các điều kiện (C1)-(C3) cho trong Mục 2.1.2.

**Các bước lặp:**

1. Tính  $y^k = J_{\gamma_k}^{\mathcal{B}_1} \left( x^k - \gamma_k \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) - \gamma_k \alpha_k \mathcal{F}(x^k) \right)$ , với  $\gamma_k > 0$  thỏa mãn

$$\gamma_k \|\mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(y^k)\| \leq \delta \|x^k - y^k\|, \quad 0 < \delta < 1. \quad (2.73)$$

2. Tính  $x^{k+1} = x^k - \lambda_k r D(x^k, \gamma_k)$ , trong đó

$$D(x^k, \gamma_k) = x^k - y^k - \gamma_k \left[ \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(y^k) \right], \quad (2.74)$$

$$\lambda_k = \min \left\{ \lambda_{k-1} + p_{k-1}, \frac{\langle x^k - y^k, D(x^k, \gamma_k) \rangle}{\|D(x^k, \gamma_k)\|^2} \right\}, \quad (2.75)$$

với  $\{p_k\} \subset [0, +\infty)$  sao cho  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k < +\infty$ .

3. Tăng  $k$  lên 1 đơn vị và quay trở lại Bước 1.

So sánh thuật toán trên với Thuật toán 0.1, ta thấy rằng  $y^k$  trong Bước 1 của Thuật toán 2.4 khác với  $y^k$  được tính trong Thuật toán 0.1. Điều này được thể hiện bởi thành phần  $\gamma_k \alpha_k \mathcal{F}(x^k)$  trong cách xác định, là yếu tố dẫn đến sự hội tụ mạnh của dãy sinh bởi Thuật toán 2.4. Hơn nữa, phép tính  $x^{k+1}$  trong Thuật toán 2.4 không đòi hỏi sử dụng giải thức  $J_{\beta}^{\mathcal{B}_1}$  như trong Thuật toán 0.1. Ta cũng cải biên cách chọn  $\lambda_k$  để sử dụng các tính chất của dãy này trong chứng minh sự hội tụ. Tiếp theo, chúng ta có một số chú ý như sau.

**Nhận xét 2.3.** Từ Bổ đề 1.15(ii), ta suy ra

$$\|\mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(y^k)\| \leq \|\mathcal{T}\|^2 \|x^k - y^k\|.$$

Vì vậy, nếu ta chọn  $\gamma_k$  sao cho  $0 < \gamma_k \leq \frac{\delta}{\|\mathcal{T}\|^2}$ , thì điều kiện (2.73) được thỏa mãn. Tuy nhiên, trong trường hợp  $\|\mathcal{T}\|^2$  không thể tính hoặc ước lượng được, ta có thể tìm giá trị  $\gamma_k$  thỏa mãn điều kiện (2.73) bằng kỹ thuật tìm kiếm theo tia (line-search). Cụ thể, ta lấy các số  $s$  và  $l$  thỏa mãn  $s > 0$  và  $0 < l < 1$ . Ở bước lặp thứ  $k$ , sau khi tính  $y^k$ , ta chọn  $\gamma$  là giá trị lớn nhất của tập  $\{s, sl, sl^2, \dots\}$  sao cho

$$\gamma \|\mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(y^k)\| \leq \delta \|x^k - y^k\|, \quad 0 < \delta < 1. \quad (2.76)$$

Theo phân tích ở trên, quá trình tìm kiếm này sẽ kết thúc khi  $\gamma = sl^m$  với  $m$  đủ lớn để  $sl^m \leq \frac{\delta}{\|\mathcal{T}\|^2}$ . Khi đó ta lấy  $\gamma_k = \gamma$ . Như vậy, theo cách này,  $\gamma_k$  được xác định. Tuy nhiên, nhược điểm của phương pháp tìm kiếm theo tia là thời gian và chi phí tính toán lớn.

**Nhận xét 2.4.** (i) Chú ý rằng  $D(x^k, \gamma_k) = 0$  khi và chỉ khi  $y^k = x^k$ . Thật vậy, hiển nhiên rằng nếu  $y^k = x^k$ , thì  $D(x^k, \gamma_k) = 0$ . Ngược lại, nếu  $D(x^k, \gamma_k) = 0$ , thì từ các đánh giá (2.73) và (2.74), ta suy ra  $\|x^k - y^k\| \leq \delta \|x^k - y^k\|$ . Vì vậy, ta có  $y^k = x^k$  hoặc  $\delta \geq 1$ . Do  $0 < \delta < 1$ , ta kết luận rằng  $y^k = x^k$ , như đã khẳng định.

(ii) Nếu  $y^k = x^k$  (từ đó kéo theo  $D(x^k, \gamma_k) = 0$ ) với  $k \geq 0$  nào đó, khi đó với những quy ước đã đề cập ở trên, ta thấy rằng  $\lambda_k = \lambda_{k-1} + p_{k-1}$ , và  $x^{k+1} = x^k$ . Trong trường hợp này, từ cách xác định của  $y^k$  ta được

$$x^k = J_{\gamma_k}^{\mathcal{B}_1} \left( x^k - \gamma_k \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}(x^k) - \gamma_k \alpha_k \mathcal{F}(x^k) \right).$$

Vì vậy  $x^k$  là nghiệm của bài toán RVI2 với  $\alpha = \alpha_k$ , tức là,  $x^{k+1} = x^k = x_{\alpha_k}$ . Điều này không suy ra  $x^k$  là một nghiệm của bài toán SVI. Tuy nhiên, ta có kết quả sau đây.

**Bổ đề 2.10.** Nếu tồn tại một số tự nhiên  $N \geq 1$  sao cho  $x^{k+1} = x^k$  với mọi  $k \geq N$ , thì  $x^N = x^\dagger$  là một nghiệm của bài toán SVI, đồng thời cũng là nghiệm của bài toán BVIP2.

*Chứng minh.* Tương tự như chứng minh của Bổ đề 2.5. □

Theo Bổ đề 2.10, nếu dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.4 là hữu hạn, thì ta tìm được một nghiệm của bài toán SVI. Vì vậy, không mất tính chất tổng quát, sau đây ta có thể giả sử rằng Thuật toán 2.4 sinh ra một dãy vô hạn. Tiếp theo, chúng ta phát biểu định lý về sự hội tụ mạnh của thuật toán.

**Định lý 2.7.** Cho  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  là hai không gian Hilbert thực, cho  $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn với toán tử liên hợp  $\mathcal{T}^*$ , và cho  $\mathcal{B}_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_1}$  và  $\mathcal{B}_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$  là hai toán tử đa trị đơn điệu cực đại. Cho  $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  là một toán tử  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $\tilde{L}$ -liên tục Lipschitz. Giả sử rằng  $\{\gamma_k\}$  là một dãy trong  $\left[ \gamma_{\min}, \frac{\delta}{\|\mathcal{T}\|^2} \right] \subset (0, +\infty)$  hoặc được chọn theo (2.76). Khi đó dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 2.4 hội tụ mạnh đến một nghiệm  $x^\dagger$  của bài toán SVI, là nghiệm duy nhất của bài toán BVIP2.

*Chứng minh.* Do ta đã chỉ ra ở Bổ đề 2.8 rằng bài toán SVI tương đương với một bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng, Định lý 2.7 được chứng minh tương tự như Định lý 2.1 cho trường hợp  $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1$  và  $\mathcal{B} = \mathcal{T}^* \left( I - J_{\beta}^{\mathcal{B}_2} \right) \mathcal{T}$ . □

### 2.3.3 Áp dụng cho bài toán chấp nhận tách

Xét một bài toán chấp nhận tách (SFP) trong không gian Hilbert: Tìm một điểm trong một tập con lồi đóng khác rỗng của một không gian Hilbert sao cho ảnh của nó qua một ánh xạ tuyến tính nằm trong một tập con lồi đóng khác rỗng của một không gian Hilbert khác. Cụ thể hơn, cho  $C$  và  $Q$  lần lượt là hai tập con lồi đóng khác rỗng của các không gian Hilbert  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  và cho  $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  là một ánh xạ tuyến tính bị chặn với toán tử liên hợp  $\mathcal{T}^*$ . Bài toán SFP được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \mathcal{T}(x^*) \in Q. \quad (\text{SFP})$$

Vào năm 1994, Censor và Elfving [33] đã đề xuất SFP trong không gian Euclid hữu hạn chiều nảy sinh từ việc mô hình hoá các bài toán khôi phục tín hiệu hay khôi phục ảnh trong y tế [28]. Bài toán SFP cũng xuất hiện trong một vài trường hợp khác liên quan đến khôi phục ảnh, chụp cắt lớp vi tính và lập kế hoạch xạ trị [36, 66, 100].

Bài toán SFP có thể viết lại dưới dạng: tìm  $x^* \in \mathcal{H}_1$  sao cho  $0 = \iota_C x^*$  và  $0 = \iota_Q(\mathcal{T}(x^*))$ , hay tương đương với:

$$\text{tìm } x^* \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } 0 \in \partial \iota_C(x^*) \text{ và } 0 \in \partial \iota_Q(\mathcal{T}(x^*)).$$

Như đã biết, các hàm chỉ  $\iota_C, \iota_Q$  (xem Ví dụ 1.1) là các hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới lần lượt trên  $\mathcal{H}_1$  và  $\mathcal{H}_2$ . Ta cũng biết rằng  $\partial \iota_C = N_C$  (tương ứng,  $\partial \iota_Q = N_Q$ ). Ngoài ra, ta cũng có các dưới vi phân  $\partial \iota_C = N_C$  và  $\partial \iota_Q = N_Q$  là đơn điệu cực đại và  $J_\beta^{N_C} = P_C$  (tương ứng,  $J_\beta^{N_Q} = P_Q$ ) với mọi  $\beta > 0$ . Như vậy bài toán SFP được đưa về bài toán SVI với  $\mathcal{B}_1 = N_C$  và  $\mathcal{B}_2 = N_Q$ .

Ta kí hiệu tập nghiệm của bài toán SFP là  $\bar{\Omega}$  và giả sử rằng tập này khác rỗng. Để tìm nghiệm của bài toán SFP, tức là tìm một phần tử trong  $\bar{\Omega}$ , ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân sau đây:

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \bar{\Omega} \text{ sao cho } \langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^* - x^\dagger \rangle \geq 0 \quad \forall x^* \in \bar{\Omega}, \quad (\text{VIP3})$$

trong đó  $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  là một toán tử  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $k$ -liên tục Lipschitz. Để thấy nghiệm  $x^\dagger$  của bài toán (VIP3) là duy nhất.

Áp dụng Định lý 2.7, ta thu được kết quả sau đây.

**Định lý 2.8.** Cho  $C$  và  $Q$  lần lượt là các tập con lồi, đóng, khác rỗng của các không gian Hilbert  $\mathcal{H}_1$  và  $\mathcal{H}_2$ . Cho  $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn với toán tử liên hợp  $\mathcal{T}^*$  sao cho tập nghiệm  $\bar{\Omega}$  của bài toán SFP khác rỗng. Cho trước  $x^0 \in \mathcal{H}_1$ ,  $\lambda_0 > 0$  và  $r \in (0, 2)$ . Giả sử rằng  $\{\gamma_k\}$  là một dãy trong  $\left[\gamma_{\min}, \frac{\delta}{\|\mathcal{T}\|^2}\right]$ , với  $\delta \in (0, 1)$ , và lấy  $\{p_k\} \subset [0, +\infty)$ ,  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  sao cho  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k < +\infty$  và các điều kiện (C1) - (C3) được thỏa mãn. Cho  $\{x^k\}$  là một dãy trong  $\mathcal{H}_1$  sinh bởi

$$\begin{cases} y^k = P_C \left( x^k - \gamma_k \mathcal{T}^*(I - P_Q)\mathcal{T}(x^k) - \gamma_k \alpha_k \mathcal{F}(x^k) \right), \\ x^{k+1} = x^k - \lambda_k r D(x^k, \gamma_k), \end{cases}$$

trong đó

$$D(x^k, \gamma_k) = x^k - y^k - \gamma_k \left[ \mathcal{T}^*(I - P_Q)\mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^*(I - P_Q)\mathcal{T}(y^k) \right],$$

$$\lambda_k = \min \left\{ \lambda_{k-1} + p_{k-1}, \frac{\langle x^k - y^k, D(x^k, \gamma_k) \rangle}{\|D(x^k, \gamma_k)\|^2} \right\}.$$

Khi đó dãy  $\{x^k\}$  hội tụ mạnh đến một nghiệm  $x^\dagger$  của bài toán SFP, đồng thời cũng là nghiệm duy nhất của bài toán (VIP3).

### 2.3.4 Áp dụng cho bài toán tối ưu tách

Cho  $\varphi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  và  $\psi : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là hai hàm lồi chính thường và nửa liên tục dưới, và cho  $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  là một toán tử tuyến tính bị chặn với toán tử liên hợp  $\mathcal{T}^*$ . Ta xét bài toán tối ưu tách (SOP) phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H}_1 \text{ sao cho } x^* \in \arg \min_{\mathcal{H}_1} \varphi \text{ và } \mathcal{T}(x^*) \in \arg \min_{\mathcal{H}_2} \psi. \quad (\text{SOP})$$

Ta kí hiệu tập nghiệm của bài toán SOP bởi  $\tilde{\Omega}$  và giả sử rằng tập nghiệm này là khác rỗng. Bài toán SOP có thể viết lại dưới dạng một bài toán SVI với  $\mathcal{B}_1 = \partial\varphi$  và  $\mathcal{B}_2 = \partial\psi$ . Cho  $\mathcal{H}$  là một không gian Hilbert thực. Gọi  $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là một hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới. Theo Bổ đề 1.7, dưới vi phân  $\partial h$  là đơn điệu cực đại và theo Bổ đề 1.10 ta có  $J_{\beta\partial h}(x) = (I + \beta\partial h)^{-1}(x) = \text{prox}_{\beta h}(x)$ . Với các thiết lập như trên, ta có thể viết lại Định lý 2.7 dưới dạng như sau.

**Định lý 2.9.** Cho  $\varphi : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  và  $\psi : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là hai hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới. Cho  $\mathcal{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  là một toán tử tuyến tính bị

chặn với toán tử liên hợp  $\mathcal{T}^*$  sao cho tập nghiệm  $\tilde{\Omega}$  của bài toán SOP là khác rỗng. Cho  $\mathcal{F} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  là một toán tử  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $k$ -Lipschitz liên tục. Ta chọn trước  $x^0 \in \mathcal{H}_1$ ,  $\lambda_0 > 0$  và  $r \in (0, 2)$ . Giả sử rằng  $\{\gamma_k\}$  là một dãy trong  $\left[\gamma_{\min}, \frac{\delta}{\|\mathcal{T}\|^2}\right]$ , với  $\delta \in (0, 1)$ , và chọn  $\{p_k\} \subset [0, +\infty)$ ,  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  sao cho  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k < +\infty$  và các Điều kiện (C1) - (C3) được thỏa mãn. Cho  $\{x^k\}$  là dãy trong  $\mathcal{H}_1$  sinh bởi

$$\begin{cases} y^k = \text{prox}_{\gamma_k \varphi} \left( x^k - \gamma_k \mathcal{T}^*(I - \text{prox}_{\beta \psi}) \mathcal{T}(x^k) - \gamma_k \alpha_k \mathcal{F}(x^k) \right), \\ x^{k+1} = x^k - \lambda_k r D(x^k, \gamma_k), \end{cases}$$

trong đó

$$D(x^k, \gamma_k) = x^k - y^k - \gamma_k \left[ \mathcal{T}^*(I - \text{prox}_{\beta \psi}) \mathcal{T}(x^k) - \mathcal{T}^*(I - \text{prox}_{\beta \psi}) \mathcal{T}(y^k) \right],$$

$$\lambda_k = \min \left\{ \lambda_{k-1} + p_{k-1}, \frac{\langle x^k - y^k, D(x^k, \gamma_k) \rangle}{\|D(x^k, \gamma_k)\|^2} \right\}.$$

Khi đó dãy  $\{x^k\}$  hội tụ mạnh đến một nghiệm  $x^\dagger$  của bài toán SOP, đồng thời cũng là nghiệm duy nhất của bài toán:

$$\text{Tìm } x^\dagger \in \tilde{\Omega} \text{ sao cho } \langle \mathcal{F}(x^\dagger), x^* - x^\dagger \rangle \geq 0 \quad \forall x^* \in \tilde{\Omega}.$$

## 2.4 Thử nghiệm số

### 2.4.1 Thử nghiệm số cho Thuật toán 2.1

Trong mục này, chúng ta thực hiện thử nghiệm số cho Thuật toán 2.1 (RPCM) và so sánh kết quả với một số phương pháp hội tụ mạnh, bao gồm phương pháp tiên-lùi kiểu Halpern (HFBM - Halpern-type forward-backward method) [79, Theorem 3.7], phương pháp tiên-lùi tổng quát kiểu Halpern (HGFBM - Halpern-type generalized forward-backward method) [39, Theorem 3.3], phương pháp phân rã tiên-lùi-tiên kiểu Halpern (HFBFSM - Halpern forward-backward-forward splitting method) [96, Algorithm 3.11], phương pháp phân rã lùi-tiên-lùi gắn kết (VFBFSM - viscosity forward-backward-forward splitting method) [107, Algorithm 3.1]. Các phương pháp trên có biểu diễn:

- HFBM:  $x^{k+1} = \alpha_k u + (1 - \alpha_k)(J_{r_k}^A(x^k - r_k(\mathcal{B}(x^k) + a^k)) + b^k)$ .
- HGFBM:  $x^{k+1} = \alpha_k u + \lambda_k x^k + \delta_k J_{r_k}^A(x^k - r_k \mathcal{B}(x^k)) + e^k$ .

- HFBFSM: 
$$\begin{cases} y^k = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k \mathcal{B}(x^k)), \\ x^{k+1} = \alpha_k x^0 + (1 - \alpha_k)(y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(y^k) - \mathcal{B}(x^k))). \end{cases}$$

- VFBFSM: 
$$\begin{cases} y^k = J_{\lambda_k}^{\mathcal{A}}(x^k - \lambda_k \mathcal{B}(x^k)), \\ z^k = x^k - \delta \eta_k d^k \\ x^{k+1} = \alpha_k \bar{f}(x^k) + (1 - \alpha_k) z^k, \end{cases}$$

trong đó  $d^k = x^k - y^k - \lambda_k(\mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k))$ ,  $\eta_k = (1 - \mu_k) \frac{\|x^k - y^k\|^2}{\|d^k\|^2}$  và  $\lambda_k$  được chọn là phần tử  $\lambda \in \{\delta, \delta l, \delta l^2, \dots\}$  lớn nhất sao cho

$$\lambda \langle \mathcal{B}(x^k) - \mathcal{B}(y^k), x^k - y^k \rangle \leq \mu \|x^k - y^k\|^2.$$

**Ví dụ 2.1** (Bài toán LASSO (xử lý ảnh thừa)). Ta xét bài toán sau:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2} \|Sx - y\|_2^2 + \rho \|x\|_1, \quad (2.77)$$

trong đó  $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , và  $\rho > 0$ .

Bài toán Lasso được đưa ra nhằm giải quyết vấn đề: làm thế nào để vừa ước lượng tham số mô hình hồi quy tuyến tính, vừa chọn ra các biến quan trọng (tức là vectơ  $x$  được khôi phục là thưa). Bài toán này có nhiều ứng dụng trong tài chính, y sinh, học máy...

Bài toán (2.77) có thể phát biểu lại dưới dạng bài toán VI cho  $\mathcal{A} = \partial \rho \|\cdot\|_1$  và  $\mathcal{B}(x) = \nabla \left( \frac{1}{2} \|Sx - y\|_2^2 \right) = S^T(Sx - y)$ . Trong trường hợp này, ta có

$$J_{\lambda}^{\mathcal{A}}(x) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)^T,$$

trong đó  $\xi_i = \text{sign}(x_i) \cdot \max\{0, |x_i| - \lambda \rho\}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Có những phần mềm thương mại, dựa trên phương pháp chiếu gradient giải bài toán (2.77), ví dụ như, SPGL1 [20] và FISTA [21]. Tuy nhiên, chủ đề này nằm ngoài phạm vi nghiên cứu của luận án.

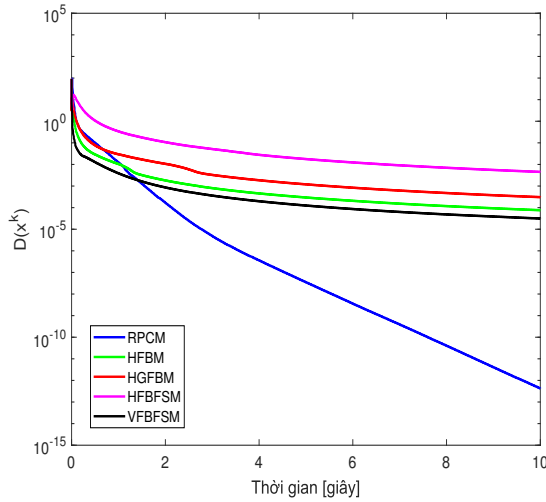
Trong thử nghiệm của chúng ta,  $S$  được sinh ngẫu nhiên bởi phân phối chuẩn với giá trị trung bình bằng 0 và phương sai 1 còn  $y$  được sinh bởi nhiễu Gauss ( $m = 1024$ ,  $n = 512$ ). Toán tử  $\mathcal{B}$  đơn điệu và liên tục Lipschitz với hệ số  $L = \|S\|^2$ . Ta lấy  $\rho = 0.005 \|S\|^2$ . Các tham số được chọn là  $\lambda_k = 0.9/L$ ,  $r = 1.9$ ,  $\beta = 1$  cho RPCM;  $r_k = 0.9/L$ ,  $a^k = b^k = 0$  cho HFBM;  $r_k = 0.9/L$ ,  $\delta_k = \lambda_k = 0.5(1 - \alpha_k)$ ,

$e^k = 0$  cho HGFBM;  $\delta = 1, \gamma = 1.9, l = 0.5, \mu = 0.5, \bar{f}(x) = x^0$  cho VFBFSM. Dãy tham số hiệu chỉnh  $\{\alpha_k\}$  được hiển thị trong mỗi hình minh họa. Điểm xuất phát được chọn ngẫu nhiên với các tọa độ thành phần được lấy trong đoạn  $[-1, 1]$ .

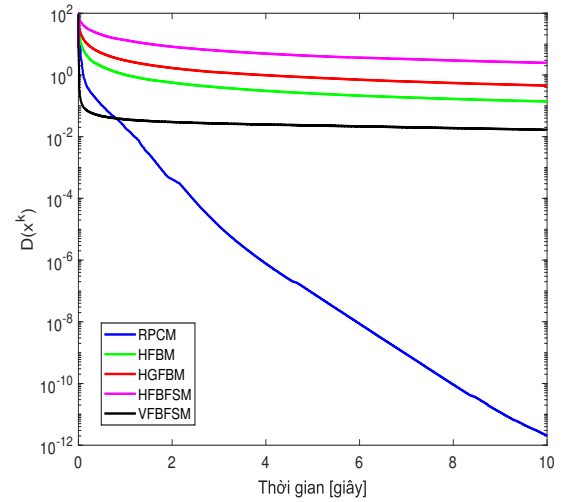
Ta sử dụng hàm  $D(x) = \|x - J_\lambda^A(x - \lambda f(x))\|^2$  với  $\lambda > 0$  nào đó để đánh giá các phương pháp. Chú ý rằng  $x$  là một nghiệm của bài toán (VI) khi và chỉ khi  $D(x) = 0$ . Sự hội tụ của dãy  $D(x^k)$  tới 0 có thể được dùng làm một tiêu chí để đại diện cho việc  $\{x^k\}$  hội tụ tới nghiệm đúng của bài toán đang xét.

Đầu tiên, ta chọn toán tử  $\mathcal{F}(x) = x - x^0$  cho phương pháp RPCM. Dáng điệu của dãy  $D(x^k)$  sinh bởi từng phương pháp được thể hiện trong các Hình 2.1 và 2.2.

Tiếp theo, ta chọn toán tử  $\mathcal{F}(x) = Qx + q$  cho phương pháp RPCM, trong đó  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  là một ma trận đối xứng, xác định dương được sinh ngẫu nhiên và  $q \in \mathbb{R}^m$ . Ta trình bày biểu diễn số của phương pháp RPCM với các dãy  $\alpha_k$  được chọn khác nhau trong các Hình 2.3 và 2.4. Ta thấy rằng khi  $\{\alpha_k\}$  dần về 0 càng nhanh thì dãy  $D(x^k)$  giảm càng nhanh.



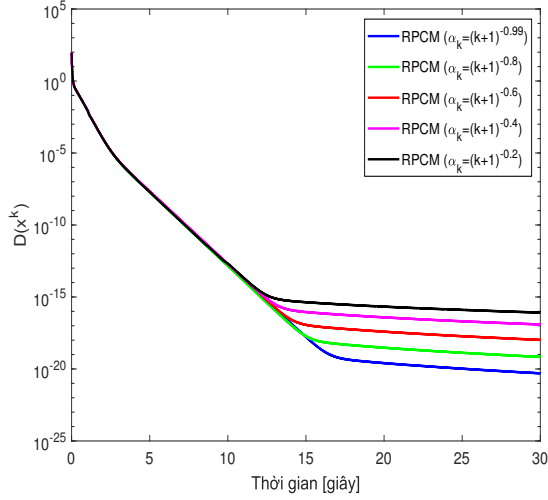
Hình 2.1: Các phương pháp cho Ví dụ 2.1 với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$ .



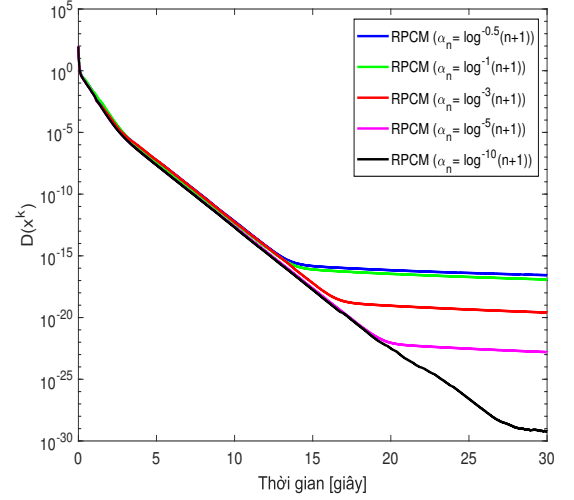
Hình 2.2: Các phương pháp cho Ví dụ 2.1 với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ .

**Ví dụ 2.2** (Hồi quy logistic thưa). Trong ví dụ này, ta quan tâm đến bài toán hồi quy logistic thưa, một bài toán phổ biến trong ứng dụng học máy:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^N \log(1 + \exp(-b_i \langle a_i, x \rangle)) + \rho \|x\|_1, \quad (2.78)$$



Hình 2.3: Phương pháp RPCM với các dãy  $\alpha_k$  được chọn khác nhau cho Ví dụ 2.1.



Hình 2.4: Phương pháp RPCM với các dãy  $\alpha_k$  được chọn khác nhau cho Ví dụ 2.1.

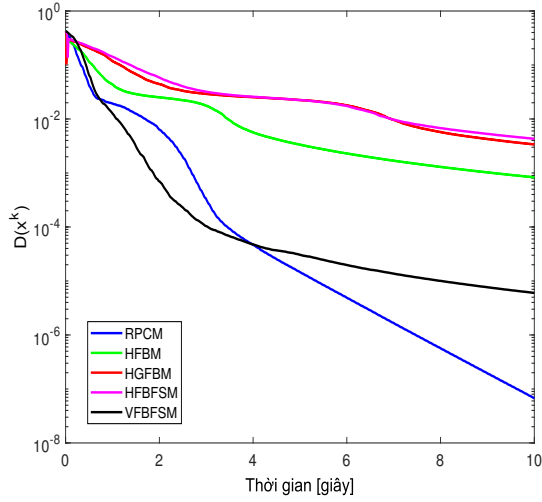
trong đó  $a_i \in \mathbb{R}^m$ ,  $b_i \in \{-1, 1\}$ , và  $\rho > 0$ .

Đặt  $A = (a_1^T, a_2^T, \dots, a_k^T)^T_{N \times m}$  và  $K = (k_{ij})_{N \times m}$ , trong đó  $k_{ij} = -b_i a_{ij}$  với mọi  $i, j$ , và  $\Phi(y) = \sum_{i=1}^N \log(1 + \exp(y_i))$ . Bài toán (2.78) tương đương với bài toán VI với  $\mathcal{A} = \partial \rho \|\cdot\|_1$  và  $\mathcal{B}(x) = \nabla \Phi(Kx)$ . Hệ số Lipschitz của  $\mathcal{B}$  là  $L = \frac{1}{4} \|K^T K\|$ . Ta lấy  $\rho = 0.005 \|K\|^2$ . Ma trận  $A$  được sinh ngẫu nhiên bởi phân phối chuẩn với giá trị trung bình bằng 0 và phương sai 1 và các tọa độ thành phần của  $b$  được chọn ngẫu nhiên trong  $\{-1, 1\}$  ( $m = 1024$ ,  $N = 512$ ). Giống như Ví dụ 2.1, trước hết ta chọn  $\mathcal{F}(x) = x - x^0$  cho phương pháp RPCM và so sánh với các phương pháp còn lại. Các kết quả được minh họa trong Hình 2.5 và Hình 2.6. Tiếp theo, ta chọn  $\mathcal{F}(x) = Qx + q$  và trình bày kết quả số của phương pháp RPCM với các dãy  $\alpha_k$  được chọn khác nhau trong Hình 2.7 và Hình 2.8. Một lần nữa, ta lại thấy rằng khi  $\{\alpha_k\}$  dần về 0 càng nhanh thì dãy  $D(x^k)$  giảm càng nhanh.

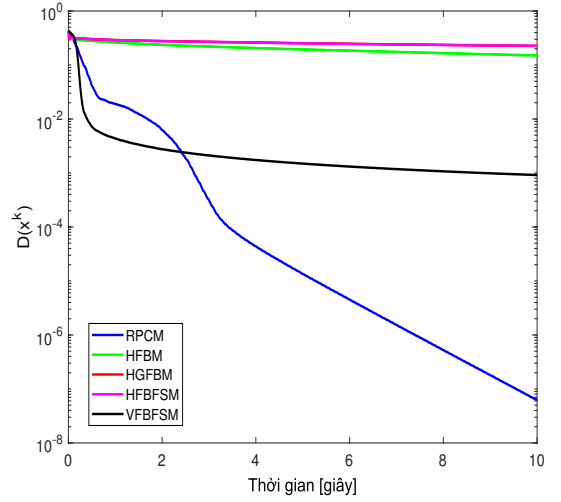
**Ví dụ 2.3** (Bài toán Điều khiển Tối ưu). Cho  $H = L^2[0, T]$  là không gian Hilbert các hàm bình phương khả tích trên đoạn  $[0, T]$  với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle = \int_0^T u(t)v(t)dt$$

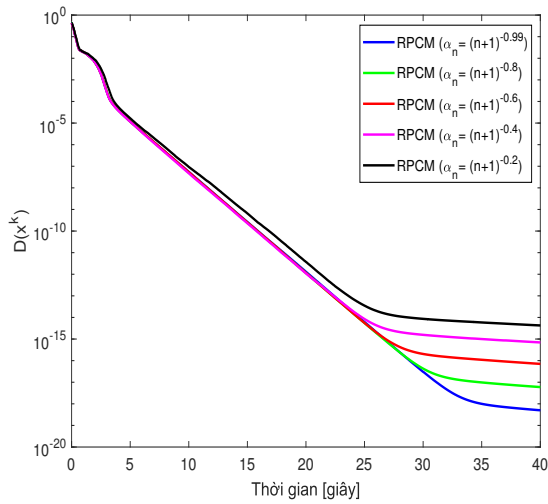
và chuẩn cảm sinh  $\|u\| = \sqrt{\int_0^T u(t)^2 dt}$ . Cho  $r \in \mathbb{N}^*$  là một số nguyên dương. Xét



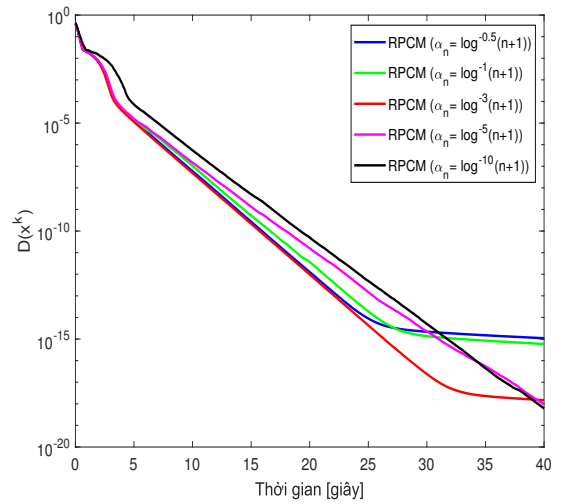
Hình 2.5: Các phương pháp cho Ví dụ 2.2 với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$ .



Hình 2.6: Các phương pháp cho Ví dụ 2.2 với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ .



Hình 2.7: Phương pháp RPCM với các dãy  $\alpha_k$  được chọn khác nhau cho Ví dụ 2.2.



Hình 2.8: Phương pháp RPCM với các dãy  $\alpha_k$  được chọn khác nhau cho Ví dụ 2.2.

không gian Hilbert tích  $\mathcal{H} = H^r = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_r$ . Gọi  $\mathcal{U}$  là một hình hộp  $r$ -chiều, cho bởi

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in (L^2[0, T])^r : u_i(t) \in [\underline{u}, \bar{u}], \forall t \in [0, T], i = 1, 2, \dots, r \right\}.$$

Với mỗi  $u \in \mathcal{U}$ , cho  $x(t)$  là một quỹ đạo trạng thái với các đạo hàm liên tục từng khúc, thỏa mãn hệ phương trình vi phân tuyến tính sau:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{A}(t)x(t) + \mathbb{B}(t)u(t), \quad x(0) = x^0, \quad (2.79)$$

trong đó  $\mathbb{A}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  và  $\mathbb{B}(t) \in \mathbb{R}^{m \times r}$  là các ma trận của các hàm liên tục. Xét bài toán điều khiển tối ưu,

$$\min \{ \Phi(u) : u \in \mathcal{U} \}, \quad (2.80)$$

trong đó  $\Phi(u) = \varphi(x(T))$  với  $\varphi$  là hàm lồi khả vi xác định trên tập chấp nhận được.

Từ nguyên lí cực đại Pontryagin, ta thấy rằng mỗi cặp nghiệm tối ưu  $(x^*, u^*)$ , cùng với một hàm liên tục tuyệt đối  $p^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tương ứng, gọi là vector đồng trạng thái, thỏa mãn hệ phương trình Pontryagin sau đây:

$$\dot{x}^*(t) = \mathbb{A}(t)x^*(t) + \mathbb{B}(t)u(t), \quad x^*(0) = x^0, \quad (2.81)$$

$$\dot{p}^*(t) = -\mathbb{A}^\top(t)p^*(t), \quad p^*(T) = \nabla \varphi(x(T)), \quad (2.82)$$

và

$$0 \in \mathbb{B}^\top(t)p^*(t) + \mathcal{N}_{\mathcal{U}}u^*(t), \quad (2.83)$$

trong đó  $\mathcal{N}_{\mathcal{U}}$  là nón trực giao của  $\mathcal{U}$ . Hiển nhiên, bao hàm thức (2.83) tương đương với bài toán VI, trong đó  $(\mathcal{A}(u))(t) = \mathcal{N}_{\mathcal{U}}u(t)$  và  $(\mathcal{B}(u))(t) = \mathbb{B}^\top(t)p^*(t)$ . Việc  $\mathcal{B}(u)$  là gradient của hàm mục tiêu  $\Phi$  đã được chỉ ra, chẳng hạn như trong [69]. Giải thức của toán tử  $\mathcal{A}$  liên kết với  $\lambda > 0$  là  $J_\lambda^{\mathcal{A}}(u) = P_{\mathcal{U}}(u)$ . Để giải bài toán này, ta rời rạc hoá đoạn  $[0, T]$  bằng phân hoạch  $t_i = ih$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ), và sử dụng phương pháp Euler để giải hệ phương trình (2.81) - (2.82), trong đó  $K$  là một số tự nhiên và  $h = T/K$  là độ dài bước.

Để trình bày kết quả số, ta thực hiện giải bài toán điều khiển tối ưu sau đây.

**Bài toán 2.1.** (xem [95][Ví dụ 1.2])

**Cực tiểu**  $x_1(1)$

**thỏa mãn**  $\dot{x}_j(t) = s_j x_{j+1}(t) + u(t), \quad s_j = -2(m - j + 1), \quad j = 1, 2, \dots, m,$

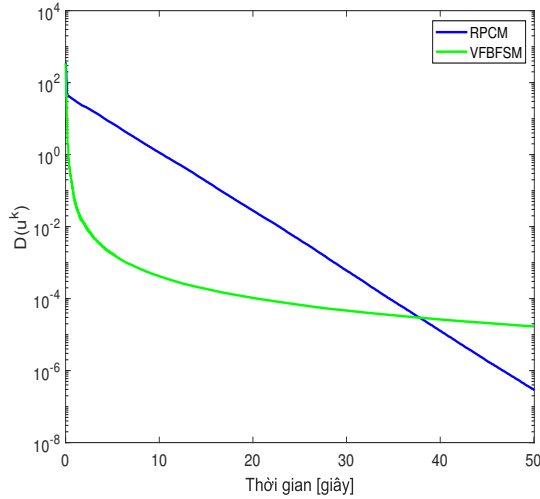
$$\dot{x}_{m+1}(t) = u(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$x(0) = 0,$$

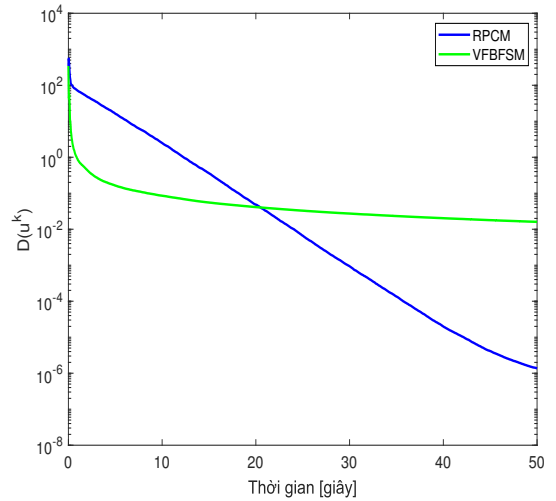
$$u(t) \in [-1, 1],$$

trong đó  $m$  là một số tự nhiên.

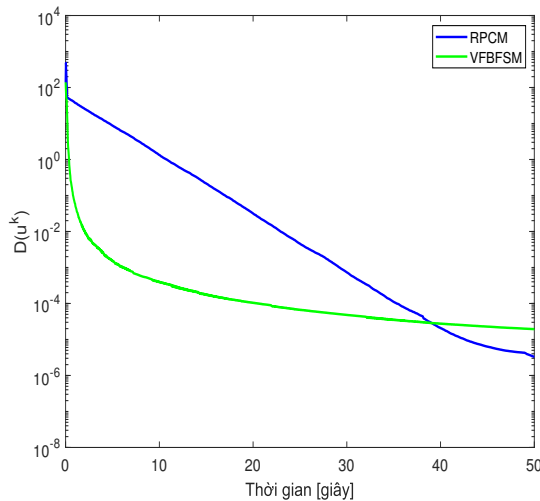
Ta chọn  $T = 1$  và  $K = 256$ . Điểm xuất phát được chọn ngẫu nhiên trong  $\mathcal{U}$ . Ta chọn toán tử  $\mathcal{F}u = u - u^0$ . Do hệ số Lipschitz của  $\mathcal{B}$  chưa biết, ta chỉ trình bày kết quả của hai phương pháp RPCM và VFBFSM. Các kết quả được thể hiện trong các Hình 2.9 - 2.12 với các giá trị khác nhau của  $m$  và  $\alpha_k$ .



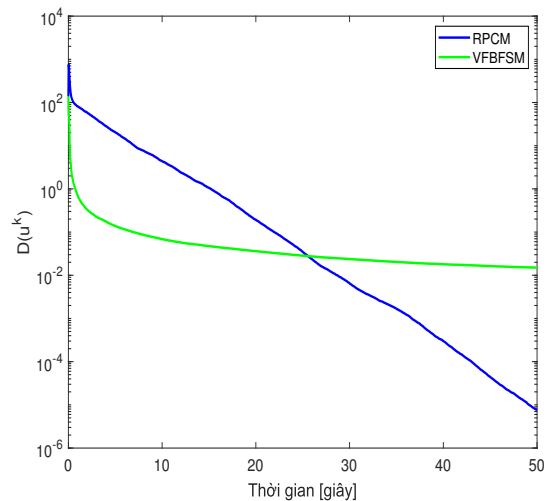
Hình 2.9: Các phương pháp cho Bài toán 2.1 ( $m = 1$ ) với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$ .



Hình 2.10: Các phương pháp cho Bài toán 2.1 ( $m = 1$ ) với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ .



Hình 2.11: Các phương pháp cho Bài toán 2.1 ( $m = 2$ ) với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$ .



Hình 2.12: Các phương pháp cho Bài toán 2.1 ( $m = 2$ ) với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ .

Trong ví dụ này, ta thấy rằng với các toán tử đã cho, các điều kiện hội tụ có

thể không thoả mãn (thực chất đây là các điều kiện đủ), tuy nhiên, kết quả tính toán vẫn đáng tin cậy.

**Nhận xét chung.** Các kết quả thử nghiệm thể hiện rằng đáng điệu của dãy  $D(x^k)$  sinh bởi các phương pháp phụ thuộc chặt vào các tham số điều khiển  $\alpha_k$ , và rằng phương pháp RPCM chạy tốt. Trong một vài phép lặp đầu, mặc dù  $D(x^k)$  sinh bởi phương pháp RPCM giảm chậm, về sau lại giảm nhanh hơn các dãy sinh bởi các phương pháp còn lại.

## 2.4.2 Thử nghiệm số cho Thuật toán 2.3

**Ví dụ 2.4.** Trong ví dụ này, ta thử nghiệm và so sánh Thuật toán RMSIPM (Thuật toán 2.3) với các Thuật toán HFBM, HGFMBM, HFBFSM đã đề cập ở Mục 2.4.1. Ta gọi 2-RMSIPM và 3-RMSIPM lần lượt là Thuật toán RMSIPM được tính toán trong trường hợp  $N = 2$  và  $N = 3$ .

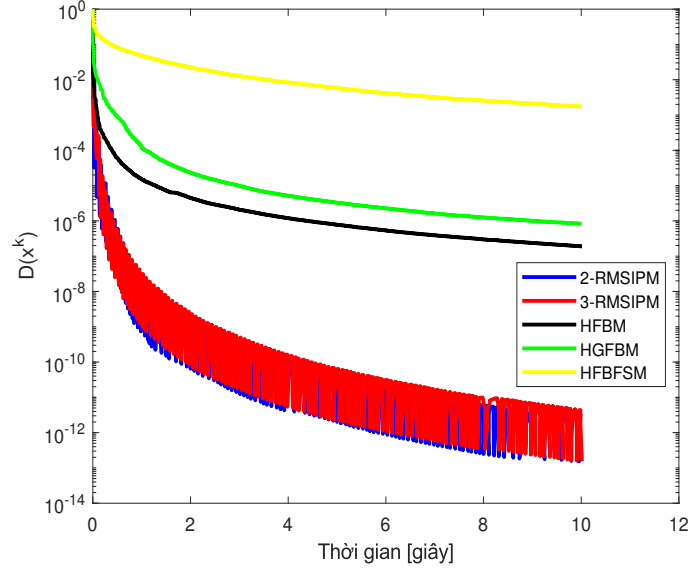
Cho  $\mathcal{H} = \mathbb{R}$  và  $C = [-2, 5]$ . Toán tử  $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  cho bởi  $\mathcal{B}(x) = x + \sin x$ . Xét bài toán bất đẳng thức biến phân.

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle \mathcal{B}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Bài toán này tương đương với bài toán VI có dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ sao cho } 0 \in N_C(x^*) + \mathcal{B}(x^*).$$

Để thấy toán tử  $\mathcal{B}$  là đơn điệu và liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz  $L = 2$ . Ta lấy  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$  cho tất cả các thuật toán. Đối với 2-RMSIPM và 3-RMSIPM, ta chọn dãy  $\{\lambda_k\}$  theo Bổ đề 2.6 (iii), chọn  $\theta_0 = 0.1$  và chọn  $\mathcal{F} = I$ . Ta chọn  $\mu_{1,k} = \mu_{2,k} = (k + 1)^{-2}$  cho 2-RMSIPM và  $\mu_{1,k} = \mu_{2,k} = \mu_{3,k} = (k + 1)^{-2}$  cho 3-RMSIPM. Ta lấy  $r_k = 0.9/L$ ,  $a^k = b^k = 0$  cho HFBM. Tiếp theo, ta lấy  $r_k = 0.9/L$ ,  $\delta_k = \lambda_k = 0.5(1 - \alpha_k)$ ,  $e^k = 0$  cho HFBFSM. Kết quả số được trình bày trong Hình 2.13. Trong ví dụ này, ta thấy rằng Thuật toán RMSIPM cho các trường hợp  $N = 2$  và  $N = 3$  thể hiện tốt hơn khi so sánh với một số thuật toán kiểu Halpern. Tuy nhiên, thuật toán này có sự dao động trong các bước tính toán. Sự dao động này có thể do tính ổn định số của thuật toán, vấn đề lựa chọn các dãy tham số  $\{\mu_{i,k}\}$  cho phù hợp hơn với dãy tham số hiệu chỉnh cũng như dãy cỡ bước, và cần được tìm hiểu sâu hơn trong những nghiên cứu về sau.



Hình 2.13: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$  cho Ví dụ 2.4. Số bước lặp lần lượt là 1072, 1237, 1243, 1189 và 1269.

### 2.4.3 Thử nghiệm số cho Thuật toán 2.4

Trong mục này chúng ta trình bày một vài kết quả thử nghiệm số nhằm mô tả Thuật toán 2.4 được trình bày ở Mục 2.3.2 (gọi tắt là RPA) và so sánh với ba thuật toán hội tụ mạnh khác đã được trình bày trong phần Mở đầu: Thuật toán gần kề Halpern (0.4) (HPA) [30], Thuật toán gần kề-gắn kết (0.5) (VPA) [98], và Thuật toán gần kề-gắn kết-quán tính (0.6) (IVPA) [78].

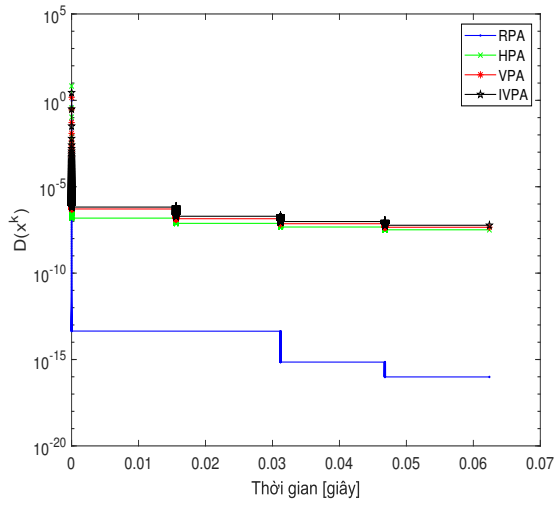
**Ví dụ 2.5.** Trong ví dụ này, ta lấy các toán tử  $\mathcal{B}_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{B}_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  và  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  được cho bởi:

$$\mathcal{B}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{và}$$

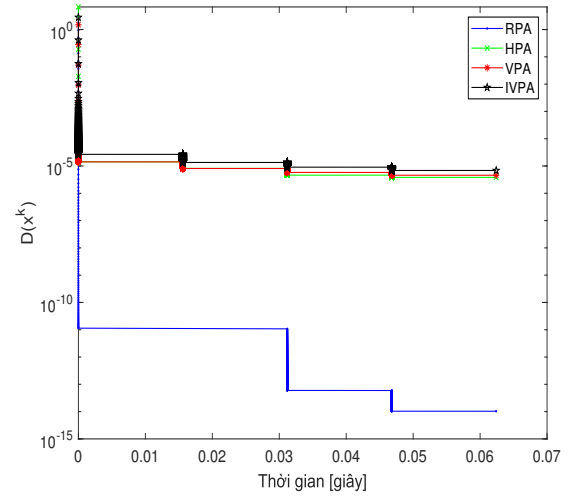
$$\mathcal{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Các hệ số là  $\beta = 1$ ,  $\lambda_0 = 1$ ,  $r = 1.9$ ,  $\delta = 0.9$ ,  $p_k = 0$  và  $\gamma_k = \frac{\delta}{\|\mathcal{T}\|^2}$  cho thuật toán RPA (Thuật toán 2.4);  $\beta = 1$  và  $\gamma = \frac{1.9}{\|\mathcal{T}\|^2}$  cho thuật toán HPA;  $\beta = 1$  và  $\lambda = \frac{0.9}{\|\mathcal{T}\|^2}$  cho thuật toán VPA;  $\lambda = 0.9/L$ ,  $\beta = 1$  và  $\theta_k = (k + 1)^{-7} \|x^k - x^{k-1}\|^{-1}$  cho thuật

toán IVPA. Dãy  $\{\alpha_k\}$  được cho bởi  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.9}$  hoặc  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ . Điểm xuất phát là  $x^{-1} = x^0$  với các thành phần được sinh ngẫu nhiên trong khoảng  $(0, 1)$ . Ta lấy  $\bar{f}(x) = 0.5x + x^0$  cho các phương pháp gắn kết và  $\mathcal{F}(x) = x - \bar{f}(x)$  cho RPA. Ta sử dụng hàm  $D(x) := \|x - J^{\mathcal{B}_1}(x - \mathcal{T}^*(I - J^{\mathcal{B}_2})\mathcal{T}(x))\|^2$  để minh hoạ và so sánh kết quả số của các phương pháp. Lưu ý rằng  $D(x) = 0$  nếu và chỉ nếu  $x$  là nghiệm của bài toán SVI. Các kết quả được thể hiện trong các Hình 2.14 và 2.15.



Hình 2.14: Ví dụ 2.5 với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.9}$ . Số bước lặp lần lượt là 881, 2074, 1720, 1483



Hình 2.15: Ví dụ 2.5 với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ . Số bước lặp lần lượt là 819, 2060, 1670, 1494

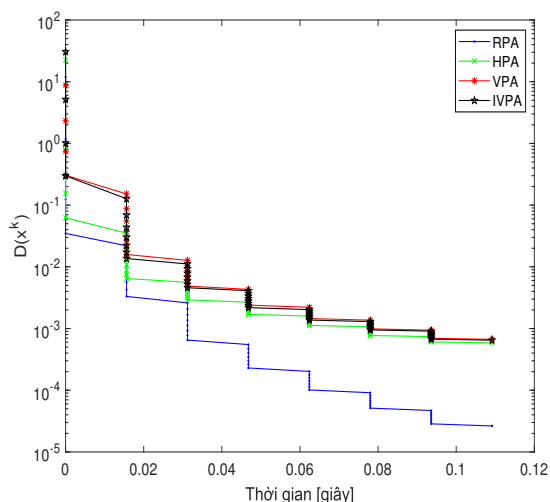
**Ví dụ 2.6.** Cho  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\mathcal{T}_1 : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$  và  $\mathcal{T}_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  được sinh ngẫu nhiên bởi phân phối chuẩn với giá trị trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1. Xét bài toán SVI với các toán tử  $\mathcal{B}_i x = \mathcal{T}_i^* \mathcal{T}_i x$  ( $i = 1, 2$ ).

Trong thử nghiệm số, ta lấy  $M = 100$  và  $N = 50$ , các dữ liệu của các ma trận được sinh ngẫu nhiên. Kết quả được thể hiện trong các Hình 2.16 và 2.17.

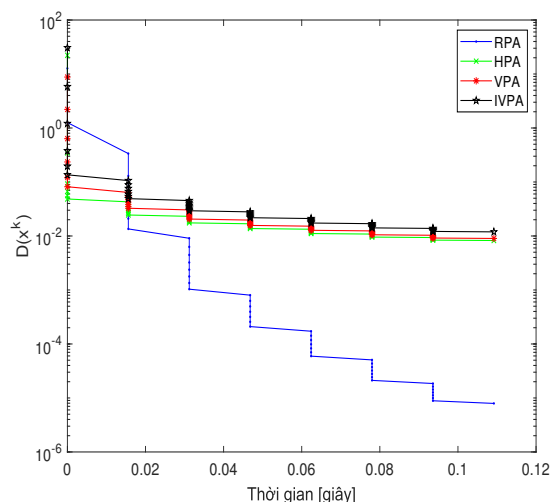
**Ví dụ 2.7.** Trong ví dụ này, chúng ta xét bài toán khôi phục tín hiệu trong cảm biến nén sau đây:

$$b = \mathcal{T}(x) + \epsilon, \quad (2.84)$$

trong đó  $b$  là dữ liệu quan sát được,  $\epsilon$  là nhiễu,  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  ( $N < M$ ) là một toán tử tuyến tính cho trước, và  $x$  là một vectơ được khôi phục chứa  $m$  thành



Hình 2.16: Ví dụ 2.6 với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.9}$ . Số bước lặp lần lượt là 50, 48, 48, 49



Hình 2.17: Ví dụ 2.6 với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ . Số bước lặp lần lượt là 45, 51, 51, 51

phần khác 0. Bài toán (2.84) có thể được phát biểu dưới dạng của một bài toán tối ưu có ràng buộc

$$\min \|\mathcal{T}(x) - b\|^2 \text{ sao cho } \|x\|_1 \leq t, \quad (2.85)$$

trong đó  $t$  là một tham số phù hợp.

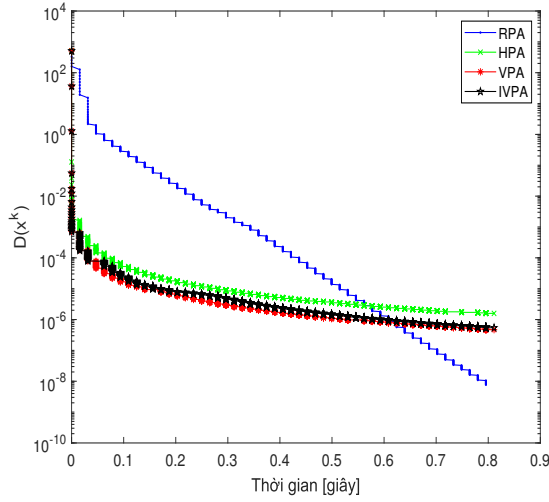
Ta đặt  $C = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|_1 \leq t\}$  và  $Q = \{b\}$ . Với cách đặt này, bài toán (2.85) có thể được xem như một bài toán chấp nhận tách. Trong thử nghiệm số, ta sinh dữ liệu của các ma trận ngẫu nhiên theo phân phối chuẩn với giá trị trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1. Hình 2.18 và 2.19 trình bày kết quả cho trường hợp  $M = 512, N = 128$ , trong khi Hình 2.20 và 2.21 trình bày cho trường hợp  $M = 1024, N = 512$ .

**Ví dụ 2.8.** Cho  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} = L^2[0, 1]$  là không gian Hilbert của các hàm thực đo được và bình phương khả tích với tích vô hướng cho bởi  $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt$  và chuẩn cảm sinh tương ứng  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  với mọi  $x, y \in \mathcal{H}$ . Xét nửa không gian

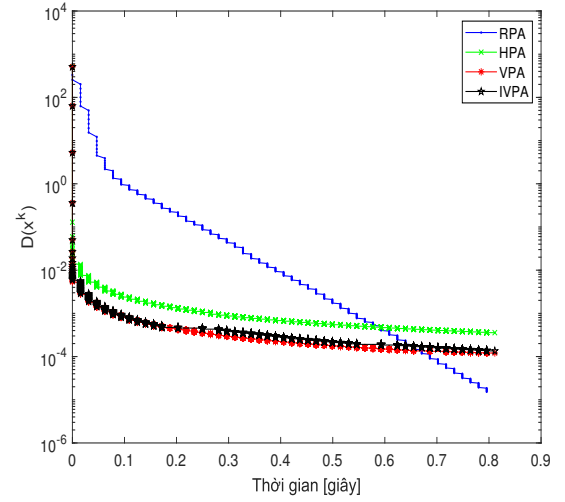
$$C = \left\{ x \in \mathcal{H} : \int_0^1 t^2 x(t) dt \leq 1 \right\}$$

và một hình hộp  $Q$  trong  $\mathcal{H}$  cho bởi

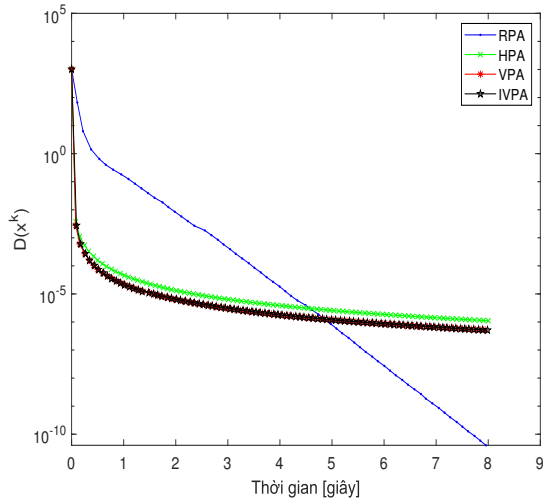
$$Q = \{x \in \mathcal{H} : -1 \leq x(t) \leq 1, \forall t \in [0, 1]\}.$$



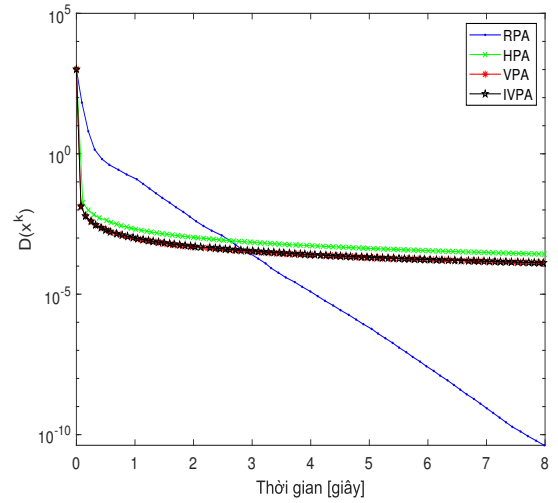
Hình 2.18: Ví dụ 2.7 với  $M = 512$ ,  $N = 128$  và  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.9}$ . Số bước lặp lần lượt là 522, 988, 1007, 932



Hình 2.19: Ví dụ 2.7 với  $M = 512$ ,  $N = 128$  và  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ . Số bước lặp lần lượt là 325, 1014, 964, 860



Hình 2.20: Ví dụ 2.7 với  $M = 1024$ ,  $N = 512$  và  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.9}$ . Số bước lặp lần lượt là 654, 950, 938, 932



Hình 2.21: Ví dụ 2.7 với  $M = 1024$ ,  $N = 512$  và  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ . Số bước lặp lần lượt là 651, 912, 886, 873

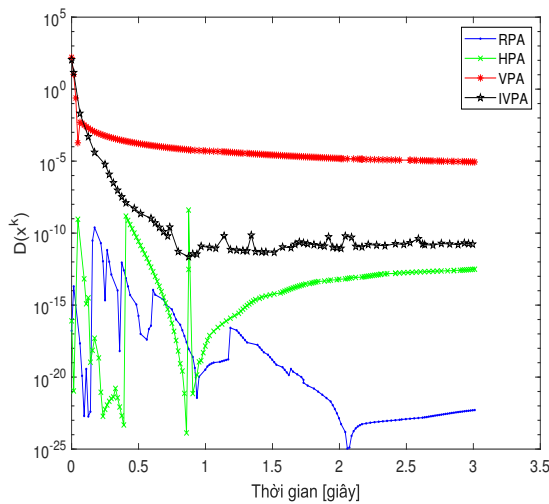
Toán tử  $\mathcal{T}$  cho bởi

$$(\mathcal{T}(x))(t) := \int_0^1 x(s)tds.$$

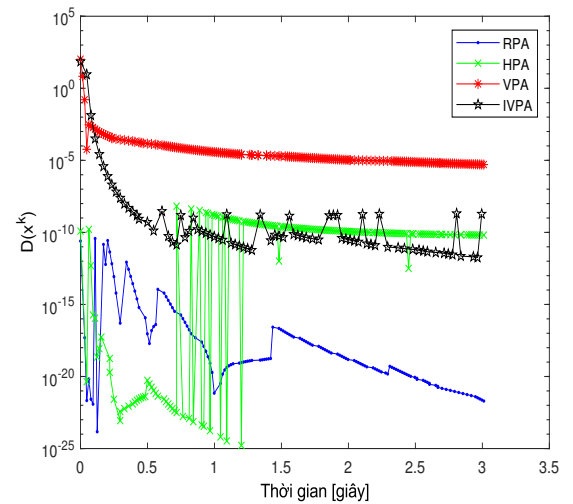
Ta xét bài toán chấp nhận tách:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \mathcal{T}(x^*) \in Q.$$

Để thấy bài toán này tương đương với bài toán SVI cho  $\mathcal{B}_1 = N_C$ ,  $\mathcal{B}_2 = N_Q$  và  $\mathcal{T}$  đã cho. Để giải bài toán này, chúng ta áp dụng tất cả các thuật toán đã đề cập trước đó với điểm khởi đầu được chọn lần lượt là  $x^0(t) = \frac{1}{t^2+1}$  và  $x^0(t) = \exp(-t)$ , với  $\alpha_k = (k+1)^{-0.9}$ . Bằng tính toán trực tiếp, ta có  $\|\mathcal{T}\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Tất cả các tham số được chọn như trong Ví dụ 2.5. Chú ý rằng nếu xấp xỉ ban đầu  $x^0(t)$  là một hàm liên tục, thì tất cả các tích phân Lebesgue để xác định  $x^k$  và  $y^k$  trong ví dụ này đều trở thành tích phân Riemann và các tích phân này đều có thể được ước lượng bởi quy tắc hình thang tổng hợp với độ dài bước  $\tau = \frac{1}{N}$ , trong đó  $N = 256$ . Chúng ta trình bày các kết quả trong Hình 2.22 và Hình 2.23.



Hình 2.22: Ví dụ 2.8 với  $x^0(t) = \frac{1}{t^2+1}$ . Số bước lặp lần lượt là 69, 147, 141, 167



Hình 2.23: Ví dụ 2.8 với  $x^0(t) = \exp(-t)$ . Số bước lặp lần lượt là 80, 171, 148, 169

**Nhận xét chung.** Các kết quả số trên đã thể hiện sự ưu việt hơn trong tính toán của phương pháp được chúng ta đề xuất so với một số phương pháp đã có. Số bước lặp cần thiết để thực hiện thuật toán của chúng ta cũng thường ít hơn số bước lặp của các thuật toán khác.

## Kết luận chương

Trong chương này, ta đã trình bày một số phương pháp mới cho sự hội tụ mạnh trong không gian Hilbert để giải bài toán bao hàm thức biến phân (VI), cũng như bài toán bao hàm thức biến phân tách (SVI). Các phương pháp này dựa trên kĩ

thuật hiệu chỉnh, kết hợp với các phương pháp phù hợp như chiếu, co gần kề, quán tính và phương thức chọn tham số điều khiển phù hợp. Hiệu quả tính toán của các phương pháp này cũng được minh họa bởi một vài ví dụ số trong các không gian Hilbert, cả hữu hạn chiều và vô hạn chiều.

Ta thấy rằng có những lớp toán tử có tính chất tổng quát hơn tính đơn điệu, chẳng hạn như tính giả đơn điệu. Một câu hỏi mở đặt ra tự nhiên là làm thế nào để mở rộng phương pháp mới trên cho lớp các bài toán bao hàm thức biến phân giả đơn điệu. Sự mở rộng này là không tầm thường vì với bài toán RVI, với  $\mathcal{A}$  và  $\mathcal{B}$  đơn điệu,  $\mathcal{F}$  là đơn điệu mạnh sẽ kéo theo  $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{F}$  cũng đơn điệu mạnh, nên bài toán RVI có duy nhất nghiệm. Tuy nhiên, ta biết rằng tổng của hai toán tử giả đơn điệu nói chung là không giả đơn điệu. Vì vậy, khi  $\mathcal{A}$  là giả đơn điệu, thì tính đơn điệu mạnh của  $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{F}$  không còn (toán tử này thậm chí có thể không phải là toán tử đơn điệu). Vì vậy, bài toán RVI nói chung không có duy nhất nghiệm, thậm chí tập nghiệm của bài toán cũng không phải tập lồi.

## Chương 3

# PHƯƠNG PHÁP HỆ ĐỘNG LỰC HIỆU CHỈNH GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Trong chương này, ta đề xuất phương pháp giải bài toán cân bằng thông qua việc giải một hệ động lực kiểu đạo hàm tăng cường cấp một hiệu chỉnh và chứng minh quỹ đạo của hệ động lực hội tụ theo chuẩn đến nghiệm của bài toán gốc dưới một vài điều kiện nhẹ đặt lên các hàm tham số. Tiếp theo, ta xây dựng một phương pháp lặp hai bước giải bài toán cân bằng, là phiên bản rời rạc theo biến thời gian của hệ động lực đã trình bày trước đó và chứng minh dãy lặp sinh bởi phương pháp hội tụ theo chuẩn đến nghiệm của bài toán cân bằng. Cuối cùng, ta đưa ra một vài ví dụ để mô tả và so sánh kết quả số của phương pháp lặp đã trình bày với một vài phương pháp khác đã biết. Kết quả của chương được lấy từ bài báo số 5 trong danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

Cho  $\mathcal{H}$  là một không gian Hilbert và  $C$  là một tập con lồi đóng khác rỗng của  $\mathcal{H}$ . Cho  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là một song hàm cân bằng. Ta xét bài toán cân bằng  $EP(f, C)$  dưới đây:

Tìm  $x^* \in C$  sao cho  $f(x^*, y) \geq 0$  với mọi  $y \in C$ .

Trong phần tiếp theo, tập nghiệm của bài toán cân bằng  $Sol(f, C)$  sẽ luôn được giả thiết là khác rỗng. Bài toán cân bằng là một mô hình rất tổng quát, bao gồm nhiều mô hình toán học khác như bài toán VIP, bài toán điểm bất động (Fixed point problem), bài toán tối ưu, bài toán điểm yên ngựa, bài toán cân bằng Nash, vv... [86], [68, Section 2.1]. Lý thuyết bài toán cân bằng cung cấp cho ta cách tiếp cận tổng quát để nghiên cứu một số lớp bài toán trong kinh tế, tài chính, tối ưu và lý thuyết xấp xỉ.

Trong chương này, do ta luôn xét bài toán cân bằng trên một tập con  $C$  lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert  $\mathcal{H}$  nên để đơn giản về mặt kí hiệu, nếu không cần chỉ rõ một tập  $C$  cụ thể, ta sẽ dùng  $\text{prox}_\varphi$  thay cho  $\text{prox}_\varphi^C$  (xem khái niệm  $\text{prox}_\varphi^C$  trong Mục 1.1.2) với  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là một hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới.

### 3.1 Bài toán cân bằng hiệu chỉnh và tính chất của dãy nghiệm hiệu chỉnh

Cho  $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  và  $g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là các song hàm cân bằng trên  $C$ . Với mỗi  $\alpha > 0$ , bài toán  $\text{EP}(f, C)$  được liên kết với bài toán cân bằng hiệu chỉnh (REP- regularized equilibrium problem) sau đây:

$$\text{Tìm } x \in C \text{ sao cho } f(x, y) + \alpha g(x, y) \geq 0, \forall y \in C. \quad (\text{REP})$$

Chú ý rằng, nếu  $f$  đơn điệu trên  $C \times C$ ,  $g$  đơn điệu mạnh trên  $C \times C$ ,  $f(x, \cdot)$  và  $g(x, \cdot)$  là hàm lồi và nửa liên tục dưới yếu với mọi  $x \in C$ ,  $f(\cdot, y)$  và  $g(\cdot, y)$  là các hàm nửa liên tục trên yếu với mọi  $y \in C$ , thì bài toán hiệu chỉnh (REP) có duy nhất nghiệm với mỗi  $\alpha > 0$ . Ta gọi nghiệm này là  $x_\alpha$ .

Tiếp theo, ta trình bày một vài tính chất của lưới nghiệm  $\{x_\alpha\}$  khi  $\alpha$  thay đổi. Đầu tiên, cho  $g : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  là một song hàm đơn điệu mạnh và tồn tại một hàm không giảm và liên tục  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  sao cho

$$|g(x, y)| \leq \varphi(\|x\|)\|x - y\|, \forall x, y \in C. \quad (3.1)$$

Một song hàm  $g$  thỏa mãn điều kiện (3.1) thực sự tồn tại, chẳng hạn như song hàm cho bởi  $g(x, y) = \delta \langle x - x^g, y - x \rangle$ , trong đó  $\delta$  là một số thực dương còn  $x^g$  là một vectơ cho trước trong  $\mathcal{H}$ . Do  $|g(x, y)| \leq \delta(\|x\| + \|x^g\|)\|y - x\|$ , điều kiện (3.1) được thỏa mãn với  $\varphi(t) := \delta(t + \|x^g\|)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Một ví dụ khác là song hàm  $g(x, y) = \langle G(x), y - x \rangle$ , trong đó  $G : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là toán tử tuyến tính bị chặn, đối xứng và xác định dương.

**Bổ đề 3.1.** [61, Lemma 3] *Giả sử  $f$  và  $g$  là các song hàm cân bằng từ  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  đến  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sao cho  $f$  là đơn điệu trên  $C \times C$  và  $g$  là  $\gamma$ -đơn điệu mạnh trên  $C \times C$ . Ta cũng giả sử rằng với mọi  $x, y \in C$ , ta có  $f(x, \cdot)$ ,  $g(x, \cdot)$  là các hàm lồi và nửa liên tục*

dưới yếu;  $f(\cdot, y)$  và  $g(\cdot, y)$  là các hàm nửa liên tục trên yếu. Ngoài ra,  $g$  thỏa mãn điều kiện (3.1). Khi đó

(i) Lưới  $\{x_\alpha\}$  bị chặn.

(ii) Tồn tại một số dương  $M > 0$  sao cho, với mọi  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ ,

$$\|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| \leq \frac{|\alpha_2 - \alpha_1|}{\alpha_1} M.$$

(iii)  $\omega(x_\alpha) \subset \text{Sol}(f, C)$ , trong đó  $\omega(x_\alpha)$  là tập các điểm tụ yếu của dãy  $\{x_\alpha\}$ .

(iv)  $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} x_\alpha = x^\dagger$ , trong đó  $x^\dagger \in \text{Sol}(g, \text{Sol}(f, C))$  và

$$\text{Sol}(g, \text{Sol}(f, C)) = \{x^\dagger \in \text{Sol}(f, C) : g(x^\dagger, x^*) \geq 0, \forall x^* \in \text{Sol}(f, C)\}.$$

Chứng minh chi tiết của bổ đề trên có thể được tham khảo trong [61]. Như ta đã đề cập ở Chương 2, việc tính  $x_\alpha$  cho một số  $\alpha$  nào đó trong thực tế có thể đắt và tốn thời gian. Thay vì thực hiện điều này, trong Mục 3.3, ta xây dựng một thuật toán chỉnh lặp, thuật toán này sinh ra một dãy  $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ . Hơn nữa, dãy này thỏa mãn  $\|x^k - x_{\alpha_k}\| \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ , với  $\{\alpha_k\}$  là một dãy tham số hiệu chỉnh sao cho  $\alpha_k \rightarrow 0^+$ . Kết quả này cùng với khẳng định  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\alpha_k} = x^\dagger$  suy ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^\dagger$ .

Cuối cùng, ta xét trường hợp mà điều kiện (3.1) được thay bằng một giả thiết khác. Bây giờ, ta giả sử rằng  $g(x, \cdot)$  là một hàm khả dưới vi phân trên  $C$  với mọi  $x \in C$ . Ta giả sử thêm rằng các hàm số  $\partial g(x, \cdot)(x)$  và  $g(\cdot, y)$  bị chặn trên các tập con bị chặn của  $C$  với mọi  $x, y \in C$ . Khi đó chúng ta có kết quả sau đây.

**Bổ đề 3.2.** [8, Lemma 2.4] *Giả sử song hàm cân bằng  $f$  là đơn điệu, song hàm cân bằng  $g$  là đơn điệu mạnh trên  $C \times C$ . Ta cũng giả sử rằng với mọi  $x, y \in C$ , các hàm số  $f(x, \cdot), g(x, \cdot)$  là lồi và nửa liên tục dưới yếu; các hàm số  $f(\cdot, y)$  và  $g(\cdot, y)$  là nửa liên tục trên yếu. Giả thiết thêm rằng với mọi  $x, y \in C$ , hàm  $g(x, \cdot)$  khả dưới vi phân trên  $C$ ; ánh xạ  $\partial g(x, \cdot)(x)$  cũng như hàm số  $g(\cdot, y)$  đều bị chặn trên tập bị chặn của  $C$ . Khi đó các khẳng định của Bổ đề 3.1 vẫn đúng. Hơn nữa, nếu  $\alpha(t) : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  là một hàm khả vi thỏa mãn  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0$ , ta có*

$$\left\| \frac{d}{dt} x_{\alpha(t)} \right\| \leq M \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\alpha(t)} \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2)$$

## 3.2 Phương pháp hệ động lực hiệu chỉnh kiểu đạo hàm tăng cường

Ta xét hệ động lực liên hệ với bài toán  $EP(f, C)$  sau đây:

$$\begin{cases} z(t) = \text{prox}_{\lambda(t)(f(x(t), \cdot) + \alpha(t)g(x(t), \cdot))}(x(t)), \\ y(t) = \text{prox}_{\lambda(t)(f(z(t), \cdot) + \alpha(t)g(x(t), \cdot))}(x(t)), \\ \dot{x}(t) + x(t) = y(t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (3.3)$$

hay tương đương với,

$$\begin{cases} z(t) = \text{argmin}\{\lambda(t) [f(x(t), u) + \alpha(t)g(x(t), u)] + \frac{1}{2}\|u - x(t)\|^2 : u \in C\}, \\ y(t) = \text{argmin}\{\lambda(t) [f(z(t), v) + \alpha(t)g(x(t), v)] + \frac{1}{2}\|v - x(t)\|^2 : v \in C\}, \\ \dot{x}(t) + x(t) = y(t), \\ x(0) = x^0. \end{cases} \quad (3.4)$$

trong đó  $\alpha(t) > 0$  và  $\lambda(t) > 0$  với mọi  $t \geq 0$ .

Hệ (3.3) có độ phức tạp tính toán cao vì vừa phải tính hàm prox, là một hàm ẩn, vừa phải giải phương trình vi phân. Tuy nhiên, như chúng ta đã phân tích ở phần Mở đầu, mục đích của chúng ta khi xây dựng phương pháp hệ động lực là rời rạc hoá phương pháp để được thuật toán số giải bài toán cân bằng (chúng tôi thực hiện điều này trong phần sau, ở Mục 3.3). Khi ứng dụng vào các bài toán cụ thể, chúng ta sẽ ưu tiên sử dụng thuật toán số nhận được. Bên cạnh đó, hiện nay, với sự phát triển mạnh mẽ của khoa học máy tính, chẳng hạn như ứng dụng các công nghệ về mạng nơron (neural network) hay máy tính analog, việc giải phương trình vi phân trở nên dễ dàng. Ngoài ra, ta cũng có thể dễ dàng sử dụng các công cụ như Matlab (hàm `fmincon`) để tính toán hàm prox. Vì vậy, trong nhiều trường hợp cụ thể việc giải hệ (3.3) không còn quá khó khăn.

### 3.2.1 Sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh toàn cục

Đầu tiên, ta đề cập đến một khái niệm được trình bày trong [16]. Một *ng nghiệm mạnh toàn cục* của hệ (3.3) là một hàm  $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$  thỏa mãn

- (i)  $x \in AC_{\text{loc}}([0, +\infty), \mathcal{H})$ , nghĩa là, hàm  $x(t)$  liên tục tuyệt đối trên mỗi đoạn  $[0, T]$ , với mọi  $0 < T < +\infty$ ;
- (ii) Hệ (3.3) đúng với hầu khắp mọi  $t \in [0, +\infty)$ ;
- (iii)  $x(0) = x^0$ .

Giả sử  $\alpha^*$  và  $\lambda^*$  là hai số thực dương, sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh toàn cục của hệ động lực (3.3) sẽ đạt được với giả thiết sau đây.

**Giả thiết 3.1.**

- (A1)  $f$  là một song hàm  $L$ -(SLC) trên  $\mathcal{H}$ ;
- (A2)  $g$  là một song hàm  $K$ -(SLC) trên  $\mathcal{H}$ ;
- (A3) Với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , các hàm số  $f(x, \cdot)$ ,  $g(x, \cdot)$  là lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, và khả dưới vi phân trên  $C$ . Hơn nữa, các hàm này bị chặn trên các tập con bị chặn của  $\mathcal{H}$ ;
- (A4)  $\alpha(t) : [0, +\infty) \rightarrow (0, \alpha^*) \subset (0, +\infty)$  và  $\lambda(t) : [0, +\infty) \rightarrow (0, \lambda^*) \subset (0, +\infty)$  là các hàm liên tục.

Ta lấy  $z_{\lambda, \alpha, x} := \text{prox}_{\lambda f(x, \cdot) + \lambda \alpha g(x, \cdot)}(x)$ ,  $T(\lambda, \alpha, x) := \text{prox}_{\lambda f(z_{\lambda, \alpha, x}, \cdot) + \lambda \alpha g(x, \cdot)}(x)$  và  $h(\lambda, \alpha, x) := T(\lambda, \alpha, x) - x$ . Khi đó, hệ (3.3) được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = h(\lambda(t), \alpha(t), x(t)), \\ x(0) = x^0 \in C. \end{cases} \quad (3.5)$$

Trước khi trình bày định lý về sự tồn tại nghiệm mạnh toàn cục, ta cần một vài kết quả bổ trợ.

**Bổ đề 3.3.** Cho  $f, g$  là các hàm cân bằng  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sao cho Giả thiết 3.1 được thỏa mãn và  $\alpha \in (0, \alpha^*]$ ,  $\lambda \in (0, \lambda^*]$ . Khi đó

- (i) Với mỗi  $x \in \mathcal{H}$ , hàm  $T(\lambda, \alpha, x)$  bị chặn;
- (ii)  $T(\lambda, \alpha, x)$  liên tục theo  $\alpha$ ;
- (iii)  $T(\lambda, \alpha, x)$  liên tục theo  $\lambda$ ;

(iv) Cho  $\alpha(t), \lambda(t)$  như trong Giả thiết 3.1. Với mọi  $x \in \mathcal{H}$ , hàm  $t \mapsto \varphi_x(t)$  liên tục trên  $[0, +\infty)$ , trong đó  $\varphi_x(t) := \|h(\lambda(t), \alpha(t), x)\|$ .

*Chứng minh.* (i) Ta cố định  $x \in \mathcal{H}, y \in C$  và để đơn giản, ta dùng kí hiệu  $z_{\lambda, \alpha}$  thay cho  $z_{\lambda, \alpha, x}$ . Chú ý rằng, theo Bổ đề 1.12, khi  $\alpha \in (0, \alpha^*]$  và  $\lambda \in (0, \lambda^*]$ ,  $z_{\lambda, \alpha}$  bị chặn và liên tục theo cả hai biến  $\lambda$  và  $\alpha$ . Áp dụng Bổ đề 1.11, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} & \langle x - T(\lambda, \alpha, x), y - T(\lambda, \alpha, x) \rangle \\ & \leq \lambda [f(z_{\lambda, \alpha}, y) + \alpha g(x, y) - f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) - \alpha g(x, T(\lambda, \alpha, x))] \end{aligned} \quad (3.6)$$

hay tương đương với,

$$\begin{aligned} \|T(\lambda, \alpha, x)\|^2 & \leq \lambda [f(z_{\lambda, \alpha}, y) + \alpha g(x, y) - f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) - \alpha g(x, T(\lambda, \alpha, x))] \\ & \quad + \langle x + y, T(\lambda, \alpha, x) \rangle - \langle x, y \rangle. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mặt khác, do  $f$  là  $L$ -(SLC) nên ta có

$$\begin{aligned} & |f(z_{\lambda, \alpha}, x) + f(x, T(\lambda, \alpha, x)) - f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \alpha, x))| \\ & = |f(z_{\lambda, \alpha}, x) - f(x, x) + f(x, T(\lambda, \alpha, x)) - f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \alpha, x))| \\ & \leq L \|z_{\lambda, \alpha} - x\| \cdot \|x - T(\lambda, \alpha, x)\|, \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$-f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) \leq -f(z_{\lambda, \alpha}, x) - f(x, T(\lambda, \alpha, x)) + L \|z_{\lambda, \alpha} - x\| \cdot \|x - T(\lambda, \alpha, x)\|.$$

Lập luận tương tự, ta thu được

$$f(z_{\lambda, \alpha}, y) - f(z_{\lambda, \alpha}, x) \leq -f(y, x) + L \|z_{\lambda, \alpha} - y\| \cdot \|y - x\|.$$

Từ hai bất đẳng thức trên và (3.7), ta có

$$\begin{aligned} \|T(\lambda, \alpha, x)\|^2 & \leq \lambda [f(z_{\lambda, \alpha}, y) + \alpha g(x, y) - f(z_{\lambda, \alpha}, x)] \\ & \quad - \lambda [f(x, T(\lambda, \alpha, x)) + \alpha g(x, T(\lambda, \alpha, x))] \\ & \quad + \lambda L \|z_{\lambda, \alpha} - x\| \cdot \|x - T(\lambda, \alpha, x)\| + \langle x + y, T(\lambda, \alpha, x) \rangle - \langle x, y \rangle \\ & \leq \lambda [\alpha g(x, y) - f(y, x)] - \lambda [f(x, T(\lambda, \alpha, x)) + \alpha g(x, T(\lambda, \alpha, x))] \\ & \quad + \lambda L \|z_{\lambda, \alpha} - x\| \cdot \|x - T(\lambda, \alpha, x)\| + \lambda L \|z_{\lambda, \alpha} - y\| \cdot \|y - x\| \\ & \quad + \langle x + y, T(\lambda, \alpha, x) \rangle - \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq (\lambda L \|z_{\lambda, \alpha} - x\| + \|x + y\|) \|T(\lambda, \alpha, x)\| \\ &\quad - \lambda [f(x, T(\lambda, \alpha, x)) + \alpha g(x, T(\lambda, \alpha, x))] + \xi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

trong đó

$$\xi = |\lambda[\alpha g(x, y) - f(y, x)] - \langle x, y \rangle| + \lambda L \|z_{\lambda, \alpha} - x\| \cdot \|x\| + \lambda L \|z_{\lambda, \alpha} - y\| \cdot \|y - x\|.$$

Do các hàm số  $f(x, \cdot)$  và  $g(x, \cdot)$  là lồi trên  $C$ , tồn tại các vectơ  $A = A(x) \in \mathcal{H}$ ,  $B = B(x) \in \mathcal{H}$ , và các số thực  $E = E(x)$ ,  $F = F(x)$  sao cho

$$f(x, u) \geq \langle A, u \rangle + E, \quad g(x, u) \geq \langle B, u \rangle + F \quad \forall u \in C. \quad (3.9)$$

Kết hợp (3.8) và (3.9) ta được

$$\begin{aligned} \|T(\lambda, \alpha, x)\|^2 &\leq (\lambda L \|z_{\lambda, \alpha} - x\| + \|x + y\|) \|T(\lambda, \alpha, x)\| \\ &\quad - \lambda (\langle A, T(\lambda, \alpha, x) \rangle + \alpha \langle B, T(\lambda, \alpha, x) \rangle) - \lambda(E + \alpha F) + \xi \\ &\leq (\lambda L \|z_{\lambda, \alpha} - x\| + \|x + y\|) \|T(\lambda, \alpha, x)\| \\ &\quad + \lambda (\|A\| + \alpha \|B\|) \|T(\lambda, \alpha, x)\| + \lambda |E + \alpha F| + \xi. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên cùng với tính bị chặn của  $\lambda, \alpha$  suy ra  $T(\lambda, \alpha, x)$  bị chặn.

(ii) Lấy  $\lambda, \alpha$  và  $x$  cố định. Theo Bổ đề 1.11, với mọi  $\beta \in (0, \alpha^*]$ , ta thấy rằng

$$\begin{aligned} &\lambda [f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \beta, x)) + \alpha g(x, T(\lambda, \beta, x))] \\ &\quad - \lambda [f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) + \alpha g(x, T(\lambda, \alpha, x))] \\ &\geq \langle x - T(\lambda, \alpha, x), T(\lambda, \beta, x) - T(\lambda, \alpha, x) \rangle \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &\lambda [f(z_{\lambda, \beta}, T(\lambda, \alpha, x)) + \beta g(x, T(\lambda, \alpha, x))] \\ &\quad - \lambda [f(z_{\lambda, \beta}, T(\lambda, \beta, x)) + \beta g(x, T(\lambda, \beta, x))] \\ &\geq \langle x - T(\lambda, \beta, x), T(\lambda, \alpha, x) - T(\lambda, \beta, x) \rangle. \end{aligned}$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned} &\|T(\lambda, \alpha, x) - T(\lambda, \beta, x)\|^2 \\ &\leq \lambda [f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \beta, x)) - f(z_{\lambda, \beta}, T(\lambda, \beta, x)) + f(z_{\lambda, \beta}, T(\lambda, \alpha, x)) - f(z_{\lambda, \alpha}, T(\lambda, \alpha, x))] \\ &\quad + \lambda(\alpha - \beta) [g(x, T(\lambda, \beta, x)) - g(x, T(\lambda, \alpha, x))]. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, do  $f$  là (SLC), ta có

$$\begin{aligned} & f(z_{\lambda,\alpha}, T(\lambda, \beta, x)) - f(z_{\lambda,\beta}, T(\lambda, \beta, x)) + f(z_{\lambda,\beta}, T(\lambda, \alpha, x)) - f(z_{\lambda,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) \\ & \leq L \|z_{\lambda,\alpha} - z_{\lambda,\beta}\| \cdot \|T(\lambda, \alpha, x) - T(\lambda, \beta, x)\|. \end{aligned}$$

Từ hai bất đẳng thức gần nhất, ta suy ra

$$\begin{aligned} \|T(\lambda, \alpha, x) - T(\lambda, \beta, x)\|^2 & \leq L\lambda \|z_{\lambda,\alpha} - z_{\lambda,\beta}\| \cdot \|T(\lambda, \alpha, x) - T(\lambda, \beta, x)\| \\ & \quad + \lambda(\alpha - \beta) [g(x, T(\lambda, \beta, x)) - g(x, T(\lambda, \alpha, x))]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Do vectơ  $T(\lambda, \beta, x)$  bị chặn, nên giá trị  $g(x, T(\lambda, \beta, x))$  cũng bị chặn. Theo Bổ đề 1.12(i), ta có  $\|z_{\lambda,\alpha} - z_{\lambda,\beta}\| \rightarrow 0$  khi  $\beta \rightarrow \alpha$ . Vì vậy, từ (3.10) ta suy ra rằng  $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} T(\lambda, \beta, x) = T(\lambda, \alpha, x)$ , tức là  $T(\lambda, \alpha, x)$  liên tục theo  $\alpha$ .

(iii) Cố định  $\alpha, \lambda, x$ . Áp dụng Bổ đề 1.11 ta có, với mọi  $\mu \in (0, \lambda^*]$ ,

$$\begin{aligned} & \lambda [f(z_{\lambda,\alpha}, T(\mu, \alpha, x)) + \alpha g(x, T(\mu, \alpha, x)) - f(z_{\lambda,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) - \alpha g(x, T(\lambda, \alpha, x))] \\ & \geq \langle x - T(\lambda, \alpha, x), T(\mu, \alpha, x) - T(\lambda, \alpha, x) \rangle \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} & \mu [f(z_{\mu,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) + \alpha g(x, T(\lambda, \alpha, x)) - f(z_{\mu,\alpha}, T(\mu, \alpha, x)) - \alpha g(x, T(\mu, \alpha, x))] \\ & \geq \langle x - T(\mu, \alpha, x), T(\lambda, \alpha, x) - T(\mu, \alpha, x) \rangle. \end{aligned}$$

Cộng từng về hai bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\begin{aligned} & \|T(\lambda, \alpha, x) - T(\mu, \alpha, x)\|^2 \\ & \leq \mu [f(z_{\lambda,\alpha}, T(\mu, \alpha, x)) - f(z_{\lambda,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) + f(z_{\mu,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) - f(z_{\mu,\alpha}, T(\mu, \alpha, x))] \\ & \quad + (\lambda - \mu) [f(z_{\lambda,\alpha}, T(\mu, \alpha, x)) - f(z_{\lambda,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x))] \\ & \quad + (\lambda - \mu)\alpha [g(x, T(\mu, \alpha, x)) - g(x, T(\lambda, \alpha, x))]. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, do  $f$  là  $L$ -(SLC), ta có

$$\begin{aligned} & f(z_{\lambda,\alpha}, T(\mu, \alpha, x)) - f(z_{\lambda,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) + f(z_{\mu,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x)) - f(z_{\mu,\alpha}, T(\mu, \alpha, x)) \\ & \leq L \|z_{\lambda,\alpha} - z_{\mu,\alpha}\| \cdot \|T(\lambda, \alpha, x) - T(\mu, \alpha, x)\|. \end{aligned}$$

Từ hai bất đẳng thức gần nhất, ta suy ra

$$\|T(\lambda, \alpha, x) - T(\mu, \alpha, x)\|^2 \leq L\mu \|z_{\lambda,\alpha} - z_{\mu,\alpha}\| \cdot \|T(\lambda, \alpha, x) - T(\mu, \alpha, x)\|$$

$$\begin{aligned}
& + (\lambda - \mu) [f(z_{\lambda,\alpha}, T(\mu, \alpha, x)) - f(z_{\lambda,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x))] \\
& + (\lambda - \mu)\alpha [g(x, T(\mu, \alpha, x)) - g(x, T(\lambda, \alpha, x))].
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Do các vectơ  $T(\lambda, \alpha, x)$  và  $T(\mu, \alpha, x)$  đều bị chặn, nên các giá trị  $f(z_{\lambda,\alpha}, T(\mu, \alpha, x))$ ,  $f(z_{\lambda,\alpha}, T(\lambda, \alpha, x))$ ,  $g(x, T(\lambda, \alpha, x))$  và  $g(x, T(\mu, \alpha, x))$  cũng bị chặn. Cho  $\mu \rightarrow \lambda$ , từ Bổ đề 1.12(ii), ta có  $\|z_{\lambda,\alpha} - z_{\mu,\alpha}\| \rightarrow 0$ . Vì vậy, từ (3.11), ta suy ra rằng

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda} T(\mu, \alpha, x) = T(\lambda, \alpha, x),$$

tức là  $T(\lambda, \alpha, x)$  liên tục theo  $\lambda$ .

(iv) Cố định  $x \in \mathcal{H}$  và  $t_0 \in [0, +\infty)$ . Với mọi  $t \in [0, +\infty)$ , ta có

$$\begin{aligned}
|\varphi_x(t) - \varphi_x(t_0)| &= \left| \|h(\lambda(t), \alpha(t), x)\| - \|h(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)\| \right| \\
&\leq \|h(\lambda(t), \alpha(t), x) - h(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)\| \\
&= \|T(\lambda(t), \alpha(t), x) - T(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)\| \\
&\leq \|T(\lambda(t), \alpha(t), x) - T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)\| \\
&\quad + \|T(\lambda(t), \alpha(t_0), x) - T(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)\|.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Từ đánh giá (3.10), ta có

$$\begin{aligned}
& \|T(\lambda(t), \alpha(t), x) - T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)\|^2 \\
& \leq L\lambda(t) \|z_{\lambda(t), \alpha(t)} - z_{\lambda(t), \alpha(t_0)}\| \cdot \|T(\lambda(t), \alpha(t), x) - T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)\| \\
& \quad + \lambda(t)(\alpha(t) - \alpha(t_0)) [g(x, T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)) - g(x, T(\lambda(t), \alpha(t), x))].
\end{aligned}$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 1.12(i), ta có

$$\|z_{\lambda(t), \alpha(t)} - z_{\lambda(t), \alpha(t_0)}\|^2 \leq \lambda(t)(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \left( g(x, z_{\lambda(t), \alpha(t_0)}) - g(x, z_{\lambda(t), \alpha(t)}) \right).$$

Từ hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned}
& \|T(\lambda(t), \alpha(t), x) - T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)\|^2 \\
& \leq L\lambda^{\frac{3}{2}}(t) \sqrt{(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \left( g(x, z_{\lambda(t), \alpha(t_0)}) - g(x, z_{\lambda(t), \alpha(t)}) \right)} \\
& \quad \times \|T(\lambda(t), \alpha(t), x) - T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)\| \\
& \quad + \lambda(t)(\alpha(t) - \alpha(t_0)) [g(x, T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)) - g(x, T(\lambda(t), \alpha(t), x))].
\end{aligned}$$

Kết hợp bất đẳng thức trên cùng tính liên tục của  $\alpha(t)$  và tính bị chặn của  $\lambda(t)$ ,  $T(\cdot, \cdot, x)$ ,  $g(x, \cdot)$ , ta suy ra

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(\lambda(t), \alpha(t), x) - T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)\| = 0. \quad (3.13)$$

Lại có, theo đánh giá (3.11), ta được

$$\begin{aligned} & \|T(\lambda(t), \alpha(t_0), x) - T(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)\|^2 \\ & \leq L\lambda(t) \|z_{\lambda(t_0), \alpha(t_0)} - z_{\lambda(t), \alpha(t_0)}\| \cdot \|T(\lambda(t), \alpha(t_0), x) - T(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)\| \\ & \quad + (\lambda(t_0) - \lambda(t)) \left[ f(z_{\lambda(t_0), \alpha(t_0)}, T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)) - f(z_{\lambda(t_0), \alpha(t_0)}, T(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)) \right] \\ & \quad + (\lambda(t_0) - \lambda(t)) \left[ g(x, T(\lambda(t), \alpha(t_0), x)) - g(x, T(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)) \right]. \end{aligned}$$

Chú ý rằng, theo Bổ đề 1.12(ii), ta có

$$\begin{aligned} & \|z_{\lambda(t_0), \alpha(t_0)} - z_{\lambda(t), \alpha(t_0)}\|^2 \\ & \leq (\lambda(t_0) - \lambda(t)) \left( (f + \alpha g)(x, z_{\lambda(t), \alpha(t_0)}) - (f + \alpha g)(x, z_{\lambda(t_0), \alpha(t_0)}) \right). \end{aligned}$$

Hai bất đẳng thức gần nhất cùng với tính liên tục của  $\lambda(t)$  và tính bị chặn của  $T(\cdot, \cdot, x)$ ,  $f(x, \cdot)$ ,  $g(x, \cdot)$  suy ra

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(\lambda(t), \alpha(t_0), x) - T(\lambda(t_0), \alpha(t_0), x)\| = 0. \quad (3.14)$$

Cuối cùng, kết hợp (3.12), (3.13) và (3.14), ta được  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\varphi_x(t) - \varphi_x(t_0)| = 0$ , nghĩa là hàm  $\varphi_x$  liên tục với mọi  $t_0 \in [0, +\infty)$ . Ta chứng minh xong bổ đề.  $\square$

**Bổ đề 3.4.** *Giả sử rằng  $f$  và  $g$  là các song hàm cân bằng từ  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  thỏa mãn các điều kiện của Giả thiết 3.1. Ta cố định  $\lambda, \alpha$ . Xét hàm  $U(x)$  cho bởi*

$$U(x) = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda f(z_{\lambda, \alpha, x}, y) + \lambda \alpha g(x, y) + \frac{1}{2} \|x - y\|^2 : y \in C \right\} \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Khi đó  $U(x)$  là liên tục Lipschitz trên  $\mathcal{H}$ .

*Chứng minh.* Do  $\lambda, \alpha$  là các hằng số cố định, để cho tiện, ta sẽ viết  $z_{\lambda, \alpha, x}$  là  $z_x$ . Chú ý rằng, theo Bổ đề 1.13, toán tử  $x \mapsto z_x$  là  $(L + 1)$ -liên tục Lipschitz trên  $\mathcal{H}$ . Cho  $x, y \in \mathcal{H}$ , theo Bổ đề 1.11, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} & \langle x - U(x), U(y) - U(x) \rangle \\ & \leq \lambda f(z_x, U(y)) + \lambda \alpha g(x, U(y)) - \lambda f(z_x, U(x)) - \lambda \alpha g(x, U(x)), \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} & \langle y - U(y), U(x) - U(y) \rangle \\ & \leq \lambda f(z_y, U(x)) + \lambda \alpha g(y, U(x)) - \lambda f(z_y, U(y)) - \lambda \alpha g(y, U(y)). \end{aligned}$$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned} \|U(x) - U(y)\|^2 & \leq \lambda \alpha (g(x, U(y)) - g(y, U(y)) + g(y, U(x)) - g(x, U(x))) \\ & \quad + \lambda (f(z_x, U(y)) - f(z_y, U(y)) + f(z_y, U(x)) - f(z_x, U(x))) \\ & \quad + \langle x - y, U(x) - U(y) \rangle. \end{aligned}$$

Từ tính (SLC) của  $f, g$  và tính  $(L + 1)$ -liên tục Lipschitz của  $z_x$ , ta suy ra

$$\begin{aligned} \|U(x) - U(y)\|^2 & \leq (\lambda \alpha K + 1) \|x - y\| \cdot \|U(x) - U(y)\| \\ & \quad + \lambda L \|z_x - z_y\| \cdot \|U(x) - U(y)\| \\ & \leq (\lambda \alpha K + 1) \|x - y\| \cdot \|U(x) - U(y)\| \\ & \quad + \lambda L(L + 1) \|x - y\| \cdot \|U(x) - U(y)\|, \end{aligned}$$

hay tương đương với,

$$\|U(x) - U(y)\| \leq (\lambda \alpha K + \lambda L^2 + \lambda L + 1) \|x - y\|.$$

Vì vậy,  $U$  là  $\overline{M}$ -liên tục Lipschitz trên  $\mathcal{H}$ , với  $\overline{M} = \lambda \alpha K + \lambda L^2 + \lambda L + 1$ .  $\square$

Bây giờ ta phát biểu và chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh toàn cục.

**Định lý 3.1.** *Giả sử rằng Giả thiết 3.1 được thỏa mãn và bài toán  $EP(g, Sol(f, C))$  có duy nhất nghiệm. Khi đó với mỗi  $x^0 \in C$ , hệ động lực (3.5) có duy nhất nghiệm mạnh toàn cục.*

*Chứng minh.* Theo định lý Cauchy-Lipschitz-Picard [127, Proposition 6.2.1], để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm mạnh toàn cục của hệ (3.5), ta chỉ ra rằng các điều kiện sau được thỏa mãn.

- (i)  $\forall x \in \mathcal{H}$ , hàm  $t \mapsto h(\lambda(t), \alpha(t), x)$  thuộc tập  $L^1_{loc}([0, +\infty), \mathcal{H})$ ;
- (ii)  $\forall t \in [0, +\infty)$ ,  $h(\lambda(t), \alpha(t), \cdot) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  là hàm liên tục, hơn nữa,  $\forall x, y \in \mathcal{H}$ ,  
 $\|h(\lambda(t), \alpha(t), x) - h(\lambda(t), \alpha(t), y)\| \leq \omega(t, \|x\| + \|y\|) \|x - y\|$ , với  $\forall r > 0$ ,  
 $\omega(t, r) \in L^1_{loc}[0, +\infty)$ ;

(iii)  $\forall t \in [0, +\infty)$ ,  $\|h(\lambda(t), \alpha(t), x)\| \leq \sigma(t)(1 + \|x\|)$ , với  $\sigma \in L_{\text{loc}}^1[0, +\infty)$ .

Theo giả thiết của Định lý 3.1, bài toán  $\text{EP}(g, \text{Sol}(f, C))$  có duy nhất nghiệm. Ta kí hiệu nghiệm này bởi  $x^*$ . Theo Bổ đề 3.3, hàm số

$$t \mapsto \varphi(t) := \|h(\lambda(t), \alpha(t), x^*)\|$$

là liên tục. Tiếp theo, trong (3.6), thay  $x = y = x^*$ , ta có

$$\|h(\lambda, \alpha, x^*)\|^2 \leq \lambda [f(z_{\lambda, \alpha}^*, x^*) - f(z_{\lambda, \alpha}^*, T(\lambda, \alpha, x^*)) - \alpha g(x^*, T(\lambda, \alpha, x^*))],$$

trong đó  $z_{\lambda, \alpha}^* := z_{\lambda, \alpha, x^*}$ . Hơn nữa, do tính  $L$ -(SLC) của  $f$ , ta có

$$\begin{aligned} f(z_{\lambda, \alpha}^*, x^*) - f(z_{\lambda, \alpha}^*, T(\lambda, \alpha, x^*)) &\leq -f(x^*, T(\lambda, \alpha, x^*)) \\ &\quad + L\|z_{\lambda, \alpha}^* - x^*\| \cdot \|x^* - T(\lambda, \alpha, x^*)\|. \end{aligned}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned} &\|h(\lambda, \alpha, x^*)\|^2 \\ &\leq \lambda [-f(x^*, T(\lambda, \alpha, x^*)) + L\|z_{\lambda, \alpha}^* - x^*\| \cdot \|x^* - T(\lambda, \alpha, x^*)\| - \alpha g(x^*, T(\lambda, \alpha, x^*))], \end{aligned}$$

khẳng định trên cùng với tính bị chặn của  $f(x^*, \cdot)$ ,  $g(x^*, \cdot)$ ,  $T(\cdot, \cdot, x^*)$  và  $z_{\lambda, \alpha}^*$  suy ra  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} h(\lambda, \alpha, x^*) = 0$ . Áp dụng Bổ đề 3.4, với mọi  $u, v \in \mathcal{H}$ , ta có

$$\|h(\lambda, \alpha, u) - h(\lambda, \alpha, v)\| = \|T(\lambda, \alpha, u) - T(\lambda, \alpha, v) - (u - v)\| \leq N^*\|u - v\|$$

trong đó  $N^* := \lambda^* \alpha^* K + \lambda^* L^2 + \lambda^* L + 2$ . Vì vậy, hàm số  $x \mapsto h(\lambda, \alpha, x)$  là liên tục Lipschitz toàn cục theo biến  $x$ . Vì vậy, điều kiện (ii) được thỏa mãn.

Mặt khác, do  $\varphi(t)$  liên tục trên  $[0, +\infty)$ , nên hàm  $\sigma(t) := \max\{N^*\|x^*\| + \varphi(t), N^*\}$  cũng liên tục trên  $[0, +\infty)$ . Hiển nhiên,  $\sigma \in L_{\text{loc}}^1[0, +\infty)$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \|h(\lambda(t), \alpha(t), x)\| &\leq \|h(\lambda(t), \alpha(t), x) - h(\lambda(t), \alpha(t), x^*)\| + \|h(\lambda(t), \alpha(t), x^*)\| \\ &\leq N^*\|x - x^*\| + \varphi(t) \\ &\leq N^*\|x\| + N^*\|x^*\| + \varphi(t) \\ &\leq \sigma(t)(1 + \|x\|). \end{aligned}$$

Vì vậy, điều kiện (iii) được thỏa mãn.

Cuối cùng, theo Bổ đề 3.3(iv), với mỗi  $x \in \mathcal{H}$ , hàm số  $t \mapsto h(\lambda(t), \alpha(t), x)$  liên

tục, và vì vậy là đo được trên  $[0, +\infty)$ . Điều kiện (iii) giúp ta đảm bảo rằng hàm  $t \mapsto h(\lambda(t), \alpha(t), x)$  là khả tích địa phương trên  $[0, +\infty)$ . Vì vậy, điều kiện (i) thỏa mãn. Định lý được chứng minh xong.  $\square$

**Nhận xét 3.1.** *Khẳng định của Định lý 3.1 vẫn đúng nếu chúng ta thay điều kiện (A3) trong Giả thiết 3.1 bằng một điều kiện nhẹ hơn, đó là:*

(A3') *Với mọi  $x \in C$  (thay vì  $x \in \mathcal{H}$  như trong điều kiện (A3)), các hàm số  $f(x, \cdot)$ ,  $g(x, \cdot)$  là lồi, chính thường, nửa liên tục dưới và khả dưới vi phân trên  $C$ . Hơn nữa, các hàm này bị chặn trên các tập con bị chặn của  $\mathcal{H}$ .*

**Nhận xét 3.2.** *Trong phát biểu của Định lý 3.1, ta đòi hỏi bài toán  $EP(g, \text{Sol}(f, C))$  có duy nhất nghiệm. Cụ thể, điều kiện đủ cho yêu cầu trên là  $g$  thỏa mãn các yêu cầu của Bổ đề 1.17. Một ví dụ về song hàm như vậy là  $g(x, y) = \langle x + \frac{1}{2}y, y - x \rangle$ . Thật vậy, hiển nhiên  $g$  là song hàm cân bằng. Bên cạnh đó, ta thấy rằng*

$$g(x, y) + g(y, x) = -\frac{1}{2}\|x - y\|^2,$$

*suy ra song hàm  $g(x, y)$  là đơn điệu mạnh với hệ số  $\gamma = \frac{1}{2}$  nên hiển nhiên cũng là giả đơn điệu mạnh. Tiếp theo, ta cố định  $x$  và xét hàm  $h_x(y) := g(x, y)$  trên  $C$ . Rõ ràng  $h_x(y)$  là hàm liên tục nên cũng là nửa liên tục dưới. Mặt khác, dễ thấy*

$$h_x(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + \frac{1}{2}\langle x, y \rangle - \|x\|^2,$$

*trong đó hàm  $y \mapsto \frac{1}{2}\langle x, y \rangle$  lồi vì là ánh xạ tuyến tính còn hàm  $y \mapsto \frac{1}{2}\|y\|^2$  lồi theo bất đẳng thức (1.3). Do đó,  $h_x(y)$  là hàm lồi. Ta có  $g(x, \cdot)$  là hàm lồi và nửa liên tục dưới trên  $C$ .*

*Cuối cùng, ta có hàm  $g(\cdot, y)$  là liên tục nên hiển nhiên là hemi-liên tục. Như vậy toàn bộ các điều kiện của Bổ đề 1.17 được thỏa mãn.*

### 3.2.2 Sự hội tụ mạnh của quỹ đạo

Ta xét giả thiết sau:

#### Giả thiết 3.2.

(B1) Song hàm cân bằng  $f$  đơn điệu và  $L$ -(LC) trên  $C \times C$ ;

(B2) Song hàm cân bằng  $g$  là  $\gamma$ - đơn điệu mạnh và  $K$ -(LC) trên  $C \times C$ ;

(B3) Với mọi  $x, y \in C$ , hàm  $g(x, \cdot)$  là lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, và khả dưới vi phân trên  $C$ , ánh xạ  $\partial g(x, \cdot)(x)$  và hàm  $g(\cdot, y)$  bị chặn trên các tập con bị chặn của  $C$ , hàm số  $f(x, \cdot)$  là lồi, chính thường, nửa liên tục dưới, và khả dưới vi phân, các hàm  $f(\cdot, y), g(\cdot, y)$  là nửa liên tục trên yếu trên  $C$ ;

(B4) Hàm  $\alpha(t)$  đi từ  $[0, +\infty)$  vào  $(0, +\infty)$ , là khả vi liên tục và thỏa mãn các điều kiện

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0; \int_0^{+\infty} \alpha(t) dt = +\infty; \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{\alpha}(t)}{\alpha^2(t)} = 0;$$

ngoài ra,  $\lambda(t)$  là hàm liên tục đi từ  $[0, +\infty)$  vào đoạn hữu hạn  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subset (0, \frac{1}{L})$ .

Bây giờ chúng ta phát biểu và chứng minh định lý về sự hội tụ mạnh của quỹ đạo sinh bởi hệ (3.3).

**Định lý 3.2.** *Giả sử rằng giả thiết 3.2 được thỏa mãn và hệ (3.3) có một nghiệm mạnh toàn cục duy nhất  $x(t)$ . Khi đó  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \hat{x}$ , trong đó  $\hat{x}$  là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng hai cấp  $EP(g, Sol(f, C))$ .*

Để trình bày chứng minh của Định lý 3.2, ta cần kết quả sau đây.

**Bổ đề 3.5.** *Giả sử song hàm  $f$  đơn điệu và là (MLC) với các hệ số  $c_1, c_2$  còn  $\lambda(t)$  là hàm liên tục đi từ  $[0, +\infty)$  vào đoạn hữu hạn  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subset (0, \frac{1}{2\max\{c_1, c_2\}})$ . Giả sử thêm rằng  $f, g$  và  $\alpha(t)$  thỏa mãn các điều kiện (B2)-(B4) của Giả thiết 3.2. Ngoài ra, hệ (3.3) có duy nhất nghiệm mạnh toàn cục  $x(t)$ . Khi đó, tồn tại một số  $t_0 > 0$  sao cho*

$$\|y(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \leq (1 - \gamma\lambda(t)\alpha(t))\|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \quad \forall t > t_0, \quad (3.15)$$

trong đó  $x_{\alpha(t)}$  là nghiệm duy nhất của bài toán REP ứng với  $\alpha = \alpha(t)$  đã đề cập trong Mục 3.1.

*Chứng minh.* Do  $z(t) = \text{prox}_{\lambda(t)(f(x(t), \cdot) + \alpha_k g(x(t), \cdot))}(x(t))$ , theo Bổ đề 1.11, với mọi  $u \in C$  ta có

$$\begin{aligned} & 2\lambda(t)[(f(x(t), u) - f(x(t), z(t)))] \\ & \geq 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), z(t)) - g(x(t), u)] + 2\langle x(t) - z(t), u - z(t) \rangle. \end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng  $y(t) \in C$ . Thay  $u = y(t)$  vào bất đẳng thức gần nhất, ta thu được

$$2\lambda(t)[(f(x(t), y(t)) - f(x(t), z(t)))]$$

$$\geq 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), z(t)) - g(x(t), y(t))] + 2\langle x(t) - z(t), y(t) - z(t) \rangle. \quad (3.16)$$

Bên cạnh đó, ta có

$$2\langle x(t) - z(t), y(t) - z(t) \rangle = \|x(t) - z(t)\|^2 + \|y(t) - z(t)\|^2 - \|x(t) - y(t)\|^2,$$

đẳng thức này kết hợp với (3.16) suy ra

$$\begin{aligned} 2\lambda(t)[(f(x(t), y(t)) - f(x(t), z(t)))] &\geq 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), z(t)) - g(x(t), y(t))] \\ &\quad + \|x(t) - z(t)\|^2 + \|y(t) - z(t)\|^2 \\ &\quad - \|x(t) - y(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Mặt khác, từ tính (MLC) của  $f$  ta có

$$f(x(t), z(t)) + f(z(t), y(t)) \geq f(x(t), y(t)) - c_1\|x(t) - z(t)\|^2 - c_2\|y(t) - z(t)\|^2.$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức trên với  $2\lambda(t)$  và chuyển vế, ta thu được

$$\begin{aligned} 2\lambda(t)f(z(t), y(t)) &\geq 2\lambda(t)[f(x(t), y(t)) - f(x(t), z(t))] - 2c_1\lambda(t)\|x(t) - z(t)\|^2 \\ &\quad - 2c_2\lambda(t)\|y(t) - z(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Kết hợp (3.17) và (3.18), ta suy ra

$$\begin{aligned} &2\lambda(t)f(z(t), y(t)) \\ &\geq 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), z(t)) - g(x(t), y(t))] + \|x(t) - z(t)\|^2 + \|y(t) - z(t)\|^2 \\ &\quad - \|x(t) - y(t)\|^2 - 2c_1\lambda(t)\|x(t) - z(t)\|^2 - 2c_2\lambda(t)\|y(t) - z(t)\|^2 \\ &= 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), z(t)) - g(x(t), y(t))] \\ &\quad + (1 - 2c_1\lambda(t))\|x(t) - z(t)\|^2 + (1 - 2c_2\lambda(t))\|y(t) - z(t)\|^2 - \|x(t) - y(t)\|^2, \end{aligned}$$

hay tương đương với,

$$\begin{aligned} -2\lambda(t)f(z(t), y(t)) &\leq -2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), z(t)) - g(x(t), y(t))] \\ &\quad - (1 - 2c_1\lambda(t))\|x(t) - z(t)\|^2 \\ &\quad - (1 - 2c_2\lambda(t))\|y(t) - z(t)\|^2 + \|x(t) - y(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tiếp theo, do  $y(t) = \text{prox}_{\lambda(t)(f(z(t), \cdot) + \alpha(t)g(x(t), \cdot))}(x(t))$ , ta có, với mọi  $v \in C$ ,

$$2\langle x(t) - y(t), y(t) - v \rangle \geq 2\lambda(t)f(z(t), y(t)) - 2\lambda(t)f(z(t), v)$$

$$+ 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), y(t)) - g(x(t), v)].$$

Đánh giá trên kết hợp với đẳng thức

$$2\langle x(t) - y(t), y(t) - v \rangle = \|x(t) - v\|^2 - \|x(t) - y(t)\|^2 - \|y(t) - v\|^2$$

dẫn tới

$$\begin{aligned} & \|x(t) - v\|^2 - \|x(t) - y(t)\|^2 - \|y(t) - v\|^2 \\ & \geq 2\lambda(t)f(z(t), y(t)) - 2\lambda(t)f(z(t), v) + 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), y(t)) - g(x(t), v)], \end{aligned}$$

tức là

$$\begin{aligned} \|y(t) - v\|^2 \leq & \|x(t) - v\|^2 - \|x(t) - y(t)\|^2 - 2\lambda(t)f(z(t), y(t)) + 2\lambda(t)f(z(t), v) \\ & - 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), y(t)) - g(x(t), v)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Từ (3.19) và (3.20) ta được

$$\begin{aligned} & \|y(t) - v\|^2 \\ \leq & \|x(t) - v\|^2 - \|x(t) - y(t)\|^2 + 2\lambda(t)f(z(t), v) \\ & - 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), y(t)) - g(x(t), v)] \\ & - 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x(t), z(t)) - g(x(t), y(t))] - (1 - 2c_1\lambda(t))\|x(t) - z(t)\|^2 \\ & - (1 - 2c_2\lambda(t))\|y(t) - z(t)\|^2 + \|x(t) - y(t)\|^2 \\ = & \|x(t) - v\|^2 + 2\alpha(t)\lambda(t)g(x(t), v) + 2\lambda(t)f(z(t), v) - 2\alpha(t)\lambda(t)g(x(t), z(t)) \\ & - (1 - 2c_1\lambda(t))\|x(t) - z(t)\|^2 - (1 - 2c_2\lambda(t))\|y(t) - z(t)\|^2. \end{aligned}$$

Thay  $v = x_{\alpha(t)}$  vào bất đẳng thức trên, ta thấy

$$\begin{aligned} & \|y(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \\ \leq & \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 + 2\alpha(t)\lambda(t)g(x(t), x_{\alpha(t)}) \\ & + 2\lambda(t)f(z(t), x_{\alpha(t)}) - 2\alpha(t)\lambda(t)g(x(t), z(t)) \\ & - (1 - 2c_1\lambda(t))\|x(t) - z(t)\|^2 - (1 - 2c_2\lambda(t))\|y(t) - z(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Tuy nhiên, do tính đơn điệu của  $f$  và  $x_{\alpha(t)} \in \text{Sol}(f + \alpha(t)g, C)$ , ta suy ra

$$-f(z(t), x_{\alpha(t)}) - f(x_{\alpha(t)}, z(t)) \geq 0 \quad \text{và} \quad f(x_{\alpha(t)}, z(t)) + \alpha(t)g(x_{\alpha(t)}, z(t)) \geq 0.$$

Cộng từng về hai bất đẳng thức trên, ta có  $-f(z(t), x_{\alpha(t)}) + \alpha(t)g(x_{\alpha(t)}, z(t)) \geq 0$ , tức là  $2\lambda(t)f(z(t), x_{\alpha(t)}) \leq 2\alpha(t)\lambda(t)g(x_{\alpha(t)}, z(t))$ .

Kết hợp bất đẳng thức trên với (3.21), ta suy ra

$$\begin{aligned} & \|y(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \\ & \leq \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 + 2\alpha(t)\lambda(t)g(x(t), x_{\alpha(t)}) \\ & \quad + 2\alpha(t)\lambda(t)g(x_{\alpha(t)}, z(t)) - 2\alpha(t)\lambda(t)g(x(t), z(t)) \\ & \quad - (1 - 2c_1\lambda(t))\|x(t) - z(t)\|^2 - (1 - 2c_2\lambda(t))\|y(t) - z(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Theo tính  $\gamma$ -đơn điệu mạnh của  $g$ , ta có

$$g(x(t), x_{\alpha(t)}) + g(x_{\alpha(t)}, x(t)) \leq -\gamma\|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2,$$

hay tương đương với

$$2\alpha(t)\lambda(t)g(x(t), x_{\alpha(t)}) \leq -2\alpha(t)\lambda(t)g(x_{\alpha(t)}, x(t)) - 2\gamma\alpha(t)\lambda(t)\|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2.$$

Kết hợp bất đẳng thức cuối cùng và (3.22), ta thấy

$$\begin{aligned} & \|y(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \\ & \leq \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 + 2\alpha(t)\lambda(t)g(x_{\alpha(t)}, z(t)) \\ & \quad - 2\alpha(t)\lambda(t)g(x_{\alpha(t)}, x(t)) - 2\alpha(t)\lambda(t)g(x(t), z(t)) \\ & \quad - 2\gamma\alpha(t)\lambda(t)\|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 - (1 - 2c_1\lambda(t))\|x(t) - z(t)\|^2 \\ & \quad - (1 - 2c_2\lambda(t))\|y(t) - z(t)\|^2 \\ & = (1 - 2\gamma\alpha(t)\lambda(t))\|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \\ & \quad + 2\alpha(t)\lambda(t)[g(x_{\alpha(t)}, z(t)) - g(x_{\alpha(t)}, x(t)) - g(x(t), z(t))] \\ & \quad - (1 - 2c_1\lambda(t))\|x(t) - z(t)\|^2 - (1 - 2c_2\lambda(t))\|y(t) - z(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Từ tính  $K$ -(LC) của  $g$  và bất đẳng thức (1.2), ta có

$$\begin{aligned} & g(x_{\alpha(t)}, z(t)) - g(x_{\alpha(t)}, x(t)) - g(x(t), z(t)) \\ & \leq K\|x_{\alpha(t)} - x(t)\| \cdot \|x(t) - z(t)\| \\ & \leq \frac{\gamma}{2}\|x_{\alpha(t)} - x(t)\|^2 + \frac{K^2}{2\gamma}\|x(t) - z(t)\|^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Từ các đánh giá (3.23) và (3.24), ta suy ra

$$\|y(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \leq (1 - 2\gamma\alpha(t)\lambda(t))\|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2\alpha(t)\lambda(t) \left[ \frac{\gamma}{2} \|x_{\alpha(t)} - x(t)\|^2 + \frac{K^2}{2\gamma} \|x(t) - z(t)\|^2 \right] \\
& - (1 - 2c_1\lambda(t)) \|x(t) - z(t)\|^2 - (1 - 2c_2\lambda(t)) \|y(t) - z(t)\|^2 \\
& = (1 - \gamma\alpha(t)\lambda(t)) \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \\
& - \left( 1 - 2c_1\lambda(t) - \frac{K^2}{\gamma}\alpha(t)\lambda(t) \right) \|x(t) - z(t)\|^2 \\
& - (1 - 2c_2\lambda(t)) \|y(t) - z(t)\|^2. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Do  $\{\alpha(t)\} \rightarrow 0$  khi  $t \rightarrow +\infty$  và  $\lambda(t) < \frac{1}{2\max\{c_1, c_2\}}$  với mọi  $t$ , ta có thể chọn một số dương  $t_0$  sao cho

$$\begin{cases}
1 - 2c_1\lambda(t) - \frac{K^2}{\gamma}\alpha(t)\lambda(t) > 0 \\
1 - 2c_2\lambda(t) > 0 \\
1 - \gamma\alpha(t)\lambda(t) > 0
\end{cases}$$

với mọi  $t > t_0$ . Vì vậy, từ (3.25), ta có

$$\|y(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \leq (1 - \gamma\alpha(t)\lambda(t)) \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2$$

với mọi  $t > t_0$ , từ đó suy ra (3.33) được thỏa mãn. Theo cách chọn, ta cũng thấy rằng  $1 - \gamma\alpha(t)\lambda(t) > 0$ .  $\square$

**Nhận xét 3.3.** Dễ thấy rằng, khi Giả thiết của Định lý 3.2 được thỏa mãn thì giả thiết của Bổ đề 3.5 cũng được thỏa mãn. Thật vậy, khi  $f$  là  $L$ -(LC), thì cũng đồng thời là (MLC) với  $c_1 = c_2 = \frac{L}{2}$ . Ngoài ra, hàm  $\lambda(t)$  thỏa mãn điều kiện (B4) thì cũng thỏa mãn giả thiết của Bổ đề 3.5 với  $c_1 = c_2 = \frac{L}{2}$ .

*Chứng minh Định lý 3.2.*

Đặt  $V(t) = \frac{1}{2} \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2$ , ta có  $\dot{V}(t) = \langle x(t) - x_{\alpha(t)}, \dot{x}(t) - \dot{x}_{\alpha(t)} \rangle$ . Theo hệ 3.3 ta có  $\dot{x}(t) = y(t) - x(t)$ , từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & = \langle x(t) - x_{\alpha(t)}, y(t) - x(t) - \dot{x}_{\alpha(t)} \rangle \\
& = \langle x(t) - x_{\alpha(t)}, y(t) - x_{\alpha(t)} \rangle - \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 - \langle x(t) - x_{\alpha(t)}, \dot{x}_{\alpha(t)} \rangle
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức (1.3), ta được

$$\dot{V}(t) \leq \frac{1}{2} \left( \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 + \|y(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \right) - \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2$$

$$\begin{aligned}
& + \|\dot{x}_{\alpha(t)}\| \cdot \|x(t) - x_{\alpha(t)}\| \\
& = \frac{1}{2} \|y(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 - \frac{1}{2} \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 + \|\dot{x}_{\alpha(t)}\| \cdot \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|. \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.26) với (3.2) và (3.15), ta suy ra

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & \leq \frac{1}{2} (1 - \gamma\lambda(t)\alpha(t)) \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 - \frac{1}{2} \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \\
& \quad + M \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\alpha(t)} \|x(t) - x_{\alpha(t)}\| \\
& = -\frac{1}{2} \gamma\lambda(t)\alpha(t) \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 + M \frac{|\dot{\alpha}(t)|}{\alpha(t)} \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|
\end{aligned}$$

với mọi  $t > t_0$ , trong đó  $t_0$  được đề cập trong Bổ đề 3.5. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta thấy rằng, với mọi  $t > t_0$ ,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) & \leq -\frac{1}{2} \gamma\lambda(t)\alpha(t) \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \\
& \quad + \left( M^2 \frac{|\dot{\alpha}(t)|^2}{\gamma\lambda(t)\alpha^3(t)} + \frac{1}{4} \gamma\lambda(t)\alpha(t) \|x(t) - x_{\alpha(t)}\|^2 \right),
\end{aligned}$$

điều này tương đương với,

$$\dot{V}(t) + \frac{1}{2} \gamma\lambda(t)\alpha(t) V(t) \leq M^2 \frac{|\dot{\alpha}(t)|^2}{\gamma\lambda(t)\alpha^3(t)}. \quad (3.27)$$

Giải (3.27), ta thu được

$$V(t) \leq e^{-\frac{\gamma}{2} \int_0^t \lambda(u)\alpha(u) du} \left( \frac{M^2}{\gamma} \int_0^t e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^s \lambda(u)\alpha(u) du} \frac{|\dot{\alpha}(s)|^2}{\lambda(s)\alpha^3(s)} ds + V(0) \right), \quad \forall t > t_0.$$

Theo điều kiện (B4) của Giả thiết 3.2, ta có  $\int_0^{+\infty} \lambda(u)\alpha(u) du = +\infty$ . Vì vậy, để chứng minh  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$ , ta chỉ ra

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^s \lambda(u)\alpha(u) du} \frac{|\dot{\alpha}(s)|^2}{\lambda(s)\alpha^3(s)} ds}{e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^t \lambda(u)\alpha(u) du}} = 0.$$

Khẳng định này hiển nhiên đúng nếu  $\int_0^{+\infty} e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^s \lambda(u)\alpha(u) du} \frac{|\dot{\alpha}(s)|^2}{\lambda(s)\alpha^3(s)} ds < +\infty$ . Trong trường hợp ngược lại, áp dụng quy tắc L'Hôpital và điều kiện (B4), ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^s \lambda(u)\alpha(u) du} \frac{|\dot{\alpha}(s)|^2}{\lambda(s)\alpha^3(s)} ds}{e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^t \lambda(u)\alpha(u) du}} & = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^t \lambda(u)\alpha(u) du} \frac{|\dot{\alpha}(t)|^2}{\lambda(t)\alpha^3(t)}}{e^{\frac{\gamma}{2} \int_0^t \lambda(u)\alpha(u) du} \cdot \frac{\gamma}{2} \lambda(t)\alpha(t)} \\
& = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{\gamma\lambda^2(t)} \cdot \frac{|\dot{\alpha}(t)|^2}{\alpha^4(t)} = 0.
\end{aligned}$$

Như vậy, ta đã chứng minh được  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - x_{\alpha(t)}\| = 0$ . Hơn nữa, từ Bổ đề 3.2, ta thấy  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_{\alpha(t)} = \hat{x}$ . Từ đó suy ra  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \hat{x}$ . Định lý được chứng minh xong.  $\square$

**Nhận xét 3.4.** Một ví dụ về hàm  $\alpha(t)$  thỏa mãn điều kiện (B4) của Giả thiết 3.2 là  $\alpha(t) = \frac{1}{(t+1)^p}$ , trong đó  $0 < p < 1$ . Trong thực hành, để tìm một hàm  $\lambda(t)$  thỏa mãn (B4), ta cần biết hệ số kiểu Lipschitz  $L$  của  $f$ . Tuy nhiên, trong những trường hợp chúng ta không thể tính toán cụ thể hoặc tìm một giá trị xấp xỉ của  $L$ , ta thay điều kiện (B4) bằng điều kiện sau đây:

(B4')  $\alpha(t)$  và  $\lambda(t)$  là các hàm liên tục đi từ  $[0, +\infty)$  vào  $(0, +\infty)$  sao cho  $\alpha(t) \rightarrow 0$  khi  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\lambda(t) \rightarrow 0$  khi  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{\dot{\alpha}(t)}{\lambda(t)\alpha^2(t)} \rightarrow 0$  khi  $t \rightarrow +\infty$  và  $\int_0^{+\infty} \lambda(t)\alpha(t) = +\infty$ . Một ví dụ của  $\lambda(t)$ ,  $\alpha(t)$  thỏa mãn điều kiện (B4') là  $\alpha(t) = \frac{1}{(t+1)^p}$ ,  $\lambda(t) = \frac{1}{(t+1)^q}$  trong đó  $0 < p, q < 1$  và  $p + q < 1$ .

### 3.3 Phương pháp chỉnh lặp kiểu đạo hàm tăng cường

Mục này được dành để giới thiệu một phương pháp kiểu đạo hàm tăng cường hiệu chỉnh và chứng minh sự hội tụ mạnh của phương pháp. Ta xét các điều kiện sau đặt lên các song hàm  $f$  và  $g$  từ  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  vào  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ :

**Giả thiết 3.3.**

(H1)  $f$  đơn điệu và  $f(x, x) = 0$  với mỗi  $x \in C$ ;

(H2)  $g$  là  $\gamma$ -đơn điệu mạnh và  $g(x, x) = 0$  với mọi  $x \in C$ ;

(H3)  $g$  thỏa mãn điều kiện (3.1);

(H4)  $f(x, \cdot)$ ,  $g(x, \cdot)$  là các hàm lồi và nửa liên tục dưới yếu, các hàm  $f(\cdot, y)$ ,  $g(\cdot, y)$  là nửa liên tục trên yếu với mọi  $x, y \in C$ ;

(H5) Tập nghiệm  $Sol(f, C)$  khác rỗng.

Rời rạc hóa hệ (3.3) bởi xấp xỉ

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{\tau_k},$$

ta được một thuật toán chỉnh lặp kiểu đạo hàm tăng cường. Cụ thể hơn, ta được thuật toán sau đây.

**Thuật toán 3.1.** (Phương pháp chỉnh lập kiểu đạo hàm tăng cường (REM - regularized extragradient-type method))

**Khởi tạo:** Lấy  $x^0 \in C$  tùy ý. Cho  $\{\tau_k\}$ ,  $\{\alpha_k\}$  và  $\{\lambda_k\}$  là các dãy số dương sao cho  $\{\tau_k\} \subset [a, b] \subset (0, 1)$ .

**Các bước lặp:** Với mỗi  $k \geq 0$ , tính  $x^{k+1}$  bởi

$$\begin{cases} z^k = \text{prox}_{\lambda_k}(f(x^k, \cdot) + \alpha_k g(x^k, \cdot))(x^k), \\ y^k = \text{prox}_{\lambda_k}(f(z^k, \cdot) + \alpha_k g(x^k, \cdot))(x^k), \\ x^{k+1} = (1 - \tau_k)x^k + \tau_k y^k. \end{cases} \quad (3.28)$$

Để đảm bảo sự hội tụ của Thuật toán 3.1, sau đây, ta giả thiết rằng  $f$  là (MLC) với các hệ số  $c_1, c_2$ . Ta lấy dãy  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  thoả mãn các điều kiện (C1)-(C3) đã trình bày ở Thuật toán 2.1 trong Chương 2.

Trong trường hợp các hệ số (MLC) là  $c_1$  và  $c_2$  của  $f$  đã biết, ta có thể chọn một dãy  $\{\lambda_k\}$  sao cho

$$\{\lambda_k\} \subset [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subset \left(0, \frac{1}{2 \cdot \max\{c_1, c_2\}}\right) \quad (\text{ST1})$$

với mọi  $k > k_0$ , trong đó  $k_0$  là một số nguyên dương nào đó. Ngược lại, khi gặp khó khăn trong việc tính toán cụ thể hoặc tìm các xấp xỉ cho các hệ số  $c_1$  và  $c_2$ , ta cần một phương thức khác để xây dựng dãy cỡ bước. Xuất phát từ một số  $\lambda_0 > 0$  bất kì, dãy  $\{\lambda_k\}$  có thể được cập nhật tại mỗi bước lặp bằng công thức sau đây

$$\lambda_{k+1} = \min \left\{ \lambda_k + r_k, \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2[f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k)]_+} \right\} \quad (\text{ST2})$$

trong đó  $\mu \in (0, 1)$ ,  $\{r_k\} \subset \mathbb{R}^+$  thoả mãn  $\sum_{i=0}^{\infty} r_i < +\infty$  và  $[a]_+ = \max\{a, 0\}$ .

**Bổ đề 3.6.** Giả sử rằng Giả thiết 3.3 được thoả mãn. Hơn nữa,  $f$  là (MLC) với các hệ số dương  $c_1, c_2$  và  $g$  là  $K$ -(LC). Khi đó dãy  $\{\lambda_k\}$  sinh bởi phương thức (ST2) có các tính chất sau đây:

(i) Tồn tại hai số dương  $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}$  sao cho với mọi  $k$ ,

$$\underline{\lambda} \leq \lambda_k \leq \bar{\lambda}. \quad (3.29)$$

(ii) Dãy  $\{\lambda_k\}$  hội tụ.

(iii) Với mọi  $k$ , ta có

$$f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k) \leq \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2\lambda_{k+1}}. \quad (3.30)$$

*Chứng minh.* (i) Từ (ST2), ta suy ra

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} &= \min \left\{ \lambda_k + r_k, \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2[f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k)]_+} \right\} \\ &\geq \min \left\{ \lambda_k, \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2[f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k)]_+} \right\}\end{aligned}$$

với mọi  $k$ . Tiếp theo, từ tính (MLC) của  $f$ , ta được

$$\begin{aligned}\frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{[f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k)]_+} &\geq \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{c_1\|x^k - z^k\|^2 + c_2\|z^k - y^k\|^2} \\ &\geq \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{\max\{c_1, c_2\} \cdot (\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)} \\ &= \frac{\mu}{\max\{c_1, c_2\}}.\end{aligned}$$

Từ hai bất đẳng thức trên, theo nguyên lí quy nạp, với mọi  $k$  ta có

$$\lambda_{k+1} \geq \min \left\{ \lambda_k, \frac{\mu}{2 \max\{c_1, c_2\}} \right\} \geq \min \left\{ \lambda_0, \frac{\mu}{2 \max\{c_1, c_2\}} \right\}. \quad (3.31)$$

Mặt khác, từ (ST2) ta suy ra rằng với mỗi  $k$ ,  $\lambda_{k+1} \leq \lambda_k + r_k$ . Tiếp tục sử dụng nguyên lí quy nạp, ta được

$$\lambda_{k+1} \leq \lambda_0 + \sum_{i=0}^k r_i \leq \lambda_0 + \sum_{i=0}^{\infty} r_i. \quad (3.32)$$

Theo (3.31) và (3.32), điều kiện (3.29) được thỏa mãn với  $\underline{\lambda} = \min \left\{ \lambda_0, \frac{\mu}{2 \max\{c_1, c_2\}} \right\}$  và  $\bar{\lambda} = \lambda_0 + \sum_{i=0}^{\infty} r_i$ .

(ii) Ta lấy dãy  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$  cho bởi công thức  $s_k := \lambda_k - \sum_{i=0}^{k-1} r_i$  với mọi  $k \geq 1$ . Dễ thấy,

$$s_{k+1} - s_k = \lambda_{k+1} - (\lambda_k + r_k) \leq 0 \quad \forall k \geq 1.$$

Vì vậy, dãy  $\{s_k\}$  là không tăng. Hơn nữa, do  $\{\lambda_k\}$  bị chặn dưới bởi  $\underline{\lambda}$ , ta có, với mọi  $k \geq 1$ ,  $s_k \geq \underline{\lambda} - \sum_{i=0}^{k-1} r_i \geq \underline{\lambda} - \sum_{i=0}^{\infty} r_i$ . Dãy  $\{s_k\}$  do đó là không tăng và bị chặn dưới bởi  $\underline{\lambda} - \sum_{i=0}^{\infty} r_i$  nên hội tụ. Bên cạnh đó, do  $\lambda_k = s_k + \sum_{i=0}^{k-1} r_i$ , dãy  $\{\lambda_k\}$  cũng hội tụ và  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k + \sum_{i=0}^{\infty} r_i$ .

(iii) Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức (3.30). Đầu tiên, trong trường hợp  $f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k) \leq 0$  thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Ngược lại, nếu  $f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k) > 0$ , ta có

$$\lambda_{k+1} = \min \left\{ \lambda_k + r_k, \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2[f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k)]_+} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2[f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k)]_+} \\ &= \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2(f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k))'} \end{aligned}$$

hay tương đương với,

$$f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - f(z^k, y^k) \leq \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2\lambda_{k+1}}.$$

Như vậy, bất đẳng thức (3.30) được chứng minh xong.  $\square$

Bây giờ ta phát biểu định lý chính của mục này.

**Định lý 3.3.** *Giả sử các điều kiện của Bổ đề 3.6 được thỏa mãn. Hơn nữa, các dãy  $\{\tau_k\} \subset [a, b] \subset (0, 1)$ ,  $\{\alpha_k\} \subset (0, +\infty)$  thỏa mãn các điều kiện (C1)-(C3). Dãy  $\{\lambda_k\}$  được chọn theo một trong hai phương thức (ST1) hoặc (ST2). Khi đó, dãy  $\{x^k\}$  sinh bởi Thuật toán 3.1 hội tụ mạnh đến một nghiệm  $x^\dagger$  của bài toán  $EP(f, C)$  thỏa mãn  $x^\dagger \in \text{Sol}(g, \text{Sol}(f, C))$ .*

Để chứng minh định lý này, chúng ta cần kết quả bổ trợ sau đây.

**Bổ đề 3.7.** *Với các điều kiện trong Định lý 3.3, tồn tại một số nguyên  $k_0$  sao cho  $1 - \gamma\alpha_k\lambda_k > 0$  và*

$$\|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 \leq (1 - \gamma\alpha_k\lambda_k)\|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \quad (3.33)$$

với mọi  $k > k_0$ .

*Chứng minh.* **Trường hợp 1.** Dãy  $\{\lambda_k\}$  được chọn theo phương thức (ST1).

Chứng minh của Bổ đề 3.7 trong Trường hợp 1 hoàn toàn giống với chứng minh của Bổ đề 3.5 được trình bày trong Mục 3.2. Thật vậy, ta chỉ cần thay  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $\lambda(t)$  và  $\alpha(t)$  trong chứng minh của Bổ đề 3.5 lần lượt bằng  $x^k$ ,  $y^k$ ,  $z^k$ ,  $\lambda_k$  và  $\alpha_k$ .

**Trường hợp 2.** Dãy  $\{\lambda_k\}$  được chọn bởi phương thức (ST2).

Từ bất đẳng thức (3.30), ta có

$$f(z^k, y^k) \geq f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k) - \frac{\mu(\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2\lambda_{k+1}}$$

Từ đánh giá trên, ta suy luận tương tự như chứng minh của Bổ đề 3.5 và thay thế và đánh giá (3.18) bằng

$$2\lambda_k f(z^k, y^k) \geq 2\lambda_k [f(x^k, y^k) - f(x^k, z^k)] - \frac{\mu\lambda_k}{\lambda_{k+1}} (\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2).$$

Vì vậy, đánh giá (3.19) sẽ được cải biên thành

$$\begin{aligned} -2\lambda_k f(z^k, y^k) &\leq -2\alpha_k \lambda_k [g(x^k, y^k) - g(x^k, z^k)] \\ &\quad - \left(1 - \frac{\mu\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) (\|x^k - z^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2) + \|x^k - y^k\|^2. \end{aligned}$$

Từ đây, sau khi lặp lại các biến đổi và suy luận trong chứng minh của Bổ đề 3.5, thay vì đánh giá (3.25), ta có

$$\begin{aligned} \|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 &\leq (1 - \gamma\alpha_k\lambda_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 - \left(1 - \frac{\mu\lambda_k}{\lambda_{k+1}} - \frac{K^2}{\gamma}\alpha_k\lambda_k\right) \|x^k - z^k\|^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{\mu\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|y^k - z^k\|^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Do dãy  $\{\lambda_k\}$  hội tụ, ta có  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = 1$ . Mặt khác,  $\mu \in (0, 1)$  nên tồn tại một số nguyên  $k_0 > 0$  sao cho  $\frac{\mu\lambda_k}{\lambda_{k+1}} < 1$  với mọi  $k > k_0$ . Điều này cùng với (3.29) và  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$  suy ra tồn tại một số nguyên dương  $k_0$  đủ lớn sao cho

$$\begin{cases} 1 - \frac{\mu\lambda_k}{\lambda_{k+1}} - \frac{K^2}{\gamma}\alpha_k\lambda_k > 0 \\ 1 - \frac{\mu\lambda_k}{\lambda_{k+1}} > 0 \\ 1 - \gamma\alpha_k\lambda_k > 0. \end{cases}$$

với mọi  $k > k_0$ . Vì vậy, từ (3.34) ta suy ra  $\|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 \leq (1 - \gamma\alpha_k\lambda_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2$  với mọi  $k > k_0$ . Vì vậy, hệ thức (3.33) được thỏa mãn. Theo cách chọn, ta cũng có  $1 - \gamma\alpha_k\lambda_k > 0$ . Bổ đề được chứng minh xong.  $\square$

*Chứng minh Định lý 3.3.* Gọi  $k_0$  là số nguyên dương sao cho các bất đẳng thức  $1 - \gamma\alpha_k\lambda_k > 0$  và (3.33) đúng với mọi  $k > k_0$ . Sau đây, ta chỉ xét  $k > k_0$ . Áp dụng bất đẳng thức (1.3) và biểu thức  $x^{k+1} = (1 - \tau_k)x^k + \tau_k y^k$ , ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 &= \|(1 - \tau_k)(x^k - x_{\alpha_{k+1}}) + \tau_k(y^k - x_{\alpha_{k+1}})\|^2 \\ &\leq (1 - \tau_k) \|x^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \tau_k \|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Với mọi  $h_k \in (0, 1)$ , sử dụng đẳng thức (1.1) và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
\|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 &= \|(y^k - x_{\alpha_{k+1}}) + (x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k})\|^2 \\
&= \|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 + 2\langle y^k - x_{\alpha_{k+1}}, x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k} \rangle \\
&\geq \|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 - 2\|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\| \cdot \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\| \\
&\geq \|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 - h_k \|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{h_k} \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&= (1 - h_k) \|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 - \frac{1 - h_k}{h_k} \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2.
\end{aligned}$$

Chia hai vế của bất đẳng thức trên cho  $1 - h_k > 0$  và chuyển vế, ta được

$$\|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \leq \frac{1}{1 - h_k} \|y^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{1}{h_k} \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2. \quad (3.36)$$

Kết hợp (3.33) và (3.36), ta suy ra

$$\|y^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \leq \frac{1 - \gamma\alpha_k\lambda_k}{1 - h_k} \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{1}{h_k} \|x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}\|^2. \quad (3.37)$$

Mặt khác, ta thấy

$$\begin{aligned}
&(1 - \tau_k) \|x^k - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\
&= (1 - \tau_k) \|(x^k - x_{\alpha_k}) + (x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}})\|^2 \\
&= (1 - \tau_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + (1 - \tau_k) \|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\
&\quad + 2(1 - \tau_k) \langle x^k - x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}} \rangle \\
&\leq (1 - \tau_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + (1 - \tau_k) \|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\
&\quad + 2(1 - \tau_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\| \|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\| \\
&\leq (1 - \tau_k) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + (1 - \tau_k) \|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\
&\quad + (1 - \tau_k) \frac{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k}{2(1 - \tau_k)} \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 + \frac{2(1 - \tau_k)^2}{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k} \|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 \\
&= \left(1 - \tau_k + \frac{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k}{2}\right) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\
&\quad + \left(1 - \tau_k + \frac{2(1 - \tau_k)^2}{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k}\right) \|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2.
\end{aligned} \quad (3.38)$$

Trong đó ta sử dụng bất đẳng thức (1.2) trong đánh giá thứ tư. Từ (3.35), (3.37)

và (3.38), ta suy ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 &\leq \left(1 - \tau_k + \frac{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k}{2} + \frac{\tau_k(1 - \gamma\alpha_k\lambda_k)}{1 - h_k}\right) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + \left(1 - \tau_k + \frac{2(1 - \tau_k)^2}{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k} + \frac{\tau_k}{h_k}\right) \|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Bây giờ, do  $0 < \gamma\alpha_k\lambda_k < 1$  ta đặt  $h_k = \frac{\gamma\alpha_k\lambda_k}{4-3\gamma\alpha_k\lambda_k} \in (0, 1)$ . Khi đó, bất đẳng thức (3.39) trở thành

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 &\leq \left(1 - \frac{1}{4}\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k\right) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + \left(1 - \tau_k + \frac{2(1 - \tau_k)^2}{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k} + \frac{\tau_k(4 - 3\gamma\alpha_k\lambda_k)}{\gamma\alpha_k\lambda_k}\right) \|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Tuy nhiên, theo Bổ đề 3.2(ii), ta có  $\|x_{\alpha_k} - x_{\alpha_{k+1}}\| \leq \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k} M$  với một số  $M > 0$  và mọi  $k > k_0$ . Vì vậy, từ (3.40) ta suy ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x_{\alpha_{k+1}}\|^2 &\leq \left(1 - \frac{1}{4}\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k\right) \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2 \\ &\quad + \left(1 - \tau_k + \frac{2(1 - \tau_k)^2}{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k} + \frac{\tau_k(4 - 3\gamma\alpha_k\lambda_k)}{\gamma\alpha_k\lambda_k}\right) \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|^2}{\alpha_k^2} M^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Tiếp theo, ta đặt

$$\begin{aligned} \phi_k &= \|x^k - x_{\alpha_k}\|^2, \\ p_k &= \frac{1}{4}\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k, \\ q_k &= \left(1 - \tau_k + \frac{2(1 - \tau_k)^2}{\gamma\tau_k\alpha_k\lambda_k} + \frac{\tau_k(4 - 3\gamma\alpha_k\lambda_k)}{\gamma\alpha_k\lambda_k}\right) \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|^2}{\alpha_k^2} M^2, \end{aligned}$$

khi đó bất đẳng thức (3.40) được viết lại dưới dạng

$$\phi_{k+1} \leq (1 - p_k)\phi_k + q_k. \quad (3.42)$$

Từ các hệ thức  $\{\tau_k\} \subset [a, b] \subset (0, 1)$ ,  $\{\lambda_k\} \subset [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  và  $\{\alpha_k\}$  thỏa mãn các điều kiện (C1)-(C3), ta dễ thấy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0 \quad \text{và} \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = +\infty. \quad (3.43)$$

Hơn nữa, do  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|}{\alpha_k^2} = 0$ , ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_k}{p_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4M^2}{\gamma\tau_k\lambda_k} \cdot \left( (1 - \tau_k)\alpha_k + \frac{2(1 - \tau_k)^2}{\gamma\tau_k\lambda_k} + \frac{\tau_k(4 - 3\gamma\alpha_k\lambda_k)}{\gamma\lambda_k} \right) \cdot \frac{|\alpha_k - \alpha_{k+1}|^2}{\alpha_k^4} = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Từ Bổ đề 1.18 và các hệ thức (3.42), (3.43), (3.44) ta suy ra rằng  $\phi_k \rightarrow 0$ , tức là  $\|x^k - x_{\alpha_k}\| \rightarrow 0$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Vì vậy, theo Bổ đề 3.2(iv), ta được  $x^k \rightarrow x^\dagger$  khi  $k \rightarrow \infty$ . Định lý được chứng minh xong.  $\square$

### 3.4 Thử nghiệm số

Trong mục này, chúng ta trình bày một số ví dụ để mô tả kết quả số của Thuật toán REM 3.1 với cả hai phương thức (ST1) và (ST2) được áp dụng (hai trường hợp này được gọi lần lượt là REM (ST1) và REM (ST2)). Đồng thời, ta cũng áp dụng ba thuật toán kiểu đạo hàm tăng cường lai ghép khác, đó là Phương pháp gắn kết kiểu đạo hàm tăng cường (EVM - Extragradient-Viscosity Method) được trình bày trong [117], Phương pháp đạo hàm tăng cường gắn kết (VEM - Viscosity Extragradient Method), và Phương pháp đạo hàm tăng cường Halpern (HEM - Halpern Extragradient Method) được trình bày trong [63] nhằm so sánh kết quả số của các phương pháp này với REM. Các phương pháp này có biểu diễn

$$\begin{aligned} \text{(EVM)} : & \begin{cases} y^k = \text{prox}_{\lambda_k f(x^k, \cdot)}(x^k) \\ z^k = \text{prox}_{\lambda_k f(y^k, \cdot)}(x^k) \\ x^{k+1} = z^k - \alpha_k F(z^k) \end{cases}, & \text{(VEM)} : & \begin{cases} y^k = \text{prox}_{\lambda_k f(x^k, \cdot)}(x^k) \\ z^k = \text{prox}_{\lambda_k f(y^k, \cdot)}(x^k) \\ x^{k+1} = \alpha_k h(z^k) + (1 - \alpha_k)z^k \end{cases}, \\ \text{(HEM)} : & \begin{cases} y^k = \text{prox}_{\lambda_k f(x^k, \cdot)}(x^k) \\ z^k = \text{prox}_{\lambda_k f(y^k, \cdot)}(x^k) \\ x^{k+1} = \alpha_k x^0 + (1 - \alpha_k)z^k \end{cases}. \end{aligned}$$

**Ví dụ 3.1.** Cho  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^m$  và  $C \subset \mathcal{H}$  là một đa diện cho bởi

$$C = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\},$$

trong đó  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ( $n < m$ ) và  $b \in \mathbb{R}^n$ . Ta xét một song hàm  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi

$$f(x, y) := (Px + Qy + q)^T(y - x),$$

trong đó  $q \in \mathbb{R}^m$ ,  $P$  và  $Q$  là hai ma trận vuông cấp  $m$  sao cho  $Q - P$  là đối xứng, nửa xác định âm và  $Q$  cũng là đối xứng, nửa xác định dương. Dễ thấy  $f$  là đơn điệu và là (LC) với hệ số  $L = \|Q - P\|$ . Vì vậy, hàm này cũng là (MLC) với  $c_1 = c_2 = \frac{L}{2}$ .

Đối với phương pháp REM tính theo cách chọn dãy cỡ bước (ST1), ta lấy  $\lambda_k = \frac{0.4}{L}$  với mọi  $k$ . Đối với phương pháp REM tính theo cách chọn cỡ bước (ST2), ta lấy  $\mu = 0.4$ ,  $\lambda_0 = 1$ ,  $r_k = (k + 1)^{-1.1}$ . Đối với các phương pháp EVM, VEM, HEM, dãy  $\{\lambda_k\}$  được cho bởi

$$\lambda_k = 0.9 \min \left\{ \frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_2} \right\} = \frac{0.9}{L}$$

với mọi  $k$ . Dãy tham số hiệu chỉnh  $\{\alpha_k\}$  sẽ được lấy trong hai trường hợp, đó là  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$  và  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ . Ta cũng lấy  $g(x, y) = (Mx + p)^T(y - x)$ , trong đó  $p \in \mathbb{R}^m$  và  $M$  là một ma trận nửa xác định dương cấp  $m$ . Bên cạnh đó, ta đặt  $F(x) = Mx + p$  và  $h(x) = 0.5x + p$  lần lượt cho các phương pháp EVM và VEM. Ta chú ý rằng  $x$  là một nghiệm của bài toán EP( $f, C$ ) khi và chỉ khi nó là nghiệm của bài toán điểm bất động  $x = \text{prox}_{\lambda f(x, \cdot)}(x)$  với một giá trị  $\lambda > 0$  cố định. Vì vậy, để minh họa kết quả của các phương pháp, ta sử dụng hàm  $D(x) = \|x - \text{prox}_{\lambda f(x, \cdot)}(x)\|$  với một giá trị  $\lambda > 0$  nào đó. Chính xác hơn, chúng ta quan sát đáng điệu của dãy  $\{D(x^k)\}$ . Sự hội tụ của  $\{D(x^k)\}$  tới 0 có thể được xem như sự hội tụ của  $x^k$  tới nghiệm của bài toán.

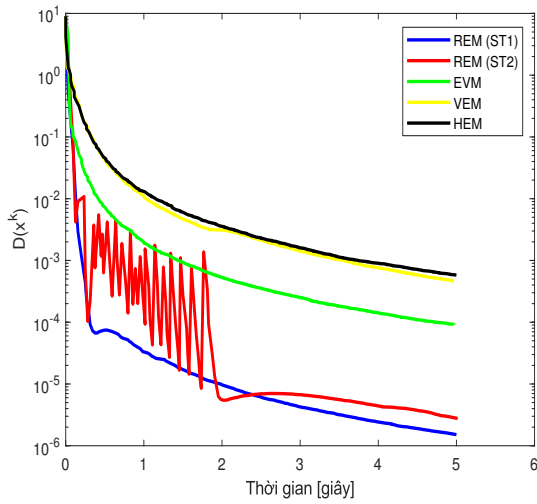
*Thử nghiệm 1.* Trong thử nghiệm đầu tiên, ta sử dụng ví dụ về bài toán cân bằng tuyến tính được mô tả trong [90], trong đó đa diện  $C$  được xác định bởi

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \sum_{i=1}^5 x_i \geq -1, -5 \leq x_i \leq 5, i = 1, \dots, 5 \right\}.$$

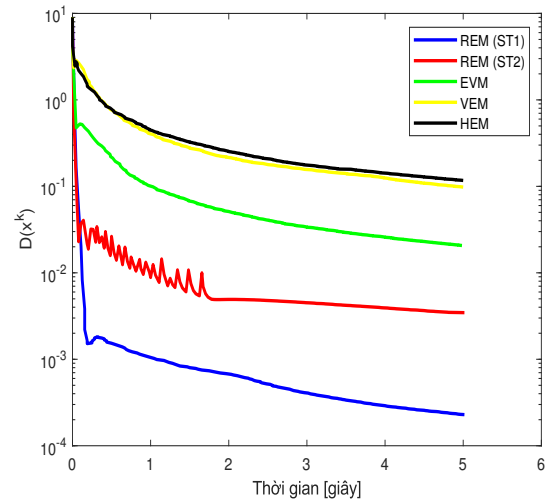
Ta lấy

$$P = \begin{bmatrix} 3.1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

và  $q = (1, -2, -1, 2, -1)^T$ . Chọn  $\tau_k = 0.9$  với mọi  $k$  cho phương pháp REM. Hệ số kiểu Lipschitz là  $L = \|P - Q\| = 3$ . Điểm khởi đầu là  $x^0 = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ . Ta cũng lấy  $M = I$  and  $p = q$ . Các kết quả được mô tả trong Hình 3.1 và 3.2.



Hình 3.1: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$  cho Ví dụ 3.1 (Thử nghiệm 1). Số bước lặp lần lượt là 173, 172, 275, 254 và 268.

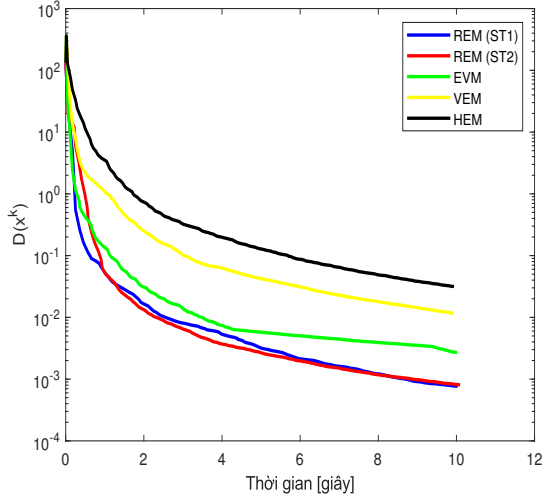


Hình 3.2: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$  cho Ví dụ 3.1 (Thử nghiệm 1). Số bước lặp lần lượt là 164, 173, 256, 248 và 264.

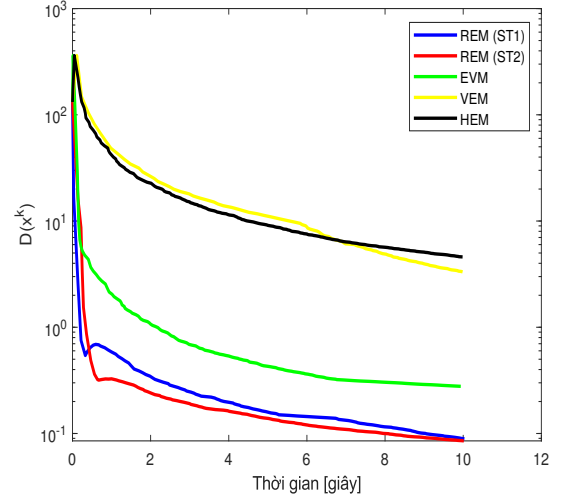
*Thử nghiệm 2.* Trong thử nghiệm tiếp theo, ta sinh  $P$  và  $Q$  ngẫu nhiên trong  $\mathbb{R}^{100 \times 100}$  sao cho các điều kiện được mô tả trong Ví dụ [63, Example 3] được thỏa mãn. Vectơ  $q$  được chọn ngẫu nhiên trong  $\mathbb{R}^{100}$ . Tập chấp nhận  $C$  được xác định bởi một ma trận  $A \in \mathbb{R}^{10 \times 100}$  và một vectơ ngẫu nhiên  $b \in \mathbb{R}_+^{10}$ . Ta cũng lấy  $M = I$ ,  $p = q$  và điểm khởi đầu  $x^0 = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{100}$ . Các Hình 3.3 và 3.4 thể hiện kết quả của thử nghiệm này.

**Ví dụ 3.2.** Xét không gian  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^m$  và tập

$$C = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\},$$



Hình 3.3: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$  cho Ví dụ 3.1 (Thử nghiệm 2). Số bước lặp lần lượt là 138, 141, 131, 191 và 189.



Hình 3.4: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$  cho Ví dụ 3.1 (Thử nghiệm 2). Số bước lặp lần lượt là 118, 133, 147, 114 và 205.

trong đó  $A \in \mathbb{R}^{10 \times m}$  ( $10 < m$ ) và  $b \in \mathbb{R}_+^{10}$ . Bên cạnh đó, song hàm  $f$  được cho bởi

$$f(x, y) = \left( \sum_{i=1}^m x_i - 1 \right) \left( \sum_{i=1}^m y_i - 1 \right).$$

Do song hàm  $f$  là  $L$ -(LC) với hệ số  $L = m$  nên hiển nhiên cũng là (MLC) với các hệ số  $c_1 = c_2 = \frac{m}{2}$ . Ta lấy song hàm  $g$  có dạng

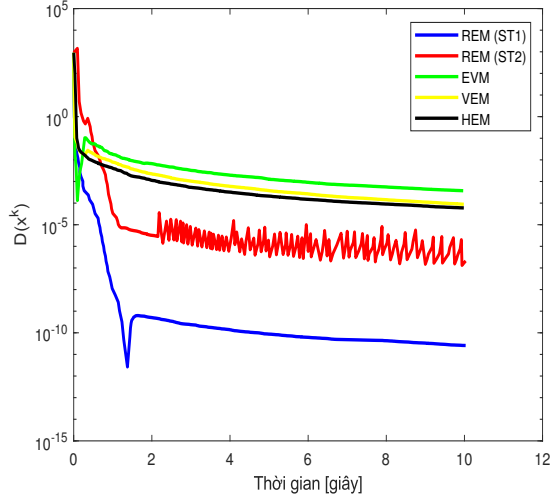
$$g(x, y) = (Mx + p)^T (y - x)$$

với  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  là ma trận đối xứng và nửa xác định dương,  $p$  là một vectơ ngẫu nhiên trong  $\mathbb{R}^m$ . Ta lấy  $\tau_k = 0.9$  với mọi  $k$ . Điểm khởi đầu  $x^0$ , toán tử  $F, h$  và các tham số được chọn giống như Ví dụ 3.1 (Thử nghiệm 2). Sự minh họa của các phương pháp trong trường hợp  $m = 100$  được thể hiện trong các Hình 3.5 và 3.6.

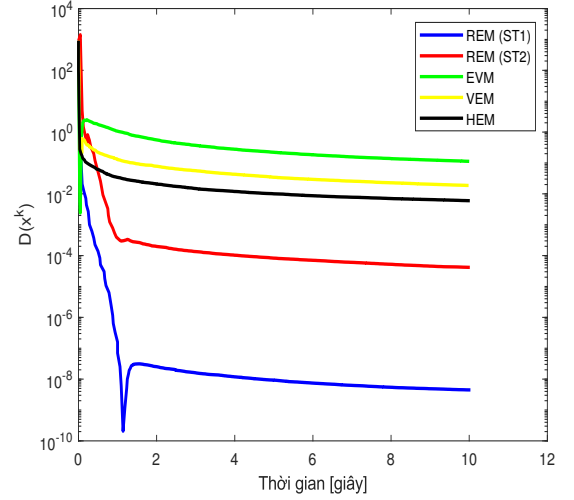
**Ví dụ 3.3.** Xét  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^m$  và

$$f(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x),$$

trong đó  $\varphi(x) = x^T Qx + q^T x + a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}^m$  và  $Q$  là ma trận đối xứng, nửa xác định dương bậc  $m$ . Tập chấp nhận là đa diện  $C = \{u \in \mathbb{R}^m : Au \leq b\}$ , như



Hình 3.5: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$ ,  $m = 100$  cho Ví dụ 3.2. Số bước lặp lần lượt là 244, 215, 316, 314 và 312.



Hình 3.6: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ ,  $m = 100$  cho Ví dụ 3.2. Số bước lặp lần lượt là 291, 213, 322, 298 và 339.

được cho trong Ví dụ 3.2.

Song hàm  $f$  đơn điệu và đồng thời là cả (LC) và (MLC) với các hệ số  $L$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  bất kì. Vì vậy, ta chọn  $c_1 = c_2 = L = 0.1$ . Song hàm  $g$  có dạng

$$g(x, y) = (Mx + q)^T(y - x).$$

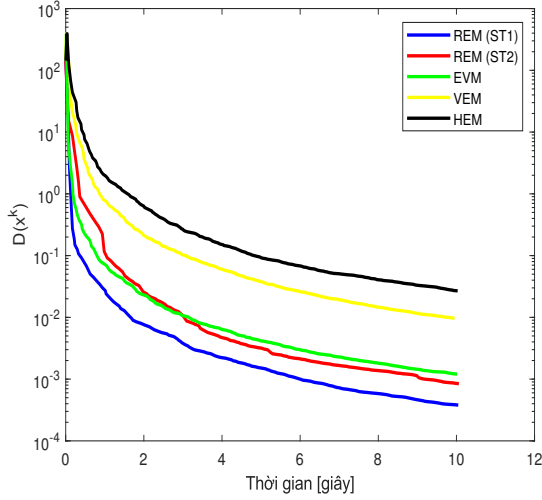
Điểm khởi đầu là  $x^0 = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$ . Các toán tử  $F$ ,  $h$  được lấy tương tự như Ví dụ 3.2. Các số  $a$ , vectơ  $q$  và ma trận  $Q$  được sinh ngẫu nhiên. Ta lấy  $\lambda_k = \frac{0.4}{L} = 4$  cho thuật toán REM (ST1). Mặt khác, chọn  $\lambda_k = 0.9 \min \left\{ \frac{1}{2c_1}, \frac{1}{2c_1} \right\} = \frac{9}{2}$  cho các thuật toán EVM, VEM và HEM. Tất cả các tham số khác được lấy như trong Ví dụ 3.1. Một lần nữa ta lấy  $m = 100$ . Các Hình 3.7 và 3.8 thể hiện các kết quả số cho ví dụ này.

**Ví dụ 3.4.** Cho không gian  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^m$  và song hàm  $f(x, y) = (R(x) + p)^T(y - x)$  trong đó  $p \in \mathbb{R}^m$  và  $R(x)$  được cho bởi

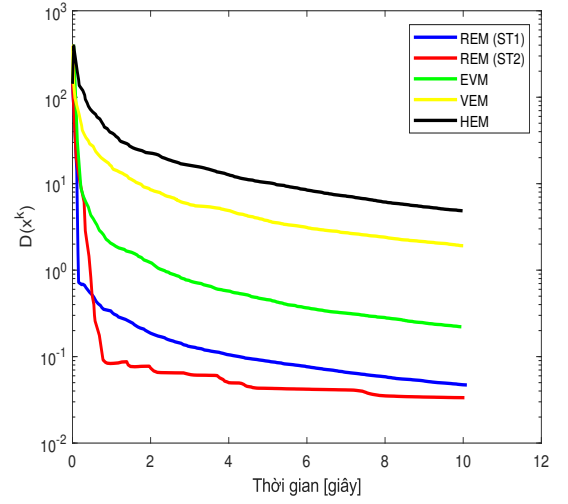
$$R(x) = \text{prox}_{\frac{1}{4}\|\cdot\|^4}(x) = \arg \min \left\{ \frac{1}{4}\|t\|^4 + \frac{1}{2}\|t - x\|^2 : t \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Tập chấp nhận là  $C = \{u \in \mathbb{R}^m : Au \leq b\}$  trong đó  $A \in \mathbb{R}^{10 \times m}$  và  $b \in \mathbb{R}_+^{10}$ .

Do  $R$  là ánh xạ gần kề của hàm lồi  $d(x) = \frac{1}{4}\|x\|^4$  nên là đơn điệu và không giãn. Vì



Hình 3.7: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.99}$  cho Ví dụ 3.3. Số bước lặp lần lượt là 153, 136, 200, 214 và 217.



Hình 3.8: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$  cho Ví dụ 3.3. Số bước lặp lần lượt là 157, 145, 196, 205 và 204.

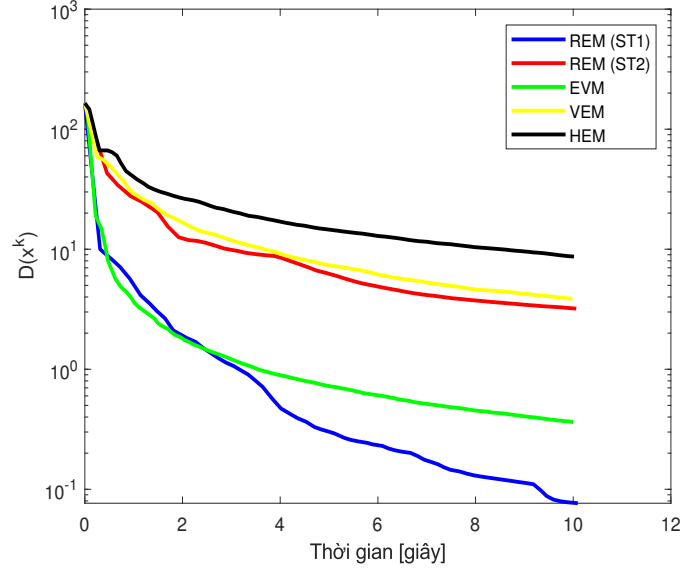
vậy, song hàm  $f$  là  $L$ -(LC) với  $L = 1$  và cũng đồng thời là (MLC) với  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ . Ta chọn  $m = 100$ . Ma trận  $A \in \mathbb{R}^{10 \times 100}$ , các vectơ  $b \in \mathbb{R}^{10}$  và  $p \in \mathbb{R}^{100}$  được sinh ngẫu nhiên. Trong thử nghiệm này ta lấy  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$  và  $\mu = 0.6$  cho thuật toán REM (ST2). Các yếu tố khác được lấy giống như trong Ví dụ 3.1 (Thử nghiệm 2). Các kết quả được thể hiện trong Hình 3.9.

**Ví dụ 3.5.** Cho  $\mathcal{H} = \ell^2$  và cố định  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ . Xét  $\mathcal{B} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  cho bởi  $\mathcal{B}(x) = (z_1, z_2, \dots)$  với  $z_1 = \dots = z_m = 0$ ,  $z_{m+1} = x_{m+2}$ ,  $z_{m+2} = -x_{m+1}$  và  $z_j = 0$ ,  $j \geq m + 1$ . Ta lấy  $C = \{x \in \ell^2 : x_i = 0, i = 1, \dots, m\}$ , các song hàm  $f(x, y) = \langle \mathcal{B}(x), y - x \rangle$  và  $g(x, y) = \langle x, y - x \rangle$ . Xét bất đẳng thức biến phân

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle \mathcal{B}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (\text{VIP}(\mathcal{B}, C))$$

Bài toán này chính là bài toán EP( $f, C$ ), dễ thấy tập nghiệm  $Sol(f, C) \neq \emptyset$ .

Ta có  $\langle \mathcal{B}(x), x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$  nên  $\mathcal{B}$  đơn điệu và liên tục Lipschitz nhưng không đồng bức. Dễ thấy  $Sol(g, Sol(f, C)) = \{x^\dagger\}$  với  $x^\dagger = 0$ .



Hình 3.9: Các phương pháp với  $\alpha_k = (k + 1)^{-0.5}$ ,  $m = 100$  cho Ví dụ 3.4. Số bước lặp lần lượt là 63, 52, 110, 93 và 87.

Chọn  $\lambda(t) = \alpha(t) = (t + 1)^{-\frac{1}{3}}$ , hệ động lực 3.4 được viết lại dưới dạng

$$\begin{cases} z(t) = P_C(x(t) - \lambda(t)\mathcal{B}(x(t)) - \lambda(t)\alpha(t)x(t)), \\ y(t) = P_C(x(t) - \lambda(t)\mathcal{B}(z(t)) - \lambda(t)\alpha(t)x(t)), \\ \dot{x}(t) + x(t) = y(t), \\ x(0) = x^0 \in C, \end{cases}$$

hay tương đương với

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -x_i(t), \quad i = 1, \dots, m, \\ \dot{x}_{m+1}(t) = -\lambda(t)x_{m+2}(t) - \lambda^2(t)x_{m+1}(t) + \lambda^2(t)\alpha(t)x_{m+2}(t), \\ \dot{x}_{m+2}(t) = \lambda(t)x_{m+1}(t) - \lambda^2(t)x_{m+2}(t) - \lambda^2(t)\alpha(t)x_{m+1}(t), \\ \dot{x}_j(t) = -\lambda^2(t)\alpha(t)x_j(t), \quad j \geq m + 3, \\ x(0) = x^0 \in C. \end{cases} \quad (3.45)$$

Từ phương trình thứ hai và thứ ba của hệ (3.45), ta suy ra

$$\dot{x}_{m+1}(t)x_{m+1}(t) + \dot{x}_{m+2}(t)x_{m+2}(t) = -\lambda^2(t) \left( x_{m+1}^2(t) + x_{m+2}^2(t) \right)$$

hay tương đương với

$$\frac{d}{dt} \left( x_{m+1}^2(t) + x_{m+2}^2(t) \right) = -\lambda^2(t) \left( x_{m+1}^2(t) + x_{m+2}^2(t) \right).$$

Như vậy, giải hệ (3.45), ta được

$$\begin{cases} x_i(t) = x_i(0)e^{-t}, & i = 1, \dots, m, \\ x_{m+1}^2(t) + x_{m+2}^2(t) = (x_{m+1}^2(0) + x_{m+2}^2(0))e^{-2 \int_0^t \lambda^2(t) dt}, \\ x_j(t) = x_j(0)e^{-\int_0^t \lambda(t)\alpha(t) dt}, & j \geq m+3. \end{cases}$$

Vì vậy, ta có

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^\dagger\|^2 = \|x(t)\|^2 &= \sum_{i=1}^m |x_i(0)|^2 e^{-2t} + (x_{m+1}^2(0) + x_{m+2}^2(0))e^{-2 \int_0^t \lambda^2(t) dt} \\ &+ \left( \|x(0)\|^2 - \sum_{i=1}^{m+2} |x_i(0)|^2 \right) e^{-2 \int_0^t \lambda(t)\alpha(t) dt}, \end{aligned}$$

nên  $\|x(t) - x^\dagger\|^2 \rightarrow 0$  khi  $t \rightarrow +\infty$ .

Trong ví dụ trên, ta áp dụng hệ động lực 3.4 cho một bài toán cụ thể, và chỉ ra rằng quỹ đạo của hệ hội tụ mạnh đến nghiệm đúng của bài toán. Ta đề cập đến tính không đồng bậc của toán tử  $\mathcal{B}$  là để so sánh với một số công trình, chẳng hạn như Bot và Csetnek [24], trong đó đòi hỏi toán tử  $\mathcal{B}$  là đồng bậc.

**Nhận xét chung.** Trong các thử nghiệm trên, phương pháp REM theo (ST1) thường thể hiện tốt hơn các phương pháp được đem ra so sánh. Phương pháp (REM) theo (ST2) thường thể hiện không tốt bằng, đặc biệt trong những trường hợp không gian có số chiều lớn.

## Kết luận chương

Trong chương này, dựa trên một phương pháp hệ động lực kiểu đạo hàm tăng cường kết hợp với kỹ thuật hiệu chỉnh, ta đã xây dựng một hệ động lực liên tục giải bài toán cân bằng. Với các điều kiện khá chặt đặt lên song hàm  $f$  của bài toán ban đầu và song hàm  $g$  của thành phần hiệu chỉnh, ta chứng minh được hệ động lực có duy nhất một nghiệm mạnh toàn cục. Trong trường hợp các điều kiện đặt lên  $f$  và  $g$  nhẹ hơn và với giả thiết hệ động lực đã có nghiệm mạnh toàn cục duy nhất, chúng ta chỉ ra rằng quỹ đạo của hệ động lực (hay chính là nghiệm mạnh toàn cục) hội tụ theo chuẩn đến một nghiệm của bài toán cân bằng.

Đối với các phương pháp hệ động lực nói chung, nếu hàm cỡ bước  $\lambda(t) \rightarrow 0$  khi  $t \rightarrow +\infty$ , thì có thể làm tăng khối lượng tính toán, tích lũy sai số và làm giảm

tốc độ hội tụ của thuật toán. Phương pháp đã trình bày phần nào khắc phục được nhược điểm trên khi chỉ cần điều kiện  $\lambda(t)$  bị chặn trong một khoảng  $(a, b)$  (với  $0 < a < b$ ) phù hợp. Tuy nhiên, khoảng này chỉ có thể tìm được khi ta biết hệ số kiểu Lipschitz  $L$  của song hàm  $f$ .

Ở phần tiếp theo của chương, ta đề xuất một phương pháp chỉnh lặp REM là phiên bản rời rạc hóa của phương pháp hệ động lực kể trên. Dãy cỡ bước  $\{\lambda_k\}$  được chọn theo một trong hai phương thức (ST1), (ST2) và cũng thỏa mãn điều kiện bị chặn. Phương pháp này được chứng minh là hội tụ theo chuẩn đến một nghiệm của bài toán cân bằng với dãy tham số  $\tau_k \in (0, 1)$ . Cuối cùng, ta trình bày một vài thử nghiệm số để minh họa sự hội tụ của phương pháp được đề xuất và so sánh với các phương pháp đã biết.

Đã có nhiều phương pháp giải bài toán cân bằng. Trong chương này, chúng ta chỉ so sánh phương pháp được đề xuất với những phương pháp lặp hội tụ mạnh trong không gian vô hạn chiều vì mục đích của chúng tôi là xây dựng được phương pháp hội tụ mạnh trong không gian vô hạn chiều. Trong các ví dụ số đưa ra, trong một số trường hợp phương pháp do chúng tôi đề xuất thể hiện tốt hơn các phương pháp được đưa ra so sánh. Nếu so sánh phương pháp của chúng tôi với những phương pháp thiết kế riêng cho không gian hữu hạn chiều thì chưa chắc đã tốt bằng.

Từ các nội dung đã trình bày, một vài câu hỏi mở được đặt ra một cách tự nhiên. Đầu tiên là làm thế nào để tìm được các cận dưới và cận trên của hàm  $\lambda(t)$  (tức là tìm  $a, b > 0$  sao cho  $a < \lambda(t) < b$ ) cho phương pháp hệ động lực trong trường hợp ta không biết hệ số kiểu Lipschitz của song hàm  $f$ . Đây là vấn đề có tính thực tiễn cao vì trong nhiều trường hợp, ta khó có thể tính toán cụ thể hay ước lượng hệ số kiểu Lipschitz của  $f$ . Việc sử dụng hàm  $\lambda(t)$  giảm dần về 0 sẽ khiến hệ động lực kiểu đạo hàm tăng cường kém hiệu quả hơn so với các hệ động lực một bước do phải thực hiện một bước tính trung gian. Vấn đề thứ hai là chứng minh được sự hội tụ mạnh của phương pháp REM với miền giá trị rộng hơn của dãy tham số, cụ thể là  $\tau_k \in (0, 2)$  với mọi  $k$ , khi đó phương pháp REM sẽ được mở rộng thành phương pháp chỉnh lặp kiểu đạo hàm tăng cường nói lỏng (RREM - relaxed regularized extragradient-type method). Chúng tôi hy vọng sẽ giải quyết được các vấn đề này trong những nghiên cứu về sau.

## KẾT LUẬN

Luận án đề xuất một số phương pháp hiệu chỉnh giải các bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng (VI), bao hàm thức biến phân tách (SVI) và một số trường hợp riêng của bài toán VI bao gồm bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) và bài toán cân bằng (EP).

**Các kết quả chính thu được của luận án bao gồm:**

1. Phương pháp co gần kề hiệu chỉnh (RPCM) giải bài toán VI;
2. Phương pháp gần kề quán tính đa bước hiệu chỉnh (RMSIPM) giải bài toán VI;
3. Phương pháp kiểu gần kề hiệu chỉnh (RPA) giải bài toán SVI;
4. Phương pháp hệ động lực kiểu đạo hàm tăng cường cấp một hiệu chỉnh giải bài toán EP. Rồi rạc phương pháp này, ta được phương pháp chỉnh lặp kiểu đạo hàm tăng cường (REM) giải bài toán EP.

Về mặt ý nghĩa và tầm quan trọng, các phương pháp RPCM và RMSIPM cung cấp những công cụ mới để giải bài toán VI. So với nhiều phương pháp khác giải bài toán này, hai phương pháp do chúng tôi đề xuất có ưu điểm là hội tụ mạnh trong không gian Hilbert vô hạn chiều và không làm thay đổi nhiều cấu trúc của phương pháp gốc (phương pháp co gần kề). Phương pháp RPA giải bài toán SVI cũng có ưu điểm khi so sánh với một số phương pháp gần kề khác, chẳng hạn như phương pháp của Chuang [41]. Ngoài tính hội tụ mạnh, phương pháp RPA chỉ đòi hỏi tính giải thức  $J_{\beta}^{B_1}$  một lần tại mỗi bước lặp, điều này giúp làm giảm chi phí tính toán. Tiếp theo, phương pháp hệ động lực hiệu chỉnh kiểu đạo hàm tăng cường cung cấp cho chúng ta một phương pháp liên tục với các điều kiện không quá chặt đặt lên các tham số, có quỹ đạo hội tụ mạnh đến nghiệm đúng của bài toán EP. Phương pháp REM được xây dựng từ phép rời rạc hoá hệ động

lực kể trên là phương pháp hội tụ mạnh trong không gian Hilbert vô hạn chiều. Khi so sánh với một số phương pháp hội tụ mạnh khác, các phương pháp RPCM, RMSIPM, RPA, REM cũng hội tụ nhanh hơn trong những thử nghiệm số cụ thể mà luận án xây dựng.

**Một số vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu:**

1. Mở rộng các phương pháp giải bài toán bao hàm thức đơn điệu có cấu trúc tổng cho trường hợp tổng quát hơn là bao hàm thức giả đơn điệu có cấu trúc tổng.
2. Mở rộng các phương pháp lặp được nghiên cứu trong luận án cho trường hợp các biến là ngẫu nhiên.
3. Nghiên cứu phương pháp đánh giá tốc độ hội tụ của các phương pháp lặp được trình bày trong luận án.
4. Đề xuất phương pháp tự thích nghi để hàm cỡ bước  $\lambda(t)$  sử dụng trong phương pháp hệ động lực là bị chặn trong trường hợp không biết hằng số kiểu Lipschitz của song hàm  $f$ .

**DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ  
LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN**

1. Hieu D.V., Anh P.K., Ha N.H. (2021), "Regularization proximal method for monotone variational inclusions", *Networks and Spatial Economics* 21, pp. 905-932 (SCIE).
2. Hieu D.V., Reich S., Anh P.K., Ha N.H. (2022), "A new proximal-like algorithm for solving split variational inclusion problems", *Numerical Algorithms* 89, pp. 811-837 (SCIE).
3. Hieu D.V., Cho Y.J., Quy P.K., Ha N.H. (2022), "An effective iterative projection method for variational inequalities in Hilbert spaces", *Soft Computing* 26, pp. 10207-10221 (SCIE).
4. Ha N.H., Hieu D.V., Muu L.D. (2024), "An accelerated regularization method for variational inclusions", *Journal of Applied and Numerical Optimization* 6, pp. 97-113 (SCOPUS).
5. Hieu D.V., Ha N.H. (2024), "The relaxed regularized method of extragradient type for equilibrium problems", *Applied Set-Valued Analysis and Optimization* 6, pp. 385-412 (SCOPUS).

## Tài liệu tham khảo

### Tài liệu tiếng Việt

- [1] Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Bường (2005), *Bài toán đặt không chỉnh*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [2] Nguyễn Bường (2001), *Hiệu chỉnh bài toán bằng phương pháp toán tử đơn điệu*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

### Tài liệu tiếng Anh

- [3] Abbas B., Attouch H. (2015), "Dynamical systems and forward–backward algorithms associated with the sum of a convex subdifferential and a monotone cocoercive operator", *Optimization* 64(10), pp. 2223-2252.
- [4] Alvarez F., Attouch H. (2001), "An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping", *Set Valued-Anal.* 9, pp. 3-11.
- [5] Anh P.K., Hai T.N. (2017), "Splitting extragradient-like algorithms for strongly pseudomonotone equilibrium problems", *Numer. Alg.* 76, pp. 67-91.
- [6] Anh P.K., Hai T.N. (2018), "A splitting algorithm for equilibrium problem given by the difference of two bifunctions", *J. Fixed Point Theory Appl.* 20(1), pp. 1-15.
- [7] Anh P.K., Hai T.N. (2023), "On regularized forward-backward dynamical systems associated with structured monotone inclusions", *Vietnam J. Math.* 51, pp. 545-562.
- [8] Anh P.K., Hai T.N., Dung V.T. (2022), "A gradient-like regularized dynamics for monotone equilibrium problems", *Qual. Theory Dyn. Sys.* 21 (160).

- [9] Anh P.N. (2013), "A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems", *Optimization* 62 (2), pp. 271-283.
- [10] Anh P.N., An L.T.H (2015), "The subgradient extragradient method extended to equilibrium problems", *Optimization* 64 (2), pp. 225-248.
- [11] Antipin A.S. (1994) "Minimization of convex functions on convex sets by means of differential equations", *Differential Equations* 30 (9), 1365–1375 (translated from Russian).
- [12] Antipin A.S. (2002), "Gradient approach of computing fixed points of equilibrium problems", *J. Glob. Optim.* 24, pp. 285-309.
- [13] Atkinson K., Han W. (2009), *Theoretical Numerical Analysis*, Springer, New York.
- [14] Attouch H., Svaiter B.F. (2011), "A continuous dynamical Newton-like approach to solving monotone inclusions", *SIAM J. Control Optim.* 49(2), 574–598.
- [15] Bakushinsky A.B., Goncharskii A.V. (1994), *Ill-posed Problems: Theory and Applications*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [16] Banert S., Bot R.I. (2018), "A forward–backward–forward differential equation and its asymptotic properties", *J. Convex Anal.* 25 (2), pp. 371-388.
- [17] Barbara K., Neubauer A., Scherzer O. (2008), *Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems*, Walter de Gruyter, Berlin - New York.
- [18] Bauschke H.H., Borwein J.M. (1996), "On projection algorithms for solving convex feasibility problems", *SIAM Review* 38, pp. 367-426.
- [19] Bauschke H.H., Combettes P.L. (2021), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York.
- [20] Beck A., Teboulle M. (2009), "A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems", *SIAM J. Imaging Sci.* 2(1), pp. 183-202

- [21] van den Berg E., Friedlander M.P. (2007), "SPGL1: a solver for large-scale sparse reconstruction", Version 2.1, Released 2020. <https://friedlander.io/spgl1/>.
- [22] Bianchi M., Schaible S. (1996), "Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems", *J. Optim. Theory Appl.* 90, pp. 31-43.
- [23] Bigi G., Castellani S., Pappalardo M., Passacantando M. (2019), *Nonlinear Programming Techniques for Equilibria*, Springer, Cham.
- [24] Bot R.I., Csetnek E.R. (2016), "Second order forward–backward dynamical systems for monotone inclusion problems", *SIAM J. Control. Optim.* 54(3), pp. 1423-1443.
- [25] Bot R.I., Grad S.M., Meier D., Staudigl M. (2021), "Inducing strong convergence of trajectories in dynamical systems associated to monotone inclusions with composite structure", *Adv. Nonlinear Anal.* 10, pp. 450-476.
- [26] Burger M., Kaltenbacher B. (2006), "Regularizing Newton-Kaczmarz methods for nonlinear ill-posed problems", *SIAM J. Numer. Anal.* 44, pp. 153-182.
- [27] Browder F.E. (1966), "Nonlinear elliptic functional equations in non-reflexive Banach spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.* 72, pp. 89-95.
- [28] Byrne C. (2002), "Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problems", *Inverse Prob.* 18, pp. 441-453.
- [29] Byrne, C. (2004), "A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction", *Inverse Prob.* 20, pp. 103-120.
- [30] Byrne C., Censor Y., Gibali A., Reich S. (2012), "The split common null point problem", *J. Nonlinear Convex Anal.* 13, pp. 759-775.
- [31] Cai X., Gu G., He B. (2014), "On the  $O(1/t)$  convergence rate of the projection and contraction methods for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators", *Comput. Optim. Appl.* 57, pp. 339-363.

- [32] Censor Y., Bortfeld T., Martin B., Trofimov A. (2006), "A unified approach for inversion problems in intensity-modulated radiation therapy", *Phys. Med. Biol.* 51, pp. 2353-2365.
- [33] Censor Y., Elfving T. (1994), "A multiprojection algorithms using Bragman projection in a product space", *Numer. Alg.* 8, pp. 221-239.
- [34] Censor Y., Gibali A., Reich S. (2012), "Algorithms for the split variational inequality problem", *Numer. Alg.* 59, pp. 301-323.
- [35] Censor Y., Gibali A., Reich S., Sabach S. (2012), "Common solutions to variational inequalities", *Set Valued Var. Anal.* 20, pp. 229-247.
- [36] Censor Y., Segal A. (2008), "Iterative projection methods in biomedical inverse problems", In: Censor Y., Jiang M., Louis A.K. (eds) *Mathematical methods in biomedical imaging and intensity-modulated therapy*, IMRT, Edizioni della Norale, Pisa, pp. 65-96.
- [37] De Cezaro A., Haltmeier M., Leitão A., Scherzer O. (2008), "On steepest-descent-Kaczmarz method for regularizing systems of nonlinear ill-posed equations", *Appl. Math. Comput.* 202, pp. 596-607.
- [38] Chen H.-G., Rockafellar R.T. (1997), "Convergence rates in forward-backward splitting", *SIAM J. Optim.* 7(2),
- [39] Choleamjiak P. (2016), "A generalized forward-backward splitting method for solving quasi inclusion problems in Banach spaces", *Numer. Alg.* 71, pp. 915-932.
- [40] Choleamjiak P., Thong D.V., Cho Y.J. (2020), "A novel inertial projection and contraction method for solving pseudomonotone variational inequality problems", *Acta Appl. Math.* 169, pp. 217-245.
- [41] Chuang C-S. (2016), "Algorithms with new parameter conditions for split variational inclusion problems in Hilbert spaces with application to split feasibility problem", *Optimization* 65, pp. 859-876.

- [42] Combettes P.L. (1996), "The convex feasibility problem in image recovery", *Adv. Imaging Electron Phys.* 95, pp. 155–270.
- [43] Cotte R.W., Yao J.C. (1992), "Pseudo-monotone complementarity problems in Hilbert space", *J. Optim. Theory Appl.* 75, pp. 281-295.
- [44] Crandall M.G., Pazy A. (1969), "Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets", *J. Funct. Anal.* 3, pp. 376-418.
- [45] Daniele P., Giannessi F., Maugeri A. (2003), *Equilibrium Problems and Variational Models*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [46] Dinh B.V., Hung P.G., Muu L.D. (2014), "Bilevel optimization as a regularization approach to pseudomonotone equilibrium problems", *Numer. Funct. Anal. Optim.* 35 (5), pp. 539–563.
- [47] Dong Q.L., Cho J.Y., Zhong L.L., Rassias T.M. (2018), "Inertial projection and contraction algorithms for variational inequalities", *J. Glob. Optim.* 70, pp. 687-704.
- [48] Dong Q.L., Gibali A., Jiang D., Ke S.H. (2018) "Convergence of projection and contraction algorithms with outer perturbations and their applications to sparse signals recovery", *J. Fixed Point Theory Appl.* 20, article number 16.
- [49] Dong Q.L., Yang J., Yuan H.B. (2019), "The projection and contraction algorithm for solving variational inequality problems in Hilbert spaces", *J. Non-linear Convex Anal.* 20, pp. 111-122.
- [50] Duc P.M., Le X.T. (2021), "A splitting subgradient algorithm for solving equilibrium problems involving the sum of two bifunctions and application to cournot-nash model", *RAIRO Oper. Res.* 55, pp. S1395-S1410.
- [51] Eckstein J., Bersekas D.P. (1992), "On the Douglas–Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators", *Math. Program.* 55, pp. 293-318.
- [52] Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. (1996), *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic, Dordrecht.

- [53] Fan K. (1972), *A minimax inequality and applications*, in: O. Shisha, *Inequality III, Proceeding of the Third Symposium on Inequalities*, Academic Press, New York.
- [54] Flam S.D., Antipin A.S. (1997), "Equilibrium programming and proximal-like algorithms", *Math. Program.* 78, pp. 29-41.
- [55] Hai T.N. (2017), "Contraction of the proximal mapping and applications to the equilibrium problem", *Optimization* 66, pp. 381-396.
- [56] He B. (1997), "A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities", *Appl. Math. Optim.* 35, pp. 69-76.
- [57] Hieu D.V., Anh P.K., Muu L.D. (2021), "Modified forward–backward splitting method for variational inclusions", *4OR - Q J. Oper. Res.* 19, pp. 127-151.
- [58] Hieu D.V., Anh P.K., Muu L.D., Strodiot J.J. (2022), "Iterative regularization methods with new stepsize rules for solving variational inclusions", *J. Appl. Math. Comput.* 68, pp. 571-599.
- [59] Hieu D.V., Muu L.D., Duong H.N., Thai B.H. (2020), "Strong convergence of new iterative projection methods with regularization for solving monotone variational inequalities in Hilbert spaces", *Math. Meth. Appl. Sci.* 43, 9745–9765.
- [60] Hieu D.V., Muu L.D., Quy P.K. (2022), "Regularization iterative method of bilevel form for equilibrium problems in Hilbert spaces", *Math. Meth. Appl. Sci.* 45(10), pp. 1-22.
- [61] Hieu D.V., Quy P.K., Duong H.N. (2021), "Equilibrium programming and new iterative methods in Hilbert spaces", *Acta Appl. Math.* 176 (7) DOI:10.1007/s10440-021-00451-0.
- [62] Hieu D.V., Quy P.K.(2023), "One-Step iterative method for bilevel equilibrium problem in Hilbert space", *J. Glob. Optim.* 85, pp. 487-510.

- [63] Hieu D.V., Strodiot J.J. (2018), "Strong convergence theorems for equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces", *J. Fixed Point Theory Appl.* 20, article number 131.
- [64] Hoai P.T., Thuong N.T., Vinh N.T. (2021), "Golden ratio algorithms for solving equilibrium problems in Hilbert spaces", *J. Nonlinear Var. Anal.* 5(4), pp. 493-518.
- [65] Hung P.G., Muu L.D. (2011), "The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions", *Nonlinear Anal.* 74, pp. 6121-6129.
- [66] Hurt N.E. (1989), *Phase Retrieval and Zero Crossings: Mathematical Methods in Image Reconstruction*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [67] Jiang B., Wang Y., Yao J. (2021), "Multi-Step inertial regularized methods for hierarchical variational inequality problems involving generalized Lipschitzian mappings", *Mathematics* 9(17), 2103.
- [68] Kassay G., Rădulescu V.D. (2018), *Equilibrium Problems and Applications*, Academic Press.
- [69] Khoroshilova E.V. (2013), "Extragradient-type method for optimal control problem with linear constraints and convex objective function", *Optim. Lett.* 7, pp. 1193-1214.
- [70] Konnov I.V. (2003), "Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems", *J. Optim. Theory Appl.* 119, pp. 317-333.
- [71] Konnov I.V., Ali M.S.S. (2006), "Descent methods for monotone equilibrium problems in Banach spaces", *J. Comput. Appl. Math.* 188, pp. 165-179.
- [72] Korpelevich G.M. (1976), "An extragradient method for finding saddle points and other problems", *Ekonomika i Matematicheskie Metody* 12, pp. 747-756.
- [73] Kristály A., Varga C. (2023), "Set-valued versions of Ky Fan's inequality with application to variational inclusion theory", *J. Math. Anal. Appl.* 282, pp. 8-20.

- [74] Lavrentiev M.M. (1967), *Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics*, Springer, New-York.
- [75] Lehdili M., Moudafi A. (1996), "Combining the proximal algorithm and Tikhonov regularization", *Optimization* 37, pp 239-252.
- [76] Liang J. (2016), *Convergence rates of first-order operator splitting methods*, Optim. Cont [math.OC], Normandie Université, Greyc Cnrs Umr 6072.
- [77] Lions P.L., Mercier B. (1979), "Splitting algorithms for the sum of two non-linear operators", *SIAM J. Numer. Anal.* 16, pp. 964-979.
- [78] Long L.V., Thong D.V., Dung V.T. (2019), "New algorithms for the split variational inclusion problems and application to split feasibility problems", *Optimization* 68, pp. 2339-2367.
- [79] López G., Martín-Márquez V., Wang F., Xu H.K. (2012), "Forward-backward splitting methods for accretive operators in Banach spaces", *Abstr. Appl. Anal.* Volume 2012.
- [80] Luc D.T., Tan N.X. (2004), "Existence conditions in variational inclusions with constraints", *Optimization* 53 (5-6), pp. 505-515.
- [81] Maingé P-E. (2007), "Inertial iterative process for fixed points of certain quasi-nonexpansive mapping", *Set-Valued Anal.* 15, pp. 67-79.
- [82] Maingé P-E. (2008), "A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems", *SIAM J. Control Optim.* 47, pp. 1499-1515.
- [83] Malisky Y., Tam M.K., (2020) "A forward-backward splitting method for monotone inclusions without cocoercivity", *SIAM J. Optim.* 30(2), 1451-1472.
- [84] Mastroeni G. (2003), *On auxiliary principle for equilibrium problems*, in: Daniele F., Gianessi F. and Maugeri A., (eds.), *Equilibrium Problems and Variational Models*, Kluwer Academic, Dordrecht.
- [85] Moudafi A. (2011), "Split monotone variational inclusions", *J. Optim Theory Appl.* 150, pp. 275-283.

- [86] Muu L.D., Oettli W. (1992), "Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria", *Nonlinear Anal.* 18, pp. 1159-1166.
- [87] Muu L.D., Quy N.V. (2015), "On existence and solution methods for strongly pseudomonotone equilibrium problems", *Vietnam J. Math.* 43, pp. 229-238.
- [88] Nikaido H., Isoda K. (1955), "Note on noncooperative convex games", *Pacific J. Math.* 5, pp. 807-815.
- [89] Passty G.B. (1979), "Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert spaces", *J. Math. Anal. Appl.* 72, pp. 383-390.
- [90] Quoc T.D., Muu L.D., and Hien N.V. (2008), "Extragradient algorithms extended to equilibrium problems", *Optimization* 57, pp. 749-776.
- [91] Rockafellar R.T. (1970), "On the maximality of sums of nonlinear monotone operators", *Trans. Amer. Math. Soc.* 149, pp. 75-88.
- [92] Rockafellar R.T., Wets R.J-B. (1998), *Variational analysis*, Springer Berlin, Heidelberg.
- [93] Rockafellar R.T. (1976), "Monotone operators and the proximal point algorithm", *SIAM J. Control Optim.* 14, pp. 877-898.
- [94] Santos P., Scheimberg S. (2011), "An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems", *Comp. Appl. Math.* 30, pp. 91-107.
- [95] Seydenschwanz M. (2015), "Convergence results for the discrete regularization of linear-quadratic control problems with bang-bang solutions", *Comput. Optim. Appl.* 629, pp. 731-760.
- [96] Shehu Y. (2019), "Convergence results of forward-backward algorithms for sum of monotone operators in Banach spaces", *Results Math.* 74(138), pp. 1-24.
- [97] Shehu Y., Dong Q.L., Jiang D. (2019), "Single projection method for pseudomonotone variational inequality in Hilbert spaces", *Optimization* 68, pp. 385-409.

- [98] Sitthithakerngkiet, K., Deepho, J., Kumam, P. (2015), "A hybrid viscosity algorithm via modify the hybrid steepest descent method for solving the split variational inclusion in image reconstruction and fixed point problems", *Appl. Math. Comput.* 250, pp. 986-1001.
- [99] Spingarn J.E. (1985), "Applications of the method of partial inverses to convex programming decomposition", *Math. Program.* 32, pp. 199–223,
- [100] Stark H. (1987), *Image Recovery: Theory and Applications*, Academic Press, Orlando, FL.
- [101] Strodiot J.J., Vuong P.T., Nguyen T.T.V., "A class of shrinking projection extragradient methods for solving non-monotone equilibrium problems in Hilbert spaces", *J. Glob. Optim.* 64 (2016), pp. 159-178.
- [102] Sun D.F. (1996), "A class of iterative methods for solving nonlinear projection equations", *J. Optim. Theory Appl.* 91, pp. 123 - 140.
- [103] Takahashi W. (2000), *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama.
- [104] Takahashi S., Takahashi W., Toyoda M. (2010), "Strong convergence theorems for maximal monotone operators with nonlinear mappings in Hilbert spaces", *J. Optim. Theory Appl.* 147, pp. 27-41.
- [105] Tan Z.-Z., Hu R., Zhu M., Fang Y.-P. (2021), "A dynamical system method for solving the split convex feasibility problem", *J. Ind. Manag. Optim.* 17 (6), pp. 2989-3011.
- [106] Thong D.V., Anh P.K., Dung V.T. (2021), "A strongly convergent Mann-type inertial algorithm for solving split variational inclusion problems", *Optim. Eng.* 22, pp. 159-185.
- [107] Thong D.V., Cholamjiak P. (2019), "Strong convergence of a forward-backward splitting method with a new stepsize for solving monotone inclusions", *Comp. Appl. Math.* 38(94).

- [108] Thong D.V., Dung V.T., Tuan P.A. (2019), "Hybrid Mann methods for the split variational inclusion problems and fixed point problems", *J. Nonlinear Convex Anal.* 20(4), pp. 625-645.
- [109] Thong D.V., Dung V.T., Cho Y.J. (2021), "A new strong convergence for solving split variational inclusion problems", *Numer. Alg.* 86, pp. 565-591.
- [110] Thong D.V., Li X.-H., Dong Q.-L., Cho Y.J., Rassias, T.M. (2022), "A projection and contraction method with adaptive step sizes for solving bilevel pseudo-monotone variational inequality problems", *Optimization* 71(7) pp. 2073-2096.
- [111] Thuy N.T.T. (2015), "An iterative method for equilibrium, variational inequality, and fixed point problems for a nonexpansive semigroup in Hilbert spaces", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 38, pp. 113-130.
- [112] Tibsirani R.J. (2013), "The lasso problem and uniqueness", *Electron J. Statist.* 7, pp. 1456-1490.
- [113] Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. (1977), *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston, Washington, D.C.
- [114] Tseng P. (2000), "A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings", *SIAM J. Control. Optim.* 38, pp. 431-446.
- [115] Vinh L.V., Nam T.V., Vuong P.T. (2022), "A second-order dynamical system for equilibrium problems", *Numer. Alg.* 91, pp. 327-351.
- [116] Vinh N.T. (2019), "A new projection algorithm for solving constrained equilibrium problems in Hilbert spaces", *Optimization* 68(8), pp. 1447-1470.
- [117] Vuong P.T., Strodiot J.J., Nguyen V.H. (2015), "On extragradient-viscosity methods for solving equilibrium and fixed point problems in a Hilbert space", *Optimization* 64, pp. 429-451.
- [118] Vuong P.T., Strodiot J.J. (2020) "A dynamical system for strongly pseudo-monotone equilibrium problems", *J. Optim. Theory Appl.* 185, pp. 767-784.

- [119] Yen L.H., Muu L.D. (2020), "A subgradient method for equilibrium problems involving quasiconvex bifunctions", *Oper. Res. Lett.* 48(5), pp. 579-583.
- [120] Xu H.K. (2002), "Another control condition in an iterative method for non-expansive mappings", *Bull. Austral. Math. Soc.* 65, pp. 109-113.
- [121] Xu H.K. (2006), "A regularization method for the proximal point algorithm", *J. Glob. Optim.* 36, pp. 115-125.
- [122] Zhang C., Dong Q-L., Chen J. (2020), "Multi-step inertial proximal contraction algorithms for monotone variational inclusion problems", *Carpathian J. Math.* 36(1), pp. 159-177.
- [123] Zhang C., Wang Y. (2018) "Proximal algorithm for solving monotone variational inclusion", *Optimization* 67, pp. 1197-1209.

#### **Tài liệu tiếng Pháp**

- [124] Brezis H. (1973), *Opérateurs maximaux monotones*, North-holland Math Stud 5 Chapitre II, pp. 19-51.
- [125] Gabay D. (1979), *Méthodes numériques pour l'optimisation nonlinéaire*, Thésis de Doctorat d'Etat et Science Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [126] Hadamard J. (1932), *Le Problème de Cauchy et Leséquations aux Dérivées Partielles Hyperboliques*, Paris, Hermann.
- [127] Haraux A. (1991), *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, Recherches en Mathématiques Appliquées, Masson.
- [128] Martinet B. (1970), "Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives", *Rev. Fr. Autom. Inform. Rech. Opér., Anal. Numér.* 4, pp. 154-159.
- [129] Mercier B. (1980), *Inéquations Variationnelles de la Mécanique*, Publ. Math. Orsay, 80.01, Université de Paris-Sud, Orsay.

[130] Stampacchia, G. (1964), "Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes", *C.R. Hebd. Séances Acad. Sci.* 258, pp. 4413–4416.