ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN VĂN NGHĨA

BẤT BIẾN MODULAR CỦA VÀNH ĐA THỨC MODULO LŨY THỪA FROBENIUS

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2026

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN VĂN NGHĨA

BẤT BIẾN MODULAR CỦA VÀNH ĐA THỨC MODULO LŨY THỪA FROBENIUS

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 9640104

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

PGS. TS. Lê Minh Hà

PGS. TS. Nguyễn Đặng Hồ Hải

XÁC NHẬN CỦA TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN	**TM. TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG DẪN**
	PGS.TS. Lê Minh Hà

HÀ NỘI - 2026

Mục lục

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận án là công trình nghiên cứu của riêng tôi, được thực hiện dưới sự hướng dẫn của tập thể giảng viên hướng dẫn. Các số liệu và kết quả trình bày trong luận án là trung thực. Những phần kết quả có liên quan đến các công trình đồng tác giả đã được sử dụng trung thực, có trích dẫn đầy đủ, và đã nhận được sự đồng thuận của các đồng tác giả trước khi đưa vào luận án. Tôi chịu trách nhiệm về tính chính xác và trung thực của toàn bộ nội dung luận án.

Hà Nội, ngày 24 tháng 02 năm 2026

Tác giả

Nguyễn Văn Nghĩa

Danh mục ký hiệu và viết tắt

Ký hiệu	**Giải thích**
$\mathbb{F}_q$	Trường hữu hạn với q phần tử, q là lũy thừa của một số nguyên tố p.
$S = \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$	Vành đa thức n ẩn có hệ số thuộc trường $\mathbb{F}_q$.
I_m	Ideal của vành $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ sinh bởi $\{x_1^{q^m}, x_2^{q^m}, \ldots, x_n^{q^m}\}$.
$\mathcal{Q}_m(n)$	Vành thương $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]/I_m$.
$Q_{k,i}, 0 \leq i \leq k-1$	Đa thức Dickson hạng k thứ i.
$V_i = V_i(x_1, \ldots, x_i)$ $= V(x_1, \ldots, x_i)$	Bất biến Mùi thứ i.
$\mathcal{D}_n = \mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}]$	Đại số Dickson hạng n.
$\mathbb{F}_q \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$	Không gian véctơ có cơ sở $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ trên trường $\mathbb{F}_q$.
$\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$	Nhóm tuyến tính tổng quát n chiều có hệ số trên trường $\mathbb{F}_q$.
P_α	Nhóm con Parabolic của nhóm tuyến tính tổng quát GL_n.
B_n	Nhóm con Borel của nhóm tuyến tính tổng quát GL_n.
$S^{\mathrm{GL}_n}, S^{\mathrm{P}_\alpha}, S^{\mathrm{B}_n}$	Không gian các đa thức của S bất biến dưới tác động

Ký hiệu	**Giải thích**
	của các nhóm $\mathrm{GL}_n, \mathrm{P}_\alpha, \mathrm{B}_n$.
$\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}, \mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$, $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$	Không gian các đa thức của $\mathcal{Q}_m(n)$ bất biến dưới tác động của các nhóm $\mathrm{GL}_n, \mathrm{P}_\alpha, \mathrm{B}_n$.
$\mathcal{B}_m(\alpha)$	Một $\mathbb{F}_q$-cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$.
$\mathcal{B}_m(1^n)$	Một $\mathbb{F}_q$-cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$.
$\mathcal{B}_m(n)$	Một $\mathbb{F}_q$-cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$.
$\mathcal{B}_m(2,1)$	Một $\mathbb{F}_q$-cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{P}_{(2,1)}}$.
$\mathcal{B}_m(1,2)$	Một $\mathbb{F}_q$-cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{P}_{(1,2)}}$.

MỞ ĐẦU

Lý thuyết bất biến nghiên cứu tác động của nhóm, các điểm bất động và các quỹ đạo. Thông thường, nhóm tác động trên các không gian véctơ (phân bậc), hoặc các đại số trên một trường. Đây là một trong những lĩnh vực nghiên cứu trung tâm của đại số, với liên hệ và ứng dụng trong nhiều nhánh nghiên cứu khác của toán học như tổ hợp, lý thuyết nhóm, đối đồng điều của nhóm, tô pô đại số và lý thuyết biểu diễn.

Đối tượng nghiên cứu cổ điển và quan trọng nhất là tác động tuyến tính của các nhóm hữu hạn trên vành đa thức. Ký hiệu V là một không gian véctơ n chiều trên trường k, và $(x_1, \ldots, x_n)$ là một cơ sở của V. Ký hiệu $\mathrm{GL}(V)$ là nhóm các tự đẳng cấu tuyến tính của V. Ta có thể đồng nhất $\mathrm{GL}(V)$ với nhóm nhân các ma trận khả nghịch cấp n với hệ số trong k. Ký hiệu S là đại số đa thức theo các biến $x_1, \ldots, x_n$ với hệ số trong k,

$$S = k[x_1, \ldots, x_n].$$

Tác động của một tự đồng cấu $\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ trên V mở rộng một cách duy nhất thành một tự đẳng cấu đại số của S bởi công thức

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) = f(\sigma x_1, \ldots, \sigma x_n),$$

ở đó $\sigma x_j = \sum \sigma_{i,j} x_i$. Ta cần tìm tất cả các đa thức $f \in S$ sao cho $\sigma f = f$ với mọi σ thuộc một nhóm con hữu hạn G nào đó của $\mathrm{GL}(V)$.

Một ví dụ quen thuộc là các bất biến của nhóm đối xứng Σ_n, tác động theo cách thông thường như là nhóm hoán vị các biến $x_1, \ldots, x_n$. Các đa thức bất biến đó thường được gọi là các đa thức đối xứng. Một kết quả cơ bản của đại số là tập hợp tất cả các đa thức đối xứng lập thành một đại số con của đại số đa thức, hơn nữa, nó cũng là một vành đa thức:

$$k[x_1, \ldots, x_n]^{\Sigma_n} = k[e_1, \ldots, e_n].$$

ở đó e_i là các đa thức đối xứng sơ cấp. Đa thức đối xứng là các đối tượng toán học quen thuộc trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học.

Tổng quát hơn, nếu G là một nhóm hữu hạn, và M là một $k[G]$-môđun, chúng ta quan tâm đến bài toán xác định không gian con các bất biến

$$M^G = \{m \in M \colon gm = m, \quad \forall g \in G\}$$

hay nói cách khác đối đồng điều bậc 0, $H^0(G; M)$, của G với hệ số trong M và đối ngẫu của nó là không gian đối cố định[1]

$$H_0(G; M) = M_G = M/\langle gm - m \colon g \in G, m \in M\rangle.$$

Trong một số tài liệu, M_G còn được gọi là không gian đối bất biến. Tuy nhiên, trong lý thuyết bất biến cũng như lý thuyết biểu diễn, có sự khác biệt lớn giữa trường hợp đặc số của trường chia hết (modular) hay không chia hết (non-modular) cấp của nhóm. Trong trường hợp non-modular, đặc số của trường k bằng 0, hoặc nguyên tố cùng nhau với cấp của nhóm. Khi đó, gần như toàn bộ lý thuyết trở nên tương tự như trên trường số phức. Từ quan điểm ứng dụng trong tô pô đại số, và đối đồng điều của nhóm, lý thuyết bất biến modular có vai trò quan trọng hơn. Trong thực tế thì nhiều vấn đề trong trường hợp modular khó và thú vị hơn và là chủ đề của các nghiên cứu thời sự.

Trong Luận án này, chúng tôi sẽ chỉ quan tâm tới tác động nhóm hữu

[1] Cofixed space

hạn trên các không gian véctơ phân bậc trên trường hữu hạn có q phần tử, ký hiệu là $\mathbb{F}_q$, ở đó q là luỹ thừa của đặc số p là một số nguyên tố nào đó.

Đối với các vành giao hoán trên trường $\mathbb{F}_q$, ánh xạ lấy luỹ thừa q, thường được biết đến dưới tên gọi đồng cấu Frobenius, đóng vai trò vô cùng quan trọng. Người ta thường tìm các cách thức khác nhau để khai thác sự tồn tại của đồng cấu Frobenius. Một trong những kỹ thuật đó là toán tử Steenrod $\mathcal{P}^i$, $i \geq 0$, và đại số Steenrod $\mathcal{A}$. Mặc dù có nguồn gốc từ tô pô đại số, với vai trò là các toán tử đối đồng điều của các không gian tô pô, đại số Steenrod có thể được xây dựng một cách hoàn toàn đại số. Các không gian bất biến thường sẽ có cấu trúc của một môđun trên đại số Steenrod, và vì thế việc sử dụng các hiểu biết về đại số Steenrod trong lý thuyết bất biến modular trở nên hoàn toàn tự nhiên. Hướng nghiên cứu về các cấu trúc của vành bất biến xem như môđun trên đại số Steenrod đã được nghiên cứu rộng rãi. Các tài liệu tham khảo tiêu biểu là các công trình của Boardman [4], Meyer và Smith [21], cũng như của Walker và Wood [36], [37], cùng các tài liệu tham khảo liên quan.

Đại số Dickson, Đại số Mùi

Một trong những kết quả nền tảng trong lý thuyết bất biến modular là công trình của Dickson [7] từ năm 1911, xác định tường minh cấu trúc của vành bất biến của vành đa thức n biến trên trường $\mathbb{F}_q$ dưới tác động của nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

$$\mathcal{D}_n = \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)} = \mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}].$$

Các đa thức $Q_{n,i}$, $0 \leq i \leq n-1$, được gọi là các bất biến Dickson. Một phần tử của đại số Dickson $\mathcal{D}_n$ được gọi là các đa thức Dickson. Với mọi nhóm con G của $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, ta có một phép nhúng tự nhiên $S^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)} \subseteq S^G$. Vì vậy, các đa thức Dickson luôn nằm trong các vành bất biến, và các vành bất biến là các mở rộng hữu hạn của Đại số Dickson. Vì tính chất phổ quát này, đại số Dickson có tầm quan trọng đặc biệt trong lý thuyết bất biến modular.

Khi $G = U_n$ là p-nhóm con Sylow của $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, chúng ta có kết quả tương tự bởi Huỳnh Mùi năm 1975 [24]:

$$\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]^{U_n} = \mathbb{F}_q[V_1, \ldots, V_n].$$

Các bất biến Mùi V_i, $0 \leq i \leq n$, giữ vai trò quan trọng tương tự như bất biến Dickson, đặc biệt là khi khảo sát các p-nhóm.

Các vành bất biến cho các nhóm con parabolic của nhóm tuyến tính tổng quát GL_n cũng đã được xác định hoàn toàn qua các công trình của Hewitt [14], Kuhn - Mitchell [18], Phạm Anh Minh và Võ Thanh Tùng [22].

Sau các công trình của Quillen, Mùi, Madsen và Milgram, Wilkerson và nhiều cộng sự, Đại số Dickson, đại số Mùi đã trở thành một công cụ quan trọng trong tô pô đại số, đặc biệt là trong lý thuyết về toán tử đối đồng điều và đối đồng điều của nhóm.

Vành đa thức modulo luỹ thừa Frobenius

Với mỗi số nguyên dương m, ký hiệu I_m là iđêan của vành đa thức S trên trường $\mathbb{F}_q$ sinh bởi các luỹ thừa Frobenius thứ m, $I_m = (x_1^{q^m}, \ldots, x_n^{q^m})$. Đặt $\mathcal{Q}_m(n)$ là vành thương

$$\mathcal{Q}_m(n) = S/I_m.$$

Do I_m ổn định dưới tác động của $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, vành thương $\mathcal{Q}_m(n)$ có tác động cảm sinh của GL_n. Cấu trúc GL_n-môđun của $\mathcal{Q}_m(n)$, và đặc biệt là không gian GL_n-bất biến của nó là đối tượng nghiên cứu chính của luận án này.

Các nghiên cứu của Kuhn [17] về Morava K-lý thuyết của không gian phân loại cũng như của Boardman [4] và Kameko [15] về bài toán tìm hệ sinh tối tiểu của vành đa thức xem như môđun trên đại số Steenrod cho thấy cấu trúc môđun trên nhóm tuyến tính tổng quát và/hoặc trên đại số Steenrod của vành đa thức modulo luỹ thừa Frobenius cần được nghiên cứu một cách kỹ lưỡng hơn.

Từ cách xây dựng, ta thấy $\mathcal{Q}_m(n)$ là một đại số hữu hạn chiều. Ở bậc cao nhất $n(q^m-1)$, ta có một không gian véctơ một chiều, sinh bởi đơn thức

$$x_1^{q^m-1}\cdots x_n^{q^m-1},$$

với tác động tầm thường của GL_n. Ta có thể định nghĩa một dạng song tuyến tính không suy biến trên $\mathcal{Q}_m(n)$ bởi công thức

$$(f,g)=\begin{cases} fg, & \text{nếu } \deg(fg)=n(q^m-1),\\ 0, & \text{trong các trường hợp khác.}\end{cases}$$

Vì vậy, tồn tại một đẳng cấu giữa các không gian véctơ

$$\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}\cong \mathcal{Q}_m(n)_{\mathrm{GL}_n}.$$

Do đối ngẫu Poincare, thông tin về không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)_n^{\mathrm{GL}}$ sẽ cho thông tin về không gian đối cố định $\mathcal{Q}_m(n)_{\mathrm{GL}_n}$, và khi cho m đến vô cùng, ta thu được thông tin về không gian đối cố định S_{GL_n} của vành đa thức. Một điều đáng ngạc nhiên là trong khi không gian bất biến S^{GL_n}, hay còn gọi là đại số Dickson, đã được xác định hoàn toàn từ năm đầu thế kỷ 20, trong khi đó gần như không có hiểu biết nào về S_{GL_n} cho đến các công trình của Lewis-Reiner và Stanton [19].

Vành đa thức modulo Frobenius cũng cho thông tin về đại số đối bất biến[2]. Nhắc lại rằng nếu $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, vành đối bất biến của GL_n là vành thương của đại số đa thức S bởi iđêan sinh bởi các đa thức bất biến S^{GL_n} không chứa

[2]coinvariant algebra

hằng (tức là không chứa các thành phần bậc 0).

$$S \otimes_{S^{\mathrm{GL}_n}} k = S/(S_+^{\mathrm{GL}_n}),$$

ở đó k được hiểu là S^{GL_n}-môđun tầm thường. Lưu ý rằng S_{GL_n} vẫn còn tác động cảm sinh của GL_n. Chevalley, dựa trên các nghiên cứu trước đó của Shephard và Todd phân loại các nhóm phản xạ phức chứng minh rằng khi $k = \mathbb{C}$ là trường số phức, đại số đối bất biến S_{GL_n} đẳng cấu với biểu diễn chính quy $\mathbb{C}[\mathrm{GL}_n]$, xem như là GL_n-môđun [16]. Điều thú vị là đẳng cấu này giúp tạo nên một phân bậc cho biểu diễn chính quy, và nhiều nghiên cứu sâu sắc về liên hệ giữa phân bậc này và các biểu diễn bất khả quy của GL_n.

Trong trường hợp modular, Mitchell [23] chứng minh rằng đại số đối bất biến và biểu diễn chính quy đẳng cấu Brauer với nhau, hay nói cách khác là có cùng các thành phần hợp thành thương (composition factors). Trong trường hợp này, chúng ta hầu như không có thông tin gì về mối liên hệ giữa các biểu diễn bất khả quy và các phân bậc cảm sinh từ đẳng cấu trên.

Mặt khác, từ phương trình cơ bản

$$X^{q^n} - X^{q^{n-1}} Q_{n,n-1} + \cdots + (-1)^n X^{q^0} Q_{n,0} = 0,$$

với mọi X thuộc không gian con được sinh bởi $x_1, \ldots, x_n$, ta kết luận rằng iđêan Frobenius $(x_1^{q^n}, \ldots, x_n^{q^n})$ nằm trong iđêan sinh bởi các $Q_{n,i}$, hay nói cách khác là $(S_+^{\mathrm{GL}_n})$. Từ đó, chúng ta có một toàn cấu chính tắc của các GL_n-môđun

$$\mathcal{Q}_n(n) = S/(x_1^{q^n}, \ldots, x_n^{q^n}) \longmapsto S/(S_+^G).$$

Đối tượng nghiên cứu chính của luận án là vành $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ và các nhóm con parabolic. Trong công trình sâu sắc [19], Lewis, Reiner và Stanton đã đưa ra một loạt các giả thuyết về chuỗi Hilbert của các vành bất biến nói trên của vành đa thức modulo lũy thừa

Frobenius, và các hệ quả. Đây là kết qủa của một chuỗi các công trình nghiên cứu từ hơn 20 năm nay về hiện tượng sàng xyclic[3] trong đại số tổ hợp và các q-phiên bản của Reiner, Stanton và các cộng sự. Trong đó, vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius đóng vai trò như là một phiên bản tương tự của không gian q-W Fuss Catalan, $\mathrm{Cat}^{(m)}(W, q)$ khi nhóm phản xạ hữu hạn W được thay thế bởi nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu chi tiết hơn về nghiên cứu của Lewis, Reiner, Stanton và các cộng sự, nhằm cung cấp một bức tranh tương đối khái quát về nguồn gốc dẫn đến phát biểu của loạt giả thuyết về chuỗi Hilbert của các vành bất biến $\mathcal{Q}_m(n)$. Đây là một hướng nghiên cứu thời sự trong tổ hợp đại số[4], có nhiều liên hệ sâu sắc với lý thuyết biểu diễn, lý thuyết nút,... và cho đến nay vẫn còn nhiều vấn đề mở chưa được giải quyết. Phần giới thiệu dưới đây độc lập với các kết quả của các chương sau.

Hiện tượng sàng xyclic (CSP)

Phiên bản q

Một phiên bản q[5] của một định lý hay công thức là một tổng quát hóa của kết quả đó với sự xuất hiện của một tham số mới, tham số q, và khi cho q tiến đến 1 thì ta thu lại được kết quả ban đầu. Trong đại số và tổ hợp, phiên bản q xuất hiện một cách tự nhiên khi ta làm việc trên trường hữu hạn có q phần tử và với các tập hợp có tác động của nhóm $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ (ở đây q phải là luỹ thừa của một số nguyên tố nhưng hàm biến q xây dựng được sẽ được định nghĩa với q tuỳ ý.) Trong trường hợp này, khi cho q tiến đến 1, nhóm $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ được coi là suy biến thành nhóm đối xứng Σ_n của n phần tử. Từ năm 1956, nhà toán học Pháp Jacques Tits [35] đã đưa ra một hình ảnh gợi ý về sự tồn tại của cái gọi là

[3]cyclic sieving phenomena - CSP
[4]algebraic combinatorics
[5]q-analogue

trường có 1 *phần tử* để mô tả sự kiện này. Theo ông, tổ hợp của các tập hợp và tập con cũng giống như hình học của các không gian véctơ và không gian con. Tổ hợp là trường hợp $q = 1$ của hình học! Đã có nhiều kết quả trong tổ hợp và lý thuyết biểu diễn cho thấy hình ảnh này hoàn toàn không hề chỉ có tính chất tượng trưng.

Hiện tượng sàng xyclic - CSP

Năm 2004, Reiner, Stanton và White [29] đã giới thiệu một khái niệm gọi là *hiện tượng sàng xyclic*[6], nhằm mô tả các đối xứng của một tập hợp hữu hạn dưới tác động của nhóm xyclic, trong đó tác động của nhóm được mã hóa thông qua một hàm sinh liên kết với tập hữu hạn đã cho. Từ một vài ví dụ mở đầu, đã có ngày càng nhiều ví dụ về hiện tượng này được phát hiện trong nhiều bối cảnh khác nhau, thể hiện sự gắn kết sâu sắc với nhiều đối tượng tổ hợp khác và với lý thuyết biểu diễn.

Giả sử X là một tập hợp hữu hạn với tác động của một nhóm xyclic C cấp n nào đó. Có thể xem C như là một nhóm con của nhóm nhân các số phức khác không $\mathbb{C}^\times$ qua một ánh xạ nhúng ω từ C vào nhóm nhân các căn bậc n của đơn vị. Giả sử tồn tại một đa thức $X(q)$, biến q, với hệ số nguyên không âm sao cho với mọi $c \in C$, giá trị của đa thức $X(q)$ tại $q = \omega(c)$ đếm số phần tử của tập hợp các điểm bất động của X dưới tác động của c:

$$[X(q)]_{q=\omega(c)} = |\{x \in X : c(x) = x\}| = |X^c|. \tag{1}$$

Nói riêng, $X(1)$ chính là lực lượng của tập hợp X. Một bộ ba $(X, X(q), C)$ các dữ liệu như trên được gọi là có *biểu hiện CSP*. Hàm $X(q)$ thông thường sẽ có thêm một số tính chất bổ sung, ẩn chứa thông tin về một họ các đối tượng tổ hợp gắn kết với nhau mà tập hợp X ban đầu chỉ là một thành phần. Hàm

[6] Cyclic Sieving Phenomenon - CSP

sinh $X(q)$ được định nghĩa với mọi q, và sẽ trở nên có nghĩa về mặt tổ hợp khi q là một luỹ thừa của một số nguyên tố, khi đó $X(q)$ đếm số phần tử của một đối tượng tổ hợp nào đó được xác định trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$. Điểm thú vị và khá bất ngờ là đa thức hệ số nguyên không âm $X(q)$ không chỉ nhận giá trị nguyên dương mà còn cũng có ý nghĩa tổ hợp khi q là một căn của đơn vị.

Một số tính chất tiêu biểu của hàm $X(q)$ thường gặp là:

1. $X(q)$ khi khai triển theo q có dạng $\sum_{x\in X} q^{\mathrm{st}(x)}$, ở đó $\mathrm{st}\colon X \to \mathbb{N}$ là một ánh xạ thú vị nào đó của tập hợp X.

2. $X(q)$ thường có thêm công thức tích đơn giản, làm cho nó có thể tính toán được dễ dàng.

3. $X(q) = \sum_{i\geq 0} \dim(R_i)q^i = \mathrm{Hilb}(R, q)$ là chuỗi Hilbert của một đại số phân bậc R nào đó trên trường $\mathbb{F}$, $R = \oplus R_i$ gắn kết với X và có cấu trúc tổ hợp - đại số có ý nghĩa.

Sau đây là một ví dụ đơn giản, nhưng như chúng ta sẽ thấy, là khởi đầu của một hành trình với nhiều ý tưởng và kết quả sâu sắc.

Ví dụ 0.0.1. Xét X là tập hợp tất cả các tập con gồm k phần tử của tập hợp $[N] = \{1, 2, \dots, N\}$. Ta nói nhóm xyclic C cấp n tác đồng *gần tự do* trên $[N]$ nếu như nó được sinh bởi một phần tử $c \in \Sigma_N$ có kiểu xích gồm một trong hai dạng sau

- Một xích độ dài n, ở đó $N = an$, C tác động tự do trên $[N]$, và
- Một xích độ dài n và một tập gồm chỉ một phần tử, $N = an + 1$.

Ở đó a là một số nguyên dương nào đó. Đặt $X(q)$ là q-hệ số nhị thức

$$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[N]_q}{[k]_q \cdot [N-k]_q} = \frac{(1-q^{N-k+1})(1-q^{N-k+2})\dots(1-q^N)}{(1-q^1)\dots(1-q^k)}.$$

Khi đó bộ ba $(X, X(q), C)$ có biểu hiện CSP.

Khi q là luỹ thừa của một số nguyên tố, q-hệ số nhị thức ở trên có một ý nghĩa tổ hợp cụ thể: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ đếm số các không gian con k-chiều của một không gian véctơ n chiều trên trường $\mathbb{F}_q$. Ngoài ra, có thể chứng minh rằng

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{K \subset [n]} q^{K - \binom{k-1}{2}},$$

ở đó tổng chạy trên tất cả các tập con K gồm k phần tử của $[n]$, và ta cũng dùng để chỉ tổng các số thuộc K. Trên trường $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, có thể chọn đại số phân bậc R chính là vành thương của vành bất biến $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{\Sigma_k \times \Sigma_{n-k}}$ dưới tác động của nhóm con Young $\Sigma_k \times \Sigma_{n-k} \subset \Sigma_n$ bởi iđêan sinh bởi các phần tử bậc dương của vành đối xứng $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{\Sigma_n}$.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ thấy ví dụ mở đầu này được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau và là khởi đầu của một chuỗi các công trình nghiên cứu sâu sắc trong tổ hợp và đại số.

Liên hệ với lý thuyết biểu diễn

Ví dụ trên có thể được kiểm chứng một cách trực tiếp, dùng các công cụ sơ cấp. Tuy nhiên nó khá lắt nhắt và không giải thích được rõ ràng bản chất. Có một cách thức khác để chứng minh CSP qua công cụ của lý thuyết biểu diễn, chúng ta sẽ tóm tắt lại ở đây.

Giả sử X là một tập hợp, được trang bị một tác động của nhóm xyclic C. Khi đó $\mathbb{C}X$ - không gian véctơ nhận X làm một cơ sở, là một C-môđun hoán vị, với hàm đặc trưng χ thoả mãn

$$\chi(c) = |X^c|, \quad c \in C.$$

Bây giờ xét hàm sinh $X(q)$ và giả sử $X(q) = \sum_{i=0}^{\ell} a_i q^i$, a_i là các số tự nhiên. Nếu tồn tại một cơ sở khác cho $\mathbb{C}X$ sao cho tác động của $c \in C$ chéo hoá được và các phần tử trên đường chéo của ma trận biểu diễn có dạng

$$1, \ldots, 1, \omega(c), \ldots, \omega(c), \ldots, \omega(c)^{\ell}, \ldots, \omega(c)^{\ell}$$

ở đó $\omega(c)^i$ xuất hiện đúng a_i lần. Khi đó ta cũng có

$$\chi(c) = \sum_{0}^{\ell} a_i \omega(c)^i = X(\omega(c)),$$

và ta thu được phương trình (1). Như vậy sàng xyclic được quy về vấn đề đổi cơ sở của một C-môđun.

Điều kiện c chéo hoá được thực ra không phải là một điều kiện quá chặt chẽ. Trên trường số phức, nhóm xyclic C có n biểu diễn bất khả qui, ký hiệu lần lượt là $V^{(i)}$, $0 \leq i \leq n-1$. Tác động của một phần tử sinh c lên $V^{(i)}$ là phép nhân với $\omega(c)^i$. Do đó, nếu tồn tại đẳng cấu giữa các C-môđun $\mathbb{C}X \cong \oplus a_i V^{(i)}$, ta sẽ có ngay CSP.

Nhóm phản xạ

Trong ví dụ mở đầu, ta làm việc với nhóm đối xứng. Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của tổ hợp và đại số là mở rộng các kết quả từ nhóm đối xứng cho các nhóm phản xạ khác, đặc biệt là các nhóm phản xạ thực (nhóm Coxeter), hay các nhóm phản xạ phức. Bên cạnh việc có thêm những ví dụ mới về hiện tượng CSP, việc tổng quát hóa cũng giúp hiểu rõ hơn các nhóm con xyclic nào có thể tạo nên CSP.

Sau đây, các nhóm được xét đều là các nhóm hữu hạn, trừ khi được lưu ý khác.

Nhóm Coxeter

Các nhóm Coxeter, trong đó có nhóm đối xứng, là các nhóm đối xứng của các đa diện đều, đồng thời là các nhóm Weyl của các đại số Lie đơn. Chúng xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau trong toán học. Trong luận án này, để đơn giản hóa trình bày, chúng tôi sẽ chỉ xét các nhóm Coxeter hữu hạn.

Định nghĩa 0.0.2. Một nhóm Coxeter (hữu hạn) W là một nhóm hữu hạn được xác định bởi một tập hợp các phần tử sinh $\mathcal{S} \subseteq W$ và các quan hệ có dạng

$$(ss')^{m(s,s')} = e, \quad s, s' \in \mathcal{S}.$$

ở đó e là phần tử đơn vị, các số nguyên dương $m(s, s')$ là cấp của ss', thoả mãn

- $m(s, s') = m(s', s)$;
- $m(s, s') = 1$ nếu và chỉ nếu $s = s'$.

Cũng có thể định nghĩa các nhóm Coxeter một cách hình học, và các nhóm Coxeter hữu hạn chính là các nhóm phản xạ thực hữu hạn.

Thông thường, ta có sẵn một danh sách các phần tử sinh $\mathcal{S}$, và gọi $(W, \mathcal{S})$ là một *hệ Coxeter*. Lưu ý rằng $m(s, s) = 1$ nên $s^2 = e$ với mọi $s \in \mathcal{S}$. Do đó, ta có thể viết lại công thức $(ss')^{m(s,s')} = e$ dưới dạng đối xứng

$$ss'ss' \ldots = s'ss's \ldots,$$

ở đó mỗi vế có đúng $m(s, s')$ lần xuất hiện của s hay s'.

Ví dụ 0.0.3. Ví dụ phổ biến nhất và quan trọng nhất về nhóm coxeter là nhóm đối xứng Σ_n. Ở đây tập hợp $\mathcal{S} = (s_1, \ldots, s_{n-1})$ gồm các phép hoán vị sơ cấp $s_i = (i, i+1)$. Các quan hệ Coxeter có dạng

- $s_i^2 = 1$,

- $s_i s_j = s_j s_i$, nếu $|i-j| > 2$,

- $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Một nhóm Coxeter được gọi là bất khả qui nếu nó không viết được thành tích của hai nhóm Coxeter không tầm thường. Các nhóm Coxeter hữu hạn bất khả quy đã được phân loại hoàn toàn bởi Coxeter.

Hạng của W là số phần tử sinh nhỏ nhất trong một hệ sinh của nó, và nếu hệ sinh R có hạng nhỏ nhất thì các phần tử của nó được gọi là *đơn*.

Trên các nhóm Coxeter, tồn tại một hàm đóng vai trò quan trọng, và cũng được sử dụng để xây dựng các ví dụ về CSP. Ta biết mỗi một từ $w \in W$ viết được dưới dạng một tích của các phần tử sinh trong $\mathcal{S}$. Nếu tích này có độ dài ℓ nhỏ nhất có thể thì nó được gọi là *rút gọn*, và ℓ được gọi là độ dài của w, viết là $\ell(w) = \ell$.

Bây giờ giả sử $(W, \mathcal{S})$ là một hệ Coxeter, và $J \subset \mathcal{S}$ là một tập con nào đó. Ký hiệu W_J là nhóm con parabolic tương ứng - tức là nhóm con của W sinh bởi J. Có thể chứng minh được rằng mỗi lớp kề wW_J có (duy nhất) một đại diện với độ dài nhỏ nhất. Ký hiệu W^J là tập hợp các đại diện các lớp kề này, và đặt

$$W^J(q) = \sum_{w \in W^J} q^{\ell(w)}.$$

Ví dụ nếu $W = \Sigma_n$, $J = \mathcal{S} - \{s_k\}$ với $1 \leq k \leq n-1$ nào đó. Khi đó

$$(\Sigma_n)_J \cong \Sigma_k \times \Sigma_{n-k},$$

và có thể chứng minh được

$$W^J(q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Nếu $k = 0$ hay $k = n$ thì $J = S$. Như vậy ta đã thấy bóng dáng của một bộ ba có biểu hiện CSP: Tập hợp hữu hạn X là tập các lớp kề W/W_J với lực lượng đúng bằng $\binom{n}{k}$ và hàm sinh tương ứng chính là $W^J(q)$. Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ giải thích những nhóm xyclic C nào có thể tạo nên bộ ba $(W/W_J, C, W^J(q))$ có biểu hiện CSP. Ta cũng sẽ mở rộng họ các nhóm từ nhóm phản xạ thực hữu hạn (nhóm Coxeter) sang các nhóm phản xạ phức hữu hạn.

Nhóm phản xạ phức và phần tử chính quy của Springer

Một phần tử của nhóm $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ được gọi là một phép *phản xạ* nếu nó có cấp hữu hạn và không gian bất biến trong $\mathbb{C}^n$ có đối chiều bằng 1. Không gian con đó được gọi là *siêu phẳng phản xạ*. Một *nhóm phản xạ* là một nhóm con W của $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sinh bởi các phép phản xạ. Mọi phép phản xạ thực đều có thể được xem là một phản xạ phức sau khi mở rộng trường. Tuy nhiên trường hợp phản xạ phức tổng quát hơn vì đối với phản xạ thực ta yêu cầu một phép phản xạ phải có cấp bằng 2. Các nhóm phản xạ phức hữu hạn, bất khả qui đã được phân loại hoàn toàn bởi Shephard và Todd [16].

Một phần tử g của một nhóm phản xạ phức hữu hạn W được gọi là *chính quy*[7] nếu nó có một véctơ riêng không nằm trong bất cứ một siêu phẳng phản xạ nào của W. Một giá trị riêng tương ứng với véctơ riêng này cũng được gọi là *chính quy*.

Ký hiệu A là đại số đối bất biến $S/(S_+^W)$, ở đó $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Cho c là một phần tử chính quy cấp n, ký hiệu C là nhóm xyclic sinh bởi c, gọi $\omega = \omega(c) \in \mathbb{C}^\times$ là một căn nguyên thuỷ bậc n của 1. Ta sẽ trang bị cho A một tác động của nhóm $W \times C$ như sau:

- W tác động trên A theo cách thông thường, cảm sinh từ S.
- C tác động bằng cách đặt $c(x_i) = \omega x_i$.

$W \times C$ cũng tác động lên vành nhóm $\mathbb{C}[W]$, ở đó W tác động bên trái, và C tác động bên phải.

[7] regular

Ta có định lý sau đây của Springer [33].

Định lý 0.0.4. *Cho W là một nhóm phản xạ phức hữu hạn, A là đại số đối bất biến của W, C là nhóm con xyclic của W sinh bởi một phần tử chính quy. Khi đó A và vành nhóm $\mathbb{C}[W]$ đẳng cấu với nhau, xem như là $W \times C$-môđun.*

Reiner, Stanton và White [29] chứng minh rằng

Định lý 0.0.5. *Cho W là một nhóm phản xạ phức hữu hạn, A là đại số đối bất biến của W, C là nhóm con xyclic của W sinh bởi một phần tử chính quy $c \in C$. Giả sử W' là một nhóm con của W, và xét đại số bất biến $A^{W'}$. Khi đó bộ ba*

$$(W/W', C.\mathrm{Hilb}(A^{W'}; q))$$

có biểu hiện CSP.

Nói riêng, trong trường hợp W là một nhóm Coxeter, W' là một nhóm con parabolic, ta có thể chứng minh rằng $W^J = \mathrm{Hilb}(A^{W_J}; q)$.

Định lý 0.0.6. *Cho (W,S) là một hệ Coxeter hữu hạn, $J \subseteq S$. C là một nhóm con xyclic của W sinh bởi một phần tử chính quy. Khi đó bộ ba*

$$(W/W_J, C, W^J(q))$$

có biểu hiện CSP.

Trong trường hợp W có kiểu A_{N-1}, tức là nhóm đối xứng, ta có

Bổ đề 0.0.7. *Giả sử W có kiểu A_{N-1}, khi đó $g \in W$ là chính quy nếu và chỉ nếu nó tác động gần tự do trên $[N]$.*

Ta thu lại được ví dụ mở đầu về CSP.

Nhóm phản xạ tổng quát

Ta có thể định nghĩa khái niệm nhóm phản xạ hữu hạn trên một trường bất kỳ, và có thể tìm kiếm mở rộng tương tự cho trường hợp tổng quát này.

Cả hai ví dụ trên đều đã được tổng quát hóa cho trường hợp các nhóm phản xạ hữu hạn truyền thống như các nhóm Coxeter. Hàm $\mathrm{Cat}(W, q)$ được xây dựng ứng với mỗi nhóm phản xạ hữu hạn quen thuộc như các nhóm Coxeter, và cũng có ý nghĩa tổ hợp thú vị. Trong trường hợp W là nhóm đối xứng Σ_n, ta thu được hàm q-Catalan như ở trên.

Các nhóm phản xạ có thể được định nghĩa một cách tổng quát hơn như sau. Một nhóm phản xạ là một nhóm con hữu hạn W của nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}(V)$ các tự đẳng cấu của một không gian véctơ n chiều V trên trường $\mathbb{F}$ nào đó sao cho tác động cảm sinh của W trên đại số đối xứng $S = S(V^*)$ có vành bất biến S^W là một đại số đa thức

$$S^W = \mathbb{F}[f_1, \ldots, f_n].$$

Các đa thức thuần nhất f_i thường được sắp xếp theo thứ tự bậc tăng dần $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$. Bậc cực đại d_n trong trường hợp nhóm Coxeter có ý nghĩa quan trọng, thường được gọi là *số Coxeter* của W, và ký hiệu là h.

Nói chung, vành bất biến S^W không phải là một đại số đa thức con của S. Tuy nhiên, theo một kết quả cổ điển của Noether, S là một mở rộng nguyên của S^W, và do đó S là một S^W-môđun hữu hạn sinh. Do đó, S^W là một $\mathbb{F}$-đại số hữu hạn sinh, với ít nhất n phần tử sinh.

Định nghĩa về nhóm phản xạ ở trên (không có bóng dáng của chữ *phản xạ*!) bắt nguồn từ một kết quả nổi tiếng của Serre năm 1967 [30] chứng minh rằng đối với một nhóm hữu hạn $W \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, nếu S^W là một đa thức thì W được sinh bởi các phép phản xạ. Ở đây, một phép phản xạ là một tự đẳng cấu $r\colon V \to V$ sao cho không gian bất biến V^r là một siêu phẳng (có đối chiều bằng

1).

Các nghiên cứu của Chevalley (1955) và Shephard-Todd (1954) [16] cho thấy trên trường số phức $\mathbb{C}$, chiều ngược lại của định lý Serre cũng đúng: Nếu W là một nhóm con hữu hạn của $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sao cho vành bất biến S^W là một vành đa thức $S^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$ thì W là một nhóm phản xạ.

Với định nghĩa tổng quát như trên, chúng ta thấy từ tính toán của Dickson, nhóm $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ cũng là một nhóm phản xạ. Một hướng nghiên cứu tự nhiên tiếp theo là tìm cách mở rộng các kết quả về hiện tượng CSP từ các nhóm phản xạ cổ điển như nhóm Coxeter sang các nhóm phản xạ tổng quát như $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Để định nghĩa phần tử chính quy trong trường hợp tổng quát trên một trường $\mathbb{F}$, ta cần làm việc với bao đóng đại số $\overline{\mathbb{F}}$ và không gian véctơ $\overline{V} = V \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$. Giả sử G là một nhóm con hữu hạn của $\mathrm{GL}(V)$ sinh bởi các phép phản xạ. Một phần tử $g \in G$ được gọi là chính quy nếu nó có một véctơ riêng $v \in \overline{V}$ không nằm trong bất cứ một siêu phẳng phản xạ $\overline{H} = H \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ nào của G.

Xét một nhóm con $H \leq G$. Tập hợp hữu hạn sẽ được sử dụng để tạo nên một bộ ba chính là tập hợp các lớp kề trái G/H, và hàm sinh sẽ là

$$\mathrm{Hilb}(S^H; q)/\mathrm{Hilb}(S^G; q).$$

Reiner, Stanton và Webb chứng minh rằng hàm này có hệ số nguyên. Tuy nhiên, để nó có hệ số không âm, cần có thêm giả thiết mạnh hơn tính chất sinh bởi các phản xạ - ta yêu cầu S^G là một đại số đa thức.

Định lý sau đây, được chứng minh bởi Broer, Reiner, Smith và Webb [5] là một tổng quát hơn nữa của các định lý được phát biểu trước đây.

Định lý 0.0.8. *Cho V là một không gian véctơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{F}$. G là một nhóm con hữu hạn của $\mathrm{GL}(V)$ sao cho S^G là một đại số đa thức. Giả sử g là một phần tử chính quy của G, tác động trái trên G/H. Khi đó với mọi* *nhóm con $H \leq G$, bộ ba sau đây có biểu hiện CSP:*

$$(G/H, < g >, \frac{\mathrm{Hilb}(S^H; q)}{\mathrm{Hilb}(S^G; q)}).$$

Catalan CSP

Một ví dụ quan trọng về CSP với nhiều hệ quả sâu sắc là các CSP liên quan tới các số Catalan. Cho đến nay, theo Stanley [34], đã có khoảng 214 tập hợp X xuất hiện tự nhiên được đếm bởi số Catalan

$$X(1) = \mathrm{Cat}_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

trong đó có nhiều tập được trang bị một tác động tự nhiên của nhóm xyclic C. Hai tập hợp tiêu biểu là tập hợp $\mathrm{NC}(n)$ tất cả các phân hoạch không vắt tréo[8] của tập hợp $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ và tập hợp các tam giác phân của một đa giác $(n+2)$-cạnh. Một phân hoạch của tập hợp $[n]$ được gọi là *không vắt tréo* nếu như khi xếp $1, 2, \ldots n$ thành vòng tròn thì bao lồi của các khối khác nhau trong phân hoạch không cắt nhau.

Trong cả hai trường hợp,

$$X(q) = \mathrm{Cat}_n(q) = \frac{1}{[n+1]_q}\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q,$$

tuy nhiên nhóm xyclic C trong trường hợp đầu là nhóm xyclic cấp n quay vòng tập hợp $\{1, 2, \ldots, n\}$, còn trong trường hợp thứ hai thì X là nhóm xyclic cấp $(n+2)$ hoán vị các đỉnh của đa giác.

Định lý 0.0.9. *Bộ ba $(\mathrm{NC}_n, C_n, \mathrm{Cat}_n(q))$, ở đó nhóm xyclic C_n tác động lên NC_n bằng cách hoán vị các phần tử của $[n]$, có biểu hiện CSP.*

[8] noncrossing

Mở rộng cho các nhóm phản xạ phức

Có thể xem kết quả trên là trường hợp đặc biệt (khi $W = \Sigma_n$) của một kết quả tổng quát hơn của Bessis và Reiner [2] cho một họ các nhóm phản xạ phức W.

Giả sử W là một nhóm (hữu hạn) tác động bất khả quy lên không gian $\mathbb{C}^n$ bởi các phép phản xạ. Ta gọi n là *hạng* của W. Khi đó không gian bất biến $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^W$ là một đại số đa thức sinh bởi đúng n đa thức thuần nhất có bậc $d_1 \leq \ldots \leq d_n$. Các bậc d_i này cũng giống như trong trường hợp Coxeter.

$$\sum_{w \in W} q^{\ell(w)} = \prod_{i=1}^{n} [d_i]_q.$$

Tiếp theo, chúng ta cần chỉnh lại một chút khái niệm độ dài trong trường hợp phức. Ký hiệu R là tập hợp tất cả các phép phát xạ trong W. Ta có mối quan hệ giữa R và tập sinh S:

$$R = \{wsw^{-1} \colon w \in W, s \in S\}.$$

Ta định nghĩa *độ dài tuyệt đối*[9] của một phần tử $w \in W$, ký hiệu là $\ell_R(w)$, là độ dài nhỏ nhất khi viết w thành một tích của các phần tử thuộc R. Ta có công thức tương tự cho độ dài tuyệt đối và bậc

$$\sum_{w \in W} q^{\ell_W(w)} = \prod_{i=1}^{n} (1 + (d_i - 1)q).$$

Trong phần này, ta sẽ giả thiết W là một nhóm *sinh tốt*[10], tức là W có thể được sinh bởi n phép phản xạ. Các nhóm Coxeter đều thỏa mãn yêu cầu này, và tính chất kỹ thuật này nhằm đảm bảo cho khái niệm số Coxeter h được xác định duy nhất (và bằng d_n).

[9]absolute length
[10]well-generated

Giả sử c là một phần tử chính quy của W có bậc h. Một phần tử chính quy với bậc h như vậy tồn tại nhờ tính chất sinh tốt. Đặt

$$\mathrm{NC}(W) = \{w \in W : \ell_R(w) + \ell_R(w^{-1}c) = n\},$$

Do R ổn định dưới tác động W-liên hợp nên nhóm xyclic C sinh bởi c tác động lên tập hợp $\mathrm{NC}(W)$ qua phép liên hợp: nếu $w \in \mathrm{NC}(W)$ thì $cwc^{-1} \in \mathrm{NC}(W)$. Ta định nghĩa số W-q-Catalan:

$$\mathrm{Cat}(W, q) = \prod_{i=1}^{n} \frac{[h + d_i]_q}{[d_i]_q}.$$

Kết quả sau đây là một tổng quát hoá của trường hợp $W = \Sigma_n$ ở trên.

Định lý 0.0.10. *Bộ ba* $(\mathrm{NC}(W), C, \mathrm{Cat}(W, q))$ *có biểu hiện CSP.*

Fuss-Catalan

Các số Catalan có thể được xây dựng một cách tổng quát hơn, gọi là các số Fuss-Catalan $\mathrm{Cat}_n^{(m)} = \frac{1}{mn+1}\binom{(m+1)n}{n}$. Số Fuss-Catalan đếm số các cách phân chia một $(mn+2)$-đa giác đều thành các $(m+2)$-đa giác đều, với q-phiên bản và CSP tương tự như trên.

Cả hai ví dụ trên đều đã được tổng quát hóa cho trường hợp các nhóm phản xạ hữu hạn truyền thống như các nhóm Coxeter. Trong trường hợp W là nhóm đối xứng Σ_n, ta thu được hàm q-Catalan như ở trên. Ta có thể định nghĩa số W-Fuss-Catalan là

$$\mathrm{Cat}^{(m)}(W) = \prod_{i=1}^{n} \frac{mh + d_i}{d_i},$$

và số $q - W$-Fuss Catalan là

$$\mathrm{Cat}^{(m)}(W, q) = \prod_{i=1}^{n} \frac{[mh + d_i]_q}{[d_i]_q}.$$

Các kết quả tương tự cũng đã được thiết lập cho bộ số W-Fuss-Catalan và phiên bản q của chúng.

Hàm sinh $\mathrm{Cat}(W, q)$

Một câu hỏi đặt ra là hàm sinh $\mathrm{Cat}(W, q)$ là chuỗi Hilbert của đại số nào? Câu trả lời đến từ lý thuyết biểu diễn của đại số Cherednik hữu tỉ[11] - một hướng nghiên cứu trong hình học và đại số không giao hoán và lý thuyết nút.

Năm 1994, Haiman [13] mô tả quan hệ giữa không gian các bất biến của nhóm đối xứng có tên gọi là điều hòa đường chéo[12] và lý thuyết biểu diễn của đại số Cherednik hữu tỉ. Năm 2003, Gordon [10] cùng với Berest, Etingof và Ginzburg [3] đã mở rộng kết quả của Haiman cho toàn bộ các nhóm Coxeter. Sau đó Gordon và Griffeth [11] đã chỉ ra mối liên hệ giữa biểu diễn của RCA của các nhóm phản xạ phức với các số Fuss Catalan và q-Fuss Catalan nói đến ở trên.

Họ chứng minh rằng với mọi nhóm Coxeter bất khả quy W tác động lên vành đa thức $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, tồn tại các đa thức thuần nhất $\theta_1, \ldots, \theta_n \in S$ bậc $h+1$ thỏa mãn các tính chất sau đây:

- $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ lập thành một hệ tham số thuần nhất cho S. Nói cách khác, vành thương của S bởi iđêan $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ hữu hạn chiều trên $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{C}$-không gian véctơ sinh bởi $\theta_1, \ldots, \theta_n$ là W-ổn định, và đẳng cấu với W-biểu diễn trên V.
- $\mathrm{Hilb}((S/(\Theta))^W, q) = \mathrm{Cat}(W, q)$.

Mặc dù vậy, việc xây dựng các đa thức thuần nhất θ_i không hề đơn giản và phải xét từng trường hợp.

[11]Rational Cherednik algebra - RCA
[12]diagonal harmonics

Không gian đỗ

Khi làm việc với các nhóm phản xạ (thực hoặc phức), người ta thường mong muốn các kết quả được chứng minh không phải phụ thuộc vào việc xét từng trường hợp trong phân loại của Shephard và Todd. Năm 2015, Armstrong, Reiner và Rhoades [1] đã đưa ra một chứng minh khác cho kết quả của Bessis và Reiner thông qua mô hình mới cho $\mathrm{NC}(W)$, lấy cảm hứng từ một đối tượng tổ hợp là không gian đỗ[13].

Giả sử có n xe ô tô và có n vị trí đỗ xe được đánh số từ 1 đến n. Các xe ô tô xếp hàng để vào bến đỗ. Tại thời điểm thứ i, chiếc xe thứ i mong muốn được đỗ ở vị trí $f(i)$ nếu có thể được, còn nếu không thì nó sẽ đỗ ở vị trí j đầu tiên còn trống sau $f(i)$, do đó $j \geq f(i)$. Nếu tất cả các xe đều đỗ được theo mong muốn của mình thì f được gọi là một *hàm đỗ* [14] có độ dài n. Nói các khác, $f\colon [n] \to [n]$ là một hàm đỗ nếu và chỉ nếu $|\{x\colon f(x) \leq i\}| \geq i$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Tập hợp tất cả các hàm đỗ có độ dài n, ký hiệu là Park_n, được trang bị một tác động tự nhiên của nhóm đối xứng Σ_n bởi công thức $(\sigma f)(i) = f(\sigma^{-1}(i))$.

Nếu W là một nhóm Weyl (một họ nhóm Coxeter đặc biệt), với lưới nghiệm Q và số Coxeter h, Haiman [13] đã xây dựng W-không gian đỗ chính tắc là biểu diễn hoán vị của W trên thương $Q/(h+1)Q$. Các phần tử của $Q/(h+1)Q$ vì thế được gọi là các W-hàm đỗ.

Armstrong, Reiner và Rhoades [1] đã xây dựng 2 W-không gian đỗ mới, gọi là các không gian đỗ không tréo[15] Park_W^{NC} và không gian đỗ đại số[16] Park_W^{alg} cho tất cả các nhóm Coxeter. Các không gian này ngoài tác động của W còn có thêm tác động của nhóm con xyclic C của W sinh bởi một phần tử Coxeter, và trong trường hợp nhóm tinh thể[17], chúng đều đẳng cấu với W-không gian đỗ

[13] parking space
[14] parking function
[15] noncrossing parking space
[16] algebraic parking space
[17] crystallography

chính tắc.

Không gian đỗ đại số Park_W^{alg} được xây dựng như một biến dạng của vành thương $\mathbb{C}[V]/(\Theta)$:

$$\mathrm{Park}_W^{alg} = \mathbb{C}[\theta_1, \ldots, \theta_n]/(\theta_1 - x_1, \ldots, \theta_n - x_n).$$

ở đó $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ là một hệ tham số thuần nhất bậc $h+1$ trong $\mathbb{C}[V]$ như trong định lý của Gordon [10] và Berest - Etingof - Ginzburg [3] nói trên. V là không gian sinh bởi các nghiệm đơn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ của W. Xây dựng này không phụ thuộc vào lựa chọn hệ tham số.

Nhóm $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ muốn làm nhóm Coxeter

Ta đã biết từ định lý của Dickson rằng vành bất biến S^G là một đại số đa thức sinh bởi các bất biến Dickson $Q_{n,i}$, $0 \leq i \leq n-1$ với bậc lớn nhất $q^n - 1$. Như vậy $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ cũng là một nhóm phản xạ. Tuy không phải là một nhóm phản xạ thực (nhóm Coxeter), nhưng nó có nhiều tính chất và thể hiện khá tương tự. Vì thế có thể đặt câu hỏi về tương tự của các kết quả trên cho G. Nếu đặt

$$\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) = (x_1^{q^m}, \ldots, x_n^{q^m})$$

thì chúng đều thuần nhất bậc $(q^n - 1) + 1$, lập thành một hệ tham số cho S và không gian sinh bởi chúng đẳng cấu với không gian sinh bởi $x_1, \ldots, x_n$. Như vậy, khi tìm kiếm phiên bản tương tự của $\mathrm{Cat}(W, q)$ từ nhóm Coxeter cổ điển sang cho nhóm $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, ta thu được vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius $\mathcal{Q}_m(n)$.

Phiên bản đại số của không gian đỗ phân bậc $\mathbb{Q}_m(n)$ là $\mathbb{F}_q$-không gian sinh bởi $\mathbb{F}_{q^m}^n$. Khi so sánh số chiều của các không gian bất biến dưới tác động của các nhóm con parabolic của hai phiên bản phân bậc và không phân bậc, Lewis, Reiner và Stanton [19] đã đề xuất một chuỗi các giả thuyết về chuỗi Hilbert của các vành bất biến này thông qua các hệ số nhị thức tổng quát (q, t), là phiên bản phân bậc của các q-hệ số nhị thức ở trên.

Để phát biểu giả thuyết của Lewis, Reiner và Stanton [19], chúng ta giới thiệu thêm một số ký hiệu và định nghĩa.

Định nghĩa 0.0.11. Cho n và ℓ là các số nguyên dương.

- Một *hợp thành* [18] α của n thành ℓ phần là một dãy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell)$ các số nguyên dương sao cho $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i = n$.
- Một *hợp thành yếu* [19] β của n thành ℓ phần là một dãy $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\ell)$ các số nguyên không âm sao cho $\sum_{i=1}^{\ell} \beta_i = n$.

Ký hiệu $\beta \le \alpha$ có nghĩa là $\beta_i \le \alpha_i$ với mọi $i = 1, \ldots, \ell$.

Với hợp thành yếu $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_\ell)$, đặt $B_i = \sum_{j=1}^{i} \beta_j$ và $|\beta| = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j$. Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ là một hợp thành của số nguyên dương k, theo [28], (q,t)-hệ số nhị thức tổng quát của k bởi α được cho bởi công thức

$$\begin{bmatrix} k \\ \alpha \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}\left(1 - t^{q^k - q^j}\right)}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{\alpha_i}\left(1 - t^{q^{A_i} - q^{A_i - j}}\right)},$$

trong đó $A_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j$.

Lewis, Reiner và Stanton [19] đã đề xuất một chuỗi các giả thuyết về chuỗi Hilbert của không gian véctơ phân bậc các bất biến $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của các nhóm con parabolic của nhóm tuyến tính tổng quát GL_n như sau:

Giả thuyết 1.4.1 (Giả thuyết 1.1 **[19]).** *Chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ phân bậc của các GL_n-bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$ là chuỗi lũy thừa $C_{n,m}(t)$ xác định bởi công thức*

$$Hilb\left(\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}, t\right) = C_{n,m}(t) = \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} t^{(n-k)\left(q^m - q^k\right)} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q,t}.$$

[18] composition
[19] weak composition

Giả thuyết 1.4.2 (Giả thuyết Parabolic 1.5 **[19]).** *Cho n là số nguyên dương, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ là một hợp thành của n và gọi P_α là nhóm con parabolic của GL_n. Chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ phân bậc của các P_α-bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ là chuỗi lũy thừa $C_{\alpha,m}(t)$ xác định bởi công thức*

$$Hilb\left(\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}, t\right) = C_{\alpha,m}(t) = \sum_{\beta \le \alpha, |\beta| \le m} t^{e(m,\alpha,\beta)} \begin{bmatrix} m \\ \beta, m - |\beta| \end{bmatrix}_{q,t},$$

ở đó $e(m,\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i - \beta_i)\left(q^m - q^{B_i}\right)$ và $B_i = \beta_1 + \ldots + \beta_i$.

Chẳng hạn, khi $m \ge n = 2$ và $\alpha = (1,1)$ thì P_α là nhóm con Borel của GL_2 và $\beta \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. Theo giả thuyết thì chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_2}$ là

$$t^{2(q^m-1)} + t^{q^m-1}\frac{1 - t^{q^m-1}}{1 - t^{q-1}} + t^{q^m-q}\frac{1 - t^{q^m-1}}{1 - t^{q-1}} + \frac{\left(1 - t^{q^m-1}\right)\left(1 - t^{q^m-q}\right)}{\left(1 - t^{q-1}\right)\left(1 - t^{q^2-q}\right)}.$$

Lewis, Reiner và Stanton đã chứng minh cho giả thuyết của họ trong trường hợp $m = 1$, n bất kỳ. Trong công trình [12], Goyal thu được một số kết quả về giả thuyết Parabolic đối với nhóm Borel trong trường hợp $m = n = 2$ và xây dựng được một số bất biến cho trường hợp $m = 2$ và n bất kỳ. Goyal đã xây dựng một cách cụ thể một số các họ bất biến "đặc biệt", không phải là các đa thức bất biến thông thường. Một phiên bản của giả thuyết Parabolic đã được nghiên cứu bởi Drescher và Shepler nghiên cứu trong [8]. Gần đây, Taiwang Deng trong công trình [6] đã xác định được các bất biến và đối bất biến của vành đa thức rút gọn, ứng dụng vào nghiên cứu các lớp xoắn trong đối đồng điều của nhóm $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Các kết quả chính của luận án

Vấn đề trung tâm của luận án là xác định cấu trúc của vành bất biến modular trên vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius - một đối tượng có cấu trúc phức tạp hơn so với trường hợp vành đa thức thông thường. Cách tiếp cận chủ đạo của chúng tôi là kết hợp giữa việc xây dựng các công cụ tính toán mới (toán tử δ) và kỹ thuật toán tử chuyển (transfer) để giải quyết bài toán về cơ sở tuyến tính và xác định chuỗi Hilbert-Poincaré.

Luận án tập trung nghiên cứu về cơ sở tuyến tính của các vành bất biến $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của nhóm tuyến tính tổng quát và nhóm con parabolic, đặc biệt là nhóm con Borel. Đồng thời, chúng tôi cũng chứng minh các giả thuyết của Lewis, Reiner và Stanton [19] về chuỗi Hilbert-Poincaré của vành bất biến trong trường hợp nhóm con Borel và các nhóm con Parabolic khác của nhóm tuyến tính tổng quát và mối liên hệ với đại số Steenrod. Các kết quả chính đạt được bao gồm:

- Xây dựng hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$ dựa trên toán tử δ và các hàm hữu tỷ $Y_b(I;J)$, từ đó chứng minh hệ này là một cơ sở tuyến tính của vành bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$. Từ đó, chúng tôi chứng minh thành công giả thuyết của Lewis - Reiner - Stanton [19] về chuỗi Hilbert-Poincaré của vành bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$.

- Đưa ra giả thuyết và xác định cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến ứng với các nhóm con Parabolic $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ và nhóm tuyến tính tổng quát $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$. Và chứng minh tính đúng đắn của các giả thuyết về cơ sở tuyến tính cho trường hợp hạng không vượt quá 3 thông qua kỹ thuật toán tử chuyển (transfer).

- Nghiên cứu lọc $\mathcal{F}_{n,k}$ và chứng minh cấu trúc môđun của nó trên đại số Dickson và đại số Steenrod cho các trường hợp hạng thấp.

Cấu trúc của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, luận án được bố cục thành 3 chương:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Chương này hệ thống hóa các khái niệm nền tảng về lý thuyết bất biến modular và đại số Steenrod. Nội dung trọng tâm bao gồm: đại số Steenrod, hệ số nhị thức (q, t) và các kết quả cơ bản của Lewis - Reiner - Stanton liên quan đến vành bất biến. Đây là cơ sở lý thuyết xuyên suốt cho các kết quả nghiên cứu ở các chương sau.

Chương 2: Bất biến của vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius dưới tác động của nhóm con Borel. Chương này trình bày các kết quả công bố tại bài báo thứ nhất. Chúng tôi định nghĩa toán tử δ như một biến thể của hàm Schur [20] và khảo sát các tính chất của nó. Từ đó, chúng tôi xây dựng hàm hữu tỷ $Y_b(I; J)$ và chứng minh tính đa thức, tính bất biến dưới các điều kiện xác định. Bằng phương pháp quy nạp, chúng tôi thiết lập hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$ và chứng minh đây chính là cơ sở tuyến tính của vành bất biến dưới tác động của nhóm Borel $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$. Kết quả này cho phép chúng tôi khẳng định tính đúng đắn của giả thuyết Lewis - Reiner - Stanton [19].

Chương 3: Bất biến của vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius dưới tác động của các nhóm con parabolic hạng thấp. Chương này dựa trên các kết quả ở bài báo thứ hai, tập trung vào việc mở rộng nghiên cứu cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$.

Đầu tiên, thông qua việc phân tích tập đơn thức Dickson Δ_s^m, chúng tôi đưa ra ước lượng chặn trên cho tổng số chiều của các không gian con bất biến, giúp đơn giản hóa việc chứng minh tính cơ sở bằng cách đưa về chứng minh tính hệ sinh.

Tiếp theo, bằng cách sử dụng toán tử chuyển từ vành bất biến của nhóm con Borel lên các nhóm con Parabolic và nhóm GL_n, chúng tôi lần lượt xây dựng và thu gọn các hệ sinh cho trường hợp hạng 2 và hạng 3. Kết quả cho thấy các hệ sinh này trùng khớp với giả thuyết đề ra.

Cuối cùng, chúng tôi khảo sát bộ lọc $\mathcal{F}_{n,k}$ xây dựng từ hệ cơ sở tuyến tính, chứng minh $\mathcal{F}_{n,k}$ có cấu trúc môđun trên đại số Dickson và đại số Steenrod đối với các trường hợp hạng $n \leq 3$.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị có liên quan đến các nội dung chính ở các chương tiếp theo của luận án.

1.1. Lý thuyết bất biến modular

1.1.1. Giới thiệu

Một kết quả cơ bản khẳng định rằng mọi đa thức đối xứng đều biểu diễn được (một cách duy nhất) dưới dạng hàm đa thức theo các đa thức đối xứng cơ bản [25]. Cụ thể, nếu ta xét tác động tự nhiên của nhóm đối xứng Σ_n trên đại số đa thức $K[x_1, \dots, x_n]$ (với K là một trường tùy ý), ta thu được đẳng cấu đại số

$$\begin{array}{rcl} K[y_1, \dots, y_n] & \longrightarrow & K[x_1, \dots, x_n]^{\Sigma_n} = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid \forall \sigma \in \Sigma_n,\ \sigma(f) = f\} \\ y_i & \mapsto & e_i. \end{array}$$

Trong đó, e_i là đa thức đối xứng sơ cấp thứ i, được định nghĩa bởi

$$e_1 = x_1 + \cdots + x_n; \quad e_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j; \quad \dots; \quad e_n = x_1 \cdots x_n.$$

Dễ thấy trong trường hợp trên, nhóm Σ_n tác động lên $K[x_1, \ldots, x_n]$ bằng các đẳng cấu K-đại số phân bậc. Lý thuyết bất biến của nhóm hữu hạn quan tâm đến bài toán tổng quát sau đây. Cho G là một nhóm con của nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n(K)$, G tác động lên không gian các đa thức thuần nhất bậc 1 (sinh bởi $x_1, \ldots, x_n$), do đó tác động lên $K[x_1, \ldots, x_n]$ một cách tự nhiên.

Người ta quan tâm đến các câu hỏi sau đây.

- Tìm một hệ sinh (theo nghĩa K-đại số) $f_1, \ldots, f_m$ cho $K[x_1, \ldots, x_n]^G$, tức là ta có toàn cấu
$$K[y_1, \ldots, y_m] \to K[x_1, \ldots, x_n]^G, \qquad y_i \mapsto f_i.$$
- Giả sử $f_1, \ldots, f_m$ là một hệ sinh của $K[x_1, \ldots, x_n]^G$, tìm quan hệ đại số giữa các phần tử sinh f_i (các đa thức $g_1, \ldots, g_k \in K[y_1, \ldots, y_m]$ sao cho $g_1(f_1, \ldots, f_m) = \cdots = g_k(f_1, \ldots, f_m) = 0$), tức là ta có đẳng cấu
$$K[y_1, \ldots, y_m] / \langle g_1, \ldots, g_m \rangle \cong K[x_1, \ldots, x_n]^G, \qquad y_i \mapsto f_i.$$
- Cho một đa thức bất biến $f \in K[x_1, \ldots, x_n]^G$, mô tả f dưới dạng hàm đa thức theo các phần tử sinh, tức là tìm đa thức $g \in K[y_1, \ldots, y_m]$ sao cho $f = g(f_1, \ldots, f_m)$.

Kết quả sau đây đưa ra lời giải cho các câu hỏi đã nêu, trong một trường hợp cụ thể. Cần lưu ý rằng tính đúng đắn của kết quả này không phụ thuộc vào đặc số của trường.

Định lý 1.1.1 (Mệnh đề 4.5.5 [25])**.** *Giả sử G là một nhóm con hữu hạn của $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, và $\mathbb{F}_q[V]^G$ là vành các đa thức bất biến dưới tác động tuyến tính tự nhiên của G trên không gian véctơ $V = \mathbb{F}_q^n$. Nếu tồn tại các phần tử bất biến $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}_q[V]^G$ sao cho:*

i) Các đa thức $f_1, \ldots, f_n$ độc lập đại số trên $\mathbb{F}_q$, *ii) Tích các bậc thỏa mãn* $\deg(f_1) \cdot \deg(f_2) \cdots \deg(f_n) = |G|$,

thì $\mathbb{F}_q[V]^G$ *là một vành đa thức tự do trên các phần tử sinh* $f_i, 1 \leq i \leq n$, *tức là:*

$$\mathbb{F}_q[V]^G = \mathbb{F}_q[f_1, \ldots, f_n].$$

Định lý này cho phép xác định cấu trúc không gian bất biến trong nhiều trường hợp quan trọng, điển hình như khi xét bất biến Dickson của nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ và bất biến tam giác trên của nhóm con Borel sẽ được trình bày ở phần tiếp theo.

1.1.2. Bất biến Dickson

Trong lý thuyết bất biến modular trên trường hữu hạn, hai đối tượng cơ bản và tiêu biểu là bất biến Dickson và bất biến Mùi. Các bất biến này không chỉ thể hiện những đặc trưng điển hình trong lý thuyết bất biến mà còn đóng vai trò nền tảng cho việc xây dựng các bất biến của các nhóm con parabolic trong $\mathcal{Q}_m(n)$. Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày các khái niệm, công thức và tính chất cơ bản của bất biến Dickson.

Giả sử $n \geq 1$ và $S = \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ là vành đa thức có hệ số trên trường hữu hạn $\mathbb{F}_q$. Nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ tác động lên S bằng cách thay thế tuyến tính. Khi đồng nhất nhóm tuyến tính tổng quát GL_n với nhóm các tự đẳng cấu tuyến tính của không gian véctơ $V = \mathbb{F}_q\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, ta thu được một tác động của nhóm GL_n lên đại số đa thức S.

Đại số con S^{GL_n} gồm các đa thức trong S bất biến dưới tác động của GL_n, được xác định lần đầu tiên bởi L. Dickson vào những năm đầu thế kỷ 20 [7]. Cụ thể, Dickson chứng minh được rằng

$$S^{\mathrm{GL}_n} = \mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}].$$

Trong đó $Q_{n,i}$ với $0 \leq i \leq n-1$ là các đa thức của các biến $x_1, \ldots, x_n$, xác định bởi đẳng thức sau

$$Q_n(t) = \prod_{v=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathbb{F}_q^n} (t + v_1x_1 + \cdots + v_nx_n) = t^{q^n} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} Q_{n,i} t^{q^i}.$$

Các đa thức $Q_{n,i}$ (với $0 \le i \le n-1$) được gọi là *bất biến Dickson*, và đại số $\mathcal{D}_n := \mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}]$ được gọi là *đại số bất biến Dickson* của nhóm GL_n, hay gọn là đại số Dickson của GL_n.

Ta có kết quả sau đây.

Bổ đề 1.1.2. *Các đa thức $Q_n(t)$ là bất biến dưới tác động của $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, do đó mỗi đa thức hệ số $Q_{n,i}(x_1, \ldots, x_n)$ cũng là bất biến đối với $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.*

Chứng minh. Xét một phần tử bất kỳ $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Áp dụng phép biến đổi g lên các biến $x_1, \ldots, x_n$ trong biểu thức định nghĩa $Q_n(t)$, ta có

$$g \cdot Q_n(t) = \prod_{v\in\mathbb{F}_q^n} \left(t + v_1x_1' + \cdots + v_nx_n'\right),$$

trong đó $(x_1', \ldots, x_n') = g \cdot (x_1, \ldots, x_n)$ và $v = (v_1, \ldots, v_n)$ chạy qua tất cả các véctơ trong $\mathbb{F}_q^n$. Vì g là một phép biến đổi tuyến tính khả nghịch trên không gian $\mathbb{F}_q^n$, ánh xạ $v \mapsto g \cdot v$ là một song ánh trên tập $\mathbb{F}_q^n$. Do đó, tập các dạng tuyến tính $v_1x_1' + \cdots + v_nx_n'$ khi v chạy qua tất cả các véctơ trùng với tập các dạng tuyến tính $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ khi $(a_1, \ldots, a_n)$ chạy qua $\mathbb{F}_q^n$. Vì vậy,

$$g \cdot Q_n(t) = \prod_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{F}_q^n} (t + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = Q_n(t).$$

Do $g \cdot Q_n(t) = Q_n(t)$, đồng nhất các hệ số của t^{q^i} hai vế, ta suy ra

$$g \cdot Q_{n,i}(x_1, \ldots, x_n) = Q_{n,i}(x_1, \ldots, x_n)$$

với mọi i. Nói cách khác, mỗi đa thức $Q_{n,i}(x_1, \ldots, x_n)$ là một phần tử của $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)}$. $\square$

Tiếp theo, ta chứng minh tính độc lập đại số của tập các bất biến Dickson $Q_{n,i}$ $(0 \leq i \leq n-1)$. Để chứng minh rằng các bất biến Dickson $Q_{n,i}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ là các tập độc lập đại số, ta sử dụng kết quả sau.

Bổ đề 1.1.3. *Giả sử $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ là một bộ các đa thức sao cho $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ là nguyên trên $\mathbb{F}_q[f_1, \ldots, f_n]$, thì $f_1, \ldots, f_n$ là độc lập đại số.*

Chứng minh. Vì $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ là nguyên trên $\mathbb{F}_q[f_1, \ldots, f_n]$ nên số chiều Krull của hai đại số này là bằng nhau. Mặt khác theo lý thuyết về số chiều Krull, ta có số chiều Krull của vành đa thức $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ là n, nên số chiều Krull của $\mathbb{F}_q[f_1, \ldots, f_n]$ cũng bằng n. Cũng theo kết quả từ lý thuyết về số chiều Krull, nếu $f_1, \ldots, f_n$ là không độc lập đại số thì số chiều Krull của $\mathbb{F}_q[f_1, \ldots, f_n]$ bằng với bậc siêu việt của $\mathbb{F}_q(f_1, \ldots, f_n)$ (trường con của trường các phân thức $\mathbb{F}_q(x_1, \ldots, x_n)$ sinh bởi $f_1, \ldots, f_n$) trên $\mathbb{F}_q$, bậc siêu việt này nhỏ hơn hoặc bằng $(n-1)$, mâu thuẫn với nhận xét trên. Do vậy, $f_1, \ldots, f_n$ là độc lập đại số. $\square$

Bổ đề 1.1.4. *Tập các bất biến Dickson $Q_{n,i}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ là tập độc lập đại số.*

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 1.1.3 để chứng minh tính độc lập đại số của các bất biến Dickson như sau. Với mỗi $i \in \{1, \ldots, n\}$, đặt W_i là $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ sinh bởi $x_1, \ldots, x_i$, ta quy ước thêm $W_0 = \{0\}$. Khi đó xét đa thức biến t sau

$$f(t) = \prod_{v \in W_n} (t+v) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} t^{q^i} Q_{n,i},$$

ta thấy rằng $f(t)$ là một đa thức monic trong $\mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}][t]$ và nhận $x_1, \ldots, x_n$ là nghiệm. Vì vậy $x_1, \ldots, x_n$ là nguyên trên $\mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}]$, nên $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ là nguyên trên $\mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}]$. Theo Bổ đề 1.1.3, ta suy ra rằng $\{Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}\}$ là một tập độc lập đại số. $\square$

Từ đó, chúng ta có kết quả sau.

Định lý 1.1.5 ([7])**.** *Vành bất biến S^{GL_n} là đại số đa thức*

$$S^{\mathrm{GL}_n} = \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{GL}_n} = \mathbb{F}_q[Q_{n,0}, Q_{n,1}, \ldots, Q_{n,n-1}].$$

Chứng minh. Trước hết, theo Bổ đề 1.1.2, các đa thức Dickson $Q_{n,i}, 0 \leq i \leq n-1$ là các bất biến đối với tác động của nhóm tuyến tính tổng quát GL_n và có bậc

$$\deg(Q_{n,i}) = q^n - q^i.$$

Vì vậy,

$$\prod_{i=0}^{n-1} \deg(Q_{n,i}) = \prod_{i=0}^{n-1} \left(q^n - q^i\right) = |\mathrm{GL}_n|.$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 1.1.4 thì tập $Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}$ là độc lập đại số. Do đó, theo Định lý 1.1.1, ta suy ra điều phải chứng minh. □

1.1.3. Bất biến Mùi

Trong lý thuyết bất biến modular, bất biến Mùi là một lớp bất biến cơ bản quan trọng, được xây dựng từ tác động của *p-nhóm con Sylow* U_n lên vành đa thức $S = \mathbb{F}_q[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Những bất biến này đóng vai trò nền tảng trong nghiên cứu các không gian đồng điều modular, đại số Steenrod, và lý thuyết đồng luân trong tô pô đại số. Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày các khái niệm, công thức và tính chất cơ bản của bất biến Mùi, làm cơ sở cho xây dựng bất biến dưới tác động của nhóm tam giác trên (nhóm Borel) B_n.

Định nghĩa 1.1.6. Với mỗi $i = 1, \ldots, n$, các đa thức V_i được định nghĩa như sau

$$V_i = \prod_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1} \in \mathbb{F}_q} (x_i + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \cdots + \lambda_1 x_1).$$

Để chỉ ra tính độc lập đại số của các bất biến Mùi, trước hết ta chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 1.1.7. *Các bất biến Dickson $Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}$ thuộc $\mathbb{F}_q$-đại số sinh bởi $V_1^{q-1}, \ldots, V_n^{q-1}$.*

Chứng minh. Ta chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$, ta có $Q_{1,0} = x_1^{q-1} = V_1^{q-1}$ nên khẳng định đã cho là hiển nhiên đúng. Giả sử ta đã chứng minh được khẳng định đã cho ứng với $n \geq 1$ nào đó, ta sẽ chứng minh khẳng định đã cho là đúng với $n+1$, tức là $Q_{n+1,0}, \ldots, Q_{n+1,n}$ là các phần tử nằm trong $\mathbb{F}_q$-đại số sinh bởi $V_1^{q-1}, \ldots, V_{n+1}^{q-1}$. Với mỗi $i \in \{0, \ldots, n\}$, ta có đẳng thức

$$Q_{n+1,i} = Q_{n,i-1}^q + V_{n+1}^{q-1} Q_{n,i},$$

(ở đây $Q_{n,n} = 1$ và quy ước $Q_{n,-1} = 0$). Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$Q_{n,i-1}^q \in \mathbb{F}_q[V_1^{q-1}, \ldots, V_n^{q-1}] \text{ và } Q_{n,i} \in \mathbb{F}_q[V_1^{q-1}, \ldots, V_n^{q-1}].$$

Vì vậy, $Q_{n+1,i} \in \mathbb{F}_q[V_1^{q-1}, \ldots, V_n^{q-1}][V_{n+1}^{q-1}] = \mathbb{F}_q[V_1^{q-1}, \ldots, V_{n+1}^{q-1}]$. Do đó, mệnh đề đúng với $(n+1)$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có được điều cần chứng minh. □

Định lý 1.1.8 (Định lý 3 [22])**.** *Vành các bất biến của S dưới tác động của nhóm Borel B_n là đại số đa thức*

$$S^{\mathrm{B}_n} = \mathbb{F}_q[V_1^{q-1}, V_2^{q-1}, \ldots, V_n^{q-1}].$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} V_i &= \prod_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1} \in \mathbb{F}_q} (x_i + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \cdots + \lambda_1 x_1) \\ &= x_i^{q^{i-1}} + \sum_{j=0}^{i-2} (-1)^{i-1-j} Q_{i-1,j} x_i^{q^j}. \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$V_i^{q-1} = \left(x_i^{q^{i-1}} + \sum_{j=0}^{i-2} (-1)^{i-1-j} Q_{i-1,j} x_i^{q^j} \right)^{q-1}.$$

Với mọi $g \in \mathrm{B}_n$, tác động của g như sau

$$g \cdot x_i = a_i x_i + \sum_{j<i} a_{ij} x_j, \quad a_i, a_{ij} \in \mathbb{F}_q, a_i \neq 0.$$

Vì vậy,

$$g(\mathbb{F}_q\langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle) = \mathbb{F}_q\langle x_1, \ldots, x_{i-1}\rangle.$$

Nên theo tính chất của bất biến Dickson thì

$$g(Q_{i-1,j}) = Q_{i-1,j}, \quad \forall j \in \{0, \ldots, i-2\}.$$

Do đó, mỗi đa thức Dickson $Q_{i-1,j}$ bất biến với $i-1$ biến đầu tiên nên ta có

$$\begin{aligned} g \cdot V_i^{q-1} &= \left(a_i x_i^{q^{i-1}} + \sum_{j=0}^{i-2} (-1)^{i-1-j} Q_{i-1,j} a_i x_i^{q^j}\right)^{q-1} \\ &= (a_i)^{q-1} \left(x_i^{q^{i-1}} + \sum_{j=0}^{i-2} (-1)^{i-1-j} Q_{i-1,j} x_i^{q^j}\right)^{q-1} \\ &= V_i^{q-1}. \end{aligned}$$

Do đó, $V_i^{q-1}, 1 \leq i \leq 1$ là bất biến dưới tác động của B_n. Mặt khác, mỗi bất biến V_i có bậc $\deg(V_i) = q^{i-1}$ nên $\deg\left(V_i^{q-1}\right) = (q-1)\, q^{i-1}$. Vì vậy, ta có

$$\begin{aligned} \deg\left(V_1^{q-1}\right) \cdots \deg\left(V_n^{q-1}\right) &= (q-1) \cdot (q-1)\, q \cdots (q-1)\, q^{n-1} \\ &= (q-1)^n\, q^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= |\mathrm{B}_n|\,. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo Bổ đề 1.1.7, ta thấy rằng $\mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}]$ là một đại số con của $\mathbb{F}_q[V_1^{q-1}, \ldots, V_n^{q-1}]$, mà $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ là nguyên trên $\mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}]$, nên $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ cũng là nguyên trên $\mathbb{F}_q[V_1^{q-1}, \ldots, V_n^{q-1}]$. Theo Bổ đề 1.1.3, ta suy ra rằng $\{V_1^{q-1}, \ldots, V_n^{q-1}\}$ là một tập độc lập đại số. Do đó, áp dụng Định lý 1.1.1, ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Gọi U_n là nhóm tam giác trên có các phần tử thuộc đường chéo chính là 1 (*unipotent upper triangular group*), khi đó U_n *p-nhóm con Sylow* của GL_n. Ta có thể kiểm tra được các đa thức $V_i, 1 \leq i \leq n$ là các U_n-bất biến và được gọi là bất biến Mùi. Lập luận tương tự Định lý 1.1.8, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.1.9 (Định lý 6 [22])**.** *Vành các bất biến của S dưới tác động của nhóm U_n là đại số đa thức*

$$S^{U_n} = \mathbb{F}_q[V_1, V_2, \ldots, V_n].$$

Chú ý 1.1.10. Theo Bổ đề 6.1.1 [25], ta có

$$Q_{k+1,s} = V_{k+1}^{q-1} Q_{k,s} + Q_{k,s-1}^q.$$

Do đó, ta có các kết quả sau về liên hệ giữa bất biến Dickson và bất biến Mùi.

- $V_1^{q-1} = Q_{1,0}$.
- $V_2^{q-1} = Q_{2,1} - Q_{1,0}^q$.
- $V_3^{q-1} = Q_{3,2} - Q_{2,1}^q$.
- $\cdots$
- $V_n^{q-1} = Q_{n,n-1} - Q_{n-1,n-2}^q$.

Vì vậy, ta có thể chỉ ra vành các bất biến của S dưới tác động của nhóm Borel B_n là đại số đa thức

$$S^{\mathrm{B}_n} = \mathbb{F}_q[Q_{1,0}, Q_{2,1}, \ldots, Q_{n,n-1}].$$

1.2. Đại số Steenrod

Đại số Steenrod xuất hiện như một công cụ quan trọng trong tô pô đại số và có những ứng dụng sâu rộng trong lý thuyết bất biến. Với nền tảng từ đồng cấu Frobenius và các phép toán Steenrod, đại số này cung cấp một cách tiếp cận để nghiên cứu các lớp đồng điều trong không gian tô pô và lý thuyết đại số của các nhóm hữu hạn. Trong phần này, chúng tôi dựa theo cách trình bày của Larry Smith [31] để giới thiệu các tính chất cơ bản của đại số Steenrod, bao gồm các phép toán, các quan hệ Adem và vai trò của nó trong lý thuyết bất biến.

1.2.1. Toán tử Steenrod và Đại số Steenrod

Giả sử $\mathbb{F}$ là trường Galois có $q = p^v$ phần tử và V là một $\mathbb{F}$-không gian vectơ hữu hạn chiều. Khi đó, ký hiệu $\mathbb{F}[V] := S(V)$ là $\mathbb{F}$-đại số đối xứng sinh bởi V. Nói cách khác, nếu $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ và $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ là một cơ sở của V thì ta có

$$\mathbb{F}[V] \cong \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

tức là vành đa thức nhiều biến trên $\mathbb{F}$. Theo quy ước, các phần tử của $V \subset \mathbb{F}[V]$ được gán bậc bằng 1, do đó $\mathbb{F}[V]$ là một đại số phân bậc.

Định nghĩa

$$\mathcal{P}(\xi) : \mathbb{F}[V] \longrightarrow \mathbb{F}[V][[\xi]]$$

theo các quy tắc

i) $\mathcal{P}(\xi)$ là một ánh xạ $\mathbb{F}$-tuyến tính,

ii) $\mathcal{P}(\xi)(v) = v + v^q\xi$ cho $v \in V$,

iii) $\mathcal{P}(\xi)(u \cdot w) = \mathcal{P}(\xi)(u) \cdot \mathcal{P}(\xi)(w)$ với $u, w \in \mathbb{F}[V]$,

iv) $\mathcal{P}(\xi)(1) = 1$.

Ta xem $\mathcal{P}(\xi)$ như là một đồng cấu vành có bậc 0 bằng cách cho ξ bậc $1 - q$. Bằng cách tách ra các thành phần thuần nhất, ta có các ánh xạ $\mathbb{F}$-tuyến tính

$$\mathcal{P}^i : \mathbb{F}[V] \longrightarrow \mathbb{F}[V]$$

thỏa mãn

$$\mathcal{P}(\xi)(f) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i(f)\, \xi^i.$$

Với $q = 2$, các phép toán này thường được ký hiệu bởi $Sq^i(f)$.

Mặc dù định nghĩa của $\mathcal{P}(\xi)$ phụ thuộc vào không gian vectơ V, nhưng dễ thấy rằng $\mathcal{P}(\xi)$ là một ánh xạ *tự nhiên* đối với các ánh xạ tuyến tính $\varphi : V' \to V''$, tức là ta có

$$\varphi^*\mathcal{P}(\xi) = \mathcal{P}(\xi)\, \varphi^*,$$

trong đó φ^* là đồng cấu đại số sinh ra bởi φ.

Chú ý 1.2.1. Tính tự nhiên ở đây có nghĩa là các toán tử Steenrod không phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở của V, mà chỉ phụ thuộc vào cấu trúc $\mathbb{F}$-không gian vectơ của V.

Định nghĩa 1.2.2 (Toán tử Steenrod)**.** Các toán tử $\mathcal{P}^i$ được gọi là các *toán tử luỹ thừa rút gọn Steenrod* trên $\mathbb{F}$, khi $q = 2$, toán tử Sq^i được gọi là *toán tử Steenrod bình phương*. Toán tử $\mathcal{P}^i$ và Sq^i được gọi chung là *toán tử Steenrod.*

Chú ý 1.2.3. Toán tử Steenrod là ánh xạ $\mathbb{F}$-tuyến tính và ngoài ra thoả mãn

$$\mathcal{P}^i(u) = \begin{cases} u^q & \text{nếu } i = \deg(u) \\ 0 & \text{nếu } i > \deg(u) \end{cases}$$

và được gọi là *điều kiện bất ổn định.*

Công thức Cartan

Một trong những tính chất quan trọng nhất của các toán tử Steenrod là chúng tuân theo công thức Cartan. Công thức này mô tả cách toán tử Steenrod tác động lên tích của hai phần tử trong đối đồng điều. Cụ thể, nếu u và v là hai phần tử trong $\mathbb{F}[V]$, thì toán tử $\mathcal{P}^i$ sẽ phân phối lên tích $u \cdot v$ theo công thức

$$\mathcal{P}^k (u \cdot v) = \sum_{i+j=k} \mathcal{P}^i (u) \cdot \mathcal{P}^j (v) , \quad \forall k \geq 0.$$

Xét một phần tử x có bậc 1 trong $\mathbb{F}[V] \cong \mathbb{F}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, tức là

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n, \quad a_i \in \mathbb{F}.$$

Khi đó, với mọi số mũ $j \geq 0$, ta có công thức

$$\mathcal{P}^i \left(x^j \right) = \binom{j}{i} x^{j+i(q-1)}.$$

Đại số Steenrod

Nếu $\rho : G \to \mathrm{GL}_n (\mathbb{F})$ là một biểu diễn của một nhóm hữu hạn, thì các toán tử Steenrod và tác động của G trên $\mathbb{F}[V]$ giao hoán với nhau. Do đó, $\mathbb{F}[V]^G$ được ánh xạ vào chính nó bởi tất cả các toán tử Steenrod. Điều này có thể được sử dụng để tạo ra các bất biến mới từ các bất biến đã biết. Ví dụ, nếu G giữ bất động một dạng bậc hai như $Q = xy \in \mathbb{F}[x, y]$, và $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, thì G cũng giữ bất động dạng bậc ba $Sq^1 (Q) = x^2 y + xy^2$, và dạng bậc năm $Sq^2 Sq^1 (Q) = x^4 y + xy^4$.

Rõ ràng các toán tử Steenrod có tính chất kết hợp, và các tổ hợp của chúng thỏa mãn một số đồng nhất thức, chẳng hạn như

$$\mathcal{P}^1 \mathcal{P}^1 = 2\mathcal{P}^2,$$

điều này có thể chứng minh bằng quy nạp theo chiều của V và sử dụng các kết quả đã biết.

Xét hàm tử $F[-]$ từ phạm trù các không gian véctơ trên $\mathbb{F}$ sang phạm trù các đại số phân bậc giao hoán trên $\mathbb{F}$. Định nghĩa về tự đồng cấu của $F[-]$ được trình bày như sau.

Định nghĩa 1.2.4. Xét hàm tử

$$F[-] : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{F}},$$

từ phạm trù các không gian véctơ trên $\mathbb{F}$ sang phạm trù các đại số phân bậc giao hoán trên $\mathbb{F}$.

Một *tự đồng cấu* của $F[-]$ là một họ các ánh xạ tuyến tính phân bậc

$$\widehat{f}_V : F[V] \longrightarrow F[V], \quad V \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}),$$

sao cho với mọi ánh xạ tuyến tính $\varphi : V_1 \to V_2$ thì ta có biểu đồ giao hoán sau.

$$\begin{tikzcd}
F[V_1] \arrow[r, "\widehat{f}_{V_1}"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & F[V_1] \arrow[d, "\varphi_*"] \\
F[V_2] \arrow[r, "\widehat{f}_{V_2}"'] & F[V_2]
\end{tikzcd}$$

Khi $\widehat{f}_V = \mathcal{P}^k$ với $k > 0$, thì từ tính chất của toán tử Steenrod, ta thấy rằng $\mathcal{P}^k$ là một tự đồng cấu của $F[-]$.

Định nghĩa 1.2.5 (Đại số Steenrod)**.** *Đại số Steenrod* trên trường $\mathbb{F}$, ký hiệu là $\mathcal{A}$, là đại số con của đại số phân bậc của các tự đồng cấu của hàm tử $\mathbb{F}[-]$ từ không gian véctơ sang các đại số phân bậc giao hoán trên $\mathbb{F}$ được sinh bởi các toán tử Steenrod.

Quan hệ Adem

Một hệ đầy đủ các quan hệ giữa các toán tử Steenrod trên trường có đặc số nguyên tố đã được xây dựng bằng sự kết hợp giữa các phương pháp đại số và tô pô. Các quan hệ này được gọi là *quan hệ Adem*.

- Khi $q = 2$ thì

$$Sq^i Sq^j = \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k,$$

với mọi $i, j > 0$ sao cho $i < 2j$.

- Khi $q \neq 2$ thì

$$\mathcal{P}^i \mathcal{P}^j = \sum_{k=0}^{[\frac{i}{q}]} (-1)^{i+k} \binom{(q-1)(j-k)-1}{i-qk} \mathcal{P}^{i+j-k} \mathcal{P}^k,$$

với mọi $i, j > 0$ sao cho $i < qj$, trong đó $[a/b]$ là phần nguyên của a/b.

Đơn thức chấp nhận được

Cho một dãy $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, ta viết $\mathcal{P}^I = \mathcal{P}^{i_1} \mathcal{P}^{i_2} \cdots \mathcal{P}^{i_k}$. Các phép lặp của các phép toán Steenrod này được gọi là các *đơn thức cơ bản*.

Định nghĩa 1.2.6 ([31])**.** Một đơn thức cơ bản được gọi là chấp nhận được nếu $i_s \geq q i_{s+1}$ với mọi $s \geq 1$.

Có một toàn ánh từ đại số kết hợp tự do được sinh bởi các toán tử Steenrod $\{\mathcal{P}^i | i \in \mathbb{N}\}$ modulo iđêan sinh bởi các quan hệ Adem sang đại số Steenrod. Thực ra, ánh xạ này là đẳng cấu, và do đó các quan hệ Adem là một tập hợp đầy đủ các quan hệ xác định cho đại số Steenrod. Cụ thể,

Mệnh đề 1.2.7 (Hệ quả 3.3 [31])**.** *Các đơn thức chấp nhận được tạo thành một $\mathbb{F}$-cơ sở của đại số Steenrod $\mathcal{A}$.*

1.2.2. Ứng dụng của Đại số Steenrod trong Lý thuyết Bất biến

Một trong những ứng dụng chính của đại số Steenrod là trong lý thuyết bất biến, các toán tử Steenrod đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán các iđêan bất biến dưới tác động của các nhóm hữu hạn. Điều này đặc biệt quan trọng trong trường hợp đặc trưng của trường cơ sở là một số nguyên tố, khi đó các iđêan nguyên tố có thể được mô tả thông qua các toán tử Steenrod.

Cụ thể, khi làm việc trên một trường có đặc số p, các toán tử Steenrod $\mathcal{P}^i$ (với $p > 2$) và Sq^i (với $p = 2$) đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các đa thức bất biến dưới tác động của một nhóm hữu hạn. Các toán tử này không chỉ hỗ trợ trong việc phân tích cấu trúc của vành đa thức mà còn cung cấp công cụ để khảo sát các iđêan ổn định dưới tác động của chúng.

Một trong những phương pháp cơ bản để xây dựng các bất biến từ các đa thức cho trước là sử dụng đồng cấu chuyển (transfer). Ý tưởng chính là lấy trung bình một đa thức theo toàn bộ quỹ đạo của nhóm G, từ đó thu được một phần tử luôn bất biến dưới tác động của G. Khái niệm này được mô tả trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.2.8 (Đồng cấu chuyển)**.** Đồng cấu chuyển là ánh xạ

$$\mathrm{Tr}^G : \mathbb{F}[V] \longrightarrow \mathbb{F}[V]^G$$

được định nghĩa bởi

$$\mathrm{Tr}^G(f) \ = \ \sum_{g \in G} g \cdot f, \qquad f \in \mathbb{F}[V].$$

Chú ý 1.2.9. Đồng cấu chuyển có thể được hiểu như phép "lấy trung bình theo quỹ đạo" của nhóm, nhờ đó từ mọi đa thức $f \in \mathbb{F}[V]$ ta luôn thu được một bất biến trong $\mathbb{F}[V]^G$. Công cụ này đặc biệt hữu ích trong việc xây dựng bất biến tường minh; hơn nữa, do các toán tử Steenrod giao hoán với tác động của G, nên việc kết hợp Tr^G với các toán tử $\mathcal{P}^i$ (hoặc Sq^i khi $q = 2$) cho phép tạo ra nhiều bất biến bậc cao hơn từ các bất biến cơ bản. Chẳng hạn, nếu $G = \mathbb{Z}/2$ tác động lên $\mathbb{F}_2[x, y]$ bằng cách hoán vị x và y, thì $\mathrm{Tr}^G(x) = x + y \in \mathbb{F}_2[x, y]^G$ là một bất biến tuyến tính, từ đó có thể tiếp tục áp dụng các toán tử Steenrod để sinh ra bất biến bậc cao hơn.

Để minh họa cụ thể cho vai trò của đồng cấu chuyển kết hợp với các toán tử Steenrod, ta xét trường hợp hạng 2 được Goyal [12] nghiên cứu dưới đây.

Ví dụ 1.2.10. Trong trường hợp hạng 2, Goyal [12] đã xây dựng họ các bất biến

$$y_k, \quad 0 \le k \le \frac{q^m - q}{q-1},$$

của không gian $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$, được cho bởi

$$y_k \;=\; \sum_{\substack{i+j=\frac{q^m-q}{q-1}+k \\ k\le i,j\le \frac{q^m-q}{q-1}}} x_1^{i(q-1)}\, x_2^{j(q-1)}.$$

Cụ thể, với $k = 0$ ta có

$$y_0 = x_1^{q^m-q} + x_1^{q^m-q-(q-1)} x_2^{q-1} + \cdots + x_1^{q-1} x_2^{q^m-q-(q-1)} + x_2^{q^m-q},$$

và biểu diễn được bằng định thức

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m} & x_2^{q^m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q} & x_2^{q} \end{vmatrix}}.$$

Tương tự, với $k = 1$ ta có

$$y_1 = x_1^{q^m-q} x_2^{q-1} + x_1^{q^m-q-(q-1)} x_2^{2(q-1)} + \cdots + x_1^{q-1} x_2^{q^m-q},$$

và cũng có thể viết dưới dạng

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m} x_2^{q-1} & x_2^{q^m} x_1^{q-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q} & x_2^{q} \end{vmatrix}}.$$

Từ đó suy ra

$$L_2 y_0 \;=\; x_1 x_2^{q^m} - x_2 x_1^{q^m}.$$

Áp dụng toán tử $\mathcal{P}^1$ cho hai vế, ta được

$$\mathcal{P}^1(L_2y_0) = \mathcal{P}^1(x_1x_2^{q^m} - x_2x_1^{q^m}).$$

Theo công thức Cartan, cùng với việc $\mathcal{P}^1(x_1^{q^m}) = \mathcal{P}^1(x_2^{q^m}) = 0$ và

$$\mathcal{P}^1(L_2) = \mathcal{P}^1(x_1x_2^q - x_2x_1^q) = 0,$$

suy ra

$$L_2\,\mathcal{P}^1(y_0) = \mathcal{P}^1(x_1)\,x_2^{q^m} - \mathcal{P}^1(x_2)\,x_1^{q^m} = x_1^qx_2^{q^m} - x_2^qx_1^{q^m}.$$

Do đó

$$\mathcal{P}^1(y_0) = y_1.$$

1.3. Hệ số nhị thức

Hệ số nhị thức là một khái niệm trung tâm của tổ hợp và số học, không chỉ phản ánh các đặc trưng đếm cổ điển như số tập con hay số phân hoạch, mà còn xuất hiện sâu sắc trong hình học đại số và biểu diễn các nhóm đại số tuyến tính. Trong mục này, chúng tôi giới thiệu ba loại hệ số nhị thức quan trọng q-hệ số nhị thức, (q,t)-hệ số nhị thức, và (q,t)-đa hệ số nhị thức, được phát triển nhằm mở rộng khái niệm cổ điển và làm phong phú thêm nội dung tổ hợp đại số liên quan.

Đặc biệt, hệ số nhị thức dạng (q,t) đóng vai trò then chốt trong việc mô tả các chuỗi Hilbert-Poincaré liên quan đến không gian bất biến dưới tác động của các nhóm con parabolic của GL_n. Kết quả nổi bật trong hướng tiếp cận này là giả thuyết của Lewis-Reiner-Stanton, phát biểu mối liên hệ giữa chuỗi Hilbert-Poincaré của các không gian bất biến với tổ hợp các hệ số (q,t)-nhị thức và (q,t)-đa nhị thức sẽ được trình bày trong phần sau.

1.3.1. q-hệ số nhị thức

Định nghĩa 1.3.1 (Định nghĩa 1.1 [28]). q-hệ số nhị thức của cặp số nguyên k và n sao cho $0 \leq k \leq n$ và hệ số bất định q được xác định bởi công thức

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q)_n}{(q)_k\,(q)_{n-k}},$$

ở đó $(q)_n = (1-q)\left(1-q^2\right)\cdots(1-q^n)$.

Chú ý 1.3.2. i) Theo Công thức 1.2 [9] thì q-hệ số nhị thức là đa thức ẩn q với hệ số nguyên không âm

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{\omega \in \Omega_{n,k}} q^{\mathrm{inv}(\omega)},$$

với $\Omega_{n,k}$ là tập hợp các từ $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{0,1\}^n$ gồm k số 1 và $n-k$ số 0 và $\mathrm{inv}(\omega)$ là số các nghịch thế trong ω, tức là cặp (i,j) với $1 \leq i < j \leq n$ sao cho $\omega_i = 1$ và $\omega_j = 0$.

ii) Khi q là lũy thừa của một số nguyên tố thì $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ là số các $\mathbb{F}_q$-không gian con k-chiều trong không gian véctơ n-chiều $\mathbb{F}_q^n$.

1.3.2. (q,t)–hệ số nhị thức

Khi làm việc với các vành phân bậc trên trường $\mathbb{F}_q$, chúng ta cần lưu giữ thông tin về bậc cũng như về số chiều tại bậc tương ứng, vì thế (q,t)-hệ số nhị thức xuất hiện một cách tự nhiên. Khi cho giới hạn $t \to 1$, chúng ta sẽ thu lại được phiên bản q đếm số phần tử của một tập hợp liên quan tới tác động của $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Còn khi cho $q \to 1$, ta sẽ thu được chuỗi Hilbert, theo biến t, của một không gian véctơ phân bậc liên quan tới biểu diễn của nhóm đối xứng Σ_n.

Nếu n là một số nguyên không âm, ta định nghĩa (q,t)-giai thừa của n bởi công thức:

$$n!_{q,t} = (1 - t^{q^n - 1})(1 - t^{q^n - q}) \cdots (1 - t^{q^n - q^{n-1}}).$$

Định nghĩa 1.3.3 (Định nghĩa 1.1 [28])**.** (q,t)-hệ số nhị thức của cặp số nguyên k và n sao cho $0 \leq k \leq n$ và hệ số bất định q được xác định bởi công thức

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{n!_{q,t}}{k!_{q,t}.\,(n-k)!_{q,t^{q^k}}},$$

Nói cách khác,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{(1 - t^{q^n - q^0})(1 - t^{q^n - q^1}) \ldots (1 - t^{q^n - q^{k-1}})}{(1 - t^{q^k - q^0})(1 - t^{q^n - q^1}) \ldots (1 - t^{q^k - q^{k-1}})}.$$

Từ các công trình của Dickson cho bất biến của nhóm tuyến tính tổng quát và kết quả của Hewett, Kuhn-Mitchell cho bất biến của các nhóm con parabolic, (q,t)-hệ số nhị thức trên có thể được mô tả bởi công thức liên quan đến bất biến:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{\mathrm{Hilt}(S^{P_k}, t)}{\mathrm{Hilb}(S^G, t)},$$

ở đó $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ và P_k là nhóm con parabolic cực đại của G tương ứng với hợp thành $(k, n-k)$.

Chú ý 1.3.4 (Công thức 1.3 [28])**.** Nếu q là số nguyên dương lớn hơn 1 thì hệ số nhị thức (q,t) là một đa thức theo t với các hệ số không âm. Khi đó, dễ thấy rằng nó chính là q-hệ số nhị thức trong hai trường hợp

$$\lim_{t\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,t} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q} \text{ và } \lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,t^{\frac{1}{q-1}}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{t}.$$

1.3.3. (q,t)–đa hệ số nhị thức

Định nghĩa 1.3.5 (Định nghĩa 1.6 [28])**.** Cho $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ và $\alpha_1 + \ldots + \alpha_l = n$ là một hợp thành của n, (q,t)-đa hệ số nhị thức của n và α được xác định bởi công thức

$$\begin{bmatrix} n \\ \alpha \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}\left(1 - t^{q^n - q^j}\right)}{\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=0}^{\alpha_i - 1}\left(1 - t^{q^{A_i} - q^{A_{i-1}+j}}\right)}, \text{ với } A_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k.$$

Ví dụ 1.3.6. Khi $n = 6$ và $\alpha = (2,3,1)$ thì

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 6 \\ (2,3,1) \end{bmatrix}_{q,t} &= \frac{(1 - t^{q^6-1})(1 - t^{q^6-q}) \cdots (1 - t^{q^6-q^5})}{(1 - t^{q^2-1})(1 - t^{q^2-q})(1 - t^{q^5-q^2})(1 - t^{q^5-q^3})(1 - t^{q^5-q^4})(1 - t^{q^5-q^5})} \\ &= \frac{(1 - t^{q^6-1})(1 - t^{q^6-q}) \cdots (1 - t^{q^6-q^4})}{(1 - t^{q^2-1})(1 - t^{q^2-q})(1 - t^{q^5-q^2})(1 - t^{q^5-q^3})(1 - t^{q^5-q^4})} \end{aligned}$$

Một trong những ứng dụng nổi bật của (q,t)-hệ số nhị thức là khả năng biểu diễn tường minh các chuỗi Hilbert-Poincaré của các không gian bất biến dưới tác động của nhóm con parabolic của nhóm tổng quát tuyến tính. Cụ thể, công trình của Lewis-Reiner-Stanton [19] đã chỉ ra rằng chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian véctơ phân bậc tương ứng với không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)$ có thể được mô tả thông qua tổ hợp các (q,t)-hệ số nhị thức.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày chi tiết của giả thuyết Lewis-Reiner-Stanton, cùng với các công thức minh họa và ví dụ cụ thể cho trường hợp nhóm con parabolic.

1.4. Giả thuyết của Lewis - Reiner - Stanton về chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của nhóm con parabolic

Giả thuyết của Lewis - Reiner - Stanton được hình thành dựa trên các tính chất của số q-Catalan và số q-Fuss Catalan, liên kết chuỗi Hilbert-Poincaré với các không gian bất biến trong lý thuyết biểu diễn của các đại số Cherednik hữu tỷ và các nhóm phản xạ phức. Một số kết quả sơ bộ liên quan đến hai giả thuyết này đã được tìm ra, ví dụ như trong các công trình của Drescher-Shepler [8], Goyal [12] và bài báo [19]. Tuy nhiên, cách mà các đối tượng tổ hợp xuất hiện trong chuỗi này vẫn còn là một điều bí ẩn và chưa được giải thích đầy đủ.

Gọi $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ là một hợp thành của n và ký hiệu P_α là nhóm con parabolic tương ứng trong $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, tức là nhóm các ma trận khối tam giác trên có kích thước khối theo α

$$P_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1\ell} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2\ell} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{\ell\ell} \end{pmatrix} : A_{ii} \in \mathrm{GL}_{\alpha_i}(\mathbb{F}_q) \right\}.$$

Lewis, Reiner và Stanton [19] đã đề xuất một loạt các giả thuyết về chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)$ với m bất kỳ và hợp thành α bất kỳ của n dựa trên hệ số nhị thức (q,t) được giới thiệu trong [28].

Dựa trên các quan sát thực nghiệm và mô hình tổ hợp liên quan đến các hệ số (q,t)-nhị thức, Lewis, Reiner và Stanton đã phát biểu hai giả thuyết quan trọng mô tả cấu trúc của chuỗi Hilbert-Poincaré của các không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của nhóm tổng quát tuyến tính và các nhóm con parabolic của nó.

Giả thuyết đầu tiên liên quan đến trường hợp nhóm tuyến tính tổng quát GL_n, trong khi giả thuyết thứ hai mở rộng sang trường hợp tổng quát hơn với các nhóm con parabolic tương ứng với các hợp thành α của n. Cả hai giả thuyết đều sử dụng (q,t)-hệ số nhị thức và (q,t)-đa hệ số nhị thức như công cụ tổ hợp then chốt để mô tả hàm sinh phân bậc tương ứng với không gian bất biến.

Chúng tôi trình bày phát biểu tường minh của hai giả thuyết nêu trên cùng với công thức cụ thể cho từng trường hợp.

Giả thuyết 1.4.1 (Giả thuyết 1.1 [19]). *Chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ phân bậc của các* GL*-bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}}$ là chuỗi lũy thừa $C_{n,m}(t)$ xác định bởi công thức*

$$Hilb\left(\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}}, t\right) = C_{n,m}(t) = \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} t^{(n-k)\left(q^m-q^k\right)} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q,t}.$$

Giả thuyết 1.4.2 (Giả thuyết Parabolic 1.5 [19]). *Cho n là số nguyên dương, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ là một hợp thành của n và gọi P_α là nhóm con parabolic tương ứng của $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ phân bậc của các P_α-bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ là chuỗi lũy thừa $C_{\alpha,m}(t)$ xác định bởi công thức*

$$Hilb\left(\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}, t\right) = C_{\alpha,m}(t) = \sum_{\beta \le \alpha, |\beta| \le m} t^{e(m,\alpha,\beta)} \begin{bmatrix} m \\ \beta, m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t},$$

ở đó $e(m,\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{l} (\alpha_i - \beta_i)\left(q^m - q^{B_i}\right)$ và $B_i = \beta_1 + \cdots + \beta_i$.

Ví dụ 1.4.3. Khi $m \ge n = 2$ và $\alpha = (1,1)$ thì P_α là nhóm con Borel B_2 của $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ và $\beta \in \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Theo giả thuyết thì chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_2}$ là

$$t^{2(q^m-1)} + t^{q^m-1}\frac{1-t^{q^m-1}}{1-t^{q-1}} + t^{q^m-q}\frac{1-t^{q^m-1}}{1-t^{q-1}} + \frac{\left(1-t^{q^m-1}\right)\left(1-t^{q^m-q}\right)}{\left(1-t^{q-1}\right)\left(1-t^{q^2-q}\right)}.$$

Chương 2

Bất biến của vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius dưới tác động của nhóm con Borel

Trong chương này chúng tôi giới thiệu toán tử δ, một biến thể của hàm Schur theo Macdonald [20], lấy cảm hứng từ cách xây dựng các đa thức Dickson. Toán tử này cho phép tạo ra các bất biến bậc cao từ các bất biến bậc thấp đã biết, mở rộng khả năng xây dựng bất biến của vành đa thức $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của nhóm con Borel.

Trên cơ sở toán tử δ, chúng tôi định nghĩa các hàm hữu tỷ $Y(I;J)$ gắn với hai dãy I, J cho trước. Bằng việc phân tích các tính chất của δ, chúng tôi chỉ ra rằng các hàm $Y(I;J)$ là đa thức và hơn nữa các đa thức này bất biến dưới tác động của nhóm con Borel B_n. Đây là bước trung gian quan trọng để kết nối giữa việc xây dựng toán tử δ và việc hình thành các hệ cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$.

Tiếp theo, chúng tôi xây dựng hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$ theo phương pháp quy nạp, trong đó bao hàm các đa thức $Y(I;J)$ với I, J thỏa mãn những điều kiện xác định. Chúng tôi chứng minh rằng hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$ tạo thành một cơ sở tuyến tính của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$.

Cuối cùng, dựa trên cơ sở này, chúng tôi xác định chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ và chứng minh giả thuyết của Lewis-Reiner-Stanton [19] trong trường hợp nhóm con Borel.

2.1. Toán tử δ và một số tính chất

Với mỗi $1 \leq k \leq n$, ta định nghĩa

$$L_k = L_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = \det\left(x_j^{q^{i-1}}\right)_{1\leq i,j\leq k}$$

và

$$V_k = V\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) = \prod_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{k-1}\in\mathbb{F}_q}\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{k-1}x_{k-1} + x_k\right).$$

Ta có $V_k = \dfrac{L_k}{L_{k-1}}$ và biểu diễn

$$V\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, X\right) = X^{q^k} + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\, Q_{k,i}\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right) X^{q^i},$$

trong đó $Q_{k,i}$ là các đa thức bất biến Dickson. Vì số mũ của X trong biểu thức này là các lũy thừa của q, nên $V\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, X\right)$ thỏa mãn điều kiện "tuyến tính"

$$V\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, aX + bY\right) = aV\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, X\right) + bV\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, Y\right),$$

với mọi $a, b \in \mathbb{F}_q$. Với $I = (i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$ là tập con của $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, ta ký hiệu

$$L(I) = L\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\right).$$

Với hai tập con I, J của $[n]$, ta định nghĩa

$$V(J, I) = \prod_{i\in I} V(J, i),$$

với $V(J,i) = V(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_k}, x_i)$ nếu $J = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$. Ta quy ước $V(J,\varnothing) = 1$. Chú ý rằng thứ tự các phần tử trong I và J không ảnh hưởng đến giá trị của $V(J,I)$. Ngoài ra, nếu $I \cap J \neq \varnothing$, thì $V(J,I) = 0$.

Như đã trình bày ở phần trước, để xây dựng các bất biến hạng cao từ các bất biến hạng thấp, ta cần một công cụ toán học cho phép thao tác có kiểm soát trên cấu trúc đa thức. Toán tử δ dưới đây được định nghĩa nhằm thực hiện mục tiêu đó.

Định nghĩa 2.1.1. Cho a, b, c là ba số nguyên dương sao cho $1 \leq a \leq c+1$, định nghĩa toán tử $\delta_{a;b}$ xác định bởi công thức

$$\delta_{a;b} : \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_c] \to \mathbb{F}_q(x_1, \ldots, x_{c+1}),$$

sao cho với $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_c]$ thì

$$\delta_{a;b}(f) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_a \\ x_1^q & \cdots & x_a^q \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ x_1^{q^{a-2}} & \cdots & x_a^{q^{a-2}} \\ x_1^{q^b} f(\widehat{x_1}, x_2, \ldots, x_{c+1}) & \cdots & x_a^{q^b} f(x_1, \ldots, \widehat{x_a}, \ldots, x_{c+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_a \\ x_1^q & \cdots & x_a^q \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ x_1^{q^{a-1}} & \cdots & x_a^{q^{a-1}} \end{vmatrix}}.$$

Ví dụ 2.1.2. i) Ta có $\delta_{1;m}(Q_{1,0}^s) = x_1^{q^m-1} x_2^{s(q-1)}$.

ii) Ta có, khi $s < [m]_q$ thì

$$\begin{aligned}
\delta_{2;m}(Q_{1,0}^s) &= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m} x_2^{s(q-1)} & x_2^{q^m} x_1^{s(q-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^q & x_2^q \end{vmatrix}} \\
&= \frac{x_2^{q^m-1} x_1^{s(q-1)} - x_1^{q^m-1} x_2^{s(q-1)}}{x_2^{q-1} - x_1^{q-1}} \\
&= x_1^{q^m-q} x_2^{s(q-1)} + x_1^{q^m-q-(q-1)} x_2^{(s+1)(q-1)} + \ldots + x_1^{s(q-1)} x_2^{q^m-q} \\
&= y_s \quad \text{(Theo cách xây dựng của Goyal [12]).}
\end{aligned}$$

Tương tự,

$$\delta_{2;m}(Q_{1,0}^{[m]_q}) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m} x_2^{q^m-1} & x_2^{q^m} x_1^{q^m-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^q & x_2^q \end{vmatrix}} = x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^q & x_2^q \end{vmatrix}} = 0.$$

Hay,

$$\delta_{2;m}\left(Q_{1,0}^{[m]_q+1}\right) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m} x_2^{q^m-1+q-1} & x_2^{q^m} x_1^{q^m-1+q-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^q & x_2^q \end{vmatrix}} = -x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} = -\delta_1^2(1).$$

Các trường hợp khác thì $\delta_{2;m}(Q_{1,0}^s)$ là tầm thường.

iii) Ta có, khi $m \geq 2$ thì

$$
\begin{aligned}
\delta_{3;m}(Q_{2,1}) &= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} Q_{2,1}(x_2,x_3) & x_2^{q^m} Q_{2,1}(x_1,x_3) & x_3^{q^m} Q_{2,1}(x_1,x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^2} & x_2^{q^2} & x_3^{q^2} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{q^2} & x_2^{q^2} & x_3^{q^2} \\ x_1^{q^m} & x_2^{q^m} & x_3^{q^m} \end{vmatrix}}{L_3} = \frac{[0,2,m]}{[0,1,2]} = S_{(0,1,m-2)}.
\end{aligned}
$$

Tương tự,

$$
\begin{aligned}
\delta_{3;m}(Q_{2,0}) &= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} Q_{2,0}(x_2,x_3) & x_2^{q^m} Q_{2,0}(x_1,x_3) & x_3^{q^m} Q_{2,0}(x_1,x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^2} & x_2^{q^2} & x_3^{q^2} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^2} & x_2^{q^2} & x_3^{q^2} \\ x_1^{q^m} & x_2^{q^m} & x_3^{q^m} \end{vmatrix}}{L_3} = \frac{[1,2,m]}{[0,1,2]} = S_{(1,1,m-2)}.
\end{aligned}
$$

Đặc biệt,

$$\delta_{3;m}(1) = \frac{[0,1,m]}{[0,1,2]} = S_{(0,0,m-2)}.$$

Ở đây, các ký hiệu S_λ với $\lambda = (0,1,m-2), (1,1,m-2), (0,0,m-2)$ được hiểu theo Biến thể 7 của hàm Schur được Macdonald xây dựng [20]. Trong đó,

$$[a,b,c] := \begin{vmatrix} x_1^{q^a} & x_2^{q^a} & x_3^{q^a} \\ x_1^{q^b} & x_2^{q^b} & x_3^{q^b} \\ x_1^{q^c} & x_2^{q^c} & x_3^{q^c} \end{vmatrix}$$

và

$$S_{(r,s,t)} := \frac{[r,s+1,t+2]}{[0,1,2]}.$$

iv) Trường hợp đặc biệt, khi $f = 1$ thì

$$\delta_{a;b}(1) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_a \\ x_1^q & \dots & x_a^q \\ \dots & \ddots & \dots \\ x_1^{q^{a-2}} & \dots & x_a^{q^{a-2}} \\ x_1^{q^b} & \dots & x_a^{q^b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_a \\ x_1^q & \dots & x_a^q \\ \dots & \ddots & \dots \\ x_1^{q^{a-1}} & \dots & x_a^{q^{a-1}} \end{vmatrix}} = \frac{[0,1,\dots,a-2,b]}{[0,1,\dots,a-1]}.$$

Vì vậy, $\delta_{a,b}(1) = S_\lambda$ với $\lambda = (0,\dots,0,b-a+1)$. Đặc biệt, $\delta_{a,a} = \frac{[0,1,\dots,a-2,a]}{[0,1,\dots,a-1]} = Q_{a,a-1}$ và ta ký hiệu

$$D_a = \delta_{a,a} = Q_{a,a-1}.$$

Các nhận xét đơn giản sau đây giúp làm rõ cách thức tác động của toán tử δ, cũng như ảnh hưởng của nó đến bậc của các đa thức liên quan.

Nhận xét 2.1.3. i) Nếu $\delta_{a;b}(f)$ là đa thức thì tác động của toán $\delta_{a;b}$ lên đa thức f làm tăng bậc của f lên $q^b - q^{a-1}$ đơn vị, cụ thể

$$\deg(\delta_{a;b}(f)) = \deg(f) + q^b - q^{a-1}.$$

Đặc biệt, khi $a = 1$ thì $\delta_{1;b}\left(f\left(x_1, \ldots, x_c\right)\right) = x_1^{q^b-1} f\left(x_2, \ldots, x_{c+1}\right).$

ii) Khi b cố định, để cho gọn ta viết δ_{r+1} thay vì $\delta_{r+1;b}$. Khai triển theo hàng cuối cùng định thức trên tử số của $\delta_{r+1}\left(f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)\right)$ cho ta biểu diễn của $\delta_{r+1}(f)$ như sau,

$$
\begin{aligned}
&\delta_{r+1}\left(f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)\right) = \\
= &\sum_{j=1}^{r+1} \frac{(-1)^{r+1+j} x_j^{q^b} f\left(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{k+1}\right) L\left(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{k+1}\right)}{L\left(x_1, \ldots, x_{r+1}\right)} \\
= &\sum_{j=1}^{r+1} \frac{x_j^{q^b} f\left(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{k+1}\right)}{V\left(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+1}, x_j\right)}.
\end{aligned}
$$

iii) Tiếp tục, ta có

$$
\begin{aligned}
&\delta_{r+1}^2\left(f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)\right) = \\
= &\sum_{j=1}^{r+1} \frac{x_j^{q^b}}{V\left(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+1}, x_j\right)} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r+2} \frac{x_i^{q^b} f\left(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{k+2}\right)}{V\left(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+2}, x_i\right)} \\
= &\sum_{j=1}^{r+1} \frac{(-1)^{r+1+j} x_j^{q^b} L(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+1})}{L\left(x_1, \ldots, x_{r+1}\right)} \\
&\qquad \times \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r+2} \frac{x_i^{q^b} f\left(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{k+2}\right)}{V\left(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+2}, x_i\right)} \\
= &\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{r+2} \left(\sum_{\substack{l \in \{i,j\} \\ l \in [r+1]}} \frac{(-1)^{r+1+l} L(x_1, \ldots, \widehat{x_l}, \ldots, x_{r+1}) V\left(\ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_l\right)}{L\left(x_1, \ldots, x_{r+1}\right)} \right) \\
&\times \frac{x_i^{q^b} x_j^{q^b} f\left(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{k+2}\right)}{V\left(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+2}, x_i\right) V\left(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+2}, x_j\right)}
\end{aligned}
$$

Trong đó, nếu $l \in [r+1]$ mà $l \neq i$ và $l \neq j$ thì

$$V(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+2}, x_l) = 0.$$

Do đó,

$$\sum_{\substack{l\in\{i,j\}\\ l\in[r+1]}} (-1)^{r+1+l} L(x_1,\ldots,\widehat{x_l},\ldots,x_{r+1}) V\left(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+2},x_l\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{r+1} (-1)^{r+1+l} L(x_1,\ldots,\widehat{x_l},\ldots,x_{r+1}) V\left(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+2},x_l\right).$$

Mặt khác,

$$V\left(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+2},x_l\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} x_l^{q^s} Q_{r,s}(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+2}).$$

Hơn nữa,

$$\sum_{l=1}^{r} (-1)^{r+1+l} x_l^{q^s} L(x_1,\ldots,\widehat{x_l},\ldots,x_{r+1}) = \begin{cases} 0 & \text{khi } \ s<r, \\ L(x_1,\ldots,x_{r+1}) & \text{khi } \ s=r. \end{cases}$$

Vì vậy,

$$\sum_{\substack{l\in\{i,j\}\\ l\in[r+1]}} (-1)^{r+1+l} L(x_1,\ldots,\widehat{x_l},\ldots,x_{r+1}) V\left(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+2},x_l\right) =$$

$$= L(x_1,\ldots,x_{r+1}).$$

Nên ta có

$$\delta_{r+1}^2\left(f\left(x_1,x_2,\ldots,x_k\right)\right) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{r+2} \frac{x_i^{q^b} x_j^{q^b} f(x_1,\ldots,\widehat{x_i}\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{k+2})}{V(x_1,\ldots,\widehat{x_i}\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+2};x_i,x_j)}.$$

Tổng quát hơn, chúng tôi mô tả tác động lặp của toán tử δ, qua đó cho phép biểu diễn một cách tường minh $\delta_{r+1}^h(f)$ theo các tập con của tập chỉ số và các ánh xạ Frobenius tương ứng. Nội dung này được phát biểu cụ thể trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.1.4. *Với f là hàm hữu tỷ có r' ẩn, $r' \geq r$, h là một số nguyên dương. Khi đó, ta có*

$$\delta_{r+1}^{h}(f)(x_1, x_2, \ldots, x_{r'+h}) = \sum_{\substack{I \subset [r+h] \\ |I|=h}} \frac{f(\overline{I})\,\varphi^b(I)}{V(\overline{I}, I)}$$

ở đó $\overline{I}$ là phần bù của I trong $[r+h]$, φ là ánh xạ Frobenius, khi $I = (i_1 < i_2 < \ldots < i_h)$ thì

$$f(\overline{I}) = f\left(x_1, \ldots, \widehat{x_{i_1}}, \ldots, \widehat{x_{i_h}}, \ldots, x_{r+h}, x_{r+h+1}, \ldots, x_{r'+h}\right).$$

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo h. Theo Nhận xét 2.1.3 (iii) thì mệnh đề đúng khi $h = 1$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned}
&\delta_{r+1}\left(\delta_{r+1}^{h}(f)\right) = \\
= &\sum_{j=1}^{r+1} \frac{(-1)^{r+1+j}\, x_j^{q^b} L(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+1})}{L_{r+1}} \delta_{r+1}^{h}(f)(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r'+h+1}) \\
= &\sum_{j=1}^{r+1} \frac{(-1)^{r+1+j}\, x_j^{q^b} L(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+1})}{L_{r+1}} \sum_{\substack{I \subset [r+h+1]\setminus\{j\} \\ |I|=h}} \frac{f(\overline{I})\,\varphi^b(I)}{V(\overline{I}, I)},
\end{aligned}$$

với $\overline{I}$ là phần bù của I trong $[r+h+1]\setminus\{j\}$. Nhận thấy rằng, mỗi tập con J có độ dài $h+1$ của $[r+h+1]$ đều có dạng $J = I \sqcup \{j\}$ với $1 \leq j \leq r+1, I \subset [r+h+1]\setminus\{j\}$ và $|I| = h$. Do đó, biểu thức trên trở thành

$$\begin{aligned}
\delta_{r+1}^{h+1}(f) &= \sum_{\substack{J \subset [r+h+1] \\ |J|=h+1}} \sum_{j \in J \cap [r+1]} \frac{(-1)^{r+1+j} L(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+1})}{L_{r+1}} \cdot \frac{f(\overline{J})\,\varphi^b(J)}{V(\overline{J}, J \setminus \{j\})} \\
&= \sum_{\substack{J \subset [r+h+1] \\ |J|=h+1}} \sum_{j \in J \cap [r+1]} \frac{(-1)^{r+1+j} L(x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{r+1})\, V(\overline{J}, j)}{L_{r+1}} \cdot \frac{f(\overline{J})\,\varphi^b(J)}{V(\overline{J}, J)}
\end{aligned}$$

ở đó, $\overline{J}$ là phần bù của J trong $[r+h+1]$. Do đó, để chỉ ra điều phải chứng minh, ta chỉ cần chỉ ra

$$\sum_{j\in J\cap[r+1]} (-1)^{r+1+j} L\left(x_1,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+1}\right) V\left(\overline{J},j\right) = L_{r+1},$$

với mỗi $j\in[r+1]\setminus J$ và $j\in\overline{J}$ thì $V\left(\overline{J},j\right)=0$. Do đó, vế trái của đẳng thức trên có thể mở rộng cho toàn bộ j chạy trên $[r+1]$. Vì vậy, ta cần phải chứng minh

$$\sum_{j=1}^{r+1}(-1)^{r+1+j} L\left(x_1,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+1}\right) V\left(\overline{J},j\right) = L_{r+1}.$$

Tuy nhiên, từ phương trình cơ bản

$$V\left(\overline{J},j\right) = x_j^{q^r} + \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i} x_j^{q^i} Q_{r,i}\left(\overline{J}\right),$$

và khai triển Laplace

$$\sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{r+1+j} L\left(x_1,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{r+1}\right) x_j^{q^i} = \begin{cases} L_{r+1} & ,i=r \\ 0 & ,i<r \end{cases}.$$

Ta suy ra đẳng thức trên là đúng. Vì vậy, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta xác định tác động lặp của toán tử δ_{r+1}. Chú ý rằng ta có đẳng thức sau

$$V\left(x_1,\ldots,x_s,y\right) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^{s-i} y^{q^i} Q_{s,i}\left(x_1,\ldots,x_s\right).$$

Khi đó, với các ẩn $y_1,\ldots,y_h$ ta có

$$\prod_{j=1}^{h} V\left(x_1,\ldots,x_s,y_j\right) = \sum_{T\in\mathcal{T}(h,s)} \beta_T\left(x_1,\ldots,x_s\right)\cdot\alpha_T\left(y_1,\ldots,y_h\right),$$

với T thuộc tập hữu hạn

$$\mathcal{T}\left(h,s\right) = \left\{\left(t_0,t_1,\ldots,t_s\right) \mid t_0+\ldots+t_s=h, t_i\geq 0, i=1,\ldots,s\right\}.$$

Và

$$\beta_T(x_1, \ldots, x_s) = (-1)^{\sum t_i(s-i)} Q_{s,0}^{t_0} \cdots Q_{s,s}^{t_s},$$

$\alpha_T(y_1, \ldots, y_h)$ là tổng các đơn thức của $y_1, \ldots, y_h$ với các số mũ là lũy thừa của q sao cho q^i xuất hiện t_i lần với $i = 0, \ldots, s$. Do đó, $\alpha_T(y_1, \ldots, y_h)$ là hàm đa tuyến tính, đối xứng và chia hết cho tích $y_1 \cdots y_h$. Đặc biệt, khi $h = 0$ thì tập $\mathcal{T}(h, s)$ chỉ gồm một phần tử sao cho $t_i = 0$ với $i = 1, \ldots, s$. Do đó, trong trường hợp này thì $\alpha_T = \beta_T = 1$.

Tiếp theo, chúng tôi xây dựng biểu thức tổng quát cho tác động của toán tử δ dựa trên cấu trúc của các đa thức Dickson. Điều này giúp hình thức hóa quá trình biểu diễn tác động lặp của toán tử δ.

Định nghĩa 2.1.5. Với mỗi hàm hữu tỷ g gồm $r' \geq r$ ẩn và $T \in \mathcal{T}(s, h)$ ta xác định

$$A_{r;T}(g) = \sum_{I \subset [r+h], |I| = h} \frac{g(\overline{I})\, \alpha_T(I)}{V(\overline{I}, I)},$$

ở đó $\alpha_T(I) = \alpha_T(x_{i_1}, \ldots, x_{i_h})$ khi $I = (x_{i_1} < \ldots < x_{i_h})$. $\overline{I}$ là phần bù của I trong $[r+h]$ và

$$g(\overline{I}) = g\left(x_1, \ldots, \widehat{x_{i_1}}, \ldots, \widehat{x_{i_h}}, \ldots, x_{r+h}, x_{r+h+1}, \ldots, x_{r'+h}\right).$$

Ví dụ sau minh họa một trường hợp đặc biệt của định nghĩa trên, trong đó tác động lặp của toán tử δ chính là trường hợp riêng của toán tử $A_{r;T}(g)$.

Ví dụ 2.1.6. Với $s = b$ và $\tau = (\tau_0 = 0, \ldots, \tau_{s-1} = 0, \tau_s = h)$, theo Mệnh đề 2.1.4, ta có

$$A_{r,\tau}(g) = \delta_{r+1}^h(g).$$

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một kết quả kỹ thuật, giúp làm rõ cách toán tử δ tác động lên các biểu thức đại số. Kết quả này sẽ đóng vai trò quan trọng trong việc thiết lập cơ sở tuyến tính cho không gian các bất biến ở các phần sau.

Mệnh đề 2.1.7. *Cho r, s, k là các số nguyên dương sao cho $r \leq s+k$. Giả sử $f(x_1, \ldots, x_{s'})$ và $g(x_1, \ldots, x_{r'})$ là các hàm hữu tỷ với $r' \geq r, s' \geq s$. Khi đó,*

$$\delta_{r+1}^{h}\left(g \cdot \delta_{s+1}^{k}(f)\right) = \sum_{T \in \mathcal{T}(s,h)} A_{r;T}(g)\, \delta_{s+1}^{h+k}(\beta_T f).$$

Chứng minh. Ta xét trường hợp $s' = s$. Khi $s' > s$, ta chỉ cần sắp xếp lại các ẩn một cách thích hợp và lập luận tương tự.

$$\begin{aligned}
\delta_{r+1}^{h}\left(g \cdot \delta_{s+1}^{k}(f)\right) &= \sum_{\substack{I \subset [r+h] \\ |I|=h}} \frac{g\left(\overline{I}\right)\varphi^{b}(I)}{V\left(\overline{I}, I\right)} \cdot \delta_{s+1}^{k}(f)\left(\overline{I}, r+h+1, \ldots, s+k+h\right) \\
&= \sum_{\substack{I \subset [r+h] \\ |I|=h}} \frac{g\left(\overline{I}\right)\varphi^{b}(I)}{V\left(\overline{I}, I\right)} \cdot \sum_{\substack{J \subset I' \\ |J|=k}} \frac{f(I' \setminus J)\varphi^{b}(J)}{V(I' \setminus J, J)}, \quad \text{với } I' = [s+h+k] \setminus I
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{H \subset [s+h+k] \\ |H|=h+k}} \sum_{\substack{I \subset H \cap [r+h] \\ |I|=h}} \frac{g\left(\overline{I}\right)}{V\left(\overline{I}, I\right)} \cdot \frac{f\left(\overline{H}\right)\varphi^{b}(H)}{V\left(\overline{H}, H\right)} \cdot V\left(\overline{H}, I\right),$$

$$\text{với } H = I \sqcup J, \quad r+h \leq s+k+h.$$

Nếu $I \not\subset H$ thì $\overline{H} \cap I \neq \varnothing$ nên $V\left(\overline{H}, I\right) = 0$. Do đó, điều kiện $I \subset H \cap [r+h]$ có thể thay bằng $I \subset [r+h]$. Vì vậy,

$$\begin{aligned}
\delta_{r+1}^{h}\left(g \cdot \delta_{s+1}^{k}(f)\right) &= \sum_{\substack{H \subset [s+h+k] \\ |H|=h+k}} \sum_{\substack{I \subset [r+h] \\ |I|=h}} \frac{g\left(\overline{I}\right)}{V\left(\overline{I}, I\right)} \cdot \frac{f\left(\overline{H}\right)\varphi^{b}(H)}{V\left(\overline{H}, H\right)} \cdot V\left(\overline{H}, I\right) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}(h,s)} \sum_{\substack{H \subset [s+h+k] \\ |H|=h+k}} \sum_{\substack{I \subset [r+h] \\ |I|=h}} \frac{g\left(\overline{I}\right)\ \alpha_T(I)}{V\left(\overline{I}, I\right)} \cdot \frac{\beta_T\left(\overline{H}\right)\ f\left(\overline{H}\right)\ \varphi^{b}(H)}{V\left(\overline{H}, H\right)}
\end{aligned}$$

Theo Định nghĩa 2.1.5, ta có:

$$\sum_{\substack{I \subset [r+h] \\ |I|=h}} \frac{g\left(\overline{I}\right)\ \alpha_T(I)}{V\left(\overline{I}, I\right)} = A_{r;T}(g).$$

Mặt khác, theo Mệnh đề 2.1.4, ta có:

$$\sum_{\substack{H\subset[s+h+k]\\|H|=h+k}} \frac{\beta_T\left(\overline{H}\right) f\left(\overline{H}\right) \varphi^b(H)}{V\left(\overline{H}, H\right)} = \delta_{s+1}^{h+k}(\beta_T f).$$

Từ đó, ta suy ra

$$\delta_{r+1}^{h}\left(g\cdot\delta_{s+1}^{k}(f)\right) = \sum_{T\in\mathcal{T}(s,h)} A_{r;T}(g)\,\delta_{s+1}^{h+k}(\beta_T f).$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. □

2.2. Xây dựng hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$

Trong phần này, chúng tôi xây dựng một hệ các phần tử tạo nên cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ trong trường hợp nhóm con parabolic đặc biệt $\mathrm{P}_\alpha = \mathrm{B}_n$. Trước hết, chúng tôi định nghĩa các biểu thức dạng $Y_b(I;J)$ đóng vai trò cơ bản trong quá trình xây dựng hệ cơ sở.

Định nghĩa 2.2.1. Với hai dãy $I = (i_1, \ldots, i_k)$ và $J = (j_1, \ldots, j_k)$ các số nguyên không âm, định nghĩa hàm hữu tỷ

$$Y_b(I;J) = \delta_{1;b}^{i_1}\left(D_1^{j_1}\delta_{2;b}^{i_2}\left(D_2^{j_2}\cdots\delta_{k;b}^{i_k}\left(D_k^{j_k}\right)\cdots\right)\right),$$

ở đó $D_a = \delta_{a;a}(1)$ và $\Phi Y_b(I;J) = Y_{b+1}(0,I;0,J)$, tức là

$$\Phi Y_b(I;J) = \delta_{2;b+1}^{i_1}\left(D_2^{j_1}\delta_{3;b+1}^{i_2}\left(D_3^{j_2}\cdots\delta_{k+1;b+1}^{i_k}\left(D_{k+1}^{j_k}\right)\cdots\right)\right).$$

Tiếp theo, chúng tôi xây dựng tập hợp $\mathcal{B}_m(1^n)$ gồm các phần tử được tạo thành từ các biểu thức $Y_b(I;J)$ như trên, bằng cách sử dụng phương pháp quy nạp.

Định nghĩa 2.2.2. Với $n \geq 1$ và $m \geq 0$, tập hợp $\mathcal{B}_m(1^n)$ được xác định bằng cách quy nạp như sau.

i) $\mathcal{B}_0(1^n) = \{1\}$ với mọi $n \geq 1$.

ii) $\mathcal{B}_m(1) = \left\{D_1^a \mid a \leq [m]_q\right\}$, với mọi $m \geq 0$.

iii) $\mathcal{B}_m(1^n) = \left\{\delta_{1;m}(Y) \mid Y \in \mathcal{B}_m(1^{n-1})\right\} \bigsqcup \left\{D_1^a\Phi(Y) \mid a < [m]_q,\ Y \in \mathcal{B}_{m-1}(1^{n-1})\right\}$.

Ở đó, $[a]_q = \frac{q^a-1}{q-1}$.

Từ định nghĩa trên, chúng tôi mô tả cụ thể hơn cấu trúc của tập hợp $\mathcal{B}_m(1^n)$ thông qua phân hoạch rời rạc thành các lớp con $\mathcal{B}_m^k(1^n)$ như sau.

Mệnh đề 2.2.3. *$\mathcal{B}_m(1^n)$ là hợp rời rạc $\bigsqcup_{k=1}^{min(n,m+1)} \mathcal{B}_m^k(1^n)$, ở đó các tập hợp $\mathcal{B}_m^k(1^n)$ là tập hợp chứa tất cả các phần tử $Y_m(I,J)$ mà hai dãy $I = (i_1, \ldots, i_k)$ và $J = (j_1, \ldots, j_k)$ thỏa mãn các điều kiện*

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_k = n - k, \\ j_1 < [m]_q, \ldots, j_{k-1} < [m-k+2]_q, j_k \leq [m-k+1]_q. \end{cases}$$

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo n. Với $n = 1$ thì hai dãy $I = (i_1)$ và $J = (j_1)$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} i_1 = 1 - 1 = 0. \\ j_1 \leq [m-1+1]_q = [m]_q. \end{cases}$$

Khi đó,

$$\mathcal{B}_m(1^n) = \bigsqcup_{k=1}^{min(n,m+1)} \mathcal{B}_m^k(1^n) = \mathcal{B}_m^1(1^n) = \left\{D_1^a \mid a \leq [m]_q\right\}.$$

Vì vậy, mệnh đề đúng với $n = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $n - 1$. Khi đó,

$$\mathcal{B}_m\left(1^{n-1}\right) = \bigsqcup_{k=1}^{min(n-1,m+1)} \mathcal{B}_m^k\left(1^{n-1}\right).$$

Ở đó, $\mathcal{B}_m^k\left(1^{n-1}\right)$ chứa các đa thức $Y(I;J)$ với $I = (i_1, \ldots, i_k)$ và $J = (j_1, \ldots, j_k)$

thỏa mãn

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_k = n - 1 - k, \\ j_1 < [m]_q, \ldots, j_{k-1} < [m-k+2]_q, j_k \leq [m-k+1]_q. \end{cases}$$

Khi đó, $\delta_{1,m}\left(\mathcal{B}_m^k\left(1^{n-1}\right)\right)$ là tập hợp các $Y(I;J)$ với $I = (i_1, \ldots, i_k)$ và $J = (j_1, \ldots, j_k)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} i_1 + \cdots + i_k = n - k, \\ i_1 \geq 1, \\ j_1 < [m]_q, \ldots, j_{k-1} < [m-k+2]_q, j_k \leq [m-k+1]_q. \end{cases}$$

Tiếp theo, $D_1^a\Phi\left(\mathcal{B}_{m-1}\left(1^{n-1}\right)\right)$ với $a < [m]_q$ là tập hợp gồm các phần tử

$$D_1^a\Phi\left(\mathcal{B}_{m-1}\left(1^{n-1}\right)\right) = \left\{D_1^a\Phi Y(I;J) \mid Y(I;J) \in \mathcal{B}_{m-1}\left(1^{n-1}\right)\right\},$$

với $I = \left(i'_1, \ldots, i'_{k-1}\right)$ và $J = \left(j'_1, \ldots, j'_{k-1}\right)$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} i'_1 + \cdots + i'_{k-1} = n - 1 - (k-1) = n - k, \\ j'_1 < [m-1]_q, \ldots, j'_{k-1} \leq [m-1-(k-1)+1]_q = [m-k+1]_q. \end{cases}$$

Cụ thể,

$$Y(I;J) = \delta_{1;m-1}^{i'_1}\left(D_1^{j'_1}\delta_{2;m-1}\left(D_2^{j'_2}\cdots\delta_{k-1;m-1}\left(D_{k-1}^{j'_{k-1}}\right)\cdots\right)\right)$$

và

$$\Phi Y(I;J) = \delta_{2;m}^{i'_1}\left(D_2^{j'_1}\delta_{3;m}\left(D_3^{j'_2}\cdots\delta_{k;m}\left(D_k^{j'_{k-1}}\right)\cdots\right)\right).$$

Khi đó,

$$D_1^a\Phi Y(I;J) = \delta_{1;m}^0\left(D_1^a\delta_{2;m}^{i'_1}\left(D_2^{j'_1}\delta_{3;m}\left(D_3^{j'_2}\cdots\delta_{k;m}\left(D_k^{j'_{k-1}}\right)\cdots\right)\right)\right) = Y\left(I';J'\right),$$

sao cho $I' = \left(0, i_1', \ldots, i_{k-1}'\right)$ và $J' = \left(a, j_1', \ldots, j_{k-1}'\right)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 + i_1' + \cdots + i_{k-1}' = n - k, \\ a < [m]_q, j_1' < [m-1]_q, \ldots, j_{k-1}' \leq [m-k+1]_q. \end{cases}$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. □

2.3. Tính đa thức của Y

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh rằng họ các hàm hữu tỷ $Y_m(I, J)$ thực chất là các đa thức. Trước khi đi vào chứng minh chính, chúng tôi thiết lập một số khái niệm trung gian và kết quả hỗ trợ nhằm mô tả chính xác tác động của các toán tử trong định nghĩa của $Y_m(I, J)$.

Đầu tiên, chúng tôi mở rộng khái niệm tác động của toán tử δ thông qua việc định nghĩa một *tích chập* hai hàm hữu tỷ, cho phép biểu diễn các tác động lặp của toán tử δ dưới dạng đại số thuận tiện hơn.

Định nghĩa 2.3.1. Với hai hàm hữu tỷ $f(x_1, \ldots, x_r)$ và $g(x_1, \ldots, x_h)$, tích chập của f và g được định nghĩa bởi công thức

$$f \bullet g = \sum_{I \sqcup J = [r+h], |I|=r, |J|=h} \frac{f(I)\, g(J)}{V(I, J)}.$$

Tiếp theo, chúng tôi minh họa cách mà các toán tử như δ_{r+1}^h và $A_{r;T}$ có thể được biểu diễn thông qua tích chập qua các ví dụ sau.

Ví dụ 2.3.2. i) Theo Mệnh đề 2.1.4, ta có

$$\delta_{r+1}^h(f)(x_1, x_2, \ldots, x_{r'+h}) = \sum_{I \subset [r+h], |r|=h} \frac{f\left(\overline{I}\right) \varphi^b(I)}{V\left(\overline{I}, I\right)}.$$

Vì vậy,

$$\delta_{r+1}^h(f)(x_1, x_2, \ldots, x_{r'+h}) = f \bullet \varphi_h^b.$$

Ở đó, φ_h là ánh xạ lũy thừa Frobenius với h ẩn.

ii) Theo Định nghĩa 2.1.5, ta có

$$A_{r;T}(g) = \sum_{I \subset [r+h], |I|=h} \frac{g\left(\overline{I}\right) \alpha_T(I)}{V\left(\overline{I}, I\right)}.$$

Vì vậy,

$$A_{r;T}(g) = g \bullet \alpha_T.$$

Từ hai ví dụ trên, ta thấy rằng nhiều biểu thức hình thành trong định nghĩa của Y đều có thể biểu diễn thông qua các tích chập giữa các hàm hữu tỷ. Trong mệnh đề tiếp theo, chúng tôi đưa ra các điều kiện cụ thể của f và g để đảm bảo rằng tích chập giữa hai đa thức như vậy là đa thức.

Mệnh đề 2.3.3. *Nếu đa thức $f(x_1, \ldots, x_s)$ là GL_s-bất biến và $g(x_1, \ldots, x_{k-s})$ là đa thức đối xứng, đa tuyến tính và chia hết cho $x_1 \cdots x_{k-s}$ thì $f \bullet g$ là đa thức trong $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_k]$.*

Chứng minh. Với mỗi $I \subset [k]$, đặt $V(I, J)$ là tích của các nhân tử tuyến tính có dạng

$$x_j + \sum_{i \in I} \lambda_i x_i, \quad j \in J, \lambda_i \in \mathbb{F}_q.$$

Để chứng minh rằng $f \bullet g$ là đa thức trong $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_k]$, ta sẽ chỉ ra rằng bất kỳ nhân tử tuyến tính như trên đều không xuất hiện trong $f \bullet g$ sau khi quy đồng mẫu số chung và thu gọn. Hơn nữa, do tính đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta sẽ chứng minh điều này với dạng tuyến tính

$$\omega = x_{a+1} + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_a x_a,$$

ở đó $a \leq s$, và tất cả các $\lambda_i \neq 0$ với mọi $1 \leq i \leq a$. Ta nhận thấy rằng, $V\left(I, \overline{I}\right)$ chứa ω nếu và chỉ nếu I chứa $\left\{1, \ldots, \widehat{i}, \ldots, a+1\right\}$ nhưng không chứa i với $1 \leq i \leq a+1$. Như vậy, I có dạng $I = [a+1] \setminus \{i\} \cup K$ với $K \subset [k]$ sao cho $|K| = s - a$ và

$[a+1]\cap K=\varnothing$. Như vậy, ta chỉ cần xét các tổng của $f\bullet g$ ứng với các tập con

$$\sum_{\substack{|K|=s-a\\ [a+1]\cap K=\varnothing}}\sum_{i=1}^{a+1}\frac{f\left([a+1]\setminus\{i\}\cup K\right)g\left(\overline{K}\setminus[a+1]\cup\{i\}\right)}{V\left([a+1]\setminus\{i\}\cup K,\{i\}\right)V\left([a+1]\setminus\{i\}\cup K,\overline{K}\setminus[a+1]\right)}. \tag{2.1}$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{1}{V\left([a+1]/\{i\}\cup K,\{i\}\right)}=\frac{L\left([a+1]/\{i\}\cup K\right)}{L\left([a+1]/\{i\}\cup K\cup\{i\}\right)}.$$

Do đó, bằng cách sắp xếp lại các cột theo thứ tự và lưu ý rằng các phần tử của K đều lớn hơn $a+1$, ta có

$$L\left([a+1]/\{i\}\cup K\cup\{i\}\right)=\begin{cases}(-1)^{s-i}L\left([a+1]\cup K\right) & i\le a\\ (-1)^{s-a}L\left([a+1]\cup K\right) & i=a+1\end{cases}.$$

Do đó, thừa số này ở các mẫu số trong công thức (2.1) chứa ω (bội 1), trong khi đó các thành phần $V\left([a+1]/\{i\}\cup K,\overline{K}/[a+1]\right)$ không chứa ω với mọi $1\le i\le a+1$. Vì vậy, cố định K thì các hạng tử trong công thức 2.1 được biểu diễn thành

$$\frac{1}{L\left([a+1]\cup K\right)}\times\left[\sum_{i=1}^{a}\frac{(-1)^{s-i}f\left([a+1]/\{i\}\cup K\right)g\left(\overline{K}/[a+1]\cup\{i\}\right)L\left([a+1]/\{i\}\cup K\right)}{V\left([a+1]/\{i\}\cup K,\overline{K}/[a+1]\right)}+\frac{(-1)^{s-a}f\left([a]\cup K\right)g\left(\overline{K}/[a+1]\cup\{a+1\}\right)L\left([a]\cup K\right)}{V\left([a]\cup K,\overline{K}/[a+1]\right)}\right].$$

Do đó, ta chỉ cần chỉ ra rằng với mỗi K cố định thì tổng

$$\sum_{i=1}^{a}\frac{(-1)^{s-i}f\left([a+1]/\{i\}\cup K\right)g\left(\overline{K}/[a+1]\cup\{i\}\right)L\left([a+1]/\{i\}\cup K\right)}{V\left([a+1]/\{i\}\cup K,\overline{K}/[a+1]\right)}+\frac{(-1)^{s-a}f\left([a]\cup K\right)g\left(\overline{K}/[a+1]\cup\{a+1\}\right)L\left([a]\cup K\right)}{V\left([a]\cup K,\overline{K}/[a+1]\right)} \tag{2.2}$$

triệt tiêu khi $\omega=0$. Thật vậy, mỗi $1\le i\le a$ thì x_i đều xuất hiện không tầm thường trong ω và f là GL_s-bất biến nên ta có

$$f\left([a+1]/\left\{i\right\}, K\right) = f\left([a] \cup K\right), \text{ với mọi } 1 \le i \le a.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$L\left([a+1]/\left\{i\right\} \cup K\right) = \begin{cases} (-1)^{a-i}\lambda_i L\left([a] \cup K\right) & i \le a, \\ L\left([a] \cup K\right) & i = a+1, \end{cases}$$

và

$$V\left([a+1]/\left\{i\right\} \cup K, \overline{K}/[a+1]\right) = V\left([a] \cup K, \overline{K}/[a+1]\right).$$

Do đó, tổng trong công thức (2.2) được rút gọn thành

$$\frac{f\left([a] \cup K\right) L\left([a] \cup K\right)}{V\left([a] \cup K, \overline{K}/[a+1]\right)}\left(\sum_{i=1}^{a} \lambda_i g\left(\overline{K}/[a+1] \cup \{i\}\right) + g\left(\overline{K}/[a+1] \cup \{a+1\}\right)\right).$$

Vì g vừa đối xứng, đa tuyến tính và g chia hết cho $x_1 \cdots x_{k-s}$ nên ta có

$$\sum_{i=1}^{a} \lambda_i g\left(\overline{K}/[a+1] \cup \{i\}\right) + g\left(\overline{K}/[a+1] \cup \{a+1\}\right) = g\left(\overline{K}/[a+1] \cup \{\omega\}\right) = 0.$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

Cuối cùng, chúng tôi áp dụng mệnh đề trên để chứng minh rằng các biểu thức $Y_b\left(I, J\right)$ thực sự là đa thức. Kết quả này được trình bày trong hệ quả quan trọng sau.

Hệ quả 2.3.4. *Với hai dãy I và J thì $Y_b\left(I, J\right)$ được xác định trong Định nghĩa 2.2.1 là đa thức.*

Chứng minh. Theo định nghĩa $Y_b\left(I, J\right)$, ta có

$$Y_b\left(I; J\right) = \delta_{1;b}\left(D_1^{j_1}\delta_{2;b}\left(D_2^{j_2} \cdots \delta_{k;b}\left(D_k^{j_k}\right) \cdots\right)\right).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng, nếu thay mỗi $D_a^{j_a}$ bởi một đa thức u_a mà u_a là GL_{a-1}-bất biến với $a-1$ biến đầu tiên thì $Y_b(I,J)$ vẫn là đa thức. Đầu tiên ta xét trường hợp đơn giản nhất $Y = \delta_k^{i_k}(u_k)$. Trường hợp $i_k = 0$ thì hiển nhiên ta có điều phải chứng minh. Khi $i_k > 0$, ta viết u_k dưới dạng

$$u_k = \sum_r f_r(x_1, \ldots, x_{k-1})\, g_r(x_k, x_{k+1}, \ldots),$$

ở đó $f_r(x_1, \ldots, x_{k-1})$ là GL_{k-1}-bất biến. Khi đó

$$\delta_k^{i_k}(u_k) = \sum_r \delta_k^{i_k}(f_r) \cdot g_r(x_{k+i_k}, x_{k+1+i_k}, \ldots).$$

Ở đó,

$$\delta_k^{i_k}(f_r) = f \bullet \varphi_{i_k}^b$$

nên theo Mệnh đề 2.3.3 thì $\delta_k^{i_k}(f_r)$ là đa thức. Do đó, Y là đa thức. Ta quy nạp theo k. Sử dụng Mệnh đề 2.1.7 ta có

$$\begin{aligned}
&\delta_s^{i_s}\left(u_s\delta_{s+1}^{i_{s+1}}\left(u_{s+1}\left(\cdots\left(\delta_k^{i_k}(u_k)\right)\cdots\right)\right)\right) = \\
&\qquad = \sum_{T\in\mathcal{T}(s,i_s)} A_{s-1;T}(u_s)\,\delta_{s+1}^{i_s+i_{s+1}}\left(\beta_T u_{s+1}\delta_{s+2}^{i_{s+s}}\left(u_{s+2}\left(\cdots\left(\delta_k^{i_k}(u_k)\right)\cdots\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Vì mỗi $\beta_T u_{s+1}$ đều là các bất biến với s ẩn đầu tiên nên mỗi phần tử

$$\delta_{s+1}^{i_s+i_{s+1}}\left(\beta_T u_{s+1}\delta_{s+2}^{i_{s+s}}\left(u_{s+2}\left(\cdots\left(\delta_k^{i_k}(u_k)\right)\cdots\right)\right)\right),$$

đều là các đa thức theo giả thiết quy nạp. Theo Mệnh đề 2.3.3 thì $A_{s-t;T}(u_s)$ cũng là đa thức. Vì vậy,

$$\delta_s^{i_s}\left(u_s\delta_{s+1}^{i_{s+1}}\left(u_{s+1}\left(\cdots\left(\delta_k^{i_k}(u_k)\right)\cdots\right)\right)\right)$$

là đa thức. Do đó, ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.4. Tính bất biến của Y

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh rằng các đa thức $Y_m(I;J)$ được xây dựng từ các toán tử δ và các đa thức Dickson là bất biến modulo $\left(x_1^{q^m},\dots,x_n^{q^m}\right)$ dưới tác động của nhóm con Borel B_n. Trước tiên chúng tôi sẽ giới thiệu khái niệm một lớp đa thức mới được gọi là (k,m)-*bất biến*, đóng vai trò trung gian quan trọng trong lập luận quy nạp.

Định nghĩa 2.4.1. Đa thức $f(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{F}_q[x_1,\dots,x_k]$ được gọi là (k,m)-*bất biến* nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây.

i) $f(\lambda_1x_1,\dots,\lambda_kx_k)=f(x_1,\dots,x_k)$ với mọi $\lambda_i\in\mathbb{F}_q^*$. Nói cách khác, f bất biến dưới tác động của nhóm con ma trận đường chéo chính.

ii) $f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j+x_i,\dots,x_k)=f(x_1,\dots,x_k)+\left(x_i^{q^m}\right)$ với mọi $1\le i<j\le k$.

Chú ý 2.4.2. Nếu f là (k,m)-bất biến thì f là B_k-bất biến modulo $(x_1^{q^m},\dots,x_k^{q^m})$.

Mệnh đề dưới đây cho thấy rằng toán tử $\delta_{r;m}$ bảo toàn tính (k,m)-bất biến trong trường hợp tác động của toán tử $\delta_{r;m}$ bảo toàn tính đa thức. Kết quả này đóng vai trò then chốt cho phép ta áp dụng lập luận quy nạp trong phần còn lại.

Mệnh đề 2.4.3. *Với $r\le k+1$, $f(x_1,\dots,x_k)$ là (k,m)-bất biến và $\delta_{r;m}(f)$ là đa thức. Khi đó, $\delta_{r;m}$ là $(k+1,m)$-bất biến.*

Chứng minh. Gọi N là tử số của

$$\delta_{r;m}(f) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_r \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{q^{r-2}} & \dots & x_r^{q^{r-2}} \\ x_1^{q^m} f(\widehat{x_1}, x_2, \dots, x_{k+1}) & \dots & x_r^{q^m} f(x_1, \dots, \widehat{x_r}, \dots, x_{k+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_r \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{q^{r-1}} & \dots & x_r^{q^{r-1}} \end{vmatrix}}.$$

Với mỗi $1 \le i < j \le k+1$, ta xét toán tử σ sao cho

$$\sigma(x_l) = \begin{cases} x_j + x_i & \text{nếu } l = j, \\ x_l & \text{nếu } l \neq j. \end{cases}$$

Do $\delta_{r;m}(f)$ là đa thức nên $\sigma(\delta_{r;m}(f))$ cũng là đa thức. Mặc khác, L_r bất biến dưới tác động của toán tử σ nên $\sigma N - N$ chia hết cho L_r.

Khi $j \le r$, cột thứ j của định thức σN là tổng của hai cột

$$\left[x_j, x_j^q, \dots, x_j^{q^{r-2}}, x_j^{q^m} f(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{k+1})\right]^T$$

và

$$\left[x_i, x_i^q, \dots, x_i^{q^{r-2}}, x_i^{q^m} f(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{k+1})\right]^T.$$

Do đó, $\sigma N - N$ là tổng của hai định thức. Trong đó, định thức thứ nhất có $(r-1)$ dòng đầu tiên giống $(r-1)$ dòng đầu tiên của định thức N và dòng cuối cùng được xác định theo công thức dưới đây

$$\begin{cases} x_l^{q^m}\left[f(x_1, \dots, \widehat{x_l}, \dots, x_j + x_i, \dots, x_{k+1}) - f(x_1, \dots, \widehat{x_l}, \dots, x_j, \dots, x_{k+1})\right] & \text{khi } l \neq j, \\ 0 & \text{khi } l = j \le r. \end{cases}$$

Các hiệu $f(x_1, \dots, \widehat{x_l}, \dots, x_j + x_i, \dots, x_{k+1}) - f(x_1, \dots, \widehat{x_l}, \dots, x_j, \dots, x_{k+1})$ chia hết cho $x_i^{q^m}$ vì f là một (k,m)-bất biến. Do đó tất cả các số hạng ở dòng cuối

cùng của định thức này đều chia hết cho $x_i^{q^m}$. Ngoài ra, cột thứ i các số hạng đều chứa x_i nên định thức này chia hết cho $x_i^{q^m+1}$.
Định thức thứ hai thì cột thứ i và cột thứ j có $r-1$ số hạng đầu tiên giống nhau. Sau khi rút gọn bằng cách lấy cột thứ j trừ cột thứ i và khai triển theo cột thứ j thì định thức này có giá trị là

$$x_i^{q^m}\big[f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{k+1}) \\ - f(x_1,\ldots,\widehat{x_i},\ldots,x_j+x_i,\ldots,x_{k+1})\big]L_{r-1}(x_1,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{k+1}).$$

Do $L_{r-1}(x_1,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_{k+1})$ chứa x_i nên định thức này cũng chia hết cho $x_i^{q^m+1}$.
Khi $j>r$ thì khai triển $\sigma N - N$ chỉ có định thức thứ nhất, chứng minh tương tự $\sigma N - N$ cũng chia hết cho $x_i^{q^m+1}$.
Vì vậy, ta đã chỉ ra rằng trong cả hai trường hợp thì $\sigma N - N$ đều chia hết cho cả $x_i^{q^m+1}$ và L_r. Vì vậy, $\sigma N - N$ chia hết cho $x_i^{q^m+1}L_r$. Do đó, mệnh đề đã được chứng minh. □

Bằng cách áp dụng Mệnh đề trên theo phương pháp quy nạp, chúng tôi thu được hệ quả sau, khẳng định rằng $Y_m(I;J)$ là một đa thức.

Hệ quả 2.4.4. *Mỗi đa thức $Y_m(I;J)$ là B_n-bất biến modulo $\left(x_1^{q^m},\ldots,x_n^{q^m}\right)$.*

Chứng minh. Ta có

$$Y_m(I;J)=\delta_{1;m}^{i_1}\left(D_1^{j_1}\delta_{2;m}^{i_2}\left(D_2^{j_2}\cdots\delta_{k;m}^{i_k}\left(D_k^{j_k}\right)\cdots\right)\right),$$

vì $D_k^{j_k}$ là (k,m)-bất biến và $\delta_{k;m}^{i_k}\left(D_k^{j_k}\right)$ là đa thức nên theo Mệnh đề 2.4.3 thì $\delta_{k;m}^{i_k}\left(D_k^{j_k}\right)$ là $(k+i_k,m)$-bất biến. Tiếp tục lập luận tương tự như trên, ta có $Y_m(I;J)$ là $(k+i_1+\cdots+i_k,m)$-bất biến. Nhưng $k+i_1+\cdots+i_k=n$, nên ta có $Y_m(I;J)$ là (n,m)-bất biến. Do đó, ta có điều phải chứng minh. □

2.5. Cơ sở tuyến tính của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$

Trong phần này, chúng tôi sẽ thiết lập một cơ sở tường minh cho không gian $\mathbb{F}_q$-véctơ các B_n-bất biến trong $\mathcal{Q}_m(n)$. Cụ thể, chúng tôi chứng minh rằng tập hợp $\mathcal{B}_m(1^n)$ gồm các đa thức $Y_m(I;J)$ tạo thành một cơ sở tuyến tính của không gian này.

Trường hợp cơ sở $n=1$ là hiển nhiên. Do đó, ta có thể giả sử $n \geq 2$ và tiến hành lập luận quy nạp theo số biến. Để thuận tiện, ký hiệu $\mathrm{B}(x_2,\ldots,x_n)$ được dùng để chỉ ảnh của bao hàm $b \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ từ nhóm Borel B_{n-1} vào GL_n.

Giả sử $F(x_1,\ldots,x_n)$ là một đa thức B_n-bất biến trong $\mathcal{Q}_m(n)$. Do các số mũ xuất hiện trong F đều là bội của $q-1$, ta có thể khai triển F theo biến x_1 và phân tích số hạng có bậc thấp nhất. Trường hợp số mũ của x_1 bằng q^m-1 sẽ được xử lý đầu tiên thông qua bổ đề sau.

Bổ đề 2.5.1. *Với $m \geq 0, n \geq 2$ và $F(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{q^m-1} f(x_2,\ldots,x_n)$ là B_n-bất biến của $\mathcal{Q}_m(n)$ thì $f(x_2,\ldots,x_n)$ là $\mathrm{B}(x_2,\ldots,x_n)$-bất biến modulo $\left(x_2^{q^m},\ldots,x_n^{q^m}\right)$.*

Chứng minh. Với mọi $\sigma \in \mathrm{B}(x_2,\ldots,x_n)$, đặt $\sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \in \mathrm{B}_n$. Do $F(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{q^m-1} f(x_2,\ldots,x_n)$ là B_n-bất biến của $\mathcal{Q}_m(n)$ nên ta có

$$\sigma' F(x_1,\ldots,x_n) = F(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{q^m-1} f(x_2,\ldots,x_n) \quad \left(\mathrm{mod}\ \left(x_1^{q^m},\ldots,x_n^{q^m}\right)\right).$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \sigma' F(x_1,\ldots,x_n) &= \sigma' x_1^{q^m-1} f(x_2,\ldots,x_n) \\ &= x_1^{q^m-1} \sigma f(x_2,\ldots,x_n) \quad \left(\mathrm{mod}\ \left(x_1^{q^m},\ldots,x_n^{q^m}\right)\right). \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\sigma f(x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, \ldots, x_n) \quad \left(\bmod \left(x_2^{q^m}, \ldots, x_n^{q^m}\right)\right).$$

Do đó, $f(x_2, \ldots, x_n)$ là $\mathrm{B}(x_2, \ldots, x_n)$-bất biến modulo $\left(x_2^{q^m}, \ldots, x_n^{q^m}\right)$. $\square$

Trường hợp khi số mũ của x_1 nhỏ hơn $q^m - 1$ với $m \geq 1$ thì ta biểu diễn F dưới dạng

$$F(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{(q-1)i} f(x_2, \ldots, x_n) + x_1^{(q-1)(i+1)} f'(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Tiếp theo, chúng tôi xét trường hợp số mũ của x_1 trong đa thức $F(x_1, \ldots, x_n)$ nhỏ hơn $q^m - 1$. Khi đó, F có thể được khai triển theo x_1 với số hạng bậc thấp nhất là $x_1^{(q-1)i} f(x_2, \ldots, x_n)$ với $i < [m]_q$. Để hiểu rõ hơn cấu trúc của thành phần $f(x_2, \ldots, x_n)$ trong khai triển này, chúng tôi đưa ra bổ đề sau, cho thấy f là lũy thừa bậc q của một đa thức bất biến ở hạng thấp hơn.

Bổ đề 2.5.2. *Đa thức $f(x_2, \ldots, x_n)$ trong biểu diễn trên là lũy thừa với số mũ bằng q của đa thức $g(x_2, \ldots, x_n)$ nào đó. Hơn nữa, $g(x_2, \ldots, x_n)$ là $\mathrm{B}(x_2, \ldots, x_n)$-bất biến modulo $\left(x_2^{q^{m-1}}, \ldots, x_n^{q^{m-1}}\right)$.*

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh rằng f là lũy thừa bậc q của một đa thức g nào đó. Thật vậy, khi nhân F với $x_1^{q^m - q - (q-1)i}$, ta thu được một phần tử B_n-bất biến modulo I_m có dạng

$$F' = x_1^{q^m - q - (q-1)i} F = x_1^{q^m - q} f(x_2, \ldots, x_n) + x_1^{q^m - 1} f'(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ta biểu diễn $f(x_2, \ldots, x_n)$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các đơn thức $x^J = x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$. Với mỗi $2 \leq k \leq n$, ta sẽ chỉ ra j_k chia hết cho q với mọi J. Thật vậy, vì F' là B_n-bất biến modulo I_m nên

$$F'(x_1, \ldots, x_k + x_1, \ldots, x_n) - F'(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = 0 \quad (\bmod I_m).$$

Rõ ràng, số hạng $x_1^{q^m-1} [f'(x_1, \ldots, x_k + x_1, \ldots x_n) - f'(x_1, \ldots, x_k, \ldots x_n)]$ chia hết

cho $x_1^{q^m}$ nên nó triệt tiêu trong vành thương $\mathcal{Q}_m(n)$.
Mặt khác, số hạng $x_1^{q^m-q}\left[f(x_2,\ldots,x_k+x_1,\ldots x_n)-f(x_2,\ldots,x_k,\ldots x_n)\right]$ là tổ hợp tuyến tính của các biểu thức có dạng

$$\begin{aligned} d(J) &= x_1^{q^m-q}\left[x_2^{j_2}\cdots(x_k+x_1)^{j_k}\cdots x_n^{j_n}-x_2^{j_2}\ldots x_k^{j_k}\ldots x_n^{j_n}\right] \\ &= \sum_{s=1}^{j_k}\binom{j_k}{s}x_1^{q^m-q+s}x_2^{j_2}\cdots x_k^{j_k-s}\cdots x_n. \end{aligned}$$

Mặt khác, nếu $J\neq J'$ thì $d(J)$ và $d(J')$ không có thành phần chung không tầm thường. Từ đó suy ra, với mỗi J thì $d(J)=0 \pmod{I_m}$. Số mũ của x_1 trong các biểu thức trên là q^m-q+s. Vì vậy, bằng cách đồng nhất thức ta suy ra

$$\binom{j_k}{s}=0,$$

với mọi $1\leq s\leq q-1$. Do đó, j_k chia hết cho q với mọi k và mọi J. Vì vậy,

$$f(x_2,\ldots,x_n)=g(x_2,\ldots,x_n)^q.$$

Tiếp theo, với mọi $\sigma\in\mathrm{B}(x_2,\ldots,x_n)$ đặt

$$\sigma'=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix}\in\mathrm{B}_n.$$

Ta có

$$\begin{aligned} F' &= x_1^{q^m-q}f(x_2,\ldots,x_n)+x_1^{q^m-1}f'(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ &= x_1^{q^m-q}f(x_2,\ldots,x_n)+x_1^{q^m-1}f''(x_2,\ldots,x_n) \pmod{I_m}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \sigma'F' &= x_1^{q^m-q}\sigma f(x_2,\ldots,x_n)+x_1^{q^m-1}\sigma f''(x_2,\ldots,x_n) \pmod{I_m} \\ &= x_1^{q^m-q}\sigma g(x_2,\ldots,x_n)^q+x_1^{q^m-1}\sigma f''(x_2,\ldots,x_n) \pmod{I_m}. \end{aligned}$$

Vì F' là B_n-bất biến nên

$$\sigma' F' = F' \pmod{I_m}.$$

Từ đó suy ra

$$\sigma g\left(x_2, \ldots, x_n\right)^q = g\left(x_2, \ldots, x_n\right)^q \pmod{I_m} \text{ với mọi } \sigma \in \mathrm{B}_n\left(x_2, \ldots, x_n\right).$$

Vì vậy,

$$\sigma g\left(x_2, \ldots, x_n\right) = g\left(x_2, \ldots, x_n\right) \quad \left(\bmod \left(x_2^{q^{m-1}}, \ldots, x_n^{q^{m-1}}\right)\right).$$

Vậy, ta suy ra $g\left(x_2, \ldots, x_n\right)$ là $\mathrm{B}\left(x_2, \ldots, x_n\right)$-bất biến modulo $\left(x_2^{q^{m-1}}, \ldots, x_n^{q^{m-1}}\right)$.

□

Từ cấu trúc đặc biệt của $f(x_2, \ldots, x_n)$ trong Bổ đề 2.5.2, chúng tôi khai thác thêm mối liên hệ giữa các toán tử $\delta_{a;b}$ và phép nâng lũy thừa trong trường hợp f là lũy thừa bậc q của một đa thức g. Bổ đề sau mô tả tác động của toán tử δ trên các đa thức như vậy khi thay thế biến đầu tiên bằng 0, đồng thời cung cấp công cụ quan trọng cho phép xác định cách toán tử Φ tác động lên các phần tử trong $\mathcal{B}_{m-1}(1^{n-1})$.

Bổ đề 2.5.3. *Nếu đa thức $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_c\right)$ thỏa mãn*

$$f\left(0, x_2, \ldots, x_c\right) = g\left(x_2, \ldots, x_c\right)^q,$$

và $\delta_{a+1,b+1}(f)$ là đa thức thì $\delta_{a+1;b+1}(f)\left(0, x_2, \ldots, x_{c+1}\right) = \left(\delta_{a;b}(g)\left(x_2, \ldots, x_{c+1}\right)\right)^q$. Vì vậy, nếu $Y \in \mathcal{B}_{m-1}\left(1^{n-1}\right)$ thì

$$\Phi Y\left(0, x_2, \ldots, x_n\right) = Y\left(x_2, \ldots, x_n\right)^q.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa toán tử δ ta có

$$\delta_{a+1;b+1}(f) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_{a+1} \\ x_1^q & \dots & x_{a+1}^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{q^{a-1}} & \dots & x_{a+1}^{q^{a-1}} \\ x_1^{q^{b+1}} f(\widehat{x_1}, x_2, \dots, x_{c+1}) & \dots & x_{a+1}^{q^{b+1}} f\left(x_1, \dots, \widehat{x_{a+1}}, \dots, x_{c+1}\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_{a+1} \\ x_1^q & \dots & x_{a+1}^q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{q^a} & \dots & x_{a+1}^{q^a} \end{vmatrix}}.$$

Vì vậy,

$$\delta_{a+1;b+1}(f) = \sum_{j=1}^{a+1} \frac{x_j^{q^{b+1}} f(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{c+1})}{V(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{a+1}, x_j)}.$$

Theo giả thiết thì $f(0, x_2, \dots, x_c) = g(x_2, \dots, x_c)^q$, hơn nữa với $j = 2, \dots, c+1$ thì $V(0, x_2, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{a+1}, x_j) = V(x_2, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{a+1}, x_j)^q$, nên ta có

$$\begin{aligned} \delta_{a+1;b+1}(f)(0, x_2, \dots, x_{c+1}) &= \sum_{j=2}^{a+1} \frac{x_j^{q^{b+1}} f(0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{c+1})}{V(0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{a+1}, x_j)} \\ &= \sum_{j=2}^{a+1} \frac{x_j^{q^{b+1}} g(x_2, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{c+1})^q}{V(x_2, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{a+1}, x_j)^q} \\ &= \left(\sum_{j=2}^{a+1} \frac{x_j^{q^b} g(x_2, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{c+1})}{V(x_2, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{a+1}, x_j)} \right)^q \\ &= \left(\delta_{a;b}(g)(x_2, \dots, x_{c+1})\right)^q. \end{aligned}$$

Tiếp tục, theo định nghĩa thì $D_{k+1} = \delta_{k+1;k+1}(1) = Q_{k+1,k}$. Hơn nữa, theo Bổ đề 6.1.1 [25] thì $Q_{k+1,s} = V_{k+1}^{q-1} Q_{k,s} + Q_{k,s-1}^q$. Vì vậy, ta có

$$Q_{k+1,k}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) = V_k(x_2, \dots, x_{k+1}, x_1)^{q-1} + Q_{k,k-1}(x_2, \dots, x_{k+1})^q.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}D_{k+1}(0,x_2,\ldots,x_{k+1}) &= Q_{k+1,k}(0,x_2,\ldots,x_{k+1})\\ &= Q_{k,k-1}(x_2,\ldots,x_{k+1})^q\\ &= D_k(x_2,\ldots,x_{k+1})^q.\end{aligned}$$

Từ đó,

$$D_{k+1}(0,x_2,\ldots,x_{k+1})^{i_k} = D_k(x_2,\ldots,x_{k+1})^{qi_k}.$$

Mặt khác, với hai dãy $I=(i_1,\ldots,i_k)$ và $J=(j_1,\ldots,j_k)$ các số nguyên không âm, ta có

$$Y_b(I;J)=\delta_{1;b}^{i_1}\left(D_1^{j_1}\delta_{2;b}^{i_2}\left(D_2^{j_2}\cdots\delta_{k;b}^{i_k}\left(D_k^{j_k}\right)\cdots\right)\right),$$

và

$$\Phi Y_b(I;J)=\delta_{2;b+1}^{i_1}\left(D_2^{j_1}\delta_{3;b+1}^{i_2}\left(D_3^{j_2}\cdots\delta_{k+1;b+1}^{i_k}\left(D_{k+1}^{j_k}\right)\cdots\right)\right).$$

Vì vậy, áp dụng kết quả trên liên tiếp ta suy ra

$$\Phi Y(0,x_2,\ldots,x_n)=Y(x_2,\ldots,x_n)^q.$$

□

Từ các bổ đề trên, chúng tôi thu được kết quả tổng quát sau, khẳng định rằng tập $\mathcal{B}_m(1^n)$ tạo thành một cơ sở của không gian các B_n-bất biến trong $\mathcal{Q}_m(n)$.

Định lý 2.5.4. *Hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$ là một cơ sở của $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ các B_n-bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$.*

Chứng minh. Trước hết, với $n=1$, có thể chứng minh rằng $\mathcal{Q}_m(1)^{\mathrm{B}_1}$ là một $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ với cơ sở $\left\{D_1^a \mid a\le [m]_q\right\}$. Ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp theo n để thiết lập hai tính chất sau đối với hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$, cụ thể là

i) *Chứng minh* $\mathcal{B}_m(1^n)$ *là hệ sinh của* $\mathbb{F}_q$*-không gian véctơ.* $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$

Giả sử đa thức thuần nhất F là B_n-bất biến của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ và F và có dạng

$$F(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{(q-1)i} f(x_2,\ldots,x_n) + x_1^{(q-1)(i+1)} f'(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Tức là $x_1^{(q-1)i} f(x_2,\ldots,x_n)$ là số hạng theo x_1 có bậc nhỏ nhất của F. Khi đó, nếu $i_1 = [m]_q$ thì

$$F(x_1,\ldots,x_n) = x_1^{q^m-1} f(x_2,\ldots,x_n)$$

là B_n-bất biến. Vì vậy, theo Bổ đề 2.5.1 $f(x_1,\ldots,x_{n-1})$ là B_{n-1}-bất biến. Khi đó, theo giả thiết quy nạp $f(x_1,\ldots,x_{n-1})$ thuộc không gian con của $\mathcal{Q}_m(n-1)^{\mathrm{B}_{n-1}}$ sinh bởi $\mathcal{B}_m\left(1^{n-1}\right)$. Vì vậy, F thuộc không gian con của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ sinh bởi $\left\{\delta_{1;m}(Y) \mid Y \in \mathcal{B}_m\left(1^{n-1}\right)\right\}$.

Ngược lại, với $i < [m]_q$ theo Bổ đề 2.5.2 thì

$$f(x_2,\ldots,x_n) = g(x_2,\ldots,x_n)^q$$

ở đó, $g(x_2,\ldots,x_n) \in \mathcal{Q}_{m-1}(n-1)^{\mathrm{B}_{n-1}}$. Theo giả thiết quy nạp, $g(x_2,\ldots,x_n)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$g(x_2,\ldots,x_n) = \sum_{I,J} c_Y Y(x_2,\ldots,x_n)$$

với $Y(x_2,\ldots,x_n) \in \mathcal{B}_{m-1}\left(1^{n-1}\right)$. Đặt

$$F' = F - \sum_{I,J} c_Y D_1^i \Phi Y,$$

ta có bậc của x_1 của số hạng có bậc nhỏ nhất theo x_1 trong F' lớn hơn bậc của x_1 của số hạng có bậc nhỏ nhất theo x_1 trong F. Do đó, lặp lại lập luận trên với F' thì ta có điều phải chứng minh.

ii) *Chứng minh $\mathcal{B}_m(1^n)$ là hệ độc lập tuyến tính của $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$.*

Trước hết, tập hợp thứ nhất $\left\{\delta_{1;m}(Y) \mid Y \in \mathcal{B}_m\left(1^{n-1}\right)\right\}$ là độc lập tuyến tính theo giả thiết quy nạp.

Tiếp theo, với tập hợp thứ hai $\left\{D_1^a \Phi Y \mid Y \in \mathcal{B}_{m-1}\left(1^{n-1}\right), a < [m]_q\right\}$, theo Bổ đề 2.5.3 ta có

$$D_1^a \Phi(Y) = x_1^{a(q-1)} Y(x_2, \ldots, x_n)^q$$
$$+ \text{đơn thức có bậc của } x_1 \text{ lớn hơn } a(q-1).$$

Do đó, nếu $\sum_Y c_Y D_1^a \Phi(Y) = 0 \pmod{\left(x_1^{q^m}, \ldots, x_n^{q^m}\right)}$ thì

$$\sum_Y c_Y Y(x_2, \ldots, x_n) = 0 \pmod{\left(x_2^{q^m}, \ldots, x_n^{q^m}\right)}.$$

Theo giả thiết quy nạp thì c_Y là triệt tiêu. Do đó, ta có điều phải chứng minh.

$\square$

Ví dụ 2.5.5. i) Với $m \geq 0$, không gian $\mathcal{Q}_m(1)^{\mathrm{B}_1}$ được sinh bởi hệ

(1) $D_1^a, \quad a \leq [m]_q$.

ii) Với $m \geq 1$, không gian $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{B}_2}$ được sinh bởi hệ

(1) $\delta_{1;m}(D_1^a), \quad a \leq [m]_q$,

(2) $D_1^a D_2^b, \quad a < [m]_q, \ b \leq [m-1]_q$.

iii) Với $m \geq 2$, không gian $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{B}_3}$ được sinh bởi hệ

(1) $\delta_{1;m}\delta_{1;m}(D_1^a), \quad a \leq [m]_q$,

(2) $\delta_{1;m}\left(D_1^a D_2^b\right), \quad a < [m]_q, \ b \leq [m-1]_q$,

(3) $D_1^a \delta_{2;m}\left(D_2^b\right), \quad a < [m]_q\,, \; b \leq [m-1]_q,$

(4) $D_1^a D_2^b D_3^c, \quad a < [m]_q\,, \; b < [m-1]_q, \; c \leq [m-2]_q.$

Hệ quả 2.5.6. *Với thứ tự từ điển thì từ nhỏ nhất của $Y_m(I; J)$ là*

$$\prod_{s=1}^{k} x_{i_1+\cdots+i_{s-1}+s}^{q^{m-q^{s-1}}} \cdots x_{i_1+\cdots+i_s+s-1}^{q^{m-q^{s-1}}} x_{i_1+\cdots+i_s+s}^{j_s q^{s-1}(q-1)}.$$

2.6. Chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$

Sau khi đã thiết lập cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$, chúng tôi khảo sát chuỗi Hilbert-Poincaré tương ứng. Từ đó, chúng tôi chứng minh Giả thuyết Parabolic 1.5 của Lewis, Reiner và Stanton [19] đối với trường hợp nhóm con Borel của GL_n.

Theo giả thuyết trên, chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ được cho bởi một biểu thức tổ hợp tường minh $F_{n,m}(t)$, xây dựng từ các hệ số nhị thức (q,t) và một hàm số mũ $e(m, 1^n, \beta)$. Trước khi đi vào chứng minh chính, chúng tôi có một số nhận xét và bổ đề kỹ thuật cho thấy cấu trúc quy nạp của hàm $F_{n,m}(t)$ phù hợp với cách xây dựng tập $\mathcal{B}_m(1^n)$ trong phần trước.

Chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ là hàm $F_{n,m}(t)$ được xác định như sau

$$F_{n,m}(t) = \sum_{\beta \leq 1^n, |\beta| \leq m} t^{e(m,1^n,\beta)} \begin{bmatrix} m \\ \beta, m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t},$$

ở đó

- $e(m, 1^n, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (1-\beta_i)\left(q^m - q^{B_i}\right)$ với $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ và $B_i = \sum_{j=1}^{i} \beta_j$,

- $\begin{bmatrix} m \\ \beta, m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{\prod_{j=1}^{|\beta|-1}\left(1-t^{q^m-q^j}\right)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{\beta_i-1}\left(1-t^{q^{B_i}-q^{B_{i-1}+j}}\right)}.$

Trước hết, ta có nhận xét sau về tính chất của (q,t)-hệ số nhị thức và $e(m,1^n,\beta)$ được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của chúng.

Nhận xét 2.6.1. Với $\beta = (1,\beta_2,\dots,\beta_n) = (1,\beta')$, ta có

i) $t^{e(m,1^n,\beta)} = (t^q)^{e\left(m-1,1^{n-1},\beta'\right)}$,

ii) $\begin{bmatrix} m \\ m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{1-t^{q^m-1}}{1-t^{q-1}} \begin{bmatrix} m-1 \\ \beta', m-1-|\beta'| \end{bmatrix}_{q,t^q}.$

Tiếp theo, chúng tôi chỉ ra chất đơn giản sau về hàm $F_{n,m}(t)$. Kết quả này cho thấy hàm $F_{n,m}(t)$ có tính chất quy nạp tương tự như tập $\mathcal{B}_m(1^n)$.

Bổ đề 2.6.2. *Ta có*

$$F_{n,m}(t) = t^{q^m-1}F_{n-1,m}(t) + \frac{1-t^{q^m-1}}{1-t^{q-1}}F_{n-1,m-1}(t^q).$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} F_{n,m}(t) &= \sum_{\substack{\beta\le 1^n\\ |\beta|\le m}} t^{e(m,1^n,\beta)} \begin{bmatrix} \beta \\ m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t} \\ &= \sum_{\substack{\beta=(0,\beta')\le 1^n\\ |\beta|\le m}} t^{e(m,1^n,\beta)} \begin{bmatrix} \beta \\ m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t} + \sum_{\substack{\beta=(1,\beta')\le 1^n\\ |\beta|\le m}} t^{e(m,1^n,\beta)} \begin{bmatrix} \beta \\ m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t} \\ &\qquad\text{(tách theo phần tử đầu của } \beta \text{ là 0 hoặc 1)} \\ &= t^{q^m-1}\sum_{\substack{\beta'\le 1^{n-1}\\ |\beta'|\le m}} t^{e(m,1^{n-1},\beta')} \begin{bmatrix} \beta' \\ m-|\beta'| \end{bmatrix}_{q,t} + \frac{1-t^{q^m-1}}{1-t^{q-1}}F_{n-1,m-1}(t^q) \\ &\qquad\text{(áp dụng Nhận xét 2.6.1 cho số hạng thứ hai)} \\ &= t^{q^m-1}F_{n-1,m}(t) + \frac{1-t^{q^m-1}}{1-t^{q-1}}F_{n-1,m-1}(t^q). \end{aligned}$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Dựa vào kết quả trên, ta có thể chứng minh được Giả thuyết 1.5 của Lewis, Reiner và Stanton [19] cho trường hợp nhóm con Borel của nhóm tuyến tính tổng quát.

Định lý 2.6.3. *Chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ là $F_{n,m}(t)$. Vậy giả thuyết 1.5 của Lewis - Reiner - Stanton [19] đúng cho trường hợp nhóm con Borel.*

Chứng minh. Trước hết, với $n = 1$ thì $\mathbb{F}_q$-cơ sở của $\mathcal{Q}_m(1)^{\mathrm{B}_1}$ là

$$\mathcal{B}_m(1) \;=\; \left\{D_1^a = x_1^{a(q-1)} \mid a \leq [m]_q\right\} = \left\{1, x_1^{q-1}, x_1^{2(q-1)}, \ldots, x_1^{q^m-1}\right\}.$$

Do đó, chuỗi Hibert của $\mathcal{Q}_m(1)^{\mathrm{B}_1}$ là

$$1 + t^{q-1} + t^{2(q-1)} + \cdots + t^{q^m-1} = \frac{1-t^{q^m}}{1-t^{q-1}} + t^{q^m-1} = F_{1,m}(t).$$

Vậy, mệnh đề đúng với $n = 1$. Hơn nữa, hệ cơ sở $\mathcal{B}_m(1^n)$ được xác định một cách quy nạp như sau

$$\mathcal{B}_m(1^n) = \left\{\delta_{1;m}(Y) \mid Y \in \mathcal{B}_m\left(1^{n-1}\right)\right\} \bigsqcup \left\{D_1^a\Phi(Y) \mid a < [m]_q, Y \in \mathcal{B}_{m-1}\left(1^{n-1}\right)\right\}.$$

Do đó, theo Bổ đề 2.6.2 về tính chất quy nạp của $F_{n,m}(t)$ thì ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Mỗi số hạng trong tổng định nghĩa $F_{n,m}(t)$ đều tương ứng với các phần tử trong cơ sở $\mathcal{B}_m(1^n)$ của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$. Nhận xét sau mô tả rõ cấu trúc của các phần tử $Y_m(I,J)$ tương ứng với từng chỉ số của β.

Nhận xét 2.6.4. Với $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ là dãy các số nguyên không âm sao cho $\beta \leq 1^n$ và $|\beta| \leq m$ thì số hạng $t^{e(m,1,\beta)} \begin{bmatrix} m \\ \beta, m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t}$ của $F_{n,m}(t)$ là chuỗi Hilbert-

Poincaré của không gian con của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ sinh bởi các phần tử $Y_m(I,J)$ mà cặp (I,J) thỏa mãn các điều kiện

(1) $\beta_i = 1$ ở các vị trí $i_1 + \cdots + i_s + s$ với $1 \le s \le k-1$,

(2) Khi $s = k, i_1 + \cdots + i_k + k = n$ thì $j_k = [m-k+1]_q$ và $\beta_n = 1$ nếu $j_k < [m-k+1]_q$,

(3) $\beta_i = 0$ trong các trường hợp khác.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, chúng tôi trình bày các nội dung sau đây.

• Xây dựng toán tử δ (Định nghĩa 2.1.1) như một biến thể của hàm Schur [20] và đưa ra một số tính chất của toán tử δ, đặc biệt là công thức tính các tác động lặp của toán tử δ (Mệnh đề 2.1.4) và tổng quát nó trong các trường hợp tổng quát hơn (Mệnh đề 2.1.7).

• Định nghĩa hàm hữu tỷ $Y_b(I;J)$ với hai dãy I, J cho trước (Định nghĩa 2.2.1). Sử dụng các kết quả đã biết về toán tử δ để chứng minh các hàm hữu tỷ $Y_b(I;J)$ với I, J thỏa mãn các điều kiện nhất định, và các đa thức $Y_b(I;J)$ này cũng là các đa thức bất biến dưới tác động của nhóm B_n (Hệ quả 2.3.4 và Hệ quả 2.4.4).

• Tiếp theo, chúng tôi xây dựng hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$ theo cách quy nạp theo n. Chỉ ra rằng hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$ chứa các đa thức $Y_b(I;J)$ với I và J thỏa mãn các điều kiện xác định (Mệnh đề 2.2.3).

• Cuối cùng, chúng tôi chứng minh hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$ là cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ (Định lý 2.5.4) và chứng minh được giả thuyết của Lewis - Reiner - Stanton [19] về chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ (Định lý 2.6.3).

Chương 3

Bất biến của vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius dưới tác động của các nhóm con parabolic hạng thấp

Giả thuyết Parabolic 1.5 của Lewis, Reiner và Stanton [19] đưa ra một công thức dự đoán cho chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$, trong đó P_α là một nhóm con parabolic của nhóm tuyến tính tổng quát GL_n. Mặc dù giả thuyết này cung cấp thông tin về số chiều của không gian bất biến, nhưng nó không đưa ra mô tả cụ thể về cấu trúc tuyến tính và không xác định một hệ cơ sở tuyến tính tường minh cho không gian này.

Dựa trên giả thuyết về chuỗi Hilbert-Poincaré, chúng tôi đề xuất một giả thuyết mạnh hơn, không chỉ xác định kích thước của không gian bất biến mà còn cung cấp mô tả tường minh về một hệ cơ sở tuyến tính cụ thể của không gian $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}\alpha}$. Trong đó, các toán tử $\delta_{s;m}$ giữ vai trò trung tâm như phép nâng, cho phép chuyển các bất biến từ không gian hạng thấp lên các không gian bất biến có hạng cao hơn. Đồng thời, tập Δ_s^m đóng vai trò như một "tập sinh" gồm các bất biến cơ bản ở bậc thấp, từ đó toàn bộ hệ cơ sở được xây dựng thông qua sự kết hợp với các toán tử $\delta_{s;m}$.

Giả thuyết tổng quát của chúng tôi về hệ cơ sở tuyến tính của không gian $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ được trình bày cụ thể như sau.

Giả thuyết 3.0.1. *Một cơ sở cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ là tập $\mathcal{B}_m(\alpha)$ gồm các phần tử có dạng*

$$\delta_{B_1+1;m}^{\alpha_1-\beta_1}\left(f_1\delta_{B_2+1;m}^{\alpha_2-\beta_2}\left(\cdots f_{l-1}\delta_{B_l+1;m}^{\alpha_l-\beta_l}(f_l)\cdots\right)\right), 0 \le s \le \min(\alpha_1, m),$$

với $\beta \le \alpha$, $|\beta| \le m$, $B_i = \beta_1 + \ldots + \beta_i$ (quy ước $B_0 = 0$) và

$$f_i \in \Phi^{B_{i-1}}\Delta_{\beta_i}^{m-B_{i-1}} \subset \Delta_{B_i}^{m-B_i}.$$

Ở đây, Δ_s^m là một tập con của đại số Dickson được xây dựng theo Định nghĩa 3.1.1, còn $\delta_{a;b}$ là toán tử đã được xây dựng trong Định nghĩa 2.1.1. Hàm Frobenius Φ được định nghĩa theo các quy tắc $\Phi(Q_{r,i}) = Q_{r+1,i+1}$ và được áp dụng theo phép nhân. Với trường hợp đặc biệt của nhóm parabolic là nhóm tuyến tính tổng quát GL_n ứng với nhóm $\mathrm{P}_\alpha, \alpha = (n)$, chúng tôi có giả thuyết.

Giả thuyết 3.0.2. *Tập hợp $\mathcal{B}_m(n)$ gồm các phần tử có dạng*

$$\delta_{s+1;m}^{n-s}(f), \quad f \in \Delta_s^m, \quad 0 \le s \le \min(m, n)$$

tạo thành một cơ sở cho không gian véctơ $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$ trên $\mathbb{F}_q$.

Nhận xét 3.0.3. i) Theo [28] (công thức 7.1), ta có

$$\begin{bmatrix} m \\ \alpha \end{bmatrix}_{q,t} = \begin{bmatrix} m \\ \alpha_1 \end{bmatrix}_{q,t} \varphi^{\alpha_1} \begin{bmatrix} m-\alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_{q,t} \varphi^{\alpha_1+\alpha_2} \begin{bmatrix} m-\alpha_1-\alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_{q,t} \cdots$$
$$\cdots \varphi^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{l-1}} \begin{bmatrix} m-\alpha_1-\cdots-\alpha_{l-1} \\ \alpha_l \end{bmatrix}_{q,t}.$$

Theo kết quả trong Chương 2 thì chuỗi Hilbert-Poincaré trong Giả thuyết 3.0.1 là phù hợp với Giả thuyết 1.4.1 với các giá trị đầu tiên như $\alpha =$

$(1), (1,1), \ldots$. Giả sử chuỗi Hilbert-Poincaré ứng với $\mathcal{B}_m(\alpha')$ với $\alpha' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ là

$$C_{\alpha',m}(t) = \sum_{\beta' \leq \alpha', |\beta'| \leq m-s} t^{e(m-s,\alpha',\beta')} \begin{bmatrix} m-s \\ \beta', m-s-|\beta'| \end{bmatrix}_{q,t}.$$

Khi đó, chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathcal{B}_m(\alpha)$ với $\alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ là

$$\sum_{s=0}^{\min(\alpha_1,m)} t^{(q^m-q^s)(\alpha_1-s)} \begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_{q,t} \times$$
$$\times \varphi^s \left(\sum_{\beta' \leq \alpha', |\beta'| \leq m-s} t^{e(m-s,\alpha',\beta')} \begin{bmatrix} m-s \\ \beta', m-s-|\beta'| \end{bmatrix}_{q,t} \right),$$

ở đó $\beta' = (\beta_2, \ldots, \beta_l) \leq \alpha' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_l)$. Áp dụng công thức 7.1 [28] ở trên và biến đổi ta thu được, chuỗi Hilbert-Poincaré ứng với $\mathcal{B}_m(\alpha)$ là

$$C_{\alpha,m}(t) = \sum_{\beta \leq \alpha, |\beta| \leq m} t^{e(m,\alpha,\beta)} \begin{bmatrix} m \\ \beta', m-|\beta'| \end{bmatrix}_{q,t}.$$

Do đó, chuỗi Hilbert-Poincaré trong Giả thuyết 3.0.1 là phù hợp với Giả thuyết 1.4.1.

ii) Đặc biệt, chuỗi Hilbert-Poincaré của Δ_s^m là $\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_{q,t}$ và toán tử $\delta_{s+1;m}^{n-s}(f)$ làm tăng bậc của f lên $(n-s)(q^m - q^s)$ đơn vị. Vì vậy, chuỗi Hilbert-Poincaré tương ứng với tập $\mathcal{B}_m(n)$ là $\sum_{s=0}^{\min(m,n)} t^{(n-s)(q^m-s^s)} \begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_{q,t}$ và nó chính là $C_{n,m}(t)$ trong Giả thuyết 1.4.2. Do đó, chuỗi Hilbert-Poincaré trong Giả thuyết 3.0.2 là phù hợp với Giả thuyết 1.4.2.

Vì vậy, cơ sở mà chúng tôi đề xuất có chuỗi Hilbert-Poincaré trùng với chuỗi Hilbert-Poincaré trong giả thuyết của Lewis, Reiner và Staton. Do đó, giả thuyết của chúng tôi phù hợp với hai giả thuyết được đề xuất bởi Lewis, Reiner và Stanton. Hơn nữa, chúng tôi cũng giải thích lý do tại sao các hạng tử của chuỗi Hilbert-Poincaré lại xuất hiện trong các giả thuyết ban đầu.

Trong chương này, chúng tôi xây dựng cơ sở tuyến tính và chứng minh Giả thuyết 3.0.1 và Giả thuyết 3.0.2 đúng với hạng không vượt quá 3. Từ đó, chúng tôi suy ra Giả thuyết của Lewis, Reiner và Stanton (Giả thuyết 1.4.1 và 1.4.2) cho không gian bất biến của $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của các nhóm con parabolic, trong trường hợp các nhóm này có hạng không vượt quá 3.

3.1. Toán tử δ và tập Δ

Trong lý thuyết bất biến trên trường hữu hạn, các đa thức Dickson giữ vai trò trung tâm trong việc xây dựng và mô tả các không gian bất biến dưới tác động của nhóm tuyến tính tổng quát GL_n và các nhóm con parabolic của nó. Không chỉ cung cấp một hệ sinh cho không gian bất biến, các bất biến Dickson còn là nền tảng cho việc phát triển các cấu trúc đại số, đặc biệt là trong định nghĩa và vận dụng các toán tử δ cũng như tập Δ_s^m, đóng vai trò thiết yếu trong việc xây dựng các cơ sở tuyến tính cho các không gian bất biến.

Chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cơ bản liên quan đến các đa thức Dickson và đại số bất biến. Với mỗi số nguyên dương k, ký hiệu V_k là tích

$$V_k(x_1, \ldots, x_k) = \prod_{\lambda_i \in \mathbb{F}_q} (x_k + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1}).$$

Ta biết rằng vành gian bất biến S^{B_n} dưới tác động của nhóm con Borel của GL_n là một đại số đa thức được sinh bởi các bất biến V_i^{q-1} với $1 \le i \le n$. Ngoài ra, phương trình cơ bản theo X là

$$V_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, X) = X^{q^n} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} Q_{n,i} X^{q^i},$$

trong đó các đa thức $Q_{n,i} = Q_{n,i}(x_1, \ldots, x_n)$ là bất biến dưới tác động của nhóm

GL_n. Theo Dickson [7], ta có

$$\mathcal{D}_n = S^{\mathrm{GL}_n} = \mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \ldots, Q_{n,n-1}].$$

Các đa thức này có thể biểu diễn tường minh thông qua định thức của các lũy thừa Frobenius như sau

$$[r_1, \ldots, r_n] = \det\left(x_i^{q^{r_j}}\right)_{1\le i,j\le n}, \quad L_n = [0, 1, \ldots, n-1],$$

với $0 \le i \le n$ thì

$$Q_{n,i} = \frac{\left[0, \ldots, \widehat{i}, \ldots, n\right]}{L_n}.$$

Đặc biệt $Q_{n,n} = 1$, $Q_{n,0} = L_n^{q-1}$, và $Q_{n,i} = 0$ nếu $i < 0$ hoặc $i > n$. Một số liên hệ quan trọng khác là

$$L_n = V_1V_2 \ldots V_n, \quad Q_{n,i} = Q_{n-1,i-1}^q + Q_{n-1,i}V_n^{q-1}.$$

3.1.1. Toán tử δ và vai trò kết hợp với Δ

Tiếp theo, chúng tôi trình bày định nghĩa và tác động của toán tử δ, cùng với cách thức kết hợp nó với các đơn thức trong Δ_s^m để tạo nên các bất biến parabolic. Nội dung này sẽ làm sáng tỏ vai trò của Δ_s^m như một khối xây dựng quan trọng trong cấu trúc của không gian bất biến.

Trước khi giới thiệu định nghĩa về tập Δ_s^m, chúng tôi nhắc lại khái niệm đơn thức Dickson có kiểu phân hoạch.

Định nghĩa 3.1.1. Với một số nguyên dương s và phân hoạch $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ sao cho $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_s \ge 0$, một *đơn thức Dickson* $Q_{s,s-1}^{e_1} \cdots Q_{s,0}^{e_s}$ trong đại số Dickson $\mathcal{D}_s$ được gọi là có kiểu $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ nếu từng phần tử e_i thoả mãn điều kiện

$$e_i \in \left[\frac{q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i+1}}}{q-1}, \frac{q^{\lambda_i+1} - q^{\lambda_{i+1}}}{q-1}\right)$$

với $1 \leq i \leq s$.

Nhận xét 3.1.2. Mỗi *đơn thức Dickson* là q-tương thích với một phân hoạch duy nhất $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ có độ dài không vượt quá s.

Định nghĩa 3.1.3 ([28], Định nghĩa 5.4)**.** *Không gian con Δ_s^m của đại số Dickson* được xác định là hợp rời rạc của các tập con $\Delta_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)}$ trong đó

- Mỗi phân hoạch $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ thỏa mãn điều kiện $m - s \geq \lambda_1$.
- $\Delta_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)}$ là tập hợp tất cả các đơn thức Dickson có kiểu tương ứng.
- Nếu $s > m$ thì quy ước $\Delta_s^m = \emptyset$.

Các *đơn thức Dickson* trong Δ_s^m với $s \leq \min(m, n)$, cùng với các toán tử δ đóng vai trò quan trọng để xây dựng cơ sở của không gian bất biến. Ta gọi một *đơn thức Dickson* trong Δ_s^m là một *đơn thức cốt yếu*.

Dễ dàng thấy rằng $\Phi\Delta_s^m \subset \Delta_{s+1}^m$ và Φ biến một đơn thức kiểu $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ của $\mathcal{D}_s$ thành một đơn thức kiểu $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s, 0)$ của $\mathcal{D}_{s+1}$. Các đơn thức Dickson trong Δ_s^m đóng vai trò là những thành phần "cốt yếu" trong việc xây dựng các bất biến dưới tác động của nhóm GL_n và các nhóm con parabolic của nó. Như sẽ được trình bày trong phần tiếp theo, khi kết hợp với các toán tử δ, các đơn thức này cho phép xác định tường minh cơ sở tuyến tính của các không gian bất biến parabolic.

Khi khảo sát cấu trúc của tập Δ_s^m, một số đơn thức Dickson không thuộc tập này vẫn giữ vai trò quan trọng, đặc biệt trong việc nghiên cứu tính đầy đủ hoặc độc lập tuyến tính của các hệ sinh bất biến. Các đơn thức như vậy được gọi là *đơn thức biên* và được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 3.1.4. Ta gọi các *đơn thức biên* là các đơn thức Dickson không nằm trong Δ_s^m nhưng có tính chất "biên" thoả mãn

$$e_i \in \left[\frac{q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i+1}}}{q-1}, \frac{q^{\lambda_i+1} - q^{\lambda_{i+1}}}{q-1}\right) \text{ với mọi } i \neq j,$$

và

$$e_j = \frac{q^{\lambda_j+1} - q^{\lambda_{j+1}}}{q-1}$$

với chỉ số j cố định trước.

Theo Định nghĩa toán tử δ, nếu $f(x_1, x_2) \in \mathbb{F}_q[x_1, x_2]$ thì

$$\delta_3(f) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} f(x_2, x_3) & x_2^{q^m} f(x_1, x_3) & x_3^{q^m} f(x_1, x_2) \end{vmatrix}}{L_3}.$$

Trong Chương 2 chúng tôi đã chứng minh tổng quát hơn rằng $\delta_s(f)$ thông thường không phải là đa thức, nhưng trong nhiều trường hợp nó không những là một đa thức mà còn là một đa thức bất biến của $\mathcal{Q}_m(s+1)$ dưới tác động của nhóm Borel B_{s+1}. Mệnh đề tiếp theo, chúng tôi đưa một phát biểu chính xác cho trường hợp riêng của toán tử δ_3 và trình bày một chứng minh "cơ bản" hơn về tính đa thức của $\delta_3(f)$, đồng thời sử dụng kết quả này để chỉ ra tính GL_3-bất biến của $\delta_3(f)$ khi f là GL_2-bất biến.

Mệnh đề 3.1.5. *Nếu f là một đa thức GL_2-bất biến thì $\delta_3(f)$ là một đa thức và là một GL_3-bất biến của không gian $\mathcal{Q}_m(3)$.*

Chứng minh. Để chứng minh rằng $\delta_3(f)$ là một đa thức và là GL_3-bất biến, ta thực hiện các bước sau.

(1) Chứng minh tính đa thức của $\delta_3(f)$.

Mẫu số L_3 của $\delta_3(f)$ là tích các dạng tuyến tính. Do đó, để chứng minh rằng $\delta_3(f)$ là một đa thức, ta cần chỉ ra rằng tử số này sẽ bằng không khi có một quan hệ tuyến tính không tầm thường giữa các biến x_1, x_2 và x_3. Giả sử ta có điều kiện tuyến tính

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

trong đó a_1, a_2, và a_3 là các hằng số, không đồng thời bằng không. Giả sử $a_3 \neq 0$, không giảm tính tổng quát ta giả sử $a_3 = -1$. Khi đó,

$$x_3 = a_1x_2 + a_2x_2.$$

Tử số của $\delta_3(f)$ có dạng

$$L_2(x_2, x_3)x_1^{q^m} f(x_2, x_3) - L_2(x_1, x_3)x_2^{q^m} f(x_1, x_3) + L_2(x_1, x_2)x_3^{q^m} f(x_1, x_2).$$

– Khi a_1 và a_2 đều khác 0. Vì f là GL_2-bất biến nên

$$f(x_1, x_3) = f(x_1, a_1x_2 + a_2x_2) = f(x_1, x_2),$$

$$f(x_2, x_3) = f(x_2, a_1x_2 + a_2x_2) = f(x_1, x_2)$$

và

$$L_2(x_1, x_3) = L_2(x_1, a_1x_1 + a_2x_2) = a_2L_2(x_1, x_2),$$

$$L_2(x_2, x_3) = L_2(x_2, a_1x_1 + a_2x_2) = -a_1L_2(x_1, x_2).$$

Do đó, khi $x_3 = a_1x_1 + a_2x_2$ thì tử số của $\delta_3(f)$ trở thành

$$\begin{aligned}&L_2(x_2, x_3)\, x_1^{q^m} f(x_2, x_3) - L_2(x_1, x_3)\, x_2^{q^m} f(x_1, x_3) + L_2(x_1, x_2)\, x_3^{q^m} f(x_1, x_2)\\ &\quad = \left(-a_1x_1^{q^m} - a_2x_2^{q^m} + x_3^{q^m}\right) L_2(x_1, x_2)\, f(x_1, x_2) = 0.\end{aligned}$$

– Khi $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$, chẳng hạn $a_1 = 0$. Khi đó,

$$f(x_2, x_3) = f(x_2, ax_2) = 0; f(x_1, x_3) = f(x_1, a_2x_2) = f(x_1, x_2).$$

$$L_2(x_1, x_3) = aL_2(x_1, x_2) \text{ và } L_2(x_2, x_3) = L_2(x_2, a_2x_2) = 0.$$

Do đó, tử số của $\delta_3(f)$ là

$$\left(-a_2x_2^{q^m} + x_3^{q^m}\right) L_2(x_1, x_2)f(x_1, x_2) = 0.$$

– Khi $a_1 = a_2 = 0$ thì hiển nhiên tử số của $\delta_3(f)$ bằng 0.

Vậy tử số của $\delta(f)$ sẽ bằng 0 nếu tồn tại một quan hệ tuyến tính giữa x_1, x_2 và x_3. Điều này chỉ ra rằng $\delta_3(f)$ là một đa thức.

(2) Chứng minh tính bất biến.

Trước hết, $\delta_3(f)$ là đa thức đối xứng. Vì vậy, để chứng minh $\delta_3(f)$ là GL_3-bất biến của $\mathcal{Q}_m(3)$ thì ta chỉ cần chỉ ra $\delta_3(f)$ bất biến đối với phép biến đổi $x_1 \mapsto x_1 + x_2$ và giữ nguyên x_2, x_3. Ta có,

$$L_3(x_1 + x_2, x_2, x_3) = L_3(x_1, x_2, x_3).$$

Vì vậy, tử số của $\delta_3(f)(x_1 + x_2, x_2, x_3) - \delta_3(f)(x_1, x_2, x_3)$ là

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 & x_2 & x_3 \\ x_1^q + x_2^q & x_2^q & x_3^q \\ \left(x_1^{q^m} + x_2^{q^m}\right) f(x_2, x_3) & x_2^{q^m} f(x_1 + x_2, x_3) & x_3^{q^m} f(x_1 + x_2, x_2) \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} f(x_2, x_3) & x_2^{q^m} f(x_1, x_3) & x_3^{q^m} f(x_1, x_2) \end{vmatrix}.$$

Sau khi thu gọn ta thu được

$$x_2^{q^m} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ f(x_2, x_3) - f(x_1 + x_2, x_3) & f(x_1 + x_2, x_3) - f(x_1, x_3) & 0 \end{vmatrix}.$$

Lập luận tương tự bước 1, ta có

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ f(x_2, x_3) - f(x_1 + x_2, x_3) & f(x_1 + x_2, x_3) - f(x_1, x_3) & 0 \end{vmatrix}$$

chia hết cho L_3. Vì vậy,

$$\delta_3(f)(x_1+x_2,x_2,x_3)-\delta_3(f)(x_1,x_2,x_3)=0$$

trong $\mathcal{Q}_m(3)$. Do đó, $\delta_3(f)$ là một đa thức và là GL_3-bất biến trong không gian $\mathcal{Q}_m(3)$.

□

Chú ý 3.1.6. Theo Mệnh đề 4.1 [12] thì kết quả trên đúng cho trường hợp hạng 2 với toán tử δ_2, trường hợp hạng 1 được suy ra một cách dễ dàng từ định nghĩa của toán tử δ_1.

Ví dụ 3.1.7. Các đa thức GL_1-bất biến có dạng $f(x)=x^{s(q-1)}=Q_{1,0}^s, s\geq 0$. Do đó, $\delta_2\left(Q_{1,0}^s\right)$ là một đa thức và là GL_2-bất biến của $\mathcal{Q}_m(2)$. Họ bất biến $\delta_2\left(Q_{1,0}^s\right)$ chính là họ bất biến y_s với $s<[m]_q$ mà Goyal xây dựng trong [12]. Trong đó, y_s được định nghĩa là

$$y_s=x_1^{q^m-q}x_2^{s(q-1)}+x_1^{q^m-q-(q-1)}x_2^{(s+1)(q-1)}+\cdots+x_1^{s(q-1)}x_2^{q^m-q}.$$

Kết quả này vẫn đúng khi $s\geq [m]_q$. Tuy nhiên, khi đó các bất biến biến này là tầm thường trong $\mathcal{Q}_m$ ngoại trừ trường hợp $s=[m]_q+1$, trong đó

$$\delta_2\left(Q_{1,0}^{[m]_q+1}\right)=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m}x_2^{q^m-1+q-1} & x_2^{q^m}x_1^{q^m-1+q-1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^q & x_2^q\end{vmatrix}}=-x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}=-\delta_1^2(1).$$

Ví dụ 3.1.8. Đối với $s\leq [m]_q$, $\delta_2^2\left(Q_{1,0}^s\right)$ là một đa thức GL_3-bất biến có bậc $2(q^m-q)+s(q-1)$ trong $\mathcal{Q}_m$. Họ bất biến này chính là họ các đa thức $a_{m,3,s}$ mà Goyal đã xây dựng trong ([12], Hệ quả 4.3), theo đó thì công thức tường minh của $a_{m,3,s}$ là

$$a_{m,3,s} = \delta_2^2\left(Q_{1,0}^s\right) = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=\frac{2(q^m-q)}{q-1}+s \\ s\le i_1,i_2,i_3\le \frac{q^m-q}{q-1}}} x_1^{i_1(q-1)}x_2^{i_2(q-1)}x_3^{i_3(q-1)}.$$

Kết quả này vẫn đúng cho trường hợp $s \geq [m]_q$. Tuy nhiên, các bất biến này đều là tầm thường, ngoại trừ trường hợp

$$\delta_2^2\left(Q_{1,0}^{[m]_q+2}\right) = x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{q^m-1} = \delta_1^3(1).$$

3.1.2. Toán tử δ và Đại số Dickson

Với mỗi hợp thành α của n, không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ là một môđun trên đại số Dickson $\mathcal{D}_n$. Kết quả sau đây mô tả cách toán tử δ tương tác với đại số Dickson trong trường hợp hạng thấp.

Mệnh đề 3.1.9. *Ta có các đẳng thức sau trong $\mathcal{Q}_m$.*

(1) $Q_{s,0}\delta_s(f) = 0$ với mọi f.

(2) $Q_{2,1}\delta_2(f) = \delta_2\left(Q_{1,0}^q f\right)$ với mọi $f \in \mathcal{D}_1$.

(3) $Q_{3,i}\delta_3(f) = \delta_3\left(Q_{2,i-1}^q f\right)$ với $i = 1$ hoặc 2 và mọi $f \in \mathcal{D}_2$.

(4) $Q_{3,2}\delta_2^2(f) = \delta_2^2\left(Q_{1,0}^{q^2} f\right)$ với mọi $f \in \mathcal{D}_1$.

(5) $Q_{3,1}\delta_2^2(f) = 0$ với mọi $f \in \mathcal{D}_1$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh (3) cho trường hợp $i = 1$ và hai trường hợp cuối. Việc chứng minh $(1), (2)$ được thực hiện dựa vào định nghĩa toán tử δ_s và biến đổi định thức tương tự trong chứng minh $(3), (4)$ và (5).

- Chứng minh (3).

  Xét hiệu $Q_{3,1}\delta_3(f) - \delta_3(Q_{2,0}^q f)$. Sử dụng đẳng thức $Q_{3,1} = V_3^{q-1}Q_{2,1} + Q_{2,0}^q$, phần tử $(3,1)$ trong hàng cuối của định thức trong tử số có thể được viết đơn giản thành

$$x_1^{q^m} V_3^{q-1}(x_2, x_3, x_1) Q_{2,1}(x_2, x_3).$$

Vì

$$V_3(x_2, x_3, x_1) L_2(x_2, x_3) = L_3(x_2, x_3, x_1) = L_3(x_1, x_2, x_3),$$

nên khai triển Laplace theo hàng cuối của định thức trong tử số cho thấy rằng đa thức thu được thuộc I_m, điều này dẫn đến nó bằng không trong $\mathcal{Q}_m$. Do đó, ta thu được (3).

- Chứng minh (4).

  Xét $Q_{3,2} = V_3^{q-1} + Q_{2,1}^q$. Theo (1) và (2), trong $\mathcal{Q}_m$ ta có

$$Q_{3,2}\delta_2\left(\delta_2(f)\right) = \delta_2\left(Q_{2,1}^q \delta_2(f)\right).$$

  Sử dụng công thức $Q_{2,1} = V_2^{q-1} + Q_{1,0}^q$ và khai triển định thức, ta thấy hiệu $\delta_2\left(Q_{2,1}^q\delta_2(f)\right) - \delta_2^2\left(Q_{1,0}^{q^2} f\right)$ có thể được viết dưới dạng

$$x_3^{q^m} \cdot \frac{x_1^{q^{m-1}} x_2 f(x_2) V_2^{q^2-q-1}(x_2, x_3) - x_2^{q^m} x_1 f(x_1) V_2^{q^2-q-1}(x_1, x_3)}{L_2(x_1, x_2)} + x_1^{q^m} x_2^{q^m} f(x_3) \cdot \frac{x_2 V_2^{q^2-q-1}(x_3, x_2) - x_1 V_2^{q^2-q-1}(x_3, x_1)}{L_2(x_1, x_2)}.$$

  Ta thấy rằng số hạng đầu tiên là một đa thức và là bội của $x_3^{q^m}$. Số hạng thứ hai thuộc iđêan $(x_1^{q^m}, x_2^{q^m})$. Vậy, (4) được chứng minh.

- Chứng minh (5).

  Trong $\mathcal{Q}_m$, ta có

$$Q_{3,1}\delta_2(f) = \delta_2\left(Q_{2,0}^q f\right),$$

và

$$Q_{2,0}\delta_2(f) = L_2^{q^2-q-1}(x_1,x_2)x_1 f(x_1)x_2^{q^m} - L_2^{q^2-q-1}(x_1,x_2)x_2 f(x_2)x_1^{q^m}$$

Lập luận tương tự như chứng minh của (4) ta suy ra điều phải chứng minh.

□

3.2. Chặn trên của tổng số chiều của các không gian con bất biến

Giả thuyết Parabolic dự đoán rằng chuỗi Hilbert-Poincaré cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$, trong đó α là một hợp thành của n, là đa thức (hữu hạn) $C_{\alpha,m}(t)$ có công thức tường minh được nhắc lại trong Giả thuyết 1.4.2. Đặc biệt, giá trị của $C_{\alpha,m}(t)$ khi $t=1$ là tổng số chiều của các $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ phân bậc $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$. Chúng tôi chỉ ra kết quả sau.

Mệnh đề 3.2.1. *Với mỗi $m,n \geq 1$ và hợp thành α bất kỳ của n, tổng số chiều của không gian véctơ phân bậc $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ không nhỏ hơn $C_{\alpha,m}(1)$.*

Chứng minh. Xét thương đại số đa thức không phân bậc

$$\mathcal{R} = \mathbb{F}_q\left[x_1,\ldots,x_n\right] / \left(x_1^{q^m} - x_1,\ldots,x_n^{q^m} - x_n\right).$$

Tác động của GL_n lên $\mathbb{F}_q\left[x_1,\ldots,x_n\right]$ sẽ cảm sinh tác động xuống thương này. Ta có một lọc tự nhiên

$$\{0\} = F_{-1} \subset F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{n(q^m-1)} = \mathcal{R},$$

trong đó F_i là ảnh của tập hợp tất cả các đa thức có bậc không vượt quá i dưới phép chiếu chính tắc $\mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_n] \to \mathcal{R}$. Gọi $\mathfrak{gr}_F\mathcal{R}$ là không gian véctơ phân bậc liên kết $\bigoplus_{i\geq 0} F_i/F_{i-1}$ và trang bị cho $\mathfrak{gr}_F\mathcal{R}$ một cấu trúc vành mà phép nhân được xác định bởi tích $F_iF_j \to F_{i+j}$. Ánh xạ $\mathbb{F}_q$-đại số chính tắc

$$\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n] \to \mathcal{R} \to \mathfrak{gr}_F\mathcal{R}, \quad x_i \mapsto \bar{x}_i \in F_1/F_0,$$

cảm sinh một đẳng cấu $\mathbb{F}_q$-đại số của các GL_n-bất biến

$$\mathcal{Q}_m(n) \cong \mathfrak{gr}_F\mathcal{R}.$$

Mặt khác, áp dụng hàm tử lấy GL_n-bất biến trên mỗi dãy khớp ngắn của các GL_n-môđun,

$$0 \to F_{i-1} \to F_i \to F_i/F_{i-1} \to 0,$$

và tính theo số chiều, ta thu được bất đẳng thức

$$\dim (F_i)^{\mathrm{GL}_n} \leq \dim (F_{i-1})^{\mathrm{GL}_n} + \dim (F_i/F_{i-1})^{\mathrm{GL}_n},$$

do đó

$$\dim \mathcal{R}^{\mathrm{GL}_n} \leq \dim(\mathfrak{gr}_F\mathcal{R})^{\mathrm{GL}_n} = \dim \mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}.$$

Để tính số chiều của $\mathcal{R}^{\mathrm{GL}_n}$, ta mở rộng trường $\mathbb{F}_q$ thành một trường $\mathbb{F}$ chứa $\mathbb{F}_{q^m}$. Khi đó ánh xạ đánh giá

$$f(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left[(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}_{q^m}^n \mapsto f(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}\right],$$

cảm sinh một đẳng cấu của các $\mathbb{F}_q$-đại số

$$\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{R} \cong \mathrm{Map}\left(\mathbb{F}_{q^m}^n, \mathbb{F}\right).$$

Đẳng cấu này cũng là GL_n-tương thích, trong đó GL_n tác động lên vế phải thông qua việc nhúng $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_{q^m})$. Từ đó suy ra rằng tồn tại đẳng cấu

$$\left(\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{R}\right)^{\mathrm{GL}_n} \cong \mathrm{Map}\left(\mathbb{F}_{q^m}^n/\mathrm{GL}_n, \mathbb{F}\right).$$

Số chiều của $(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathcal{R})^{\mathrm{GL}_n}$ bằng với số lượng của các quỹ đạo của tập $\mathbb{F}_{q^m}^n/\mathrm{GL}_n$. Mặt khác, số lượng này bằng tổng $\sum_{s=0}^{\min(m,n)}\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_q$, trong đó $\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_q$ là q-hệ số nhị thức bằng số các không gian con có s chiều của $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ $\mathbb{F}_{q^m}$.

Vậy, ta đã chỉ ra rằng

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{F}_q}\mathcal{R}^{\mathrm{GL}_n} &= \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathcal{R}^{\mathrm{GL}_n})\\ &= \sum_{s=0}^{\min(m,n)}\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_q = C_{m,n}(1)\le \dim \mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}.\end{aligned}$$

Lập luận trên vẫn đúng nếu ta thay nhóm tuyến tính tổng quát GL_n bằng nhóm con parabolic P_α. Vậy, mệnh đề đã được chứng minh.

□

Tiếp theo, chúng tôi có kết quả sau về chuỗi chuỗi Hilbert-Poincaré sinh bởi tập $\mathcal{B}_m(\alpha)$.

Bổ đề 3.2.2. *Với mỗi hợp thành α của n, chuỗi Hilbert-Poincaré của $\mathbb{F}_q$-không gian véctơ sinh bởi tập $\mathcal{B}_m(\alpha)$ không lớn hơn $C_{\alpha,m}(t)$.*

Chứng minh. Ta có

$$C_{\alpha,m}(t) = \sum_{\beta\le\alpha, |\beta|\le m} t^{e(m,\alpha,\beta)}\begin{bmatrix} m \\ \beta, m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t},$$

trong đó

$$\begin{aligned}e(m,\alpha,\beta) &= \sum(\alpha_i-\beta_i)(q^m-q^{\beta_i})\\ &= (\alpha_1-\beta_1)(q^m-q^{\beta_1}) + q^{\beta_1}\sum_{i\ge 2}(\alpha_i-\beta_i)(q^{m-\beta_1}-q^{\beta_2+\cdots+\beta_i}).\end{aligned}$$

Ngoài ra, theo [28] (Công thức 7.1), ta có công thức cho (q,t)-đa hệ số nhị thức là

$$\begin{bmatrix} m \\ \beta, m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t} = \begin{bmatrix} m \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{q,t} \left(\begin{bmatrix} m \\ \beta_2,\dots,\beta_\ell, m-|\beta| \end{bmatrix}_{q,t} \right)^{q^{\beta_1}}.$$

Do đó, đặt $\beta' = (\beta_2,\dots,\beta_\ell)$ và $\alpha' = (\alpha_2,\dots,\alpha_\ell)$, khi đó $C_{\alpha,m}(t)$ được biểu diễn thành

$$\sum_{\beta_1 \le \min(\alpha_1,m)} t^{(\alpha_1-\beta_1)(q^m-q^{\beta_1})} \begin{bmatrix} m \\ \beta_1 \end{bmatrix}_{q,t} \times$$
$$\times \left(\sum_{\beta' \le \alpha', |\beta'| \le m-\beta_1} t^{e(m-\beta_1,\beta',\alpha')} \begin{bmatrix} m-\beta_1 \\ \beta', m-\beta_1-|\beta'| \end{bmatrix}_{q,t} \right)^{q^{\beta_1}}.$$

So sánh công thức cuối cùng này với định nghĩa quy nạp của tập $\mathcal{B}_m(\alpha)$, và lưu ý rằng toán tử $\delta^{\alpha_1-s}_{s+1;m}$ nâng bậc thêm $(\alpha_1-s)(q^m-q^s)$, bội Frobenius nhân bậc thêm q lần, và chuỗi Hilbert-Poincaré của tập Δ^m_s chính là $\begin{bmatrix} m \\ s \end{bmatrix}_q$, ta suy kết quả cần chứng minh bằng quy nạp. □

Nhận xét 3.2.3. i) Giả sử ta có thể xây dựng một hệ sinh cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ sao cho sau khi tính toán số chiều thì chuỗi Hilbert-Poincaré $C'_{m,\alpha}(t)$ của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ không lớn hơn $C_{\alpha,m}(t)$ (ở đó, $f(t) \le g(t)$ nếu $g-f$ là một đa thức với các hệ số không âm). Sau đó, vì có một bất đẳng thức ngược lại $C'_{m,\alpha}(1) \ge C_{\alpha,m}(1)$ khi xét tại $t=1$, ta có thể kết luận rằng hai chuỗi này là đồng nhất vì cả hai đều là các đa thức có bậc hữu hạn với hệ số không âm. Do đó, hệ sinh của ta thực chất là một cơ sở cho $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$.

ii) Từ đó, ta có thể đơn giản hóa công việc xác định cơ sở. Cụ thể, để chứng minh rằng $\mathcal{B}_m(\alpha)$ là một cơ sở của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ thì chúng chỉ cần xác minh rằng nó là một hệ sinh là đủ.

3.3. Cơ sở của không gian bất biến của $\mathcal{Q}_m(2)$ dưới tác động của các nhóm con parabolic

Trường hợp hạng 2 thì nhóm tuyến tính tổng quát GL_2 chỉ có hai nhóm con là chính nó và nhóm Borel B_2. Không gian bất biến dưới tác động của nhóm con Borel B_2 là trường hợp riêng của Định lý 2.5.4, theo đó ta có kết quả sau.

Hệ quả 3.3.1. *Hệ gồm 2 họ các phần tử lập thành một $\mathbb{F}_q$-cơ sở của $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{B}_2}$ $(m \geq 1)$.*

(1) $\delta_{1;m}\left(D_1^a\right) = \delta_{1;m}\left(Q_{1,0}^a\right), \quad a \leq [m]_q.$

(2) $D_1^a D_2^b = Q_{1,0}^a Q_{2,1}^b, \quad a < [m]_q, b \leq [m-1]_q.$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một nhận xét quan trọng liên quan đến các đơn thức Dickson có dạng $Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-q^i}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}$ nằm ở "biên" của Δ_2^m. Kết quả này rất quan trọng trong việc xác định hệ sinh của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$.

Mệnh đề 3.3.2. *Với mỗi $0 \leq i \leq m-1$, ta có phép phân tích trong $\mathcal{Q}_m(2)$*

$$Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-q^i}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}} = \delta_2(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}) + \text{ đơn thức cốt yếu chia hết cho } Q_{2,0}.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa toán tử δ, ta có

$$\delta_2\left(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m} x_2^{q^i-1} & x_2^{q^m} x_1^{q^i-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^q & x_2^q \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{q^i} & x_2^{q^i} \\ x_1^{q^m} & x_2^{q^m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^q & x_2^q \end{vmatrix}} = \frac{[i,m]}{[0,1]}.$$

Do đó, $\delta_2\left(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right)$ là một GL_2-bất biến của S, vì vậy nó là đa thức Dickson. Khi $i=0$, đơn thức Dickson $\delta_2(1)$ phải chứa $Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-1}{q-1}}$ là một hạng tử đơn tầm thường vì cả hai đều trở thành $x_1^{q^m-q}$ khi cho $x_2 = 0$. Do đó, $\delta_2(1) - Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-1}{q-1}}$ chia hết cho $Q_{2,0}$. Hơn nữa, dễ thấy rằng trong các đơn thức Dickson có bậc $q^m - q$ thì $Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-1}{q-1}}$ là đơn thức Dickson duy nhất không cốt yếu. Vậy, ta có

$$\delta_2(1) = Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-1}{q-1}} + \text{đơn thức cốt yếu chia hết cho } Q_{2,0}.$$

Tổng quát hơn, sử dụng các phép biến đổi định thức ta có đẳng thức

$$\delta_2\left(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right) = Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}} \left(\delta_{2;m-i}(1)\right)^{q^i}.$$

Do đó,

$$\delta_2\left(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right) = Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-q^i}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}} + (fQ_{2,0})^{q^i} Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}},$$

với f là một đa thức Dickson nào đó. Một đơn thức Dickson xuất hiện trong hạng tử thứ hai của tổng ở trên có dạng $Q_{2,1}^{i_2} Q_{2,0}^{i_2}$ với $i_2 \geq \frac{q^{i+1}-1}{q-1}$. So sánh bậc ta có $i_1 \leq \frac{q^{m-1}-q^{i+1}}{q-1}$, do đó $Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2}$ là đơn thức cốt yếu. Vậy, ta có điều phải chứng minh. □

Trong [12] (Mệnh đề 4.1), Goyal đã xây dựng một họ các đa thức bất biến dưới tác động của nhóm GL_2 trong không gian $\mathcal{Q}_m(2)$. Tập hợp các đa thức bất biến này được ký hiệu là $y_{k'}$, với k' từ 0 đến $\frac{q^m-q}{q-1}$. Thực ra, họ bất biến này chính là họ GL_2-bất biến $\delta_2(\Delta_1^m)$ mà chúng tôi xây dựng. Kết quả sau đây của chúng tôi về cơ sở cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$ là tổng quát kết quả của Goyal, chúng tôi chỉ ra $\mathbb{F}_q$-cơ sở không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$.

Mệnh đề 3.3.3. *Tập hợp $\mathcal{B}_m(2)$, bao gồm 3 họ phần tử*

(1) $\delta_1(\delta_1(1)) = x_1^{q^{m-1}} x_2^{q^{m-1}}$,

(2) $\delta_2(\Delta_1^m)$,

(3) Δ_2^m

lập thành một $\mathbb{F}_q$-cơ sở của không gian con bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$.

Chứng minh. Theo Nhận xét 3.2.3, để chứng minh $\mathcal{B}_m(2)$ là một cơ sở của $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$, ta chỉ cần chứng minh rằng tập $\mathcal{B}_m(2)$ là một hệ sinh của $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$. Để chứng minh, ta thực hiện theo hai bước.

i) Thứ nhất, xét ánh xạ chuyển

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2} : \mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{B}_2} \to \mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$$

từ không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{B}_2}$ lên không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$. Ta sẽ chứng minh ảnh của hệ sinh của $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{B}_2}$ là tập $\mathcal{B}'$, bao gồm 3 họ phần tử

(1) $\delta^2(1) = x_1^{q^{m-1}} x_2^{q^{m-1}}$,

(2) $\delta_2(Q_{1,0}^s) = y_s,\ 0 \le s < [m]_q$,

(3) $\mathcal{D}_2$.

Thật vậy, theo $\mathbb{F}_q$-cơ sở $\mathcal{B}_m(1,1)$ cho không gian bất biến dưới tác động của nhóm con Borel bao gồm hai họ phần tử

(1) $\delta_1\left(D_1^a\right) = \delta_1\left(Q_{1,0}^a\right), \quad a \le [m]_q$,

(2) $D_1^a D_2^b = Q_{1,0}^a Q_{2,1}^b, \quad a < [m]_q, b \le [m-1]_q$.

Theo Ví dụ 3.1.7, với $a = [m]_q$ thì $\delta_2\left(D_1^q\right) = x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} = \delta_1^2(q)$ là GL_2-bất biến nên với họ thứ nhất thì ta chỉ cần xác định ảnh của ánh xạ chuyển với trường hợp số mũ của D_1 nhỏ hơn $a = [m]_q$. Sử dụng khai triển của δ_2 theo định nghĩa, ta có đẳng thức trong $\mathcal{Q}_m$

$$x_1^{q^m-1} x_2^{s(q-1)} = x_1^{(s+1)(q-1)} \delta_2(1) - \delta_2(Q_{1,0}^{s+1}),$$

với mọi $0 \le s < [m]_q$. Vì $\delta_2(Q_{1,0}^s)$ đã là một GL_2-bất biến, nên ảnh của ánh xạ chuyển tác động lên họ đầu tiên là

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(x_1^{q^{m-1}} x_2^{s(q-1)}\right) = \delta_2(1) \mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(x_1^{(s+1)(q-1)}\right) - \delta_2\left(Q_{1,0}^{s+1}\right).$$

Rõ ràng, $\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(x_1^{(s+1)(q-1)}\right)$ lại là một đa thức Dickson trong $\mathcal{D}_2$. Theo Mệnh đề 3.1.9, tích của $\delta_2(1)$ với một đa thức Dickson là bằng không hoặc là một phần tử khác trong họ $\delta_2(\Delta_1^m)$. Do đó, ta có

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(x_1^{q^{m-1}}x_2^{s(q-1)}\right) = -\delta_2\left(Q_{1,0}^{s+1}\right),$$

hoặc

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(x_1^{q^{m-1}}x_2^{s(q-1)}\right) = 0.$$

Đối với họ thứ hai thì

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(Q_{1,0}^{a}Q_{2,1}^{b}\right) = Q_{2,1}^{b}\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(Q_{1,0}^{a}\right) \in \mathcal{D}_2.$$

Hơn nữa, $\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(x_1^{(s+1)(q-1)}\right)$ là một toàn cấu. Vì vậy, $\mathcal{B}'$ là một hệ sinh cho $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$.

ii) Tiếp theo, ta chứng minh rằng để sinh ra không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$, có thể thay thế đại số Dickson $\mathcal{D}_2$ trong họ thứ ba của $\mathcal{B}'$ bằng không gian con nhỏ hơn Δ_2^m.

Giả sử phản chứng rằng $Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}$ không nằm trong không gian $\mathcal{B}_m(2)$, và giả sử thêm rằng đây là đơn thức nhỏ nhất trong theo thứ tự grevlex có tính chất này. Vì $Q_{2,0}^{k} = 0$ nếu $k > [m-1]_q$, nên ta chỉ cần xét trường hợp $i_2 \le \frac{q^{m-1}-1}{q-1} = [m-1]_q$. Gọi $i \le m-1$ là số nguyên duy nhất sao cho $[i]_q \le i_2 \le [i+1]_q$. Khi đó, điều này suy ra rằng $i_1 \ge \frac{q^{m-1}-q^{i_2}}{q-1}$. Theo Mệnh đề 3.3.2, ta suy ra

$$Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2} - Q_{2,1}^{i_1-\frac{q^{m-1}-q^i}{q-1}}Q_{2,0}^{i_2-\frac{q^i-1}{q-1}}\delta_2\left(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right)$$

là tổng của các đơn thức Dickson có bậc theo thứ tự grevlex nhỏ hơn (i_1, i_2). Và ít nhất một đơn thức trong đó lại không thuộc $\mathcal{B}_m(2)$ điều này là mâu thuẫn với giả thiết phản chứng về thứ tự từ điển ngược phân bậc nhỏ nhất của (i_1, i_2). Vậy, ta có điều phải chứng minh.

$\square$

3.4. Cơ sở của không gian bất biến của $\mathcal{Q}_m(3)$ dưới tác động của các nhóm con parabolic

Trường hợp hạng 3 thì nhóm tuyến tính tổng quát GL_3 có bốn nhóm con gồm nhóm Borel $\mathrm{B}_3 = \mathrm{P}_{(1,1,1)}$, nhóm con parabolic $\mathrm{P}_{(2,1)}$, nhóm con parabolic $\mathrm{P}_{(1,2)}$ và nhóm tuyến tính tổng quát $\mathrm{GL}_3 = \mathrm{P}_{(3)}$. Không gian bất biến dưới tác động của nhóm con Borel B_3 là trường hợp riêng của Định lý 2.5.4, theo đó ta có kết quả sau.

Hệ quả 3.4.1. *Hệ gồm 4 họ phần tử sau tạo thành một $\mathbb{F}_q$-cơ sở của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{B}_3}$ $(m \geq 2)$.*

(1) $\delta_1^2 (D_1^a) = \delta_1^2 \left(Q_{1,0}^a\right), \quad a \leq [m]_q.$

(2) $\delta_1 \left(D_1^a D_2^b\right) = \delta_1 \left(Q_{1,0}^a Q_{2,1}^b\right), \quad a < [m]_q, b \leq [m-1]_q.$

(3) $D_1^a \delta_2 \left(D_2^b\right) = Q_{1,0}^a \delta_2 \left(Q_{2,1}^b\right), \quad a < [m]_q, b \leq [m-1]_q.$

(4) $D_1^a D_2^b D_3^c = Q_{1,0}^a Q_{2,1}^b Q_{3,2}^c, \quad a < [m]_q, b < [m-1]_q, c \leq [m-2]_q.$

3.4.1. Đối với nhóm con parabolic $\mathrm{P}_{(2,1)}$

Trong phần này, chúng tôi phát biểu và chứng minh Giả thuyết 3.0.1 cho trường hợp nhóm con parabolic $\mathrm{P}_{(2,1)}$.

Mệnh đề 3.4.2. *Tập hợp $\mathcal{B}_m(2,1)$ bao gồm 6 nhóm dưới đây tạo thành một $\mathbb{F}_q$-cơ sở cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{P}_{(2,1)}}$.*

(1) $Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2} Q_{3,2}^{i}$, $(i_1, i_2) \in \Delta_2^m$, $i < [m-2]_q$.

(2) $Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2} \delta_3(1)$, $(i_1, i_2) \in \Delta_2^m$.

(3) $\delta_2\left(Q_{1,0}^{i_1} Q_{2,1}^{i}\right)$, $i_1 < [m]_q$, $i < [m-1]_q$.

(4) $\delta_2\left(Q_{1,0}^{i_1} \delta_2(1)\right)$, $i_1 < [m]_q$.

(5) $\delta_1\left(\delta_1(Q_{1,0}^{i})\right)$, $i < [m]_q$.

(6) $\delta_1\left(\delta_1(\delta_1(1))\right)$.

Chứng minh. Các họ (1) và (2) là các đơn thức Dickson nên rõ ràng là $\mathrm{P}_{(2,1)}$-bất biến. Theo Hệ quả 2.4.4 thì các họ (3), (4), (5) và (6) là B_3-bất biến. Hơn nữa, các họ này là các đa thức đối xứng theo hai ẩn đầu tiên nên suy ra tất cả các phần tử trong 6 nhóm trên là $\mathrm{P}_{(2,1)}$-bất biến. Do đó, để chứng minh mệnh đề này, ta chỉ cần chứng minh rằng $\mathcal{B}_m(2,1)$ là một hệ sinh cho $\mathcal{Q}m(3)^{\mathrm{P}(2,1)}$.

Giả sử f là một đa thức khác không trong $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{P}_{(2,1)}}$. Nếu coi f là một đa thức theo ẩn x_3, thì hệ số của nó là GL_2-bất biến đối với hai ẩn x_1, x_2. Theo Mệnh đề 3.3.3 thì các hệ số này thuộc một trong các trường hợp

(1) $\delta_1(\delta_1(1)) = x_1^{q^{m-1}} x_2^{q^{m-1}}$,

(2) $\delta_2(\Delta_1^m)$,

(3) Δ_2^m.

Nếu một trong các hệ số này có dạng $x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1}$, thì phần tử tương ứng sẽ thuộc vào hai nhóm cuối cùng trong danh sách. Bằng cách trừ đi nếu cần, giả sử rằng phần tử này không xuất hiện trong f.

Do đó, giả sử rằng bậc của x_1 trong f nhỏ hơn $q^m - 1$ (và do đó bậc của x_2 cũng nhỏ hơn $q^m - 1$ bởi tính đối xứng của f với hai ẩn đầu tiên). Tiếp theo, có thể coi f là B_3-bất biến nên f là một tổ hợp tuyến tính của các đa thức thuộc hai loại cuối cùng trong danh sách các bất biến Borel trong Hệ quả 3.4.1. Đặc biệt, bậc x_3 của f phải chia hết cho $q^2 - q$, ta có biểu diễn f dưới dạng

$$f = x_3^{aq(q-1)} f_{aq} + x_3^{(aq-1)(q-1)} f_{aq-1} + \cdots,$$

trong đó $f_i = f_i(x_1, x_2) \in \mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$. Nếu f_{aq} chứa $\delta_2\left(Q_{1,0}^t\right)$ với một số $t \geq 0$, thì ta có thể thay f bởi f trừ cho một đa thức thích hợp trong nhóm thứ ba hoặc thứ tư trong danh sách 6 họ trên. Do đó, ta có thể giả sử f_{aq} thuộc Δ_2^m. Nhưng điều này có nghĩa là đơn thức bậc cao nhất là một tổng không tầm thường của một đa thức B_3-bất biến có dạng $x_1^{j_1(q-1)} Q_{2,1}^{j_2} Q_{3,2}^{j_3}$. Đặc biệt, điều này cho thấy a chia hết cho q, giả sử $a = bq$. Sau đó, thay f bằng cách đa thức f trừ cho một tổ hợp tuyến tính thích hợp của hai nhóm đầu tiên của $\mathcal{B}_m(2,1)$, ta sẽ thu được một đa thức $\mathrm{P}_{(2,1)}$-bất biến có bậc x_3 nhỏ hơn đa thức ban đầu. Quy nạp theo bậc của x_3 ta suy ra tập $\mathcal{B}_m(2,1)$ là hệ sinh của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{P}_{(2,1)}}$. Từ đó, theo Nhận xét 3.2.3 ta suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.4.3. Ta có thể chứng minh rằng $\mathcal{B}_m(2,1)$ là độc lập tuyến tính trực tiếp như sau. Xem các phần tử của $\mathcal{B}_m(2,1)$ như là các đa thức theo ẩn x_3. Bằng cách tính toán trực tiếp, ta thu kết quả dưới đây theo hệ số của bậc cao nhất theo x_3 của 6 họ trong $\mathcal{B}_m(2,1)$.

$\mathcal{B}_m(2,1)$	Bậc theo ẩn x_3	Hệ số
(1) $Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2} Q_{3,2}^{i}$	$i(q^3 - q^2) < q^m - q^2$	$Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2}$, $(i_1, i_2) \in \Delta_2^m$
(2) $Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2} \delta_3(1)$	$q^m - q^2$	$Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2}$, $(i_1, i_2) \in \Delta_2^m$
(3) $\delta_2\left(Q_{1,0}^{i_1} Q_{2,1}^{i}\right)$	$i(q^2 - q) < q^m - q$	$\delta_2(Q_{1,0}^{i_1})$, $i_1 < [m]_q$
(4) $\delta_2\left(Q_{1,0}^{i_1} \delta_2(1)\right)$	$q^m - q$	$\delta_2(Q_{1,0}^{i_1})$, $i_1 < [m]_q$
(5) $\delta_1\left(\delta_1(Q_{1,0}^{i})\right)$	$i(q-1) < q^m - 1$	$x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1}$
(6) $\delta_1\left(\delta_1(\delta_1(1))\right)$	$q^m - 1$	$x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1}$

Từ bảng trên, ta thấy hệ số của bậc cao nhất của x_3 là độc lập tuyến tính. Từ đó, suy ra rằng các đa thức trong $\mathcal{B}_m(2,1)$ là độc lập tuyến tính.

3.4.2. Đối với nhóm con parabolic $\mathrm{P}_{(1,2)}$

Trong phần này, chúng tôi phát biểu và chứng minh Giả thuyết 3.0.1 cho trường hợp nhóm con parabolic $\mathrm{P}_{(1,2)}$.

Mệnh đề 3.4.4. *Tập hợp $\mathcal{B}_m(1,2)$ bao gồm 6 họ dưới đây tạo thành một cơ sở cho không gian con bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{P}_{(1,2)}}$.*

(1) $Q_{1,0}^{j_1}Q_{3,2}^{i_1}Q_{3,1}^{i_2}, \quad j_1 < [m]_q, \quad (i_1, i_2) \in \Delta_2^{m-1}.$

(2) $Q_{1,0}^{j_1}\delta_3\left(Q_{2,1}^{j_2}\right), \quad j_1 < [m]_q, \quad j_2 < [m-1]_q.$

(3) $Q_{1,0}^{j_1}\delta_2\left(\delta_2(1)\right), \quad j_1 < [m]_q.$

(4) $\delta_1\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right), \quad (i_1, i_2) \in \Delta_2^{m}.$

(5) $\delta_1\left(\delta_2(Q_{1,0}^{j_1})\right), \quad j_1 < [m]_q.$

(6) $\delta_1\left(\delta_1(\delta_1(1))\right).$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh $\mathcal{B}_m(1,2)$ là một hệ sinh bằng phương pháp quy nạp lùi theo bậc nhỏ nhất của x_1. Biểu diễn f dưới dạng

$$f = x_1^{i(q-1)}g_i(x_2, x_3) + x_1^{(i+1)(q-1)}g_{i+1}(x_2, x_3) + \cdots$$

Khi đó, tất cả các đa thức hệ số g_j trong biểu diễn trên đều là các đa thức GL_2-bất biến theo x_2 và x_3. Nếu $i(q-1) = q^m - 1$, thì $x_1^{q^{m-1}}g(x_2, x_3)$ là một tổ hợp tuyến tính của các đa thức từ 3 nhóm cuối trong $\mathcal{B}_m(1,2)$. Ta có thể thay đa thức f bằng đa thức f trừ đi các họ này. Vì vậy, có thể giả sử rằng $i(q-1) \le q^m - q$.

Vì f cũng là B_3-bất biến nên f là tổ hợp tuyến tính của các đa thức họ 3 và 4 thuộc $\mathbb{F}_q$-cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{B}_3}$ theo Hệ quả 3.4.1. Cụ thể, f là tổ hợp tuyến tính của các đa thức có dạng $x_1^{j_1(q-1)}\delta_2\left(Q_{2,1}^{j_2}\right)$ hoặc $Q_{1,0}^{j_1}Q_{2,1}^{j_2}Q_{3,2}^{j_3}$. Mặc khác, bậc nhỏ nhất của x_1 trong các đa thức này lần lượt là

$$x_1^{j_1(q-1)}x_2^{q^m-q}x_3^{j_2q(q-1)} \text{ và } x_1^{j_1(q-1)}x_2^{j_2q(q-1)}Q_{2,1}^{j_3q}(x_2, x_3).$$

Trong cả hai trường hợp, số mũ của x_2 và x_3 trong hệ số của bậc nhỏ nhất của x_1 chia hết cho $q(q-1)$.

Vậy, $g_i(x_2, x_3)$ là một đa thức mà trong đó tất cả số mũ của x_2 và x_3 đều chia hết cho $q(q-1)$. Hơn nữa, $g_i \in \mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}(x_2, x_3)$ nên nó phải là một lũy thừa bậc q của một đa thức thuộc $\mathcal{Q}_{m-1}(2)$ theo ẩn x_2, x_3.

Mặt khác, các hạng tử có bậc thấp nhất theo x_1 của 3 họ đầu tiên trong $\mathcal{B}_m(1,2)$ là

1. $x_1^{j_1(q-1)}\left[Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3)\right]^q$, với $(i_1, i_2) \in \Delta_2^{m-1}$,
2. $x_1^{j_1(q-1)}\left[\delta_{2;m-1}\left(Q_{1,0}^{j_2}\right)\right]^q$, với $j_2 < [m-1]_q$,
3. $x_1^{j_1(q-1)}\left[x_2^{q^{m-1}-1}x_3^{q^{m-1}-1}\right]^q$.

Do đó, $x_1^{i_1(q-1)}g_i(x_2, x_3)$ là đa thức có bậc theo x_1 nhỏ nhất trong không gian tuyến tính sinh bởi $\mathcal{B}_m(1,2)$. Vì vậy, bằng cách trừ đi từ f một tổ hợp tuyến tính thích hợp của các đa thức trong $\mathcal{B}_m(1,2)$, ta có thể thu được một đa thức bất biến $\mathrm{P}_{(1,2)}$ khác, trong đó bậc thấp nhất theo x_1 lớn hơn thực sự bậc thấp nhất theo x_1 trong f. Bằng phương pháp quy nạp, ta suy ra tập hợp $\mathcal{B}_m(1,2)$ là một hệ sinh của không gian con bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{P}_{(1,2)}}$. Từ đó, theo Nhận xét 3.2.3 ta có được điều cần chứng minh. □

Nhận xét 3.4.5. Tương tự như đối với nhóm parabolic $\mathrm{P}_{(2,1)}$, ta cũng có thể chứng minh trực tiếp rằng $\mathcal{B}_m(1,2)$ là độc lập tuyến tính. Thật vậy, các phần tử sinh của $\mathcal{B}_m(1,2)$ có thể được phân biệt theo hệ số của hạng tử chứa bậc nhỏ nhất của x_1. Cụ thể, các hệ số tương ứng như được trình bày trong bảng sau.

$\mathcal{B}_m(1,2)$	Bậc theo ẩn x_1	Hệ số
(1) $Q_{1,0}^{j_1}Q_{3,2}^{i_1}Q_{3,1}^{i_2}$	$j_1(q-1) < q^m - 1$	$Q_{2,1}^{i_1 q}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2 q}(x_2,x_3), (i_1,i_2) \in \Delta_2^{m-1}$
(2) $Q_{1,0}^{j_1}\delta_3\left(Q_{2,1}^{j_2}\right)$	$j_1(q-1) < q^m - 1$	$\delta_{2;m-1}(Q_{1,0}^{j_2})^q(x_2,x_3), j_2 < [m-1]_q$
(3) $Q_{1,0}^{j_1}\delta_2\left(\delta_2(1)\right)$	$j_1(q-1) < q^m - 1$	$x_2^{q^m-q}x_3^{q^m-q}$
(4) $\delta_1\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right)$	$q^m - 1$	$Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3), (i_1,i_2) \in \Delta_2^m$
(5) $\delta_1\left(\delta_2(Q_{1,0}^{j_1})\right)$	$q^m - 1$	$\delta_2(Q_{1,0}^{j_1})(x_2,x_3)j_1 < [m]_q$
(6) $\delta_1\left(\delta_1(\delta_1(1))\right)$	$q^m - 1$	$x_2^{q^m-1}x_3^{q^m-1}$

3.4.3. Đối với nhóm tuyến tính tổng quát GL_3

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh Giả thuyết 3.0.2 cho trường hợp nhóm tuyến tính tổng quát hạng 3. Cụ thể, chúng tôi sẽ chỉ ra $\mathcal{B}_m(3)$ là một hệ sinh của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$, từ đó suy ra nó cũng là một cơ sở của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$. Phương pháp chứng minh được tiến hành tương tự như trong trường hợp hạng 2. Chứng minh được chia thành ba bước. Đầu tiên, sử dụng ánh xạ chuyển để xây dựng một hệ sinh $\mathcal{B}'$ lớn hơn so với hệ sinh mong muốn là $\mathcal{B}_m(3)$ mà trong $\mathcal{B}'$ không hạn chế các đa thức Dickson

$$\mathcal{B}' = \delta_1^3\left(\Delta_0^m\right) \coprod \delta_2^2\left(\Delta_1^m\right) \coprod \delta_3\left(\mathcal{D}_2\right) \coprod \mathcal{D}_3.$$

Sau đó, ta chứng minh rằng $\delta_3(\mathcal{D}_2)$ thuộc trong không gian sinh bởi

$$\delta_1^3\left(\Delta_0^m\right) \coprod \delta_2^2\left(\Delta_1^m\right) \coprod \delta_3\left(\Delta_2^m\right),$$

tức là $\mathcal{D}_2$ có thể được thay thế bằng tập con nhỏ hơn Δ_2^m. Cuối cùng, ta chứng minh rằng khi giới hạn trong $\mathcal{Q}_m(3)$ thì đại số Dickson hạng 3 thuộc không gian con sinh bởi $\mathcal{B}_m(3)$. Điều này được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng tất cả các đơn thức "biên" của Δ_3^m đều thuộc vào trong không gian này. Do đó, không gian con sinh bởi $\mathcal{B}_m(3)$ là một $\mathcal{D}_3$-môđun con của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$. Vì nó chứa Δ_3^m nên nó sẽ chứa toàn bộ $\mathcal{D}_3$. Trước hết, ta có kết quả sau.

Bổ đề 3.4.6. *Tập $\mathcal{B}'$ gồm 4 họ phần tử sau là một hệ sinh của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$.*

(1) $\delta_1^3(\Delta_0^m) = x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{q^m-1}$.

(2) $\delta_2^2(\Delta_1^m) = \left\{a_{m,3,s}, 0 \leq s < [m]_q\right\}$.

(3) $\delta_3(\mathcal{D}_2)$.

(4) $\mathcal{D}_3$.

Chứng minh. Ta sử dụng ánh xạ chuyển từ $\mathrm{P}_{(1,2)}$ lên GL_3. Trong sáu họ của tập $\mathcal{B}_m(1,2)$ thì họ cuối cùng là GL_3-bất biến. Theo Mệnh đề 3.1.5 và chú ý 3.1.6 thì $\delta_3\left(Q_{2,1}^{j_2}\right)$ và $\delta_2^2(1)$ cũng là GL_3-bất biến. Mặt khác, $\mathrm{Tr}_{\mathrm{P}_{(1,2)}}^{\mathrm{GL}_3}\left(x_1^{j_1(q-1)}\right)$ thuộc $\mathcal{D}_3$ và là bội của $Q_{3,0}$, hơn nữa

$$Q_{3,0}\delta_3\left(Q_{2,1}^{j_2}\right) = Q_{3,0}\delta_2^2(1) = 0 \text{ trong } \mathcal{Q}_m.$$

Do đó, ánh xạ chuyển tác động lên họ thứ hai và thứ ba của $\mathcal{B}_m(1,2)$ tạo ra các GL_3-bất biến có dạng $\delta_3\left(Q_{2,1}^{j_2}\right), j_2 < [m-1]_q$ và $\delta_2^2(1)$. Tiếp tục, ta xét ảnh của ánh xạ chuyển tác động lên họ thứ tư $\delta_1\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right) = x_1^{q^m-1}Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3)$. Ta sẽ chỉ ra rằng

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{P}_{(1,2)}}^{\mathrm{G}}(\delta_1(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2})) = \delta_3(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2+1}).$$

Thật vậy, khai triển định theo dòng cuối cùng ta có

$$\begin{aligned}
&Q_{2,0}\delta_3\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right) - \delta_3\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2+1}\right) = \\
&= \frac{x_1^{q^m}x_2^{q-1}Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3)\left(V_2(x_2,x_1)^{q-1} - V_2(x_2,x_3)^{q-1}\right)L_2(x_2,x_3)}{L_3(x_1,x_2,x_3)} \\
&\quad - \frac{x_2^{q^m}x_1^{q-1}Q_{2,1}^{i_1}(x_1,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_1,x_3)\left(V_2(x_1,x_2)^{q-1} - V_2(x_1,x_3)^{q-1}\right)L_2(x_1,x_3)}{L_3(x_1,x_2,x_3)}.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} V_3(x_1,x_2,x_3) &= V_2(x_2,x_3)^q - V_2(x_2,x_3)V_2(x_2,x_1)^{q-1} \\ &= V_2(x_1,x_3)^q - V_2(x_1,x_3)V_2(x_1,x_2)^{q-1}, \end{aligned}$$

nên biểu diễn $Q_{2,0}\delta_3\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right) - \delta_3\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2+1}\right)$ được rút gọn thành

$$\begin{aligned} & Q_{2,0}\delta_3\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right) - \delta_3\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2+1}\right) = \\ & = -\frac{x_1^{q^m}x_2^qQ_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3)V_3(x_2,x_1,x_3)}{L_3(x_1,x_2,x_3)} \\ & \qquad\qquad + \frac{x_2^{q^m}x_1^qQ_{2,1}^{i_1}(x_1,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_1,x_3)V_3(x_1,x_2,x_3)}{L_3(x_1,x_2,x_3)} \\ & = -\frac{x_1^{q^m}x_2^qQ_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3)}{L_2(x_1,x_2)} + \frac{x_2^{q^m}x_1^qQ_{2,1}^{i_1}(x_1,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_1,x_3)}{L_2(x_1,x_2)} \\ & = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m}x_2^qQ_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3) & x_2^{q^m}x_1^qQ_{2,1}^{i_1}(x_1,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_1,x_3) \end{vmatrix}}{L_2(x_1,x_2)} \\ & = \delta_2\left(Q_{1,0}Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right). \end{aligned}$$

Do đó,

$$\delta_3\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2+1}\right) = Q_{2,0}\delta_3\left(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right) - \delta_2(Q_{1,0}Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}).$$

Tiếp theo, ta xem $\delta_1\left(Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}\right) = x_1^{q^m-1}Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3)$ như là một B_3-bất biến, và xét tác động ánh xạ chuyển từ B_3 lên $\mathrm{P}_{(2,1)}$. Theo Mệnh đề 3.3.3, ta có

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}(x_1^{q^m-1}x_2^{a(q-1)}) = -\delta_2(Q_{1,0}^{a+1}) = -y_{a+1}(x_1,x_2).$$

Ta biểu diễn $Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3)$ dưới dạng

$$Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3) = \sum_{(a,b)}\lambda(a,b)x_2^{a(q-1)}x_3^{b(q-1)},$$

với $\lambda(a,b) \in \mathbb{F}_q$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}_{\mathrm{B}_3}^{\mathrm{P}_{(2,1)}}\left(x_1^{q^m-1}Q_{2,1}^{i_1}(x_2,x_3)Q_{2,0}^{i_2}(x_2,x_3)\right) &= -\sum_{(a,b)}\lambda(a,b)\delta_2(Q_{1,0}^{a+1})x_3^{b(q-1)} \\
&= -\delta_2\left(\sum_{(a,b)}\lambda(a,b)Q_{1,0}^{a+1}x_2^{b(q-1)}\right) \\
&= -\delta_2\left(Q_{1,0}\sum_{(a,b)}\lambda(a,b)x_1^{a(q-1)}x_2^{b(q-1)}\right) \\
&= -\delta_2\left(Q_{1,0}Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}\right) \\
&= \delta_3(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2+1}) - Q_{2,0}\delta_3(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2}).
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $\operatorname{Tr}_{\mathrm{P}_{(2,1)}}^{\mathrm{G}_3}\left(Q_{2,0}\delta_3(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2})\right) = 0$. Vậy,

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{P}_{(1,2)}}^{\mathrm{G}}(\delta_1(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2})) = \delta_3(Q_{2,1}^{i_1}Q_{2,0}^{i_2+1}).$$

Cuối cùng, ta xét ảnh của ánh xạ chuyển tác động lên họ thứ năm. Ta sẽ chỉ ra rằng nếu $j < [m]_q$ thì

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{P}_{(1,2)}}^{\mathrm{GL}_3}\left(x_1^{q^m-1}\cdot\delta_2(Q_{1,0}^{j})(x_2,x_3)\right) = \delta_2^2\left(Q_{1,0}^{j+1}\right).$$

Thật vậy, xét $x_1^{q^m-1}\cdot\delta_2\left(Q_{1,0}^{j}\right)(x_2,x_3)$ như một B_3-bất biến và xét tác động của ánh xạ chuyển từ B_3 sang $\mathrm{P}_{(2,1)}$. Lại theo Mệnh đề 3.3.3, ta có

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{B}_2}^{\mathrm{GL}_2}\left(x_1^{q^m-1}x_2^{a(q-1)}\right) = -\delta_2\left(Q_{1,0}^{a+1}\right).$$

Do đó,

$$\operatorname{Tr}_{\mathrm{B}_3}^{\mathrm{P}_{(2,1)}}\left(x_1^{q^m-1}\delta_2(Q_{1,0}^{j})(x_2,x_3)\right) = \sum_{a=j}^{\frac{q^m-q}{q-1}}\delta_2\left(Q_{1,0}^{a+1}\right)(x_1,x_2)\cdot x_3^{q^m-q+j(a-1)-a(q-1)}.$$

Tổng này chính là $\delta_2^2\left(Q_{1,0}^{j+1}\right) = a_{m,3,j+1}$ và nó cũng là GL_3-bất biến (theo [12], Hệ quả 4.3). Theo tính chất bắc cầu của ánh xạ chuyển, ta suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra trong họ thứ 3 của $\mathcal{B}'$ thì không cần toàn bộ $\mathcal{D}_2$ mà chỉ cần Δ_2^m là đủ. Trước hết, ta chứng minh Bổ đề kỹ thuật sau.

Bổ đề 3.4.7. *Cho s, t là các số nguyên không âm và $0 \leq i \leq [m]_q$. Khi đó, trong $\mathcal{Q}_m(3)$ ta có đẳng thức*

$$\delta_2(V_1^{s(q-1)}V_2^{t(q-1)}\delta_2(Q_{1,0}^i)) =$$
$$= \begin{cases} 0 & \textit{khi } t \geq 1 \textit{ và } s > 1, \\ x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{(qt+i-1)(q-1)} & \textit{khi } t \geq 1 \textit{ và } s = 1, \\ (t+1)x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{(qt+i-2)(q-1)} & \textit{khi } t \geq 1 \textit{ và } s = 0, \\ \delta_2^2(Q_{1,0}^{i+s}) & \textit{khi } t = 0 \textit{ và } s \leq 1, \\ \delta_2^2(Q_{1,0}^{i+s}) - x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{(s+i-2)(q-1)} & \textit{khi } t = 0 \textit{ và } s \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh. Theo Chú ý 3.1.6 thì $\delta_2(f)$ là một đa thức nếu f là một đa thức B_1-bất biến theo ẩn x_1. Do đó, biểu thức $\delta_2\left(V_1^{s(q-1)}V_2^{t(q-1)}\delta_2\left(Q_{1,0}^i\right)\right)$ là một đa thức.

- Khi $t \geq 1$, theo định nghĩa toán tử δ_2 ta có $\delta_2\left(V_1^{s(q-1)}V_2^{t(q-1)}\delta_2(Q_{1,0}^i)\right)$ là

$$\frac{1}{L_2(x_1,x_2)}\left(x_2^{q^m}x_1^{s(q-1)}V_2^{t(q-1)-1}(x_1,x_3)\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_1^{q^m}x_3^{i(q-1)} & x_3^{q^m}x_1^{i(q-1)} \end{vmatrix}\right.$$
$$\left. - x_1^{q^m}x_2^{s(q-1)}V_2^{t(q-1)-1}(x_2,x_3)\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^{q^m}x_3^{i(q-1)} & x_3^{q^m}x_2^{i(q-1)} \end{vmatrix}\right)$$
$$= x_3^{q^m}\frac{x_2^{q^m}x_1^{(s+i)(q-1)+1}V_2^{t(q-1)-1}(x_1,x_3) - x_1^{q^m}x_2^{(s+i)(q-1)+1}V_2^{t(q-1)-1}(x_2,x_3)}{L_2(x_1,x_2)}$$
$$- x_1^{q^m}x_2^{q^m}x_3^{i(q-1)+1}\frac{x_1^{s(q-1)}V_2^{t(q-1)-1}(x_1,x_3) - x_2^{s(q-1)}V_2^{t(q-1)-1}(x_2,x_3)}{L_2(x_1,x_2)}.$$

Tử thức của số hạng thứ nhất trong tổng trên là

$$x_2^{q^m} x_1^{(s+i)(q-1)+1} V_2^{t(q-1)-1}(x_1, x_3) - x_1^{q^m} x_2^{(s+i)(q-1)+1} V_2^{t(q-1)-1}(x_2, x_3).$$

Ta có tử thức là triệt tiêu khi $x_2 = cx_1$ với $c \in \mathbb{F}_q$. Do đó, phân thức của số hạng thứ nhất là một đa thức. Vì vậy, số hạng đầu tiên trong tổng trên là triệt tiêu trong $\mathcal{Q}_m(3)$. Đối với số hạng thứ hai, khi $s > 1$ thì lập luận tương tự như trên số hạng này là triệt tiêu trong $\mathcal{Q}_m(3)$. Khi $s = 1$ và $s = 0$ thì số hạng này lần lượt là $x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} x_3^{(qt+i-1)(q-1)}$ và $-(t(q-1)-1) x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} x_3^{(qt+i-2)(q-1)}$.

- Khi $t = 0$, ta có $\delta_2(V_1^{s(q-1)} \delta_2(Q_{1,0}^i))$ là

$$\begin{aligned}
\delta_2\left(V_1^{s(q-1)} \delta_2(Q_{1,0}^i)\right) = \frac{1}{L_2(x_1,x_2)} \Bigg(& x_1^{q^m} x_2^{s(q-1)} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^{q^m} x_3^{i(q-1)} & x_3^{q^m} x_2^{i(q-1)} \end{vmatrix}}{V_2(x_2,x_3)} \\
& - x_2^{q^m} x_1^{s(q-1)} \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_1^{q^m} x_3^{i(q-1)} & x_3^{q^m} x_1^{i(q-1)} \end{vmatrix}}{V_2(x_1,x_3)} \Bigg)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{L_2(x_1,x_2)} \Bigg(& x_1^{q^m} x_2 \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_2^{q^m} x_3^{(s+i)(q-1)} & x_3^{q^m} x_2^{(s+i)(q-1)} \end{vmatrix}}{L_2(x_2,x_3)} \\
& - x_2^{q^m} x_1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_1^{q^m} x_3^{(s+i)(q-1)} & x_3^{q^m} x_1^{(s+i)(q-1)} \end{vmatrix}}{L_2(x_1,x_3)} \Bigg) \\
& + \frac{x_1^{q^m} x_2^{q^m} x_3^{i(q-1)}}{L_2(x_1,x_2)} \left(\frac{x_2^{s(q-1)} - x_3^{s(q-1)}}{x_2^{q-1} - x_3^{q-1}} - \frac{x_1^{s(q-1)} - x_3^{s(q-1)}}{x_1^{q-1} - x_3^{q-1}} \right).
\end{aligned}$$

Số hạng thứ nhất chính là $\delta_2^2(Q_{1,0}^{s+i})$. Số hạng thứ hai là tầm thường khi

$s \leq 1$ (trong $\mathcal{Q}_m(3)$) và khi $s \geq 2$ thì số hạng thứ hai là

$$-x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{(s-2+i)(q-1)}.$$

Vì vậy, Bổ đề được chứng minh.

$\square$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một kết quả kỹ thuật hỗ trợ việc mô tả tường minh các phần tử trong không gian bất biến.

Hệ quả 3.4.8. *Với $g \in \mathcal{D}_2$ và $i \geq 0$, thì $\delta_3\left(g\delta_2\left(Q_{1,0}^i\right)\right)$ là tổ hợp tuyến tính của các họ sau.*

i) $\delta_2^2\left(Q_{1,0}^s\right), \quad 0 \leq s < [m]_q.$

ii) $x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{s(q-1)}, \quad 0 \leq s \leq [m]_q.$

Chứng minh. Với $g \in \mathcal{D}_2$, theo định nghĩa của toán tử δ_3 và δ_2 ta có

$$\delta_3\left(g\delta_2\left(Q_{1,0}^i\right)\right) = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{i(q-1)+1} & x_2^{i(q-1)+1} & x_3^{i(q-1)+1} \\ x_1^{q^m} & x_2^{q^m} & x_3^{q^m} \\ x_1^{q^m}g(x_2,x_3) & x_2^{q^m}g(x_1,x_3) & x_3^{q^m}g(x_1,x_2) \end{vmatrix}}{L_3(x_1,x_2,x_3)}.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} L_3(x_1,x_2,x_3) &= V_3(x_1,x_2,x_3)L_2(x_1,x_2) \\ &= \left(V_2(x_2,x_3)^{q-1} - V_2(x_2,x_1)^{q-1}\right)V_2(x_2,x_3)L_2(x_1,x_2) \\ &= \left(V_2(x_1,x_3)^{q-1} - V_2(x_1,x_2)^{q-1}\right)V_2(x_1,x_3)L_2(x_1,x_2) \end{aligned}$$

Do đó, định thức trên được viết lại dưới dạng

$$\frac{1}{L_2(x_1,x_2)}\left(x_1^{q^m}x_2h(x_1,x_2,x_3)\frac{\begin{vmatrix} x_2^{i(q-1)+1} & x_3^{i(q-1)+1} \\ x_2^{q^m} & x_3^{q^m}\end{vmatrix}}{V_2(x_2,x_3)}\right.$$
$$\left. - x_2^{q^m}x_1h(x_2,x_1,x_3)\frac{\begin{vmatrix} x_1^{i(q-1)+1} & x_3^{i(q-1)+1} \\ x_1^{q^m} & x_3^{q^m}\end{vmatrix}}{V_2(x_1,x_3)}\right),$$

với

$$h(x_1,x_2,x_3) = \frac{g(x_2,x_3) - g(x_2,x_1)}{V_2(x_2,x_3)^{q-1} - V_2(x_2,x_1)^{q-1}}.$$

Do $g \in \mathcal{D}_2$ nên g có thể biểu diễn theo các đa thức bất biến tam giác trên, giả sử

$$g(x_1,x_2) = \sum_{(s,t)\in A} V_1^{s(q-1)}(x_1)V_2^{t(q-1)}(x_1,x_2).$$

Trong đó, $A \subset \mathbb{N}^2$. Khi đó

$$h(x_1,x_2,x_3) = \sum_{(s,t)\in A,\, t\geq 1} x_2^{s(q-1)}\left(\sum_{j=0}^{t-1} V_2(x_2,x_3)^{(t-1-j)(q-1)}V_2(x_2,x_1)^{j(q-1)}\right).$$

Nhận thấy rằng, nếu $j > 0$, thì cả hai biểu thức $\dfrac{x_1^{q^m}x_2V_2(x_2,x_1)^{j(q-1)}}{L_2(x_1,x_2)}$ và $\dfrac{x_2^{q^m}x_1V_2(x_1,x_2)^{j(q-1)}}{L_2(x_1,x_2)}$ đều bằng 0 trong $\mathcal{Q}_m$. Vì vậy, các hạng tử này trong h không đóng góp vào $\varphi(h)$. Suy ra $\varphi(h)$ được rút gọn thành tổng

$$\sum_{(s,t)\in A,\, t\geq 1} \varphi\left(x_2^{s(q-1)}V_2(x_2,x_3)^{(t-1)(q-1)}\right).$$

Mặt khác, theo định nghĩa toán tử δ_2 thì φ chính là

$$\varphi(x_2^{s(q-1)}V_2(x_2,x_3)^{(t-1)(q-1)}) = \delta_2\left(V_1^{s(q-1)}V_2^{(t-1)(q-1)}\delta_2(Q_{1,0}^i)\right).$$

Do đó, theo Bổ đề 3.4.7 thì

$$\delta_3(g\delta_2(Q_{1,0}^i)) \in \operatorname{Span}\left\{\delta_2^2(\Delta_1^m), \delta_1^2(Q_{1,0}^a), a \geq 0\right\}.$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Từ kết quả trên, chúng tôi thu được mô tả tường minh về hệ sinh của không gian con của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$, được trình bày trong mệnh đề sau.

Bổ đề 3.4.9. *Không gian con của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$ được sinh bởi ba họ phần tử gồm*

(1) $\delta_1^3(\Delta_0^m)$,

(2) $\delta_3^2(\Delta_1^m)$,

(3) $\delta_3(\Delta_2^m)$

chứa không gian con bất biến $\delta_3(\mathcal{D}_2)$.

Chứng minh. Giả sử f là một đơn thức Dickson trong $\mathcal{D}_2$ nhưng không phải là *cốt yếu*. Khi đó, nó có thể được viết dưới dạng

$$Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-q^i}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}} Q_{2,1}^a Q_{2,0}^b,$$

với một số $0 \leq i \leq m-1$, $0 \leq a, b$. Theo Mệnh đề 3.3.2 ta có

$$Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-q^i}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}} = \delta_2\left(x^{q^i-1}\right) + \text{ các đơn thức } \textit{cốt yếu} \text{ chia hết cho } Q_{2,0}^{\frac{q^{i+1}-1}{q-1}}.$$

Bằng cách lặp lại quá trình này (*nếu cần*), ta có thể viết f dưới dạng tổng của các đơn thức cốt yếu và các đa thức Dickson dưới dạng

$$\delta_2\left(x^{q^i-1}\right) Q_{2,1}^{a_j} Q_{2,0}^{b_j}, \quad j \geq i.$$

Vì vậy, ta chỉ cần xét $\delta_3(f)$ với $f = g\delta_2\left(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right)$, trong đó $g \in \mathcal{D}_2$ và $0 \leq i \leq m-1$.

Theo Hệ quả 3.4.8, ta có $\delta_3\left(g\delta_2\left(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right)\right)$ là tổ hợp tuyến tính của các đa thức thuộc các họ phần tử sau.

- $\delta_2^2\left(\Delta_1^m\right)$,
- $x_1^{q^{m-1}}x_2^{q^{m-1}}x_3^{s(q-1)}, \quad 0 \le s \le [m]_q$.

Vì $\delta_2\left(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right)$ là một đa thức Dickson thực sự, nên $\delta_3\left(g\delta_2(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}})\right)$ là GL_3-bất biến của $\mathcal{Q}_m(3)$. Hơn nữa, vì mọi đơn thức dạng $x_1^{q^{m-1}}x_2^{q^{m-1}}x_3^{i(q-1)}$ với $0 \le i < [m]_q$ không là GL_3-bất biến theo của $\mathcal{Q}_m(3)$. Do đó, ta có

$$\delta_3\left(g\delta_2(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}})\right) \in \operatorname{Span}\left\{\delta_2^2(\Delta_1^m), \delta_3^1(1)\right\}.$$

$\square$

Cuối cùng, ta sẽ thay thế toàn bộ đại số Dickson $\mathcal{D}_3$ bằng các tập hợp được tạo ra từ các toán tử δ tác động lên các không gian Δ_s^m, cụ thể là $\delta_1^3(\Delta_0^m)$, $\delta_2^2(\Delta_1^m)$, $\delta_3(\Delta_2^m)$ và Δ_3^m. Trước khi trình bày kết quả tổng quát, ta xét một số trường hợp cụ thể sau.

Bổ đề 3.4.10. *Trong $\mathcal{Q}_m(3)$ ta có các đẳng thức sau.*

(1) $\delta_3\left(Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}\right) = (\delta_{3;m-i}(1))^{q^i}\,Q_{3,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}$, *với mọi $i \ge 0$. Đặc biệt,*

$$\delta_3\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{m-2}-1}{q-1}}\right) = Q_{3,0}^{\frac{q^{m-2}-1}{q-1}} \text{ và } \delta_3\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}\right) = Q_{3,2}^{q^{m-3}}Q_{3,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}.$$

(2) $Q_{3,0}^k = 0$ *trong $\mathcal{Q}_m(3)$ với mọi $k > \frac{q^{m-2}-1}{q-1}$.*

(3) $\delta_3\left(Q_{2,1}^{q^{m-3}}Q_{2,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}\right) = Q_{3,1}^{q^{m-3}}Q_{3,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}$.

(4) Trong trường hợp tổng quát, với $\lambda_2 \ge \lambda_3 \ge 0$ thì

$$\delta_3\left(Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}}Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right) = \left(\delta_{3;m-\lambda_3}\left(Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}}\right)\right)^{q^{\lambda_3}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\delta_3\left(Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right) =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m}\left(Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right)(x_2,x_3) & x_2^{q^m}\left(Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right)(x_1,x_3) & x_3^{q^m} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}} \end{vmatrix}}{L_3(x_1,x_2,x_3)},$$

Khai triển Laplace theo hàng cuối của định thức trong tử số trên ta được kết quả sau

$$\begin{aligned}
&x_1^{q^m} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}}(x_2,x_3) L_2^{q^{\lambda_3}}(x_2,x_3) - x_2^{q^m} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}}(x_1,x_3) L_2^{q^{\lambda_3}}(x_1,x_3) \\
&\qquad + x_3^{q^m} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}}(x_1,x_2) L_2^{q^{\lambda_3}}(x_1,x_2) \\
&= \Bigg(x_1^{q^{m-\lambda_3}} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}}(x_2,x_3) L_2(x_2,x_3) - x_2^{q^{m-\lambda_3}} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}}(x_1,x_3) L_2(x_1,x_3) \\
&\qquad + x_3^{q^{m-\lambda_3}} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}}(x_1,x_2) L_2(x_1,x_2) \Bigg)^{q^{\lambda_3}}
\end{aligned}$$

Mặt khác, $L_3(x_1,x_2,x_3)^{q^{\lambda_3-1}-1} = Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}$. Từ đó suy ra phân thức trên được viết thành

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^{m-\lambda_3}} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}}(x_2,x_3) & x_2^{q^{m-\lambda_3}} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}}(x_1,x_3) & x_3^{q^{m-\lambda_3}} Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}} \end{vmatrix}}{L_3(x_1,x_2,x_3)}\right)^{q^{\lambda_3}} \times Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}$$

$$= \left(\delta_{3;m-\lambda_3}\left(Q_{2,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}}\right)\right)^{q^{\lambda_3}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}$$

Vậy, đẳng thức (4) được chứng minh. Đẳng thức (1) là trường hợp riêng của (4) khi $\lambda_2 = \lambda_3 = i$. Đẳng thức (3) là trường hợp riêng của đẳng thức (4) khi

$\lambda_3 = m-2$ và $\lambda_2 = m-3$ và kết hợp với đẳng thức $\delta_{3;3}(Q_{2,1}) = Q_{3,1}$. Cuối cùng, ta có

$$Q_{3,0} = L_3(x_1, x_2, x_3)^{q-1},$$

nên

$$Q_{3,0}^k = L_3^{k(q-1)}.$$

khi $k > \frac{q^{m-2}-1}{q-1}$ thì $k(q-1) > q^m + q - 2 \geq q^{m-2}$. Mà mỗi đơn thức trong khai triển của $L_3(x_1, x_2, x_3)$ đều có một ẩn có số mũ q^2 nên suy ra

$$Q_{3,0}^k = 0 \text{ trong } \mathcal{Q}_m(3),$$

với mọi $k > \frac{q^{m-2}-1}{q-1}$. Vậy, đẳng thức (2) được chứng minh. □

Kết quả tiếp theo đóng vai trò tương ứng với Mệnh đề 3.3.2 trong trường hợp có hạng bằng 3.

Mệnh đề 3.4.11. *Với $m \geq 2$ thì ta có các đẳng thức sau trong S.*

i)

$$\frac{[0,1,m-1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m}(Q_{2,1}) - \frac{[0,2,m-1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m}(1) = Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-1}{q-1}} + \textit{các hạng tử khác},$$

trong đó các hạng tử khác thuộc iđêan $(Q_{3,0})$ của $\mathcal{D}_3$.

ii) Với $0 \leq \ell \leq m-2$,

$$\frac{[0,1,\ell+1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m}(Q_{2,1}) - \frac{[0,2,\ell+1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m}(1) = Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2}-q^\ell}{q-1}} Q_{3,1}^{\frac{q^\ell-1}{q-1}} + \textit{các hạng tử khác},$$

trong đó các hạng tử khác thuộc iđêan $\left(Q_{3,1}^{\frac{q^{\ell+1}-1}{q-1}}, Q_{3,0}\right)$ của $\mathcal{D}_3$.

Chứng minh. i) Trước hết, ta có

$$\delta_{3;m}(Q_{2,1}) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} Q_{2,1}(x_2,x_3) & x_2^{q^m} Q_{2,1}(x_1,x_3) & x_3^{q^m} Q_{2,1}(x_1,x_2) \end{vmatrix}}{L_3}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^{q^2} & x_2^{q^2} & x_3^{q^2} \\ x_1^{q^m} & x_2^{q^m} & x_3^{q^m} \end{vmatrix}}{L_3} = \frac{[0,2,m]}{[0,1,2]}.$$

Tương tự, ta có

$$\delta_{3;m}(1) = \frac{[0,1,m]}{[0,1,2]}.$$

Do đó, vế trái của đẳng thức trong i) là GL_3-bất biến của S, nên nó là đa thức của các đa thức Dickson. Tiếp theo, nếu cho $x_3 = 0$ thì nó trở thành

$$\frac{[1,m-1]}{[1,2]} \cdot \frac{[2,m]}{[1,2]} - \frac{[2,m-1]}{[1,2]} \cdot \frac{[1,m]}{[1,2]} = \frac{[1,m-1][2,m] - [2,m-1][1,m]}{[1,2][1,2]}.$$

Biến đổi tử thức ta thu được

$$\begin{aligned} &[1,m-1][2,m] - [2,m-1][1,m] \\ &= \begin{vmatrix} x_1^q & x_2^q \\ x_1^{q^{m-1}} & x_2^{q^{m-1}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^{q^2} & x_2^{q^2} \\ x_1^{q^m} & x_2^{q^m} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^{q^2} & x_2^{q^2} \\ x_1^{q^{m-1}} & x_2^{q^{m-1}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^q & x_2^q \\ x_1^{q^m} & x_2^{q^m} \end{vmatrix} \\ &= [1,2][m-1,m]. \end{aligned}$$

Vì vậy, trong trường hợp này thì vế trái của đẳng thức trong i) trở thành

$$\frac{[1,2][m-1,m]}{[1,2][1,2]} = [0,1]^{q^{m-1}-q} = Q_{2,0}^{\frac{q^{m-1}-q}{q-1}}.$$

Mặt khác, nếu cho $x_3 = 0$ thì $Q_{3,0}$ trở thành 0, $Q_{3,1}$ trở thành $Q_{2,0}^q$ và $Q_{3,2}$

trở thành $Q_{2,1}^q$. Vì vậy, trong biểu diễn của vế trái trong đẳng thức i) qua các đa thức Dickson thì phải chứa $Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2}-1}{q-1}}$. Tức là, ta có

$$\frac{[0,1,m-1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m}(Q_{2,1}) - \frac{[0,2,m-1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m}(1)$$
$$= Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-1}{q-1}} + \text{các hạng tử khác}.$$

Theo lập luận trên, khi $x_3 = 0$ thì "các hạng tử khác" trở thành 0 nên nó chia hết cho $Q_{3,0}$.

ii) Vế trái của đẳng thức trong ii) được viết dưới dạng

$$\frac{[0,1,\ell+1]}{[0,1,2]} \cdot \frac{[0,2,m]}{[0,1,2]} - \frac{[0,2,\ell+1]}{[0,1,2]} \cdot \frac{[0,1,m]}{[0,1,2]}.$$

Do đó, vế trái trong ii) là GL_3-bất biến của S nên nó là đa thức của các đa thức Dickson. Cho $x_3 = 0$ và biến đổi tương tự i), vế trái của ii) trở thành

$$\frac{[1,\ell+1]}{[1,2]} \cdot \frac{[2,m]}{[1,2]} - \frac{[2,\ell+1]}{[1,2]} \cdot \frac{[1,m]}{[1,2]} = \frac{[\ell+1,m]}{[1,2]}.$$

Tiếp tục, biến đổi ta có

$$\begin{aligned} \frac{[\ell+1,m]}{[1,2]} &= \frac{[0,m-\ell-1]^{q^{\ell+1}}}{[0,1]^q} \\ &= \frac{[0,m-\ell-1]^{q^{\ell+1}}}{[0,1]^{q^{\ell+1}}} \cdot [0,1]^{q^{\ell+1}-q} \\ &= \delta_{2;m-\ell-1}(1)^{q^{\ell+1}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell+1}-q}{q-1}}. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự trường hợp hạng 3, cho $x_2 = 0$ thì $\delta_{2;m-\ell-1}(1) = \frac{[0,m-\ell-1]}{[0,1]}$ trở thành $Q_{1,0}^{\frac{q^{m-\ell-1}-q}{q-1}}$ nên $\delta_{2;m-\ell-1}(1)$ được viết dưới dạng

$$\delta_{2;m-\ell-1}(1) = Q_{2,1}^{\frac{q^{m-\ell-2}-1}{q-1}} + \text{ các hạng tử khác},$$

mà các số hạng khác chia hết cho $Q_{2,0}$. Do đó, ta kết luận vế trái bằng

$$Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2}-q^{\ell}}{q-1}} Q_{3,1}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}} + \text{các hạng tử khác},$$

trong đó các số hạng khác gồm các đa thức đơn Dickson chia hết cho $Q_{3,1}^{\frac{q^{\ell+1}-1}{q-1}}$ hoặc cho $Q_{3,0}$.

$\square$

Hệ quả 3.4.12. *Giả sử $0 \le \ell \le m-2$ và $m-3 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge 0$, ta có đẳng thức sau đây trong S.*

i)

$$\big(\delta_{3;m-\ell-1}(1)\big)^{q^{\ell}} \delta_{3;m}\left(Q_{2,1}^{q^{\ell}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right) - \big(\delta_{3;m-\ell-1}(Q_{2,1})\big)^{q^{\ell}} \delta_{3;m}\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right)$$
$$= Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-q^{\ell}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}} + \text{các hạng tử khác},$$

trong đó các hạng tử khác thuộc iđêan $\left(Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell+1}-1}{q-1}}\right)$.

ii) Tổng quát hơn, ta có

$$\big(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}(1)\big)^{q^{\lambda_3}} \delta_{3;m}\left(Q_{2,1}^{q^{\lambda_3}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right) - \big(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}(Q_{2,1})\big)^{q^{\lambda_3}} \delta_{3;m}\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right)$$
$$= Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_2}}{q-1}} Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}} + \text{các hạng tử khác},$$

trong đó các hạng tử khác thuộc iđêan $\left(Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3+1}-1}{q-1}}, Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2+1}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right)$.

Chứng minh. Kết quả trên được suy ra từ Bổ đề 3.4.10 và Mệnh đề 3.4.11. Thật vậy, theo (4) Bổ đề 3.4.10, áp dụng cho trường hợp $\lambda_2 = \ell+1, \lambda_3 = \ell$ ta có

$$\delta_{3;m}\left(Q_{2,1}^{q^{\ell}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right) = \delta_{3;m}\left(Q_{2,1}^{\frac{q^{\ell+1}-q^{\ell}}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right) = \big(\delta_{3;m-\ell}(Q_{2,1})\big)^{q^{\ell}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}.$$

Tương tự, theo (1) Bổ đề 3.4.10 ta có

$$\delta_{3;m}\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right) = \big(\delta_{3;m-\ell}(1)\big)^{q^{\ell}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}.$$

Do đó, vế trái của i) trở thành

$$\begin{aligned}
&\big(\delta_{3;m-\ell-1}(1)\big)^{q^{\ell}}\left(\delta_{3;m}\left(Q_{2,1}\right)^{q^{\ell}} Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right) - \delta_{3;m-\ell-1}\left(Q_{2,1}\right)^{q^{\ell}} \delta_{3;m}\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right)\\
= \;& \big(\delta_{3;m-\ell-1}(1)\big)^{q^{\ell}}\big(\delta_{3;m-\ell}\left(Q_{2,1}\right)\big)^{q^{\ell}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}} - \big(\delta_{3;m-\ell-1}\left(Q_{2,1}\right)\big)^{q^{\ell}}\big(\delta_{3;m-\ell}(1)\big)^{q^{\ell}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\\
= \;& \big(\delta_{3;m-\ell-1}(1)\delta_{3;m-\ell}\left(Q_{2,1}\right) - \delta_{3;m-\ell-1}\left(Q_{2,1}\right)\delta_{3;m-\ell}(1)\big)^{q^{\ell}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\\
= \;& \left(\frac{[0,1,m-\ell-1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m-\ell}(Q_{2,1}) - \frac{[0,2,m-\ell-1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m-\ell}(1)\right)^{q^{\ell}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}.
\end{aligned}$$

Theo i) Mệnh đề 3.4.11 cho trường hợp $m-\ell$ ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{[0,1,m-\ell-1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m-\ell}\left(Q_{2,1}\right) - \frac{[0,2,m-\ell-1]}{[0,1,2]}\delta_{3;m-\ell}(1)\\
&\qquad = Q_{3,1}^{\frac{q^{m-\ell-2}-1}{q-1}} + \text{ các hạng tử khác chia hết cho } Q_{3,0}.
\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned}
&\big(\delta_{3;m-\ell-1}(1)\big)^{q^{\ell}}\delta_{3;m}\left(Q_{2,1}^{q^{\ell}}Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right) - \big(\delta_{3;m-\ell-1}\left(Q_{2,1}\right)\big)^{q^{\ell}}\delta_{3;m}\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}}\right)\\
&\qquad = Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-q^{\ell}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}} + \text{ các hạng tử khác,}
\end{aligned}$$

mà các hạng tử khác chia hết cho $Q_{3,0}^{q^{\ell}}\cdot Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell}-1}{q-1}} = Q_{3,0}^{\frac{q^{\ell+1}-1}{q-1}}$. Vậy i) đã được chứng minh. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh ii). Từ (4) Bổ đề 3.4.10 ta có

$$\begin{aligned}
&\big(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}(1)\big)^{q^{\lambda_3}}\delta_{3;m}\left(Q_{2,1}^{q^{\lambda_3}}Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right) - \big(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}\left(Q_{2,1}\right)\big)^{q^{\lambda_3}}\delta_{3;m}\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right)\\
= \;& \big(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}(1)\big)^{q^{\lambda_3}}\big(\delta_{3;m-\lambda_3}\left(Q_{2,1}\right)\big)^{q^{\lambda_3}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\\
&\qquad - \big(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}\left(Q_{2,1}\right)\big)^{q^{\lambda_3}}\big(\delta_{3;m-\lambda_3}(1)\big)^{q^{\lambda_3}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\\
= \;& \big(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}(1)\delta_{3;m-\lambda_3}\left(Q_{2,1}\right) - \delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}\left(Q_{2,1}\right)\delta_{3;m-\lambda_3}(1)\big)^{q^{\lambda_3}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}.
\end{aligned}$$

Áp dụng $ii)$ Mệnh đề 3.4.11 cho trường hợp m và ℓ lần lượt là $m-\lambda_3$ và $\lambda_2-\lambda_3$, ta có

$$\begin{aligned}
&\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}(1)\delta_{3;m-\lambda_3}(Q_{2,1})-\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}(Q_{2,1})\delta_{3;m-\lambda_3}(1)\\
&\qquad=\frac{[0,1,\lambda_2-\lambda_3]}{[0,1,2]}\delta_{3;m-\lambda_3}(Q_{2,1})-\frac{[0,2,\lambda_2-\lambda_3]}{[0,1,2]}\delta_{3;m-\lambda_3}(1)\\
&=Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2-\lambda_3}-q^{\lambda_2-\lambda_3}}{q-1}}Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3}-1}{q-1}}+\text{ các hạng tử chia hết cho } Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2-\lambda_3+1}-1}{q-1}} \text{ hoặc } Q_{3,0}.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\left(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}(1)\right)^{q^{\lambda_3}}\delta_{3;m}\left(Q_{2,1}^{q^{\lambda_3}}Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right)-\left(\delta_{3;\lambda_2-\lambda_3+1}\left(Q_{2,1}\right)\right)^{q^{\lambda_3}}\delta_{3;m}\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}\right)\\
=Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_2}}{q-1}}Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}}Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}+\text{ các hạng tử khác,}
\end{aligned}$$

mà các hạng tử khác chia hết cho $Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}Q_{3,0}^{\lambda_3}=Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3+1}-1}{q-1}}$ hoặc chia hết cho $Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2+1}-q^{\lambda_3}}{q-1}}Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}$. Vậy, ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.4.13. *Các đơn thức Dickson ở biên của Δ_3^m sau cũng thuộc trong không gian sinh bởi $\mathcal{B}_m(3)$.*

(1) $Q_{3,0}^{\frac{q^{m-2}-1}{q-1}}$.

(2) $Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_3}}{q-1}}Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}$ *với* $m-3\geq\lambda_3$.

(3) $Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_2}}{q-1}}Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}}Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}$ *với* $m-3\geq\lambda_2\geq\lambda_3$.

Chứng minh. Theo phần (1) của Bổ đề 3.4.10 thì $Q_{3,0}^{\frac{q^{m-2}-1}{q-1}}$ thuộc $\delta_3\left(\Delta_2^m\right)$. Đối với hai họ còn lại, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp ngược theo λ_3.

Thậy vậy, nếu $\lambda_3=m-3$ thì $\lambda_2=\lambda_3=m-3$. Khi đó, Các đơn thức biên của họ (2) và (3) lần lượt là $Q_{3,1}^{q^{m-3}}Q_{3,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}$ và $Q_{3,2}^{q^{m-3}}Q_{3,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}$. Theo (3) và (1) của Bổ đề 3.4.10 ta có

$$Q_{3,1}^{q^{m-3}}Q_{3,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}=\delta_3\left(Q_{2,1}^{q^{m-3}}Q_{2,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}\right),$$

$$Q_{3,2}^{q^{m-3}} Q_{3,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}} = \delta_3\left(Q_{2,0}^{\frac{q^{m-3}-1}{q-1}}\right).$$

Vì vậy, với $\lambda_3 = m-3$ thì họ (2) và họ (3) thuộc không gian con của $\mathcal{B}_m(3)$. Hơn nữa, theo Mệnh đề 3.1.9 các đơn thức Dickson chia hết cho các đơn thức này cũng thuộc ảnh của δ_3, do đó cũng thuộc không gian sinh bởi $\mathcal{B}_m(3)$.

Giả sử, theo giả thiết quy nạp, tất cả các đơn thức biên với số mũ của $Q_{3,0}$ là $\frac{q^{\lambda_3+1}-1}{q-1}$ thuộc không gian sinh bởi $\mathcal{B}_m(3)$ và các bội của chúng cũng thuộc không gian này theo Mệnh đề 3.1.9. Xét các đơn thức biên tương ứng với λ_3

$$Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}} \text{ và } Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_2}}{q-1}} Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}.$$

Theo *i*) của Hệ quả 3.4.12 thì

$$Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}$$

thuộc ảnh của $\delta_3(\Delta_2^m)$ modulo các hạng tử là các đơn thức Dickson ứng λ_3 lớn hơn. Theo giả thiết quy nạp, các hạng tử lớn hơn này đã thuộc không gian sinh bởi $\mathcal{B}_m(3)$.

Với đơn thức thứ hai, nếu tồn tại đơn thức có cùng số mũ $Q_{3,0}$ là $\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}$ nhưng số mũ của $Q_{3,1}$ lớn hơn, sao cho đơn thức đó không là cốt yếu, thì đơn thức này phải là bội của đơn thức Dickson

$$Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}}.$$

Hơn nữa, theo chứng minh trước đó, biểu thức này đã nằm trong không gian được sinh bởi $\mathcal{B}_m(3)$. Ngoài ra, nếu số mũ của $Q_{3,0}$ vượt quá $\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}$, thì ta có thể áp dụng trực tiếp giả thiết quy nạp để suy ra điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 3.4.14. *Tập hợp $\mathcal{B}_m(3)$ gồm 4 họ phần tử sau là một cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_3}$.*

(1) $\delta_1^3(\Delta_0^m) = x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} x_3^{q^m-1}$.

(2) $\delta_2^2(\Delta_1^m)$.

(3) $\delta_3(\Delta_2^m)$.

(4) Δ_3^m.

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.4.6, ta có tập $\mathcal{B}'$ gồm 4 họ sau là một hệ sinh của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$.

(1) $\delta_1^3(\Delta_0^m) = x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{q^m-1}$.

(2) $\delta_2^2(\Delta_1^m) = \left\{a_{m,3,s}, 0 \leq s \leq [m]_q\right\}$.

(3) $\delta_3(\mathcal{D}_2)$.

(4) $\mathcal{D}_3$.

Mặt khác theo Bổ đề 3.4.9 thì họ thứ (3) trong hệ trên là $\delta_3(\mathcal{D}_2)$ được sinh bởi ba họ phần tử gồm họ (1), họ (2) trong hệ trên và họ $\delta_3(\Delta_2^m)$.

Cuối cùng, với một đơn thức Dickson không thuộc Δ_3^m thì nó có dạng là tích của đơn thức biên với các đơn thức Dickson. Mặt khác theo Hệ quả 3.4.13 thì các đơn thức biên đều thuộc không gian con sinh bởi $\mathcal{B}_m(3)$, tuy nhiên theo Mệnh đề 3.1.9 thì tích tập $\mathcal{B}_m(3)$ là đóng dưới tác động của đại số Dickson. Vì vậy, ta có thể thay họ (4) trong $\mathcal{B}'$ bởi họ Δ_3^m. Tức là, $\mathcal{B}_m(3)$ là hệ sinh của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_3}$. Từ đó, suy ra $\mathcal{B}_m(3)$ là cơ sở của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_3}$ theo Nhận xét 3.2.3. □

Từ các Mệnh đề 3.4.14, 3.4.4, 3.4.2, 3.3.3 và các Hệ quả 3.4.1, 3.3.1, ta suy ra kết quả sau.

Định lý 3.4.15. *Các giả thuyết về cơ sở của không gian bất biến 3.0.1 3.0.2 và các Giả thuyết 1.4.1, 1.4.2 về chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến đúng với hạng không vượt quá 3.*

3.5. Lọc của các môđun con

Với mỗi số nguyên dương n, $0 \le k \le n$, gọi $\mathcal{F}_{n,k}$ là $\mathbb{F}_q$-không gian con của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$ được xác định

$$\mathcal{F}_{n,k} = \mathrm{Span}\left\{\delta_{s+1}^{n-s}(f) : f \in \Delta_s^m, 0 \le s \le \min(m,k)\right\}.$$

Với $n = 3$ ta đã chứng minh rằng lọc tăng dần của các không gian con này là đầy đủ. Các kết quả trước đã chỉ ra rằng cơ sở $\mathcal{B}_m(3)$ của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$ là tự nhiên theo nghĩa rằng lọc này là một lọc của các $\mathcal{D}_3$-môđun. Hơn nữa, tác động của các bất biến Dickson giống như mô hình đã được trình bày trong [19], liên quan đến cấu trúc của không gian S_{GL} được xem là một S^{GL}-môđun. Thật vậy, ta thấy rằng

- $Q_{3,0}$ triệt tiêu $\mathcal{F}_{3,2}$,
- $Q_{3,0}$ và $Q_{3,1}$ triệt tiêu $\mathcal{F}_{3,1}$,
- $Q_{3,0}, Q_{3,1}, Q_{3,2}$ triệt tiêu $\mathcal{F}_{3,0}$.

Với $n = 2$ ta cũng có kết quả tương tự. Mục tiêu của phần này là chỉ ra rằng $\mathcal{F}_{n,k}$ cũng là một lọc của đại số Steenrod $\mathcal{A}$ modulo q trong trường hợp $n \le 3$. Chúng tôi có giả thuyết tổng quát sau.

Giả thuyết 3.5.1. Với $0 \le k \le \min(m,n)$, các không gian con

$$\mathcal{F}_{n,k} = \mathrm{Span}\left\{\delta_{s+1}^{n-s}(f) : f \in \Delta_s^m, 0 \le s \le \min(m,k)\right\}$$

là một $\mathcal{A}$-môđun con và cũng là một $\mathcal{D}_n$- môđun con của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$. Hơn nữa, $\mathcal{F}_{n,k}$ bị triệt tiêu bởi các bất biến Dickson $Q_{n,0}, Q_{n,1}, \ldots, Q_{n,n-k-1}$.

Trong phần này chúng tôi sẽ chứng minh giả thuyết trên đúng cho trường hợp hạng $n \le 3$.

Trước hết, đại số Steenrod mod q và vai trò của nó trong lý thuyết bất biến môđun đã được chúng tôi trình bày lại tại Chương 1. Cụ thể, toán tử Steenrod $\mathcal{P}^i$ thỏa mãn các điều kiện sau.

(1) Điều kiện không ổn định: $\mathcal{P}^i(f) = f^q$ nếu $\deg f = i$ và $\mathcal{P}^i(f) = 0$ nếu $i > \deg f$.

(2) Công thức Cartan: $\mathcal{P}^i(fg) = \sum_{a+b=i} \mathcal{P}^a(f)\mathcal{P}^b(g)$.

Hơn nữa, toán tử $\mathcal{P}^0$ là toán tử đồng nhất. Trên vành đa thức $S = \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$, các x_i có bậc 1, tác động của đại số Steenrod hoàn toàn được xác định bởi điều kiện không ổn định và công thức Cartan. Cụ thể hơn, ta có

$$\mathcal{P}^i(v^j) = \binom{j}{i} v^{j+i(q-1)},$$

với v là một đa thức tuyến tính. Ở đây, hệ số nhị thức được lấy modulo p. Do đó, nếu j là lũy thừa q, thì $\mathcal{P}^i(v^j) \neq 0$ chỉ khi $i = 0$ (trong trường hợp này thì $\mathcal{P}^0$ là toán tử đồng nhất) hoặc $i = j$ (trong trường hợp này thì $P^i(v^j) = v^{qi}$ là toán tử Frobenius).

Tác động của đại số Steenrod và tác động của GL_n trên S là giao hoán. Hơn nữa, rõ ràng rằng iđêan I_m là ổn định dưới tác động của các toán tử Steenrod, do đó $\mathcal{Q}_m = S/I_m$ cũng ổn định dưới tác động của toán tử Steenrod. Điều này có nghĩa là một toán tử lũy thừa Steenrod cảm sinh ánh xạ lũy thừa từ $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ vào chính nó. Nói cách khác, $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ là một $\mathcal{A}$-môđun.
Chúng tôi bắt đầu bằng một kết quả cơ bản sau, qua đó giúp tăng tính linh hoạt khi làm việc với không gian $\mathcal{F}_{n,k}$.

Bổ đề 3.5.2. *Với $n \leq 3$, với mỗi $0 \leq k \leq \min(m, n)$ thì*

$$\mathcal{F}_{n,k} = \operatorname{Span}\left\{\delta_{s+1}^{n-s}(f) : f \in \mathcal{D}_s, 0 \leq s \leq \min(m, k)\right\}.$$

Điều này chỉ ra rằng lọc này không phụ thuộc vào không gian con Δ_s^m.

Chứng minh. i) Khi $n = 2$ thì

- $\mathcal{F}_{2,0} = \operatorname{Span}\left\{\delta_1^2(\Delta_0^m)\right\} = \operatorname{Span}\left\{\delta_1^2(\mathcal{D}_0)\right\}$,
- $\mathcal{F}_{2,1} = \operatorname{Span}\left\{\delta_1^2(\Delta_0^m), \delta_2(\Delta_1^m)\right\} = \operatorname{Span}\left\{\delta_1^2(\mathcal{D}_0), \delta_2(\Delta_1^m)\right\}$. Mặt khác, theo Ví dụ 3.1.7 ta có

$$\delta_2(Q_{1,0}^s) = 0 \text{ với mọi } s \geq [m]_q\,, s \neq [m]_q + 1,$$

$$\delta_2(Q_{1,0}^{[m]_q+1}) = -\delta_1^2(1).$$

Do đó, $\mathcal{F}_{2,1} = \operatorname{Span}\left\{\delta_1^2(\mathcal{D}_0), \delta_2(\mathcal{D}_1)\right\}$.

- Theo *ii*) của Mệnh đề 3.3.3 thì các đa thức Dickson $\mathcal{D}_2$ được sinh bởi Δ_2^m và $\delta_2(\Delta_1^m), \delta_1^2(\Delta_0^m)$. Do đó, ta có

$$\mathcal{F}_{2,2} = \operatorname{Span}\left\{\delta_1^2(\mathcal{D}_0), \delta_2(\mathcal{D}_1), \mathcal{D}_2\right\}.$$

Vậy, ta suy ra Mệnh đề đúng với trường hợp $n = 2$.

ii) Khi $n = 3$, lập luận tương tự như trường hợp $n = 2$, theo các kết quả trong Ví dụ 3.1.8, Bổ đề 3.4.9 và Mệnh đề 3.4.14 ta suy ra điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, chúng tôi mô tả cách các toán tử Steenrod tác động lên toán tử δ. Để mô tả tác động của toán tử Steenrod lên các toán tử δ, chúng tôi có kết quả sau. Mệnh đề này cung cấp công thức biểu diễn $\mathcal{P}^k(\delta_2 f)$ thông qua các tổ hợp của các toán tử $\mathcal{P}^j(f)$ và các toán tử $\delta_2, \delta_{2;m+1}$. Đây là bước quan trọng để phân tích sâu hơn cấu trúc của các bất biến trong không gian $\mathcal{Q}_m(n)$ xem như là một môđun trên đại số Steenrod $\mathcal{A}$.

Bổ đề 3.5.3. *Nếu f là một đa thức* GL_1*-bất biến theo ẩn đầu tiên và* $1 \leq k \leq$

$\deg(\delta_2(f)) = q^m - q + \deg(f)$ *thì*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^k(\delta_2 f) + Q_{2,1}\mathcal{P}^{k-q}(\delta_2 f) + Q_{2,0}\mathcal{P}^{k-q-1}(\delta_2 f) = \\
&\qquad \delta_2\left(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1} f\right) + \delta_2\left(\mathcal{P}^k f\right) + \delta_{2;m+1}\left(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1-q^m} f\right) + \delta_{2;m+1}\left(\mathcal{P}^{k-q^m} f\right).
\end{aligned}$$

Chứng minh. (1) Trước hết, ta tính toán các tác động của toán tử Steenrod lên đa thức L_2. Để làm việc này, ta xét tác động của toán tử Steenrod lên một số đơn thức cơ bản, sau đó khai triển công thức tổng quát. Cụ thể, trước hết ta xét tác động của $\mathcal{P}^q$ lên đơn thức $x_1x_2^q$. Theo công thức Cartan, ta có

$$\mathcal{P}^q(x_1x_2^q) = \sum_{i=0}^{q} \mathcal{P}^i(x_1)\mathcal{P}^{q-i}\left(x_2^q\right).$$

Ta tính từng hạng tử trong tổng trên.

- Với $i = 0$, $\mathcal{P}^0(x_1) = x_1$, và $\mathcal{P}^q\left(x_2^q\right) = \binom{q}{q} x_2^{q+q(q-1)} = x_2^{q^2}$.
- Với $i = 1$, $\mathcal{P}^1(x_1) = x_1^q$ và $\mathcal{P}^{q-1}\left(x_2^q\right) = \binom{q}{q-1} x_2^{q+(q-1)(q-1)} = 0$.
- Các hạng tử khác triệt tiêu do hệ số nhị thức bằng 0 trong $\mathbb{F}_q$.

Do đó, sau khi thu gọn ta được

$$\mathcal{P}^q\left(x_1x_2^q\right) = x_1x_2^{q^2}.$$

Tương tự, $\mathcal{P}^q\left(x_1^q x_2\right) = x_1^{q^2}x_2$. Từ đó suy ra

$$\mathcal{P}^q L_2 = \mathcal{P}^q\left(x_1x_2^q - x_1^q x_2\right) = x_1x_2^{q^2} - x_1^{q^2}x_2 = Q_{2,1}L_2.$$

Tiếp tục, ta xét $\mathcal{P}^{q+1}(x_1x_2^q)$. Áp dụng công thức Cartan, ta có

$$\mathcal{P}^{q+1}\left(x_1x_2^q\right) = \sum_{i=0}^{q+1} \mathcal{P}^i(x_1)\,\mathcal{P}^{q+1-i}\left(x_2^q\right).$$

Trong đó, hạng tử duy nhất không triệt tiêu là khi $i = 1$

$$\mathcal{P}^{q+1}\left(x_1x_2^q\right) = x_1^q x_2^{q^2}.$$

Tương tự, ta có $\mathcal{P}^q\left(x_1^q x_2\right) = x_1^{q^2-q}x_2^q$. Vì vậy, ta suy ra

$$\mathcal{P}^{q+1}L_2 = x_1^q x_2^{q^2} - x_1^{q^2-q}x_2^q = Q_{2,0}L_2.$$

Cuối cùng, ta xét tác động của toán tử Steenrod $\mathcal{P}^k$ lên $x_1x_2^q$ trong hai trường hợp còn lại.

Trường hợp $1 \leq k \leq q-1$, ta có

$$\mathcal{P}^k(x_1x_2^q) = \sum_{i=0}^{k} \mathcal{P}^i(x_1)\mathcal{P}^{k-i}\left(x_2^q\right).$$

Tuy nhiên, vì $\binom{q}{k} = 0$ hoặc $\binom{1}{k} = 0$ với mọi $1 \leq k \leq q-1$ nên các hạng tử đều triệt tiêu. Do đó, $\mathcal{P}^k(x_1x_2^q) = 0$ nên suy ra $\mathcal{P}^k(L_2) = 0$.

Trường hợp $k > q+1$, theo công thức Cartan thì

$$\mathcal{P}^k(x_1x_2^q) = \sum_{i+j=k} \mathcal{P}^i(x_1)\mathcal{P}^j\left(x_2^q\right).$$

Vì $k > q+1$, nên với mọi cặp $i + j = k$, ta có hoặc $i > 1$ hoặc $j > q$. Do đó, tất cả các hệ số nhị thức là triệt tiêu.Từ đó, suy ra $\mathcal{P}^k(x_1x_2^q) = 0$, vì vậy $\mathcal{P}^k(L_2) = 0$.

(2) Ta xét toán tử *toàn phần* $\mathcal{P}$, được định nghĩa bởi công thức

$$\mathcal{P} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i.$$

Ta sẽ chỉ ra toán tử $\mathcal{P}$ có tính chất phân phối đối với phép nhân. Cụ thể, với mọi đa thức f, g, ta có

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(fg) &= \sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{P}^i(fg) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k+l=i}\mathcal{P}^k(f)\cdot\mathcal{P}^l(g)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}^k(f)\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\mathcal{P}^l(g) = \mathcal{P}(f)\cdot\mathcal{P}(g).\end{aligned}$$

(3) Cuối cùng, theo công thức xác định toán tử δ_2 thì

$$\delta_2(f) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^{q^m} f(\widehat{x_1}, x_2, \ldots) & x_2^{q^m} f(x_1, \widehat{x_2}, \ldots)\end{vmatrix}}{L_2}.$$

Từ đó, ta thu được đẳng thức

$$L_2\delta_2(f) = x_1 x_2^{q^m} f(x_1, \widehat{x_2}, \ldots) - x_1^{q^m} x_2 f(\widehat{x_1}, x_2, \ldots).$$

Áp dụng toán tử $\mathcal{P}$ lên hai vế và sử dụng tính chất phân phối của $\mathcal{P}$ như đã chứng minh ở trên. Đồng thời theo kết quả trên, ta có

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}^q L_2 = L_2 Q_{2,1},\\ &\mathcal{P}^{q+1} L_2 = L_2 Q_{2,0},\\ &\mathcal{P}^k L_2 = 0 \quad \text{với mọi } k \geq 1, \text{ và } k \neq q, q+1.\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta xét các trường hợp cụ thể cho vế phải.

– Trường hợp $k = 0$.

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}^0\left(x_1 x_2^{q^m} f(x_1, \widehat{x_2}, \ldots) - x_1^{q^m} x_2 f(\widehat{x_1}, x_2, \ldots)\right)\\ &= x_1 x_2^{q^m} f(x_1, \widehat{x_2}, \ldots) - x_1^{q^m} x_2 f(\widehat{x_1}, x_2, \ldots)\\ &= L_2\delta_2(f).\end{aligned}$$

– Trường hợp $k = 1$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^1\left(x_1x_2^{q^m}f(x_1,\widehat{x_2},\ldots) - x_1^{q^m}x_2f(\widehat{x_1},x_2,\ldots)\right)\\
&\quad = x_1^qx_2^{q^m}f(x_1,\widehat{x_2},\ldots) - x_1^{q^m}x_2^qf(\widehat{x_1},x_2,\ldots)\\
&\quad + x_1x_2^{q^m}\mathcal{P}^1(f(x_1,\widehat{x_2},\ldots)) - x_1^{q^m}x_2\mathcal{P}^1(f(\widehat{x_1},x_2,\ldots))\\
&\quad = L_2\delta_2(Q_{1,0}f) + L_2\delta_2(\mathcal{P}^1f).
\end{aligned}$$

– Trường hợp $1 < k < q^m$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^k\left(x_1x_2^{q^m}f(x_1,\widehat{x_2},\ldots) - x_1^{q^m}x_2f(\widehat{x_1},x_2,\ldots)\right)\\
&\quad = x_1^qx_2^{q^m}\mathcal{P}^{k-1}(f(x_1,\widehat{x_2},\ldots)) - x_1^{q^m}x_2^q\mathcal{P}^{k-1}(f(\widehat{x_1},x_2,\ldots))\\
&\quad\quad + x_1x_2^{q^m}\mathcal{P}^k(f(x_1,\widehat{x_2},\ldots)) - x_1^{q^m}x_2\mathcal{P}^k(f(\widehat{x_1},x_2,\ldots))\\
&\quad = L_2\delta_2(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1}f) + L_2\delta_2(\mathcal{P}^kf).
\end{aligned}$$

– Trường hợp $k = q^m$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^{q^m}\left(x_1x_2^{q^m}f(x_1,\widehat{x_2},\ldots) - x_1^{q^m}x_2f(\widehat{x_1},x_2,\ldots)\right)\\
&\quad = x_1^qx_2^{q^m}\mathcal{P}^{q^m-1}(f(x_1,\widehat{x_2},\ldots)) - x_1^{q^m}x_2^q\mathcal{P}^{q^m-1}(f(\widehat{x_1},x_2,\ldots))\\
&\quad\quad + x_1x_2^{q^m}\mathcal{P}^{q^m}(f(x_1,\widehat{x_2},\ldots)) - x_1^{q^m}x_2\mathcal{P}^{q^m}(f(\widehat{x_1},x_2,\ldots))\\
&\quad\quad + x_1x_2^{q^{m+1}}f(x_1,\widehat{x_2},\ldots) - x_1^{q^m}x_2f(\widehat{x_1},x_2,\ldots)\\
&\quad = L_2\delta_2\left(Q_{1,0}\mathcal{P}^{q^m-1}f\right) + L_2\delta_2\left(\mathcal{P}^{q^m}f\right) + L_2\delta_{2;m+1}(f).
\end{aligned}$$

– Trường hợp $k = l + q^m$, với $l \geq 1$.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^{l+q^m}\Big(x_1x_2^{q^m}f(x_1,\widehat{x_2},\dots) - x_1^{q^m}x_2 f(\widehat{x_1},x_2,\dots)\Big)\\
&\quad = x_1^q x_2^{q^m}\mathcal{P}^{l+q^m-1}(f(x_1,\widehat{x_2},\dots)) - x_1^{q^m}x_2^q\mathcal{P}^{l+q^m-1}(f(\widehat{x_1},x_2,\dots))\\
&\quad\quad + x_1x_2^{q^{m+1}}\mathcal{P}^l(f(x_1,\widehat{x_2},\dots)) - x_1^{q^{m+1}}x_2\mathcal{P}^l(f(\widehat{x_1},x_2,\dots))\\
&\quad\quad + x_1^q x_2^{q^{m+1}}\mathcal{P}^{l-1}(f(x_1,\widehat{x_2},\dots)) - x_1^{q^{m+1}}x_2^q\mathcal{P}^{l-1}(f(\widehat{x_1},x_2,\dots))\\
&\quad = L_2\delta_2(\mathcal{P}^{l+q^m}f) + L_2\delta_2(Q_{1,0}\mathcal{P}^{l+q^m-1}f)\\
&\quad\quad + L_2\delta_{2;m+1}(\mathcal{P}^l f) + L_2\delta_{2;m+1}(Q_{1,0}\mathcal{P}^{l-1}f).
\end{aligned}$$

Chia hai vế cho L_2 và cân bằng các phần tử có bậc $q^m - q + \deg(f) + k(q-1)$ ở hai vế, ta thu được đẳng thức

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}^k(\delta_2 f) + Q_{2,1}\mathcal{P}^{k-q}(\delta_2 f) + Q_{2,0}\mathcal{P}^{k-q-1}(\delta_2 f) =\\
&\quad \delta_2\left(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1}f\right) + \delta_2\left(\mathcal{P}^k f\right) + \delta_{2;m+1}\left(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1-q^m}f\right) + \delta_{2;m+1}\left(\mathcal{P}^{k-q^m}f\right).
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

□

Hệ quả 3.5.4. *Với mỗi* $0 \leq k \leq 2$ *thì* $\mathcal{F}_{2,k}$ *là một môđun con của* $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$ *trên đại số Steenrod* $\mathcal{A}$.

Chứng minh. Theo định nghĩa $\mathcal{F}_{2,k}$, ta có

- $\mathcal{F}_{2,0} = \mathrm{Span}\left\{\delta_1^2(1)\right\}$,
- $\mathcal{F}_{2,1} = \mathrm{Span}\left\{\delta_1^2(1), \delta_2(\Delta_1^m)\right\}$,
- $\mathcal{F}_{2,2} = \mathrm{Span}\left\{\delta_1^2(1), \delta_2(\Delta_1^m), \Delta_2^m\right\}$.

Khi đó, tác động của toán tử Steenrod lên họ thứ nhất $\mathcal{P}^k(\delta_1^2(1))$ sẽ là chính nó hoặc 0. Tác động của toán tử Steenrod lên đại số Dickson là đại số Dickson. Do đó, ta cần chỉ ra tác động của các toán tử Steenrod lên phần tử $\delta_2(f)$, trong đó

$f = Q_{1,0}^a$ với $a < [m]_q$. Trong trường hợp hạng 2 thì hai số hạng cuối trong vế phải của công thức trong Bổ đề 3.5.3 triệt tiêu trong $\mathcal{Q}_m(2)$. Thật vậy, ta thấy bậc của $\delta_{2;m+1}(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1}f)$ lớn hơn $2(q^m-1)$ với mọi q và m. Với đa thức $\delta_{2;m+1}(\mathcal{P}^{k-q^m}f)$ thì bậc của nó không lớn hơn $2(q^m-1)$ khi và chỉ khi $q=2, k \geq q^m$ và $\deg f = 0$, nhưng khi đó thì $k > q^m - q + \deg(f)$ và điều này là mâu thuẫn. Do đó, theo Bổ đề 3.5.3 ta có

$$\mathcal{P}^k(\delta_2 f) + Q_{2,1}\mathcal{P}^{k-q}(\delta_2 f) + Q_{2,0}\mathcal{P}^{k-q-1}(\delta_2 f) = \delta_2(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1}f) + \delta_2(\mathcal{P}^k f).$$

Hơn nữa, theo kết quả trong Mệnh đề 3.1.9 thì

- $Q_{2,0}\delta_2(f) = 0$ với mọi f,
- $Q_{2,1}\delta_2(f) = \delta_2(Q_{1,0}^q f)$ với mọi $f \in \mathcal{D}_1$.

Vì vậy, nếu $g \in \mathcal{F}_{2,1}$ thì $Q_{2,0}g, Q_{2,1}g \in \mathcal{F}_{2,1}$. Mặt khác, ta có

$$\mathcal{P}^0(\delta_2(f)) = \delta_2(f) \in \mathcal{F}_{2,1},$$

do đó quy nạp theo k ta thu được

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^k(\delta_2(f)) = -Q_{2,1}\mathcal{P}^{k-q}(\delta_2 f) - Q_{2,0}\mathcal{P}^{k-q-1}(\delta_2 f)\\ + \delta_2\left(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1}f\right) + \delta_2\left(\mathcal{P}^k f\right) \in \mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}.\end{aligned}$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.5.5. *$\mathcal{F}_{3,1}$ là một môđun con của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$ trên đại số Steenrod $\mathcal{A}$.*

Chứng minh. Ta có Span $\left\{\delta_1^3(1)\right\}$ tạo thành không gian một chiều của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$ có bậc cao nhất $3(q^m-1)$. Do đó, ta cần chứng minh rằng với mỗi $k \geq 1$ và $0 \leq a < [m]_q$, thì $\mathcal{P}^k\left(\delta_2^2 Q_{1,0}^s\right)$ thuộc $\mathbb{F}_q$-không gian con sinh bởi $\delta_1^3(1)$ và $\delta_2^2(\Delta_1^m)$.

Đầu tiên, nếu $k \geq q^m$, thì bậc của $\mathcal{P}^k(\delta_2^2 Q_{1,0}^s)$ là $q^m(q-1) + 2(q^m-q) + s(q-1) \geq 3(q^m-1)$, trừ trường hợp $q=2$ và $k=2^m, s=0$. Khi đó, $\mathcal{Q}_m(3)$ hoặc được sinh bởi $\delta_3^3(1)$, hoặc bằng không.

Nếu $q=2, k=2^m, s=0$, thì $\mathcal{P}^{2^m}(\delta_2^2(1))$ có bậc là $3(2^m-1)-1$. Ta sẽ chỉ ra rằng không tồn tại đa thức đối xứng GL_3-bất biến nào trong bậc này. Thật vậy, đa thức đối xứng không tầm thường duy nhất là

$$x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2^m-2}+x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-2}x_3^{2^m-1}+x_1^{2^m-2}x_2^{2^m-1}x_3^{2^m-1}.$$

Dễ dàng thấy rằng, đa thức này **không bất biến** dưới phép hoán vị $x_1 \mapsto x_1+x_2$ và giữ nguyên x_2, x_3.

Tiếp tục, xét trường hợp $k<q^m$. Từ Bổ đề 3.5.3, ta có đẳng thức

$$\mathcal{P}^k(\delta_2 f)+Q_{2,1}\mathcal{P}^{k-q}(\delta_2 f)+Q_{2,0}\mathcal{P}^{k-q-1}(\delta_2 f)=\delta_2\left(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1}f\right)+\delta_2\left(\mathcal{P}^k f\right), \quad (3.1)$$

với mọi đa thức f là GL_1-bất biến dưới theo ẩn thứ nhất. Áp dụng điều này cho trường hợp $f=Q_{1,0}^s$, ta có $\mathcal{P}^k(\delta_2 Q_{1,0}^s)$ là tổ hợp tuyến tính của các đa thức dạng

$$Q_{2,1}^a Q_{2,0}^b \delta_2(Q_{1,0}^c).$$

Áp dụng công thức 3.1 cho trường hợp $f=\delta_2(Q_{1,0}^s)$, ta thu được

$$\mathcal{P}^k(\delta_2^2(Q_{1,0}^s))+Q_{2,1}\mathcal{P}^{k-q}(\delta_2^2(Q_{1,0}^s))+Q_{2,0}\mathcal{P}^{k-q-1}(\delta_2^2(Q_{1,0}^s))=$$
$$\delta_2(Q_{1,0}\mathcal{P}^{k-1}(\delta_2(Q_{1,0}^s)))+\delta_2(\mathcal{P}^k\delta_2(Q_{1,0}^s)).$$

Vế phải là tổ hợp của các đa thức dạng

(1) $\delta_2\left(Q_{1,0}Q_{2,1}^a Q_{2,0}^b \delta_2(Q_{1,0}^c)\right)$,

(2) $\delta_2\left(Q_{2,1}^a Q_{2,0}^b \delta_2(Q_{1,0})\right)$.

Các đẳng thức trên đúng trong S. Từ Bổ đề 3.4.7, ta suy ra các tổ hợp này thuộc không gian con của $\mathcal{Q}_m(3)$ được sinh bởi các đa thức có dạng

- $\delta_2^2\left(Q_{1,0}^a\right)$,

- $x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{a(q-1)}$.

Cả hai vế của đẳng thức 3.1 đều bất biến dưới tác động của $\mathrm{P}_{(2,1)}$. Xét ánh xạ chuyển từ $\mathrm{P}_{(2,1)}$ đến GL_3. Ta có

$$\mathcal{P}^i\left(\delta_2^2\left(Q_{1,0}^s\right)\right) \text{ là } \mathrm{GL}_3\text{-bất biến trong } \mathcal{Q}_m(3),$$

và

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{P}_{(2,1)}}^{\mathrm{GL}_3}(Q_{2,1}) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{P}_{(2,1)}}^{\mathrm{GL}_3}(Q_{2,0}) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{P}_{(2,1)}}^{\mathrm{GL}_3}\left(x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{a(q-1)}\right) = 0.$$

Ở đây, hai phần đầu triệt tiêu trong S vì không tồn tại phần tử GL_3-bất biến thực sự ở bậc q^2-q và q^2-1. Phần thứ ba triệt tiêu trong $\mathcal{Q}_m(3)$ vì nếu $x_1^{q^m-1}x_2^{q^m-1}x_3^{a(q-1)}$ là một tổng không tầm thường của một đơn thức GL_3-bất biến, thì nó cũng bất biến dưới tác động của nhóm $\mathrm{P}_{(1,2)}$, nhưng theo Chú ý 3.4.5 thì điều đó chỉ xảy ra ở bậc cao nhất.
Do đó, $\mathcal{P}^k\left(\delta_2^2\left(Q_{1,0}^s\right)\right)$ phải là tổ hợp tuyến tính của các $\delta_2^2\left(Q_{1,0}^a\right)$, vì vậy nó thuộc $\mathcal{F}_{3,1}$. □

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số kết quả liên quan đến sự liên hệ giữa các toán tử Steenrod và toán tử δ_3. Những kết quả này làm cơ sở cho việc thiết lập các hệ thức tương tự trong không gian con $\mathcal{F}_{3,2}$.

Bổ đề 3.5.6.

$$\mathcal{P}^k(\delta_3 f) + \sum_{i<k}\frac{\mathcal{P}^{k-i}L_3}{L_3}\mathcal{P}^i(\delta_3 f) = \frac{\mathcal{P}^k\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} f(x_2,x_3) & x_2^{q^m} f(x_1,x_3) & x_3^{q^m} f(x_1,x_2)\end{vmatrix}\right)}{L_3}.$$

Hơn nữa, vế phải của đẳng thức trên bằng $\delta_{3;m}(F)$ hoặc $\delta_{3;m+1}(F)$, trong đó F là một tổ hợp tuyến tính của các đa thức có dạng $g\mathcal{P}^i f$, với $g \in \mathcal{D}_2$ và $0 \le i \le k$.

Chứng minh. Theo định nghĩa toán tử δ_3, ta có

$$L_3\delta_3(f) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} f(x_2,x_3) & x_2^{q^m} f(x_1,x_3) & x_3^{q^m} f(x_1,x_2) \end{vmatrix}.$$

Áp dụng công thức Cartan cho $\mathcal{P}^k(L_3\delta_3 f)$, sau đó chia hai vế cho L_3 ta suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Tiếp theo, ta cần chỉ ra vế phải của đẳng thức trên sẽ là $\delta_{3;m}(F)$ hoặc $\delta_{3;m+1}(F)$, trong đó F là một tổ hợp tuyến tính của các đa thức có dạng $g\mathcal{P}^i f$, với $g \in \mathcal{D}_2$ và $0 \le i \le k$. Thật vậy, khai triển định thức

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} f(x_2,x_3) & x_2^{q^m} f(x_1,x_3) & x_3^{q^m} f(x_1,x_2) \end{vmatrix}$$

thì mỗi hạng tử có dạng $x_1 x_2^q x_3^{q^m} f(x_1,x_2)$ (và các hoán vị của nó). Mặt khác ta có tác động của toán tử $\mathcal{P}^i$ như sau

$$\mathcal{P}^i(x_1) = \begin{cases} x_1 & \text{khi } i = 0 \\ x_1^q & \text{khi } i = 1 \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases},$$

$$\mathcal{P}^i\left(x_1^q\right) = \begin{cases} x_1^q & \text{khi } i = 0 \\ x_1^{q^2} & \text{khi } i = q \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases},$$

$$\mathcal{P}^i\left(x_1^{q^m}\right) = \begin{cases} x_1^{q^m} & \text{khi } i = 0 \\ x_1^{q^{m+1}} & \text{khi } i = q^m \\ 0 & \text{trong các trường hợp khác} \end{cases}.$$

Với các ẩn x_2 và x_3 ta cũng có các kết quả tương tự. Áp dụng công thức Cartan cho $\mathcal{P}^k(x_1x_2^qx_3^{q^m}f(x_1,x_2))$ thì thu được các phần tử có dạng

$$x_1^{q^a}x_2^{q^b}x_3^{q^c}\mathcal{P}^d f(x_1,x_2),$$

với $a=0$ hoặc 1, $b=1$ hoặc 2 và $c=m$ hoặc $m+1$ và các hoán vị của nó. Do đó, tử thức của vế phải đẳng thức cần chứng minh là tổng các định thức có dạng

$$\begin{vmatrix} x_1^{q^a} & x_2^{q^a} & x_3^{q^a} \\ x_1^{q^b} & x_2^{q^b} & x_3^{q^b} \\ x_1^{q^c}\mathcal{P}^d f(x_2,x_3) & x_2^{q^c}\mathcal{P}^d f(x_1,x_3) & x_3^{q^c}\mathcal{P}^d f(x_1,x_2) \end{vmatrix}.$$

Định thức này chính là

$$L_3\delta_{3;c}\left(\frac{[a,b]}{[0,1]}\mathcal{P}^d f\right),$$

trong đó $\frac{[a,b]}{[0,1]} \in \mathcal{D}_2$, và c là m hoặc là $m+1$. Vì vậy, ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, chúng tôi phân tích trường hợp $\delta_{3;m+1}(f)$ tương ứng với $c=m+1$ trong Bổ đề trên. Kết quả thu được được trình bày trong Bổ đề sau.

Bổ đề 3.5.7. *Nếu $h \in \mathcal{D}_2$ và $q \geq 3$ thì ta có đẳng thức sau trong $\mathcal{Q}_m$*

$$\delta_{3;m+1}(h) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } q>3 \\ & \text{ hoặc } q=3 \text{ và } \deg(h)>0 \\ \delta_{3;m}(Q_{2,1}^{q^{m-1}}) & \text{nếu } q=3 \text{ và } h=1. \end{cases}$$

Với $q=2$ thì $\delta_{3;m+1}(h) \in \operatorname{Span}\left\{\delta_{2;m}^2(\Delta_1^m), \delta_{1;m}^3(1)\right\}$.

Chứng minh. Ta có bậc của $\delta_{3;m+1}(h)$ là $q^{m+1}-q^2+\deg(h)$. Vì vậy, nếu $q>3$ thì giá trị này lớn hơn $3(q^m-1)$, và do đó $\delta_{3;m+1}(h)=0$ trong $\mathcal{Q}_m$. Vì vậy, ta chỉ cần xét trường hợp $q=3$ và $q=2$.

Trước hết, từ phương trình cơ bản

$$x_i^{q^{m+1}} - Q_{3,2}^{q^{m-2}} x_i^{q^m} + Q_{3,1}^{q^{m-2}} x_i^{q^{m-1}} - Q_{3,0}^{q^{m-2}} x_i^{q^{m-2}} = 0$$

ta suy ra

$$\delta_{3;m+1}(h) - Q_{3,2}^{q^{m-2}} \delta_{3;m}(h) + Q_{3,1}^{q^{m-2}} \delta_{3;m-1}(h) - Q_{3,0}^{q^{m-2}} \delta_{3;m-2}(h) = 0.$$

i) Khi $q = 3$ thì $q^{m+1} - q^2 + \deg(h) \leq 3(q^m - 1)$ chỉ khi $\deg(h) \leq q^2 - 3 = 6$. Vì $h \in \mathcal{D}_2$ nên ta chỉ cần xét $h = 1$ hoặc $h = Q_{2,1}$ (sai khác một bội vô hướng).

Với trường hợp $h = Q_{2,1}$ thì $\delta_{3;m+1}(Q_{2,1})$ có bậc là $3^{m+1} - 3$, vì vậy nó có thể là bằng không hoặc phần tử có bậc cao nhất $x_1^{3^m-1} x_2^{3^m-1} x_3^{3^m-1}$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\delta_{3;m+1}(Q_{2,1}) = 0$ trong $\mathcal{Q}_m$ bằng cách quy nạp theo m. Trước hết, dễ dàng kiểm tra được rằng $\delta_{3;3}(Q_{2,1}) = Q_{3,1} = 0$ trong $\mathcal{Q}_2$. Tiếp theo, ta thấy rằng $Q_{3,0} = Q_{3,1} = 0$ trong $\mathcal{Q}_2$, vì vậy $Q_{3,1}^{q^{m-2}} = Q_{3,0}^{q^{m-2}} = 0$ trong $\mathcal{Q}_m$. Do đó, trong $\mathcal{Q}_m$, ta có

$$\delta_{3;m+1}(Q_{2,1}) = Q_{3,2}^{q^{m-2}} \delta_{3;m}(Q_{2,1}).$$

Mặt khác, $Q_{3,2} = x_1^6 x_2^6 x_3^6$ trong $\mathcal{Q}_2$, vì vậy $Q_{3,2}^{q^{m-2}} = x_1^{2.3^{m-1}} x_2^{2.3^{m-1}} x_3^{2.3^{m-1}}$ trong $\mathcal{Q}_m$. Vì vậy nếu $\delta_{3;m}(Q_{2,1}) = 0$ trong $\mathcal{Q}_{m-1}$ thì suy ra $\delta_{3;m+1}(Q_{2,1}) = 0$ trong $\mathcal{Q}_m$. Do đó, ta suy ra $\delta_{3;m+1}(Q_{2,1}) = 0$ trong $\mathcal{Q}_m$.

Với trường hợp $h = 1$, theo Mệnh đề 3.1.9 ta có

$$\delta_{3;m+1}(1) = Q_{3,2}^{3^{m-2}} \delta_{3;m}(1) = \delta_{3;m}\left(Q_{2,1}^{3^{m-1}}\right).$$

ii) Khi $q = 2$ thì ta vẫn có $Q_{3,0}^{q^{m-2}} = 0$ trong $\mathcal{Q}_m(3)$. Do đó, theo hệ quả của phương trình cơ bản ở trên ta suy ra

$$\delta_{3;m+1}(h) = Q_{3,2}^{q^{m-2}} \delta_{3;m}(h) - Q_{3,1}^{q^{m-2}} \delta_{3;m-1}(h).$$

tuy nhiên

$$Q_{3,1}^{2^{m-2}} = x_1^{2^{m-1}} x_2^{2^{m-1}} x_3^{2^{m-1}}.$$

Vì vậy, theo định nghĩa của toán tử δ_3 thì $\delta_{3;m+1}(h) = Q_{3,2}^{2^{m-2}}\delta_{3;m}(h) - Q_{3,1}^{2^{m-2}}\delta_{3;m-1}(h)$ trong $\mathcal{Q}_m$ bằng

$$\frac{1}{L_3}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^{2^m} h(x_2,x_3)(x_2^{2^m}+x_3^{2^m}) & x_2^{2^m} h(x_1,x_3)(x_1^{2^m}+x_3^{2^m}) & x_3^{2^m} h(x_1,x_2)(x_1^{2^m}+x_2^{2^m}) \end{vmatrix}.$$

Mặt khác, dễ thấy rằng

$$x_1^{2^m} + x_2^{2^m} = Q_{2,1}\delta_{2;m}(1) - \delta_{2;m}(Q_{1,0}^2),$$

vì vậy biểu thức trên trở thành

$$\delta_{3;m}(Q_{2,1}h\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(h\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)).$$

Theo Bổ đề 3.4.9 ta suy ra điều phải chứng minh.

□

Chú ý 3.5.8. Sử dụng Bổ đề 3.4.7 và tính toán tương tự có thể chỉ ra rằng khi $q = 2$, thì đối với $h \in \mathcal{D}_2$, ta có kết quả sau

$$\delta_{3;m+1}(h) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } h \text{ là bội của } Q_{2,0}, \\ \delta_{2;m}^2(Q_{1,0}^{2s}) & \text{nếu } h = Q_{2,1}^s. \end{cases}$$

Chứng minh. Trước hết ta có công thức sau theo Bổ đề 3.5.7 (trường hợp $q = 2$),

$$\delta_{3;m+1}(h) = \delta_{3;m}(Q_{2,1}h\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(h\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)).$$

Theo Hệ quả 3.4.8 với $g \in \mathcal{D}_2$ và có dạng

$$g = \sum_{(s,t)\in A\subset\mathbb{N}^2} V_1^s V_2^t$$

thì với mọi $i \geq 0$ ta có

$$\delta_{3;m}\left(\sum_{(s,t)\in A} V_1^s V_2^t \delta_{2;m}(Q_{1,0}^i)\right) = \sum_{(s,t)\in A; t\geq 1} \delta_{2;m}\left(V_1^s V_2^{t-1}\delta_{2;m}(Q_{1,0}^i)\right).$$

- Xét trường hợp h là bội của $Q_{2,0}$, tức là $h = Q_{2,0}\cdot h_1 = V_1V_2\cdot h_1 \in \mathcal{D}_2$. Khi đó

$$\begin{aligned}\delta_{3;m+1}(Q_{2,0}h_1) &= \delta_{3;m}(Q_{2,0}Q_{2,1}h_1\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(Q_{2,0}h_1\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2))\\ &= \delta_{3;m}(V_1V_2Q_{2,1}h_1\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(V_1V_2h_1\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)).\end{aligned}$$

Khi $h_1 = 1$ ta có

$$\begin{aligned}\delta_{3;m+1}(Q_{2,0}) &= \delta_{3;m}(V_1V_2Q_{2,1}\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(V_1V_2\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2))\\ &= \delta_{2;m}\left(V_1V_1^2\delta_{2;m}(1)\right) + \delta_{2;m}\left(V_1V_2\delta_{2;m}(1)\right) - \delta_{2;m}\left(V_1\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)\right).\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 3.4.7 cho các trường hợp $(s=3, t=0)$, $(s=1, t=1)$ và $(s=1, t=0)$ ta có

$$\begin{aligned}\delta_{3;m+1}(Q_{2,0}) &= \delta_{2;m}^2(Q_{1,0}^3) - x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^1 + x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^1 - \delta_{2;m}^2(Q_{1,0}^3)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ngoài ra, theo Bổ đề 3.4.7 với trường hợp $s > 1$, $t \geq 1$ ta có

$$\delta_{2;m}\left(V_1^sV_2^t\delta_{2;m}(Q_{1,0}^i)\right) = 0.$$

Do đó, Khi $h \neq 1$ thì có thể biểu diễn h_1 qua các bất biến tam giác trên và áp dụng Hệ quả 3.4.8 ta có

$$\begin{aligned}
\delta_{3;m+1}(Q_{2,0}h_1) &= \delta_{3;m}(V_1V_2Q_{2,1}h_1\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(V_1V_2h_1\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \delta_{2;m}\left(V_1V_1^{2(a+1)}\delta_{2;m}(1)\right) + \delta_{2;m}\left(V_1V_2^{a+1}\delta_{2;m}(1)\right) \\
&- \delta_{2;m}\left(V_1V_1^{2a}\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)\right) - \delta_{2;m}\left(V_1V_2^{a}\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)\right).
\end{aligned}$$

Tiếp tục sử dụng kết quả của Bổ đề 3.4.7 cho trường hợp $(s = 1, t \geq 1)$ và $(s \geq 2, t = 0)$. Khai triển và rút gọn các hạng tử, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\delta_{3;m+1}(Q_{2,0}h_1) &= \delta_{2;m}^2\left(Q_{1,0}^{2a+3}\right) - x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2a+1} + x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2a+1} \\
&- \delta_{2;m}^2\left(Q_{1,0}^{2a+3}\right) + x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2a+1} + x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2a+1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Xét trường hợp $h \in \mathcal{D}_2$ với $h = Q_{2,1}^s = (V_1^2 + V_2)^s$, tương tự như trên ta có

$$\begin{aligned}
\delta_{3;m+1}(Q_{2,1}^s) &= \delta_{3;m}(Q_{2,1}^{s+1}\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(Q_{2,1}^s\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \delta_{3;m}((V_1^2 + V_2)^{s+1}\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}((V_1^2 + V_2)^s\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)).
\end{aligned}$$

Khi đó, ta xét các khả năng sau.

– Khi $s = 0$ thì

$$\begin{aligned}
\delta_{3;m+1}(1) &= \delta_{3;m}(Q_{2,1}\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \delta_{3;m}((V_1^2 + V_2)\delta_{2;m}(1)) \\
&= \delta_{2;m}(\delta_{2;m}(1)) = \delta_{2;m}^2(1).
\end{aligned}$$

– Khi $s = 1$, áp dụng kết quả của Bổ đề 3.4.7 cho trường hợp $(s = 0, t = 1)$

ta có

$$\begin{aligned}
\delta_{3;m+1}(Q_{2,1}) &= \delta_{3;m}(Q_{2,1}^2\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(Q_{2,1}\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \delta_{3;m}((V_1^2+V_2)^2\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}((V_1^2+V_2)\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \binom{2}{1}\delta_{2;m}(V_1^2\delta_{2;m}(1)) + \delta_{2;m}(V_2\delta_{2;m}(1)) - \delta_{2;m}(\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \binom{2}{1}\delta_{2;m}(V_1^2\delta_{2;m}(1)) + (1+1)x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1} - \delta_{2;m}^2(Q_{1,0}^2) \\
&= \delta_{2;m}^2(Q_{1,0}^2).
\end{aligned}$$

– Khi $s \geq 2$, áp dụng kết quả của Bổ đề 3.4.7 cho trường hợp $(s \geq 1, t = 0)$ và $(s = 0, t \geq 1)$ ta có

$$\begin{aligned}
\delta_{3;m+1}(Q_{2,1}^s) &= \delta_{3;m}(Q_{2,1}^{s+1}\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}(Q_{2,1}^s\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \delta_{3;m}((V_1^2+V_2)^{s+1}\delta_{2;m}(1)) - \delta_{3;m}((V_1^2+V_2)^s\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \binom{s+1}{1}\delta_{2;m}(V_1^{2s}\delta_{2;m}(1)) + \delta_{2;m}(V_2^s\delta_{2;m}(1)) \\
&- \binom{s}{1}\delta_{2;m}(V_1^{2(s-1)}\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) - \delta_{2;m}(V_2^{s-1}\delta_{2;m}(Q_{1,0}^2)) \\
&= \binom{s+1}{1}\left(\delta_{2;m}(Q_{1,0}^{2s} - x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2s-2})\right) \\
&+ (s+1)x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2s-2} \\
&- \binom{s}{1}\left(\delta_{2;m}(Q_{1,0}^{2s}) - x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2s-2}\right) \\
&- (s-1+1)x_1^{2^m-1}x_2^{2^m-1}x_3^{2s-2} \\
&= \delta_{2;m}^2(Q_{1,0}^s)
\end{aligned}$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. □

Từ đó, ta có kết quả sau.

Định lý 3.5.9. *Giả thuyết 3.5.1 đúng với trường hợp $n \leq 3$. Tức là, với $n \leq 3$*

và $0 \leq k \leq n$, các không gian con của không gian $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$

$$\mathcal{F}_{n,k} = \mathrm{Span}\left\{\delta_{s+1}^{n-s}(f) : f \in \Delta_s^m, 0 \leq s \leq \min(m,k)\right\}.$$

là một $\mathcal{A}$-môđun con và cũng là một $\mathcal{D}_n$-môđun con của $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$. Hơn nữa, $\mathcal{F}_{n,k}$ bị triệt tiêu bởi các đa thức Dickson $Q_{n,0}, Q_{n,1}, \ldots, Q_{n,n-k-1}$.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.1.9 thì với $n \leq 3$ thì các không gian con $\mathcal{F}_{n,k}$ là $\mathcal{D}_n$-môđun con của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$. Hơn nữa, các không gian con $\mathcal{F}_{n,k}$ bị triệt tiêu bởi các bất biến Dickson $Q_{n,0}$, $Q_{n,1}$, $\ldots$, và $Q_{n,n-k-1}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh các không gian con này cũng là các $\mathcal{A}$-môđun con của không gian bất biến. Theo Hệ quả 3.5.4 thì Định lý đúng với $n \leq 2$. Với trường hợp $n = 3$ thì Định lý đúng với không gian con $\mathcal{F}_{3,1}$ theo Hệ quả 3.5.5. Hơn nữa, ta có

- $\mathcal{F}_{3,0} = \mathrm{Span}\left\{\delta_1^3(1)\right\}$,
- $\mathcal{F}_{3,3} = \mathrm{Span}\left\{\delta_1^3(1), \delta_2^2(\Delta_1^m), \delta_3(\Delta_2^m), \Delta_3^m\right\}$.

Vì vậy, $\mathcal{F}_{3,0}$ chỉ gồm GL_3-bất biến của $\mathcal{Q}_m$ có bậc cao nhất, $\mathcal{F}_{3,3}$ gồm toàn bộ các GL_3-bất biến của $\mathcal{Q}_m$. Tác động của toán tử Steenrod giao hoán với tác động của nhóm GL_3 nên các không gian con $\mathcal{F}_{3,0}$ và $\mathcal{F}_{3,3}$ cũng là các $\mathcal{A}$-môđun con. Do đó, việc còn lại là chứng minh rằng $\mathcal{F}_{3,2}$ là một $\mathcal{A}$-môđun con của $\mathcal{Q}_m(3)^{\mathrm{GL}_3}$. Thật vậy, từ Bổ đề 3.5.6 và Bổ đề 3.5.7, ta thấy rằng nếu $f \in \mathcal{D}_2$, thì

$$\mathcal{P}^k(\delta_3 f) + \sum_{i<k} \frac{\mathcal{P}^{k-i} L_3}{L_3} \mathcal{P}^i(\delta_3 f) \in \mathcal{F}_{3,2}.$$

Hơn nữa, $\mathcal{P}^i L_3$ là một định thức có các phần tử là lũy thừa của q, vì vậy nó luôn là một bội của L_3, và thương $\frac{\mathcal{P}^i L_3}{L_3}$ là một đa thức Dickson trong $\mathcal{D}_3$. Do đó, nếu các $\mathcal{P}^i(\delta_3 f)$ thuộc $\mathcal{F}_{3,2}$ thì từ Mệnh đề 3.1.9 ta suy ra các $\frac{\mathcal{P}^{k-i} L_3}{L_3} \mathcal{P}^i(\delta_3 f)$ cũng thuộc $\mathcal{F}_{3,2}$. Vì vậy, theo quy nạp thì $\mathcal{P}^k(\delta_3 f)$ cũng thuộc $\mathcal{F}_{3,2}$. Vậy, định lý đã được chứng minh. □

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi trình bày các nội dung sau đây.

• Chúng tôi đề xuất một một cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$, và trường hợp đặc biệt không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$ dựa trên cơ sở tuyến tính của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ (Giả thuyết 3.0.1 và 3.0.2).

• Chúng tôi nhắc lại định nghĩa tập hợp Δ_s^m (theo [28]), theo đó tập Δ_s^m là tập hợp gồm các đơn thức Dickson thỏa mãn các điều kiện liên quan đến phân hoạch của s (Định nghĩa 3.1.1 và 3.1.3), tập hợp này quan trọng trong việc xây dựng các cơ sở tuyến tính cho các không gian con bất biến ở các phần tiếp theo.

• Tiếp theo, chúng tôi chỉ ra chặn trên của tổng số chiều của các không gian con bất biến. Dựa trên kết quả này, chúng tôi nhận thấy rằng việc chứng minh tính hệ sinh của các tập trong Giả thuyết là đủ để có thể khẳng định được tính cơ sở của nó mà không cần chứng minh trực tiếp. Kết quả này giúp việc đơn giản hóa quá trình chứng minh Giả thuyết (Mệnh đề 3.2.1 và Hệ quả 3.2.2).

• Sau đó, chúng tôi chứng minh Giả thuyết đúng với hạng 2. Đối với hạng 2 thì chỉ có hai nhóm con parabolic là nhóm con Borel (đã chứng minh tổng quát trong Chương 2) và nhóm tuyến tính tổng quát. Công việc còn lại là chứng minh Giả thuyết với nhóm tuyến tính tổng quát GL_2. Chúng tôi tính toán ánh xạ chuyển từ không gian bất biến ứng với nhóm con Borel lên không gian bất biến ứng với nhóm tuyến tính tổng quát để thu được hệ sinh của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$. Tiếp theo, chúng tôi tìm cách thu gọn hệ sinh này sao cho phù hợp với hệ sinh trong Giả thuyết. Dựa vào lập luận trước đó, chúng tôi chỉ ra cơ sở tuyến tính của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(2)^{\mathrm{GL}_2}$ (Mệnh đề 3.3.3).

• Tương tự cách làm cho trường hợp hạng 2, chúng tôi chứng minh Giả thuyết cho hạng 3. Hạng 3 gồm 4 nhóm con parabolic gồm nhóm Borel B_3, nhóm $\mathrm{P}_{(2,1)}$, $\mathrm{P}_{(1,2)}$ và nhóm tuyến tính tổng quát GL_3. Chúng tôi xây dựng các hệ sinh bằng cách sử dụng ánh xạ chuyển và thu gọn các hệ sinh này sao cho phù hợp với hệ sinh trong Giả thuyết, từ đó suy ra Giả thuyết đúng với trường hợp hạng 3. Chúng tôi tìm được các cơ sở tuyến tính của không gian bất biến ứng với các nhóm $P_{(2,1)}$, $P_{(1,2)}$ và nhóm tuyến tính tổng quát GL_3 (Mệnh đề 3.4.2, 3.4.4, 3.4.14). Vì vậy, chúng tôi khẳng định Giả thuyết 3.0.1 và 3.0.2 đúng với hạng ≤ 3 (Định lý 3.4.15).

• Cuối cùng, chúng tôi trình bày Giả thuyết về lọc $\mathcal{F}_{n,k}$ từ hệ cơ sở tuyến tính vừa xây dựng và chứng minh Giả thuyết về lọc $\mathcal{F}_{n,k}$ xem như là môđun trên đại số Dickson và đại số Steenrod (Giả thuyết 3.5.1). Tiếp theo, chúng tôi chứng minh giả thuyết này đúng với trường hợp hạng ≤ 3 (Định lý 3.5.9).

KẾT LUẬN

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả sau.

Thứ nhất, chúng tôi định nghĩa toán tử δ như là một biến thể của hàm Schur [20] và trình bày một số tính chất quan trọng của nó. Cụ thể, chúng tôi đưa ra công thức tính các toán tử δ lặp (Mệnh đề 2.1.4) và mở rộng nó trong các trường hợp tổng quát hơn (Mệnh đề 2.1.7). Dựa trên các tính chất của toán tử δ, chúng tôi xây dựng cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ dưới tác động của nhóm Borel trong trường hợp tổng quát (Định lý 2.5.4). Từ đó, chúng tôi đã chứng minh được giả thuyết của Lewis - Reiner - Staton về chuỗi Hilbert của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ (Định lý 2.6.3).

Thứ hai, chúng tôi xây dựng các giả thuyết về cơ sở tuyến tính cho các không gian bất biến, cụ thể là không gian $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{P}_\alpha}$ và $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n}$ dựa trên cơ sở tuyến tính đã biết của không gian $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{B}_n}$ (Giả thuyết 3.0.1 và 3.0.2). Chúng tôi chứng minh các giả thuyết này đúng với hạng 2 và hạng 3, bằng cách sử dụng tác động của ánh xạ chuyển để xây dựng các hệ sinh và thu gọn chúng sao cho phù hợp với các hệ sinh trong giả thuyết. Cụ thể, đối với hạng 2, chỉ có hai nhóm con parabolic là nhóm Borel và nhóm tuyến tính tổng quát GL_2 (Mệnh đề 3.3.3). Đối với hạng 3, các nhóm con parabolic bao gồm nhóm Borel và ba nhóm khác như $\mathrm{P}_{(2,1)}$, $\mathrm{P}_{(1,2)}$, cùng với nhóm tuyến tính tổng quát GL_3 (Mệnh đề 3.4.2, 3.4.4, 3.4.14 và Định lý 3.4.15). Chúng tôi cũng trình bày và chứng minh giả thuyết về lọc $\mathcal{F}_{n,k}$ (Giả thuyết 3.5.1), chứng minh rằng giả thuyết này đúng với hạng ≤ 3, và xem xét nó như một môđun trên đại số Dickson và Steenrod (Định lý 3.5.9). Các kết quả này đã xác định rõ ràng các cơ sở tuyến tính của không gian bất biến ứng với các nhóm parabolic và nhóm tuyến tính tổng quát GL_3, qua đó góp phần khẳng định tính Giả thuyết là đúng với trường hợp hạng không vượt quá 3.

Về hướng phát triển tiếp theo, chúng tôi định hướng tập trung vào hai bài toán.

Thứ nhất, ưu tiên hàng đầu là việc chứng minh giả thuyết của Lewis - Reiner - Stanton cho nhóm tuyến tính tổng quát GL_n với hạng n bất kỳ. Việc xác lập được cơ sở tuyến tính cho trường hợp GL_n sẽ tạo ra một "điểm chốt" quan trọng bên cạnh kết quả đã có về nhóm Borel B_n.

Thứ hai, dựa trên sự kết hợp giữa cấu trúc bất biến của nhóm Borel B_n (điểm thấp nhất) và nhóm tuyến tính tổng quát GL_n (điểm cao nhất) trong sơ đồ các nhóm con parabolic, chúng tôi kỳ vọng sẽ xây dựng được một phương pháp quy nạp cấu trúc để chứng minh giả thuyết đúng cho một nhóm parabolic P_α bất kỳ. Đây sẽ là bước đi quan trọng nhằm hoàn thiện bức tranh toàn cảnh về lý thuyết bất biến modular trên trường hữu hạn modulo lũy thừa Frobenius.

Danh sách các công trình liên quan đến luận án

1. Lê Minh Hà, Nguyễn Đặng Hồ Hải, Nguyễn Văn Nghĩa (2024), "A proof of the Lewis-Reiner-Stanton conjecture for the Borel subgroup", *Transactions of the American Mathematical Society* vol 377, pp. 8221-8243.

2. Lê Minh Hà, Nguyễn Đặng Hồ Hải, Nguyễn Văn Nghĩa (2025), "On modular invariants of the truncated polynomial ring in low ranks", *Journal of Algebra* vol 683, pp. 319-354.

Các kết quả trong luận án đã được báo cáo và thảo luận tại

- Hội nghị Toán học toàn quốc năm 2023 (VMC 2023) tại Đại học Sư phạm Đà Nẵng (8-12/8/2023).

- Hội thảo tại Trường đông về Tôpô đại số và ứng dụng do Viasm tổ chức tại Đại học Quy Nhơn (4-8/12/2023).

- Hội nghị khoa học Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội (9/10/2024).

- Hội thảo "Toán học và các ngành có liên quan", Viện Toán học - Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Trường Đại học Hùng Vương (29/3/2025).

- Seminar Bộ môn Đại số - Hình học - Tôpô, Khoa Toán Cơ Tin, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội (13/8/2025).

- Hội thảo Gặp gỡ Toán học 2025 do Viện Toán học Việt Nam - Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội - Đại học Bách khoa Hà Nội - Đại học Sư phạm Hà Nội 2 phối hợp tổ chức tại Đại học Sư phạm Hà Nội 2(27-28/9/2025).

Tài liệu tham khảo

[1] Armstrong D., Reiner V., Rhoades B. (2015), "Parking spaces", Advances in Mathematics Vol. 269, pp. 647–706.

[2] Bessis D., Reiner V. (2011), "Cyclic sieving of noncrossing partitions for complex reflection groups", *Annals of Combinatorics* Vol. 14(2), pp. 197-222.

[3] Berest Y., Etingof P., Ginzburg V. (2003), "Finite dimensional representations of rational Cherednik algebras", *International Mathematics Research Notices* Vol. 19, pp. 1053–1088.

[4] Boardman J.M. (1993), "Modular representations on the homology of powers of real projective space", *Contemporary Mathematics* Vol. 146, pp. 49–70.

[5] Broer J., Reiner V., Smith L., Webb P. (1999), *The Cohen–Macaulay property of invariant rings of finite groups*, Journal of Algebra Vol. 212, pp. 400–417.

[6] Deng T. (2023), "Torsions in cohomology of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ and congruence of modular forms", *Journal of Number Theory* Vol. 246, pp. 87–156.

[7] Dickson L.E. (1911), "A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem", *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 12 (1), pp. 75–98.

[8] Drescher C., Shepler A.V. (2020), "Invariants of polynomials mod Frobenius powers", *Journal of Algebra* Vol. 556, pp. 908–935.

[9] Fu S., Reiner V., Stanton D., Thiem N. (2012), "The negative q-binomial", *Electronic Journal of Combinatorics* Vol. 19(1), pp. 1–24.

[10] Gordon I. (2003), "On the quotient ring by diagonal invariants", *Inventiones Mathematicae* Vol. 153 (3), pp. 503–518.

[11] Gordon I., Griffeth S. (2012), "Catalan numbers for complex reflection groups", *American Journal of Mathematics* Vol. 134 (6), pp. 1491–1502.

[12] Goyal P. (2018), "Invariant theory of finite general linear groups modulo Frobenius powers", *Communications in Algebra* Vol. 46 (10), pp. 4511–4529.

[13] Haiman M. (1994), "Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants", *Journal of Algebraic Combinatorics* Vol. 3 (1), pp. 17–76.

[14] Hewett T.J. (1996), "Modular invariant theory of parabolic subgroups of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ and the associated Steenrod modules", *Duke Mathematical Journal* Vol. 82 (1), pp. 91–102.

[15] Kameko M. (1990), *Products of projective spaces as Steenrod modules*, Ph.D. Thesis, The Johns Hopkins University, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 29 pp.

[16] Kane R.M. (2001), *Reflection Groups and Invariant Theory*, CMS Books in Mathematics Vol. 5, Springer Science and Business Media.

[17] Kuhn N.J. (1987), "The Morava K-Theories of Some Classifying Spaces", *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 304 (1), pp. 193–205.

[18] Kuhn N.J., Mitchell S.A. (1986), "The multiplicity of the Steinberg representation of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ in the symmetric algebra", *Proceedings of the American Mathematical Society* Vol. 96 (1), pp. 1–6.

[19] Lewis J., Reiner V., Stanton D. (2017), "Invariants of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ in polynomials modulo Frobenius powers", *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A* Vol. 147 (4), pp. 831–873.

[20] Macdonald I.G. (1992), "Schur functions: theme and variations", *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* Vol. 498, pp. 5–39.

[21] Meyer D.M., Smith L. (2005), *Poincaré duality algebras, Macaulay's dual systems, and Steenrod operations*, Cambridge Tracts in Mathematics Vol. 167, Cambridge University Press, Cambridge.

[22] Minh P.A., Tung V.T. (2000), "Modular invariants of parabolic subgroups of general linear groups", *Journal of Algebra* Vol. 232, pp. 197–208.

[23] Mitchell S.A. (1985), "Finite complexes with $A(n)$-free cohomology", *Topolygy* Vol. 24 (2), pp. 227–246.

[24] Mui H. (1975), "Modular invariant theory and cohomology algebras of symmetric groups", *Journal of the Faculty of Science, The University of Tokyo* vol 22, pp. 319-369.

[25] Neusel M.D. (2007), *Invariant theory*, Student Mathematical Library, American Mathematical Society, Providence.

[26] Neusel M.D. (2000), "Integral extensions of unstable algebras over the Steenrod algebra", *Forum Mathematicum* Vol. 12 (2), pp. 155–166.

[27] Neusel M.D., Smith L. (1998), "The Lasker–Noether Theorem for $\mathcal{P}^*$-Invariant Ideals", *Forum Mathematicum* Vol. 10, pp. 1–18.

[28] Reiner V., Stanton D. (2010), “(q,t)-analogues and $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q)$”, *Journal of Algebraic Combinatorics* Vol. 31 (3), pp. 411–454.

[29] Reiner V., Stanton D., White D. (2004), “The cyclic sieving phenomenon”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* Vol. 108 (1), pp. 17–50.

[30] Serre J.P. (1967), "Groupes finis d'automorphismes d'anneaux locaux réguliers", *Colloque d'Algèbre ENSJF (Paris)*, pp. 8-01–8-11.

[31] Smith L. (2007), “An Algebraic Introduction to the Steenrod algebra”, *Geometry and Topology Monographs* Vol. 11, pp. 327–348.

[32] Smith L. (1995), *Polynomial invariants of finite groups*, Research Notes in Mathematics Vol. 6, A K Peters, Wellesley, MA.

[33] Springer T. A. (1974), "Regular elements of finite reflection groups", Inventiones Mathematicae Vol. 25, pp. 159–198.

[34] Stanley R. P. (2015), *Catalan Numbers*, Cambridge University Press.

[35] Tits, J. (1957), "Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes", *Colloque de l'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles*, pp. 261–289.

[36] Walker G., Wood R.M.W. (2018), *Polynomials and the mod* 2 *Steenrod algebra. Vol. 1. The Peterson hit problem*, London Mathematical Society Lecture Note Series Vol. 441, Cambridge University Press, Cambridge.

[37] Walker G., Wood R.M.W. (2018), *Polynomials and the mod* 2 *Steenrod algebra. Vol. 2. Representations of* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_2)$, London Mathematical Society Lecture Note Series Vol. 442, Cambridge University Press, Cambridge.