

THÔNG TIN VỀ LUẬN ÁN TIẾN SĨ

1. Họ và tên nghiên cứu sinh: Nguyễn Văn Nghĩa
2. Giới tính: Nam
3. Ngày sinh: 22/11/1984
4. Nơi sinh: Phú Thọ
5. Quyết định công nhận nghiên cứu sinh: Quyết định số 4599/QĐ-ĐHKHTN ngày 20/12/2023 của Hiệu trưởng Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội
6. Các thay đổi trong quá trình đào tạo (nếu có): Không
7. Tên đề tài luận án: **Bất biến modular của vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius**
8. Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
9. Mã số: 9640104
10. Cán bộ hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Lê Minh Hà
PGS.TS. Nguyễn Đặng Hồ Hải
11. Tóm tắt các kết quả mới của luận án:

Luận án tập trung nghiên cứu cấu trúc của các không gian bất biến trong vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của các nhóm con của nhóm tuyến tính tổng quát $GL_n(\mathbb{F}_q)$, trong đó trọng tâm là các nhóm Borel và các nhóm parabolic. Mục đích của luận án là xây dựng cơ sở tuyến tính và hệ sinh tường minh cho các không gian bất biến này, qua đó kiểm chứng các giả thuyết về cấu trúc và chuỗi Hilbert do Lewis-Reiner-Stanton đề xuất. Phương pháp nghiên cứu sử dụng bao gồm kỹ thuật của lý thuyết bất biến modular, các tính chất của toán tử Steenrod, phân tích cấu trúc parabolic, ánh xạ chuyển (transfer) cùng với việc khai thác các đặc trưng của hàm Schur và bất biến Dickson.

Các kết quả chính của luận án:

- (1) Xây dựng và phát triển toán tử δ như một biến thể của hàm Schur:

Luận án định nghĩa toán tử δ như một mở rộng tự nhiên của hàm Schur và thiết lập các tính chất cơ bản của nó. Cụ thể:

- Chứng minh công thức tổng quát cho các toán tử δ lặp;
- Mở rộng công thức này cho trường hợp tổng quát hơn.

Dựa trên các tính chất này, luận án xây dựng được cơ sở tuyến tính tường minh cho không gian bất biến của nhóm Borel $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$. Từ đó, chúng tôi chứng minh được giả thuyết của Lewis-Reiner-Stanton về chuỗi Hilbert của không gian trên.

- (2) Xây dựng và kiểm chứng các giả thuyết cho không gian bất biến của các nhóm parabolic và nhóm GL_n .

Luận án đưa ra hai giả thuyết về cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến: $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$ và $\mathcal{Q}_m(n)^{GL_n}$, dựa trên cơ sở đã xác định cho $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$. Các giả thuyết này được chứng minh là đúng hoàn toàn cho các hạng 2 và 3. Cụ thể:

- Với hạng 2, hai trường hợp xét đến là nhóm Borel và nhóm tổng quát GL_2 ;
- Với hạng 3, chúng tôi xử lý đầy đủ các nhóm parabolic: $P_{(2,1)}$, $P_{(1,2)}$, B_3 , GL_3

Kĩ thuật chính được sử dụng là ánh xạ chuyển để xây dựng hệ sinh và thu gọn chúng sao cho khớp với các dạng cho trước trong giả thuyết.

(3) Giả thuyết về lọc $\mathcal{F}_{n,k}$ và môđun trên đại số Dickson, đại số Steenrod.

Luận án phát biểu và chứng minh giả thuyết về cấu trúc lọc $\mathcal{F}_{n,k}$, chứng minh tính đúng đắn của nó với các hạng không vượt quá 3, và mô tả cấu trúc này như một môđun trên đại số Dickson và đại số Steenrod.

Kết quả này cho thấy sự tương tác sâu sắc giữa toán tử Steenrod, các bất biến Dickson và cấu trúc lọc của không gian bất biến.

Kết luận và ý nghĩa:

- Phát triển toán tử δ như công cụ mạnh để mô tả bất biến;
- Xây dựng cơ sở tuyến tính cho $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$ và chứng minh giả thuyết Hilbert của Lewis-Reiner-Stanton;
- Xác lập tính đúng đắn của các giả thuyết về $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$ và $\mathcal{Q}_m(n)^{GL_n}$ với hạng ≤ 3 ;
- Góp phần mô tả đầy đủ cấu trúc bất biến. Những kết quả này mở đường cho việc hiểu sâu hơn về lý thuyết bất biến trên trường hữu hạn, đặc biệt ở chiều cao hạng lớn hơn.

12. Các hướng nghiên cứu tiếp theo:

Từ các kết quả đạt được, luận án định hướng một số hướng phát triển mới như sau:

- Chứng minh giả thuyết của Lewis-Reiner-Stanton đúng với nhóm tuyến tính tổng quát.
- Mở rộng các giả thuyết và chứng minh cho các hạng lớn hơn $n \geq 4$ và hướng tới việc chứng minh tổng quát với hạng n bất kỳ.
- Chứng minh cấu trúc của lọc $\mathcal{F}_{n,k}$ cho trường hợp tổng quát và nghiên cứu tính môđun của nó trên đại số Steenrod và Dickson.
- Dựa trên kết quả về cơ sở tuyến tính của không gian bất biến đã biết, nghiên cứu và xác định không gian đối bất biến tương ứng.

13. Các công trình công bố liên quan đến luận án:

[1]. Lê Minh Hà, Nguyễn Đặng Hồ Hải, Nguyễn Văn Nghĩa (2024), "A proof of the Lewis-Reiner-Stanton conjecture for the Borel subgroup". Transactions of the American Mathematical Society vol 377, pp. 8221-8243.

[2]. Lê Minh Hà, Nguyễn Đặng Hồ Hải, Nguyễn Văn Nghĩa (2025), "On modular invariants of the truncated polynomial ring in low ranks", Journal of Algebra vol 683, pp. 319-354.

Hà Nội, ngày 26 tháng 12 năm 2025

TM. Tập thể hướng dẫn
(Ký và ghi rõ họ tên)

Nghiên cứu sinh
(Ký và ghi rõ họ tên)

PGS.TS. Lê Minh Hà

Nguyễn Văn Nghĩa

INFORMATION ON DOCTORAL THESIS

1. **Full name:** Nguyễn Văn Nghĩa
2. **Sex:** Male
3. **Date of birth:** 22/11/1984
4. **Place of birth:** Phú Thọ
5. **Admission decision number:** Decision No. 4599/QĐ-ĐHKHTN dated 20/12/2023 by the Rector of VNU University of Science
6. **Changes in academic process:** None
7. **Official thesis title:** Modular invariants of polynomial rings modulo Frobenius powers
8. **Major:** Algebra and Number Theory
9. **Code:** 9640104
10. **Supervisors:** **Assoc. Prof. Dr. Le Minh Ha**
 Assoc. Prof. Dr. Nguyen Dang Ho Hai
11. **Summary of the new findings of the thesis**

This dissertation investigates the structure of invariant spaces in the polynomial rings modulo Frobenius powers under the action of subgroups of the general linear group $GL_n(\mathbb{F}_q)$, with a primary focus on the Borel subgroup and parabolic subgroups. The aim is to construct explicit linear bases and generating sets for these invariant spaces and to verify a series of conjectures concerning their structure and Hilbert series proposed by Lewis-Reiner-Stanton. The methods include techniques from modular invariant theory, the algebra of Steenrod operations, parabolic subgroup analysis, transfer maps, and structural properties of Schur functions and Dickson invariants.

The main results of the thesis are as follows:

(1) Construction and development of the operator δ as a variant of the Schur function

The thesis defines the operator δ as a natural extension of the Schur function and establishes its fundamental properties. Specifically:

- A general formula for iterated δ -operators is proved;
- This formula is extended to more general settings.

Using these properties, an explicit linear basis of the invariant space $Q_m(n)^{B_n}$ under the action of the Borel subgroup B_n is constructed. From this, we prove the conjecture of Lewis-Reiner-Stanton on the Hilbert series of this invariant space.

(2) Construction and verification of conjectures for invariants of parabolic subgroups and GL_n

The thesis proposes two conjectures on linear bases for the invariant spaces $Q_m(n)^{P_\alpha}$ and $Q_m(n)^{GL_n}$, derived from the explicit basis already established for $Q_m(n)^{B_n}$. These conjectures are completely verified for ranks 2 and 3. Specifically:

- For rank 2, the only subgroups considered are the Borel subgroup and the general linear group GL_2 ;
- For rank 3, all parabolic subgroups are treated, including $P_{(2,1)}$, $P_{(1,2)}$, and the full general linear group GL_3 .

The main technique is the use of transfer maps to construct generating sets and reduce them so that they match the predicted forms in the conjectures.

(3) The conjecture on the filtration $\mathcal{F}_{n,k}$ and its structure as a module over the Dickson algebras, Steenrod algebras

The thesis formulates and proves the conjecture describing the filtration $\mathcal{F}_{n,k}$, showing its validity for all ranks up to 3, and describes this filtration as a module over the Dickson algebras and Steenrod algebras. These results reveal a deep interaction between Steenrod operations, Dickson invariants, and the filtered structure of invariant spaces.

Conclusion and significance

- Develops the operator δ into a powerful tool for describing modular invariants;
- Constructs an explicit linear basis for $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$ and proves the Hilbert-series conjecture of Lewis-Reiner-Stanton;
- Confirms the conjectures for $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$ and $\mathcal{Q}_m(n)^{GL_n}$ in ranks ≤ 3 ;
- Contributes to a more complete description of invariant theory over finite fields and opens directions for studying higher-rank cases.

12. Further research directions

Based on the obtained results, several directions for future work are proposed:

- Proving the Lewis-Reiner-Stanton conjecture for the full general linear group GL_n ;
- Extending the conjectures and their proofs to higher ranks and ultimately to arbitrary rank n ;
- Establishing the structure of the filtration $\mathcal{F}_{n,k}$ in general and investigating its module structure over the Dickson and Steenrod algebras;
- Using the known invariant bases to study and characterize the corresponding coinvariant spaces.

13. Thesis-related publications

[1]. Lê Minh Hà, Nguyễn Đặng Hồ Hải, Nguyễn Văn Nghĩa (2024), "A proof of the Lewis-Reiner-Stanton conjecture for the Borel subgroup". Transactions of the American Mathematical Society vol 377, pp. 8221-8243.

[2]. Lê Minh Hà, Nguyễn Đặng Hồ Hải, Nguyễn Văn Nghĩa (2025), "On modular invariants of the truncated polynomial ring in low ranks", Journal of Algebra vol 683, pp. 319-354.

Date, 26/12/2025

On behalf of academic supervisors
(Signature and full name)

PhD Student
(Signature and full name)

Assoc. Prof. Dr. Le Minh Ha

Nguyen Van Nghia