

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN VĂN NGHĨA

BẤT BIẾN MODULAR CỦA VÀNH ĐA THỨC  
MODULO LŨY THỪA FROBENIUS

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số: 9640104

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2026

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

**Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Lê Minh Hà**  
**PGS. TS. Nguyễn Đăng Hồ Hải**

**Phản biện 1: GS.TS. Nguyễn Sum**  
Trường Đại học Sài Gòn

**Phản biện 2: PGS.TS. Phạm Hùng Quý**  
Trường Đại học FPT

**Phản biện 3: PGS.TS. Trương Công Quỳnh**  
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội vào hồi 9 giờ 00 ngày 12 tháng 02 năm 2026

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Trung tâm Thư viện và Tri thức số, Đại học Quốc gia Hà Nội

# MỞ ĐẦU

Lý thuyết bất biến nghiên cứu tác động của nhóm, các điểm bất động và các quỹ đạo. Thông thường, nhóm tác động trên các không gian véctơ (phân bậc), hoặc các đại số trên một trường. Đây là một trong những lĩnh vực nghiên cứu trung tâm của đại số, với liên hệ và ứng dụng trong nhiều nhánh nghiên cứu khác của toán học như tổ hợp, lý thuyết nhóm, đối đồng điều của nhóm, tô pô đại số và lý thuyết biểu diễn.

Đối tượng nghiên cứu cổ điển và quan trọng nhất là tác động tuyến tính của các nhóm hữu hạn trên vành đa thức. Ký hiệu  $V$  là một không gian véctơ  $n$  chiều trên trường  $k$  nào đó, và  $x_1, \dots, x_n$  là một cơ sở của  $V$ . Ký hiệu  $GL(V)$  là nhóm các phép biến đổi tuyến tính khả nghịch của  $V$ . Ta có thể đồng nhất  $GL(V)$  với nhóm nhân các ma trận khả nghịch cấp  $n$  với hệ số trong  $k$ . Ký hiệu  $S$  là đại số đa thức theo các biến  $x_1, \dots, x_n$  với hệ số trong  $k$ ,

$$S = k[x_1, \dots, x_n].$$

Do đó không gian các dạng tuyến tính trong  $S$  chính là  $V$ . Tác động của một tự đồng cấu  $\sigma \in GL(V)$  trên  $V$  mở rộng một cách duy nhất thành một tự đẳng cấu đại số của  $S$  bởi công thức

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) = f(\sigma x_1, \dots, \sigma x_n),$$

ở đó  $\sigma x_j = \sum \sigma_{i,j} x_i$ . Ta cần tìm tất cả các đa thức  $f \in S$  sao cho  $\sigma f = f$  với mọi  $\sigma$  thuộc một nhóm con hữu hạn  $G$  nào đó của  $GL(V)$ .

Một ví dụ quen thuộc là các bất biến của nhóm đối xứng  $\Sigma_n$ , tác động theo cách thông thường như là nhóm hoán vị của các biến  $x_1, \dots, x_n$ .

$$k[x_1, \dots, x_n]^{\Sigma_n} = k[e_1, \dots, e_n],$$

ở đó  $e_k$  là các đa thức đối xứng sơ cấp thứ  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Các đa thức đối xứng là các đối tượng toán học quen thuộc trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học.

Trong lý thuyết bất biến, cũng như lý thuyết biểu diễn, có sự khác biệt rất lớn giữa trường hợp modular và non-modular. Trong trường hợp non-modular, đặc số của trường  $k$  bằng 0, hoặc nguyên tố cùng nhau với cấp của nhóm. Khi đó, lý thuyết trở nên tương tự như bất biến trên trường số phức. Từ quan điểm ứng dụng trong tô pô đại số, và đối đồng điều của nhóm, lý thuyết bất biến modular có vai trò quan trọng hơn, nhiều vấn đề trở nên thú vị hơn và là chủ đề của các nghiên cứu thời sự.

Luận án này sẽ chỉ quan tâm tới tác động nhóm hữu hạn trên các không gian véctơ phân bậc trên trường hữu hạn có  $q$  phần tử, ký hiệu là  $\mathbb{F}_q$ , ở đó  $q$  là lũy thừa của đặc số  $p$  là một số nguyên tố nào đó.

Đối với các vành giao hoán trên trường  $\mathbb{F}_q$ , ánh xạ lấy lũy thừa  $q$ , thường được biết đến dưới tên gọi đồng cấu Frobenius, đóng vai trò vô cùng quan trọng. Người ta

thường tìm các cách thức khác nhau để khai thác sự tồn tại của đồng cấu Frobenius. Một trong những kỹ thuật đó là toán tử Steenrod  $\mathcal{P}^i$ ,  $i \geq 0$ , và đại số Steenrod  $\mathcal{A}$ . Mặc dù có nguồn gốc từ tô pô đại số, với vai trò là các toán tử đối đồng điều của các không gian tô pô, đại số Steenrod có thể được xây dựng một cách hoàn toàn đại số. Các không gian bất biến thường sẽ có cấu trúc của một môđun trên đại số Steenrod, và vì thế việc sử dụng các hiểu biết về đại số Steenrod trong lý thuyết bất biến modular trở nên hoàn toàn tự nhiên. Hướng nghiên cứu về các cấu trúc của vành bất biến xem như môđun trên đại số Steenrod đã được nghiên cứu rộng rãi. Các tài liệu tham khảo tiêu biểu là các công trình của Boardman, Meyer và Smith, cũng như của Walker và Wood cùng các tài liệu tham khảo liên quan.

### Vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius

Với mỗi số nguyên dương  $m$ , ký hiệu  $I_m$  là ideal của vành đa thức  $S$  sinh bởi các lũy thừa Frobenius thứ  $m$ ,  $I_m = (x_1^{q^m}, \dots, x_n^{q^m})$ . Đặt  $\mathcal{Q}_m(n)$  là vành thương

$$\mathcal{Q}_m(n) = S/I_m.$$

Do  $I_m$  ổn định dưới tác động của  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ , vành thương  $\mathcal{Q}_m(n)$  có tác động cảm sinh của  $G$ . Cấu trúc  $G$ -môđun của  $\mathcal{Q}_m(n)$ , và đặc biệt là không gian  $G$ -bất biến của nó là đối tượng nghiên cứu chính của luận án này.

Từ cách xây dựng, ta thấy  $\mathcal{Q}_m(n)$  là một đại số hữu hạn chiều. Ở bậc cao nhất  $n(q^m - 1)$ , ta có một không gian vectơ một chiều, sinh bởi đơn thức

$$x_1^{q^m-1} \cdots x_n^{q^m-1},$$

với tác động tầm thường của  $\mathrm{GL}_n$ . Ta có thể định nghĩa một dạng song tuyến tính không suy biến trên  $\mathcal{Q}_m(n)$  bởi công thức

$$(f, g) = \begin{cases} fg, & \text{nếu } \deg(fg) = n(q^m - 1), \\ 0, & \text{trong các trường hợp khác.} \end{cases}$$

Vì vậy, tồn tại một đẳng cấu giữa các không gian vectơ

$$\mathcal{Q}_m(n)^{\mathrm{GL}_n} \cong \mathcal{Q}_m(n)_{\mathrm{GL}_n}.$$

Do đối ngẫu Poincaré, thông tin về không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)_n^{\mathrm{GL}}$  sẽ cho thông tin về không gian đối cố định  $\mathcal{Q}_m(n)_{\mathrm{GL}_n}$ , và khi cho  $m$  đến vô cùng, ta thu được thông tin về không gian đối cố định  $S_{\mathrm{GL}_n}$  của vành đa thức. Một điều đáng ngạc nhiên là trong khi không gian bất biến  $S^{\mathrm{GL}_n}$ , hay còn gọi là đại số Dickson, đã được xác định hoàn toàn từ năm đầu thế kỷ 20, trong khi đó gần như không có hiểu biết nào về  $S_{\mathrm{GL}_n}$  cho đến các công trình của Lewis-Reiner và Stanton.

Vành đa thức modulo Frobenius cũng cho thông tin về đại số đối bất biến<sup>1</sup>. Nhắc lại rằng nếu  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ , vành đối bất biến của  $\mathrm{GL}_n$  là vành thương của đại số đa thức  $S$  bởi ideal sinh bởi các đa thức bất biến  $S^{\mathrm{GL}_n}$  không chứa hằng (tức là không chứa các thành phần bậc 0).

$$S \otimes_{S^{\mathrm{GL}_n}} k = S/(S_+^{\mathrm{GL}_n}),$$

<sup>1</sup>coinvariant algebra

ở đó  $k$  được hiểu là  $S^{\text{GL}_n}$ -môđun tầm thường. Lưu ý rằng  $S_{\text{GL}_n}$  vẫn còn tác động cảm sinh của  $\text{GL}_n$ . Chevalley, dựa trên các nghiên cứu trước đó của Shephard và Todd phân loại các nhóm phản xạ phức chứng minh rằng khi  $k = \mathbb{C}$  là trường số phức, đại số đối bất biến  $S_{\text{GL}_n}$  đẳng cấu với biểu diễn chính quy  $\mathbb{C}[\text{GL}_n]$ , xem như là  $\text{GL}_n$ -môđun. Điều thú vị là đẳng cấu này giúp tạo nên một phân bậc cho biểu diễn chính quy, và nhiều nghiên cứu sâu sắc về liên hệ giữa phân bậc này và các biểu diễn bất khả quy của  $\text{GL}_n$ .

Đối tượng nghiên cứu chính của luận án là các vành bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)$  dưới tác động của nhóm tuyến tính tổng quát  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  và các nhóm con parabolic. Trong công trình rất sâu sắc của mình, Lewis, Reiner và Stanton đã đưa ra một loạt các giả thuyết về chuỗi Hilbert của các vành bất biến nói trên của vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius, và các hệ quả. Đây là kết quả của một chuỗi các công trình nghiên cứu từ hơn 20 năm nay về hiện tượng sàng cyclic<sup>2</sup> trong đại số tổ hợp và các  $q$ -phiên bản của Reiner, Stanton và các cộng sự. Trong đó, vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius đóng vai trò như là một phiên bản tương tự của không gian  $q$ - $W$  Fuss Catalan,  $\text{Cat}^{(m)}(W, q)$  khi nhóm phản xạ hữu hạn  $W$  được thay thế bởi nhóm tuyến tính tổng quát  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ .

Các nghiên cứu về hiện tượng CSP từ nhóm đối xứng sang các nhóm phản xạ đã dẫn đến bài toán tự nhiên cần khảo sát cấu trúc của vành bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)$ . Cũng dựa trên các kết quả thu được trước đó đối với nhóm phản xạ cổ điển, Lewis, Reiner và Stanton đã đề xuất một chuỗi các giả thuyết về chuỗi Hilbert của các vành bất biến này thông qua các hệ số nhị thức tổng quát  $(q, t)$ , là phiên bản phân bậc của các  $q$ -hệ số nhị thức ở trên.

### Nhóm $G = \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ muốn làm nhóm Coxeter

Ta đã biết từ định lý của Dickson rằng vành bất biến  $S^G$  là một đại số đa thức sinh bởi các bất biến Dickson  $Q_{n,i}$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  với bậc lớn nhất  $q^n - 1$ . Như vậy  $G = \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$  cũng là một nhóm phản xạ. Tuy không phải là một nhóm phản xạ thực (nhóm Coxeter), nhưng nó có nhiều tính chất và thể hiện khá tương tự. Vì thế có thể đặt câu hỏi về tương tự của các kết quả trên cho  $G$ . Nếu đặt

$$\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) = (x_1^{q^m}, \dots, x_n^{q^m})$$

thì chúng đều thuần nhất bậc  $(q^n - 1) + 1$ , lập thành một hệ tham số cho  $S$  và không gian sinh bởi chúng đẳng cấu với không gian sinh bởi  $x_1, \dots, x_n$ . Như vậy, khi tìm kiếm phiên bản tương tự của  $\text{Cat}(W, q)$  từ nhóm Coxeter cổ điển sang cho nhóm  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ , ta thu được vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius  $\mathcal{Q}_m(n)$ .

Các nghiên cứu về hiện tượng CSP từ nhóm đối xứng sang các nhóm phản xạ đã dẫn đến bài toán tự nhiên cần khảo sát cấu trúc của vành bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)$ . Cũng dựa trên các kết quả thu được trước đó đối với nhóm phản xạ cổ điển, Lewis, Reiner và Stanton đã đề xuất một chuỗi các giả thuyết về chuỗi Hilbert của các vành bất biến này thông qua các hệ số nhị thức tổng quát  $(q, t)$ , là phiên bản phân bậc của các  $q$ -hệ số nhị thức ở trên.

Để phát biểu giả thuyết của Lewis, Reiner và Stanton, chúng ta giới thiệu thêm

---

<sup>2</sup>cyclic sieving phenomena - CSP

một số ký hiệu và định nghĩa. Một hợp thành yếu<sup>3</sup>  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\ell)$  là một dãy các số nguyên không âm. Ta đặt  $B_i = \sum_{j=1}^i \beta_j$  và  $|\beta| = \sum_{j=1}^\ell \beta_j$ . Tập hợp các phân hoạch yếu có thể được trang bị một thứ tự cục bộ, ở đó  $\beta \leq \beta'$  nếu  $\beta_i \leq \beta'_i$  với mọi  $i$ .

Giả sử  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  là một hợp thành của số nguyên dương  $k$ , theo Reiner-Staton,  $(q, t)$ -hệ số nhị thức tổng quát của  $k$  bởi  $\alpha$  được cho bởi công thức

$$\left[ \begin{matrix} k \\ \alpha \end{matrix} \right]_{q,t} = \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (1 - t^{q^k - q^j})}{\prod_{i=1}^{\ell} \prod_{j=1}^{\alpha_i} (1 - t^{q^{A_i} - q^{A_i - j}})},$$

trong đó  $A_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j$ .

Lewis, Reiner và Stanton đã đề xuất một chuỗi các giả thuyết về chuỗi Hilbert của không gian véctơ phân bậc các bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)$  dưới tác động của các nhóm con parabolic của nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_n$  như sau:

**Giả thuyết 1.4.1 (Giả thuyết 1.1, Lewis-Reiner-Stanton)** *Chuỗi Hilbert-Poincaré của  $\mathbb{F}_q$ -không gian véctơ phân bậc của các  $GL_n$ -bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{GL_n}$  là chuỗi lũy thừa  $C_{n,m}(t)$  xác định bởi công thức*

$$Hilb(\mathcal{Q}_m(n)^{GL_n}, t) = C_{n,m}(t) = \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} t^{(n-k)(q^m - q^k)} \left[ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right]_{q,t}.$$

**Giả thuyết 1.4.2 (Giả thuyết Parabolic 1.5, Lewis-Reiner-Stanton).** *Cho  $n$  là số nguyên dương,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  là một hợp thành của  $n$  và gọi  $P_\alpha$  là nhóm con parabolic của  $GL_n$ . Chuỗi Hilbert-Poincaré của  $\mathbb{F}_q$ -không gian véctơ phân bậc của các  $P_\alpha$ -bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  là chuỗi lũy thừa  $C_{\alpha,m}(t)$  xác định bởi công thức*

$$Hilb(\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}, t) = C_{\alpha,m}(t) = \sum_{\beta \leq \alpha, |\beta| \leq m} t^{e(m, \alpha, \beta)} \left[ \begin{matrix} m \\ \beta, m - |\beta| \end{matrix} \right]_{q,t},$$

ở đó  $e(m, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \beta_i) (q^m - q^{B_i})$  và  $B_i = \beta_1 + \dots + \beta_i$ .

Chẳng hạn, khi  $m \geq n = 2$  và  $\alpha = (1, 1)$  thì  $P_\alpha$  là nhóm con Borel của  $GL_2$  và  $\beta \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Theo giả thuyết thì chuỗi Hilbert-Poincaré của  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_2}$  là

$$t^{2(q^m - 1)} + t^{q^m - 1} \frac{1 - t^{q^m - 1}}{1 - t^{q - 1}} + t^{q^m - q} \frac{1 - t^{q^m - 1}}{1 - t^{q - 1}} + \frac{(1 - t^{q^m - 1})(1 - t^{q^m - q})}{(1 - t^{q - 1})(1 - t^{q^2 - q})}.$$

Lewis, Reiner và Stanton đã chứng minh cho giả thuyết của họ trong trường hợp  $m = 1$ ,  $n$  bất kỳ. Trong công trình của mình, Goyal thu được một số kết quả về giả thuyết Parabolic đối với nhóm Borel trong trường hợp  $m = n = 2$  và xây dựng được một số bất biến cho trường hợp  $m = 2$  và  $n$  bất kỳ. Goyal đã xây dựng một cách cụ thể một số các họ bất biến "đặc biệt", không phải là các đa thức bất biến thông thường. Một phiên bản của giả thuyết Parabolic đã được nghiên cứu bởi Drescher và Shepler nghiên cứu. Gần đây, Taiwang Deng trong công trình của mình đã xác định được các bất biến và đối bất biến của vành đa thức rút gọn, ứng dụng vào nghiên cứu các lớp xoắn trong đối đồng điều của nhóm  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

<sup>3</sup>weak composition

# Chương 1

## Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị có liên quan đến các nội dung chính ở các chương tiếp theo của luận án.

### 1.1 Lý thuyết bất biến modular

#### 1.1.1 Giới thiệu

**Định lý 1.1.1** (Mệnh đề 4.5.5 Neusel M.D.). *Giả sử  $G$  là một nhóm con hữu hạn của  $GL_n(\mathbb{F}_q)$ , và  $\mathbb{F}_q[V]^G$  là vành các đa thức bất biến dưới tác động tuyến tính tự nhiên của  $G$  trên không gian vectơ  $V = \mathbb{F}_q^n$ . Nếu tồn tại các phần tử bất biến  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}_q[V]^G$  sao cho:*

- i) Các đa thức  $f_1, \dots, f_n$  độc lập đại số trên  $\mathbb{F}_q$ ,*
- ii) Tích các bậc thỏa mãn  $\deg(f_1) \cdot \deg(f_2) \cdots \deg(f_n) = |G|$ , thì  $\mathbb{F}_q[V]^G$  là một vành đa thức tự do trên các phần tử sinh  $f_i, 1 \leq i \leq n$ , tức là:*

$$\mathbb{F}_q[V]^G = \mathbb{F}_q[f_1, \dots, f_n].$$

#### 1.1.2 Bất biến Dickson

Đại số con  $S^{GL_n}$  gồm các đa thức trong  $S$  bất biến dưới tác động của  $GL_n$ , được xác định lần đầu tiên bởi L. Dickson vào những năm đầu thế kỷ 20. Cụ thể, Dickson chứng minh được rằng

$$S^{GL_n} = \mathbb{F}_q[Q_{n,0}, \dots, Q_{n,n-1}].$$

Trong đó  $Q_{n,i}$  với  $0 \leq i \leq n-1$  là các đa thức của các biến  $x_1, \dots, x_n$ , xác định bởi đẳng thức sau

$$Q_n(t) = \prod_{v=(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{F}_q^n} (t + v_1x_1 + \dots + v_nx_n) = t^{q^n} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} Q_{n,i}t^i.$$

Từ đó, chúng ta có kết quả sau.

### 1.1.3 Bất biến Mùi

**Định nghĩa 1.1.6.** Với mỗi  $i = 1, \dots, n$ , các đa thức  $V_i$  được định nghĩa như sau

$$V_i = \prod_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1} \in \mathbb{F}_q} (x_i + \lambda_{i-1}x_{i-1} + \dots + \lambda_1x_1).$$

**Định lý 1.1.8** (Định lý 3 Minh P.A. - Tung V.T.). *Vành các bất biến của  $S$  dưới tác động của nhóm Borel  $B_n$  là đại số đa thức*

$$S^{B_n} = \mathbb{F}_q[V_1^{q-1}, V_2^{q-1}, \dots, V_n^{q-1}].$$

## 1.2 Đại số Steenrod

Đại số Steenrod xuất hiện như một công cụ quan trọng trong tô pô đại số và có những ứng dụng sâu rộng trong lý thuyết bất biến. Với nền tảng từ đồng cấu Frobenius và các phép toán Steenrod, đại số này cung cấp một cách tiếp cận để nghiên cứu các lớp đồng điều trong không gian tô pô và lý thuyết đại số của các nhóm hữu hạn.

### 1.2.1 Toán tử Steenrod và Đại số Steenrod

**Định nghĩa 1.2.2** (Toán tử Steenrod). Các toán tử  $\mathcal{P}^i$  được gọi là các *toán tử lũy thừa rút gọn Steenrod* trên  $\mathbb{F}$ , khi  $q = 2$ , toán tử  $Sq^i$  được gọi là *toán tử Steenrod bình phương*. Toán tử  $\mathcal{P}^i$  và  $Sq^i$  được gọi chung là *toán tử Steenrod*.

#### Công thức Cartan

$$\mathcal{P}^k(u \cdot v) = \sum_{i+j=k} \mathcal{P}^i(u) \cdot \mathcal{P}^j(v), \quad \forall k \geq 0.$$

Xét một phần tử  $x$  có bậc 1 trong  $\mathbb{F}[V] \cong \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Khi đó, với mọi số mũ  $j \geq 0$ , ta có công thức

$$\mathcal{P}^i(x^j) = \binom{j}{i} x^{j+i(q-1)}.$$

## Đại số Steenrod

**Định nghĩa 1.2.4.** Xét hàm tử

$$F[-] : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbf{Alg}_{\mathbb{F}},$$

từ phạm trù các không gian vectơ trên  $\mathbb{F}$  sang phạm trù các đại số phân bậc giao hoán trên  $\mathbb{F}$ .

**Định nghĩa 1.2.5** (Đại số Steenrod). *Đại số Steenrod* trên trường  $\mathbb{F}$ , ký hiệu là  $\mathcal{A}$ , là đại số con của đại số phân bậc của các tự đồng cấu của hàm tử  $\mathbb{F}[-]$  từ không gian vectơ sang các đại số phân bậc giao hoán trên  $\mathbb{F}$  được sinh bởi các toán tử Steenrod.

## Quan hệ Adem

Một hệ đầy đủ các quan hệ giữa các toán tử Steenrod trên trường có đặc số nguyên tố đã được xây dựng bằng sự kết hợp giữa các phương pháp đại số và tô pô. Các quan hệ này được gọi là *quan hệ Adem*.

- Khi  $q = 2$  thì  $Sq^i Sq^j = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k$ , với mọi  $i, j > 0$  sao cho  $i < 2j$ .
- Khi  $q \neq 2$  thì  $\mathcal{P}^i \mathcal{P}^j = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i}{q} \rfloor} (-1)^{i+k} \binom{(q-1)(j-k)-1}{i-qk} \mathcal{P}^{i+j-k} \mathcal{P}^k$ , với mọi  $i, j > 0$  sao cho  $i < qj$ , trong đó  $[a/b]$  là phần nguyên của  $a/b$ .

## Đơn thức chấp nhận được

Cho một dãy  $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ , ta viết  $\mathcal{P}^I = \mathcal{P}^{i_1} \mathcal{P}^{i_2} \dots \mathcal{P}^{i_k}$ . Các phép lặp của các phép toán Steenrod này được gọi là các *đơn thức cơ bản*.

**Định nghĩa 1.2.6** (Larry Smith). Một đơn thức cơ bản được gọi là chấp nhận được nếu  $i_s \geq qi_{s+1}$  với mọi  $s \geq 1$ .

Có một toàn ánh từ đại số kết hợp tự do được sinh bởi các toán tử Steenrod  $\{\mathcal{P}^i | i \in \mathbb{N}\}$  modulo idêan sinh bởi các quan hệ Adem sang đại số Steenrod. Thực ra, ánh xạ này là đẳng cấu, và do đó các quan hệ Adem là một tập hợp đầy đủ các quan hệ xác định cho đại số Steenrod. Cụ thể,

**Mệnh đề 1.2.7** (Hệ quả 3.3 Larry Smith). *Các đơn thức chấp nhận được tạo thành một  $\mathbb{F}$ -cơ sở của đại số Steenrod  $\mathcal{A}$ .*

## 1.2.2 Ứng dụng của Đại số Steenrod trong Lý thuyết Bất biến

Một trong những ứng dụng chính của đại số Steenrod là trong lý thuyết bất biến, các toán tử Steenrod đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán các idêan bất biến dưới tác động của các nhóm hữu hạn.

Cụ thể, khi làm việc trên một trường có đặc số  $p$ , các toán tử Steenrod  $\mathcal{P}^i$  (với  $p > 2$ ) và  $Sq^i$  (với  $p = 2$ ) đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các đa thức bất biến dưới tác động của một nhóm hữu hạn.

**Định nghĩa 1.2.8** (Đồng cấu chuyển). Đồng cấu chuyển là ánh xạ

$$\text{Tr}^G : \mathbb{F}[V] \longrightarrow \mathbb{F}[V]^G$$

được định nghĩa bởi  $\text{Tr}^G(f) = \sum_{g \in G} g \cdot f$ ,  $f \in \mathbb{F}[V]$ .

## 1.3 Hệ số nhị thức

### 1.3.1 $q$ -hệ số nhị thức

**Định nghĩa 1.3.1** (Reiner-Stanton, Định nghĩa 1.1).  $q$ -hệ số nhị thức của cặp số nguyên  $k$  và  $n$  sao cho  $0 \leq k \leq n$  và hệ số bất định  $q$  được xác định bởi công thức

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}},$$

ở đó  $(q)_n = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)$ .

### 1.3.2 $(q, t)$ -hệ số nhị thức

**Định nghĩa 1.3.3** (Reiner-Staton, Định nghĩa 1.1).  $(q, t)$ -hệ số nhị thức của cặp số nguyên  $k$  và  $n$  sao cho  $0 \leq k \leq n$  và hệ số bất định  $q$  được xác định bởi công thức

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{n!_{q,t}}{k!_{q,t} \cdot (n-k)!_{q,tq^k}},$$

với  $n!_{q,t} = (1 - t^{q^n-1}) (1 - t^{q^n-q}) \cdots (1 - t^{q^n-q^{n-1}})$ .

### 1.3.3 $(q, t)$ -đa hệ số nhị thức

**Định nghĩa 1.3.5.** Cho  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  và  $\alpha_1 + \dots + \alpha_l = n$  là một hợp thành của  $n$ ,  $(q, t)$ -đa hệ số nhị thức của  $n$  và  $\alpha$  được xác định bởi công thức

$$\begin{bmatrix} n \\ \alpha \end{bmatrix}_{q,t} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1} (1 - t^{q^n - q^j})}{\prod_{i=1}^l \prod_{j=0}^{\alpha_i-1} (1 - t^{q^{A_i} - q^{A_{i-1}+j}})}, \text{ với } A_i = \sum_{k=1}^i \alpha_k.$$

## 1.4 Giả thuyết của Lewis - Reiner - Stanton về chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)$ dưới tác động của nhóm con parabolic

**Giả thuyết 1.4.1** (Giả thuyết 1.1, Lewis-Reiner-Staton). *Chuỗi Hilbert-Poincaré của  $\mathbb{F}_q$ -không gian véctơ phân bậc của các GL-bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{\text{GL}}$  là chuỗi lũy thừa  $C_{n,m}(t)$  xác định bởi công thức*

$$\text{Hilb}(\mathcal{Q}_m(n)^{\text{GL}}, t) = C_{n,m}(t) = \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} t^{(n-k)(q^m - q^k)} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q,t}.$$

**Giả thuyết 1.4.2** (Giả thuyết Parabolic 1.5, Lewis-Reiner-Staton). *Cho  $n$  là số nguyên dương,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  là một hợp thành của  $n$  và gọi  $P_\alpha$  là nhóm con parabolic tương ứng của  $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ . Chuỗi Hilbert-Poincaré của  $\mathbb{F}_q$ -không gian véctơ phân bậc của các  $P_\alpha$ -bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  là chuỗi lũy thừa  $C_{\alpha,m}(t)$  xác định bởi công thức*

$$\text{Hilb}(\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}, t) = C_{\alpha,m}(t) = \sum_{\beta \leq \alpha, |\beta| \leq m} t^{e(m, \alpha, \beta)} \begin{bmatrix} m \\ \beta, m - |\beta| \end{bmatrix}_{q,t},$$

ở đó  $e(m, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \beta_i) (q^m - q^{B_i})$  và  $B_i = \beta_1 + \dots + \beta_i$ .

## Chương 2

# Bất biến của vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius dưới tác động của nhóm con Borel

Trong chương này chúng tôi giới thiệu toán tử  $\delta$ , một biến thể của hàm Schur theo Macdonald I.G., lấy cảm hứng từ cách xây dựng các đa thức Dickson. Toán tử này cho phép tạo ra các bất biến bậc cao từ các bất biến bậc thấp đã biết, mở rộng khả năng xây dựng bất biến của vành đa thức  $\mathcal{Q}_m(n)$  dưới tác động của nhóm con Borel.

Trên cơ sở toán tử  $\delta$ , chúng tôi định nghĩa các hàm hữu tỷ  $Y(I; J)$  gắn với hai dãy  $I, J$  cho trước. Bằng việc phân tích các tính chất của  $\delta$ , chúng tôi chỉ ra rằng các hàm  $Y(I; J)$  là đa thức và hơn nữa các đa thức này bất biến dưới tác động của nhóm con Borel  $B_n$ . Đây là bước trung gian quan trọng để kết nối giữa việc xây dựng toán tử  $\delta$  và việc hình thành các hệ cơ sở của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$ .

Tiếp theo, chúng tôi xây dựng hệ  $\mathcal{B}_m(1^n)$  theo phương pháp quy nạp, trong đó bao hàm các đa thức  $Y(I; J)$  với  $I, J$  thỏa mãn những điều kiện xác định. Chúng tôi chứng minh rằng hệ  $\mathcal{B}_m(1^n)$  tạo thành một cơ sở tuyến tính của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$ .

Cuối cùng, dựa trên cơ sở này, chúng tôi xác định chuỗi Hilbert-Poincaré của  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$  và chứng minh giả thuyết của Lewis-Reiner-Stanton trong trường hợp nhóm con Borel.

### 2.1 Toán tử $\delta$ và một số tính chất

**Định nghĩa 2.1.1.** Cho  $a, b, c$  là ba số nguyên dương sao cho  $1 \leq a \leq c + 1$ , định nghĩa toán tử  $\delta_{a;b}$  xác định bởi công thức

$$\delta_{a;b} : \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_c] \rightarrow \mathbb{F}_q(x_1, \dots, x_{c+1}),$$

sao cho với  $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_c]$  thì

$$\delta_{a;b}(f) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_a \\ x_1^q & \dots & x_a^q \\ \dots & \ddots & \dots \\ x_1^{q^{a-2}} & \dots & x_a^{q^{a-2}} \\ x_1^{q^b} f(\widehat{x}_1, x_2, \dots, x_{c+1}) & \dots & x_a^{q^b} f(x_1, \dots, \widehat{x}_a, \dots, x_{c+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_a \\ x_1^q & \dots & x_a^q \\ \dots & \ddots & \dots \\ x_1^{q^{a-1}} & \dots & x_a^{q^{a-1}} \end{vmatrix}}.$$

Chúng tôi mô tả tác động lặp của toán tử  $\delta$ , qua đó cho phép biểu diễn một cách tường minh  $\delta_{r+1}^h(f)$  theo các tập con của tập chỉ số và các ánh xạ Frobenius tương ứng.

**Mệnh đề 2.1.4.** Với  $f$  là hàm hữu tỷ có  $r'$  ẩn,  $r' \geq r$ ,  $h$  là một số nguyên dương. Khi đó, ta có

$$\delta_{r+1}^h(f)(x_1, x_2, \dots, x_{r'+h}) = \sum_{\substack{I \subset [r+h] \\ |I|=h}} \frac{f(\bar{I}) \varphi^b(I)}{V(\bar{I}, I)}$$

ở đó  $\bar{I}$  là phần bù của  $I$  trong  $[r+h]$ ,  $\varphi$  là ánh xạ Frobenius, khi  $I = (i_1 < i_2 < \dots < i_h)$  thì

$$f(\bar{I}) = f(x_1, \dots, \widehat{x}_{i_1}, \dots, \widehat{x}_{i_h}, \dots, x_{r+h}, x_{r+h+1}, \dots, x_{r'+h}).$$

**Định nghĩa 2.1.5.** Với mỗi hàm hữu tỷ  $g$  gồm  $r' \geq r$  ẩn và  $T \in \mathcal{T}(s, h)$  ta xác định

$$A_{r;T}(g) = \sum_{I \subset [r+h], |I|=h} \frac{g(\bar{I}) \alpha_T(I)}{V(\bar{I}, I)},$$

ở đó  $\alpha_T(I) = \alpha_T(x_{i_1}, \dots, x_{i_h})$  khi  $I = (i_1 < \dots < i_h)$ .  $\bar{I}$  là phần bù của  $I$  trong  $[r+h]$  và

$$g(\bar{I}) = g(x_1, \dots, \widehat{x}_{i_1}, \dots, \widehat{x}_{i_h}, \dots, x_{r+h}, x_{r+h+1}, \dots, x_{r'+h}).$$

Ví dụ sau minh họa một trường hợp đặc biệt của định nghĩa trên, trong đó tác động lặp của toán tử  $\delta$  chính là trường hợp riêng của toán tử  $A_{r;T}(g)$ .

**Ví dụ 2.1.6.** Với  $s = b$  và  $\tau = (\tau_0 = 0, \dots, \tau_{s-1} = 0, \tau_s = h)$ , theo Mệnh đề 2.1.4, ta có

$$A_{r,\tau}(g) = \delta_{r+1}^h(g).$$

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một kết quả kỹ thuật, giúp làm rõ cách toán tử  $\delta$  tác động lên các biểu thức đại số. Kết quả này sẽ đóng vai trò quan trọng trong việc thiết lập cơ sở tuyến tính cho không gian các bất biến ở các phần sau.

**Mệnh đề 2.1.7.** Cho  $r, s, k$  là các số nguyên dương sao cho  $r \leq s + k$ . Giả sử  $f(x_1, \dots, x_{s'})$  và  $g(x_1, \dots, x_{r'})$  là các hàm hữu tỷ với  $r' \geq r, s' \geq s$ . Khi đó,

$$\delta_{r+1}^h(g \cdot \delta_{s+1}^k(f)) = \sum_{T \in \mathcal{T}(s,h)} A_{r;T}(g) \delta_{s+1}^{h+k}(\beta_T f)$$

## 2.2 Xây dựng hệ $\mathcal{B}_m(1^n)$

Trong phần này, chúng tôi xây dựng một hệ các phần tử tạo nên cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{\mathcal{B}_n}$  trong trường hợp nhóm con Parabolic đặc biệt  $P_\alpha = B_n$ . Trước hết, chúng tôi định nghĩa các biểu thức dạng  $Y_b(I; J)$  đóng vai trò cơ bản trong quá trình xây dựng hệ cơ sở.

**Định nghĩa 2.2.1.** Với hai dãy  $I = (i_1, \dots, i_k)$  và  $J = (j_1, \dots, j_k)$  các số nguyên không âm, định nghĩa hàm hữu tỷ

$$Y_b(I; J) = \delta_{1;b}^{i_1} \left( D_1^{j_1} \delta_{2;b}^{i_2} \left( D_2^{j_2} \dots \delta_{k;b}^{i_k} \left( D_k^{j_k} \right) \dots \right) \right),$$

ở đó  $D_a = \delta_{a;a}(1)$  và  $\Phi Y_b(I; J) = Y_{b+1}(0, I; 0, J)$ , tức là

$$\Phi Y_b(I; J) = \delta_{2;b+1}^{i_1} \left( D_2^{j_1} \delta_{3;b+1}^{i_2} \left( D_3^{j_2} \dots \delta_{k+1;b+1}^{i_k} \left( D_{k+1}^{j_k} \right) \dots \right) \right),$$

Tiếp theo, chúng tôi xây dựng tập hợp  $\mathcal{B}_m(1^n)$  gồm các phần tử được tạo thành từ các biểu thức  $Y_b(I; J)$  như trên, bằng cách sử dụng phương pháp quy nạp.

**Định nghĩa 2.2.2.** Với  $n \geq 1$  và  $m \geq 0$ , tập hợp  $\mathcal{B}_m(1^n)$  được xác định bằng cách quy nạp như sau.

- i)  $\mathcal{B}_0(1^n) = \{1\}$  với mọi  $n \geq 1$ .
- ii)  $\mathcal{B}_m(1) = \{D_1^a \mid a \leq [m]_q\}$ , với mọi  $m \geq 0$ .
- iii)  $\mathcal{B}_m(1^n) = \{\delta_{1;m}(Y) \mid Y \in \mathcal{B}_m(1^{n-1})\} \sqcup \{D_1^a \Phi(Y) \mid a < [m]_q, Y \in \mathcal{B}_{m-1}(1^{n-1})\}$ .

Ở đó,  $[a]_q = \frac{q^a - 1}{q - 1}$ .

Từ định nghĩa trên, chúng tôi mô tả cụ thể hơn cấu trúc của tập hợp  $\mathcal{B}_m(1^n)$  thông qua phân hoạch rời rạc thành các lớp con  $\mathcal{B}_m^k(1^n)$  như sau.

**Mệnh đề 2.2.3.**  $\mathcal{B}_m(1^n)$  là hợp rời rạc  $\bigsqcup_{k=1}^{\min(n, m+1)} \mathcal{B}_m^k(1^n)$ , ở đó các tập hợp  $\mathcal{B}_m^k(1^n)$  là tập hợp chứa tất cả các phần tử  $Y_m(I, J)$  mà hai dãy  $I = (i_1, \dots, i_k)$  và  $J = (j_1, \dots, j_k)$  thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} i_1 + \dots + i_k = n - k, \\ j_1 < [m]_q, \dots, j_{k-1} < [m - k + 2]_q, j_k \leq [m - k + 1]_q. \end{cases}$$

## 2.3 Tính đa thức của $Y$

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh rằng họ các hàm hữu tỷ  $Y_m(I, J)$  thực chất là các đa thức. Trước khi đi vào chứng minh chính, chúng tôi thiết lập một số khái niệm trung gian và kết quả hỗ trợ nhằm mô tả chính xác tác động của các toán tử trong vào định nghĩa của  $Y_m(I, J)$ .

Đầu tiên, chúng tôi mở rộng khái niệm tác động của toán tử  $\delta$  thông qua việc định nghĩa một *tích chập* hai hàm hữu tỷ, cho phép biểu diễn các tác động lặp của toán tử  $\delta$  dưới dạng đại số thuận tiện hơn.

**Định nghĩa 2.3.1.** Với hai hàm hữu tỷ  $f(x_1, \dots, x_r)$  và  $g(x_1, \dots, x_h)$ , tích chập của  $f$  và  $g$  được định nghĩa bởi công thức

$$f \bullet g = \sum_{I \sqcup J = [r+h], |I|=r, |J|=h} \frac{f(I)g(J)}{V(I, J)}.$$

Tiếp theo, chúng tôi minh họa cách mà các toán tử như  $\delta_{r+1}^h$  và  $A_{r;T}$  có thể được biểu diễn thông qua tích chập qua các ví dụ sau.

**Ví dụ 2.3.2.** i) Theo Mệnh đề 2.1.4, ta có

$$\delta_{r+1}^h(f)(x_1, x_2, \dots, x_{r'+h}) = \sum_{I \subset [r+h], |I|=h} \frac{f(\bar{I})\varphi^b(I)}{V(\bar{I}, I)}.$$

Vì vậy,

$$\delta_{r+1}^h(f)(x_1, x_2, \dots, x_{r'+h}) = f \bullet \varphi_h^b.$$

Ở đó,  $\varphi_h$  là ánh xạ lũy thừa Frobenius với  $h$  ẩn.

ii) Theo Định nghĩa 2.1.5, ta có

$$A_{r;T}(g) = \sum_{I \subset [r+h], |I|=h} \frac{g(\bar{I})\alpha_T(I)}{V(\bar{I}, I)}.$$

Vì vậy,

$$A_{r;T}(g) = g \bullet \alpha_T.$$

Trong mệnh đề tiếp theo, chúng tôi đưa ra các điều kiện cụ thể của  $f$  và  $g$  để đảm bảo rằng tích chập giữa hai đa thức như vậy là đa thức.

**Mệnh đề 2.3.3.** Nếu đa thức  $f(x_1, \dots, x_s)$  là  $GL_s$ -bất biến và  $g(x_1, \dots, x_{k-s})$  là đa thức đối xứng, đa tuyến tính và chia hết cho  $x_1 \dots x_{k-s}$  thì  $f \bullet g$  là đa thức trong  $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_k]$ .

Cuối cùng, chúng tôi áp dụng mệnh đề trên để chứng minh rằng các biểu thức  $Y_b(I, J)$  thực sự là đa thức. Kết quả này được trình bày trong hệ quả quan trọng sau.

**Hệ quả 2.3.4.** Với hai dãy  $I$  và  $J$  thì  $Y_b(I, J)$  được xác định trong Định nghĩa 2.2.1 là đa thức.

## 2.4 Tính bất biến của $Y$

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh rằng các đa thức  $Y_m(I; J)$  được xây dựng từ các toán tử  $\delta$  và các đa thức Dickson là bất biến modulo  $(x_1^{q^m}, \dots, x_n^{q^m})$  dưới tác động của nhóm con Borel  $B_n$ . Trước tiên chúng tôi sẽ giới thiệu khái niệm một lớp đa thức mới được gọi là  $(k, m)$ -bất biến, đóng vai trò trung gian quan trọng trong lập luận quy nạp.

**Định nghĩa 2.4.1.** Đa thức  $f(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_k]$  được gọi là  $(k, m)$ -bất biến nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau đây.

- i)  $f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k) = f(x_1, \dots, x_k)$  với mọi  $\lambda_i \in \mathbb{F}_q^*$ . Nói cách khác,  $f$  bất biến dưới tác động của nhóm con ma trận đường chéo chính.
- ii)  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j + x_i, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k) + (x_i^{q^m})$  với mọi  $1 \leq i < j \leq k$ .

Mệnh đề dưới đây cho thấy rằng toán tử  $\delta_{r;m}$  bảo toàn tính  $(k, m)$ -bất biến trong trường hợp tác động của toán tử  $\delta_{r;m}$  bảo toàn tính đa thức. Kết quả này đóng vai trò then chốt cho phép ta áp dụng lập luận quy nạp trong phần còn lại.

**Mệnh đề 2.4.3.** Với  $r \leq k + 1$ ,  $f(x_1, \dots, x_k)$  là  $(k, m)$ -bất biến và  $\delta_{r;m}(f)$  là đa thức. Khi đó,  $\delta_{r;m}$  là  $(k + 1, m)$ -bất biến.

Bằng cách áp dụng Mệnh đề trên theo phương pháp quy nạp, chúng tôi thu được hệ quả sau, khẳng định rằng  $Y_m(I; J)$  là một đa thức.

**Hệ quả 2.4.4.** Mỗi đa thức  $Y_m(I; J)$  là  $B_n$ -bất biến modulo  $(x_1^{q^m}, \dots, x_n^{q^m})$ .

## 2.5 Cơ sở tuyến tính của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$

Trong phần này, chúng tôi sẽ thiết lập một cơ sở tường minh cho không gian  $\mathbb{F}_q$ -véctơ các  $B_n$ -bất biến trong  $\mathcal{Q}_m(n)$ . Cụ thể, chúng tôi chứng minh rằng tập hợp  $\mathcal{B}_m(1^n)$  gồm các đa thức  $Y_m(I; J)$  tạo thành một cơ sở tuyến tính của không gian này.

Giả sử  $F(x_1, \dots, x_n)$  là một đa thức  $B_n$ -bất biến trong  $\mathcal{Q}_m(n)$ . Do các số mũ xuất hiện trong  $F$  đều là bội của  $q - 1$ , ta có thể khai triển  $F$  theo biến  $x_1$  và phân tích số hạng có bậc thấp nhất. Trường hợp số mũ của  $x_1$  bằng  $q^m - 1$  sẽ được xử lý đầu tiên thông qua bổ đề sau.

**Bổ đề 2.5.1.** Với  $m \geq 0, n \geq 2$  và  $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^{q^m - 1} f(x_2, \dots, x_n)$  là  $B_n$ -bất biến của  $\mathcal{Q}_m(n)$  thì  $f(x_2, \dots, x_n)$  là  $B(x_2, \dots, x_n)$ -bất biến modulo  $(x_2^{q^m}, \dots, x_n^{q^m})$ .

Trường hợp khi số mũ của  $x_1$  nhỏ hơn  $q^m - 1$  với  $m \geq 1$  thì ta biểu diễn  $F$  dưới dạng

$$F(x_1, \dots, x_n) = x_1^{(q-1)i} f(x_2, \dots, x_n) + x_1^{(q-1)(i+1)} f'(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Tiếp theo, chúng tôi xét trường hợp số mũ của  $x_1$  trong đa thức  $F(x_1, \dots, x_n)$  nhỏ hơn  $q^m - 1$ . Khi đó,  $F$  có thể được khai triển theo  $x_1$  với số hạng bậc thấp nhất là  $x_1^{(q-1)i} f(x_2, \dots, x_n)$  với  $i < [m]_q$ . Để hiểu rõ hơn cấu trúc của thành phần  $f(x_2, \dots, x_n)$  trong khai triển này, chúng tôi đưa ra bổ đề sau, cho thấy  $f$  là lũy thừa bậc  $q$  của một đa thức bất biến ở chiều thấp hơn.

**Bổ đề 2.5.2.** Đa thức  $f(x_2, \dots, x_n)$  trong biểu diễn trên là lũy thừa với số mũ bằng  $q$  của đa thức  $g(x_2, \dots, x_n)$  nào đó. Hơn nữa,  $g(x_2, \dots, x_n)$  là  $B(x_2, \dots, x_n)$ -bất biến modulo  $(x_2^{q^{m-1}}, \dots, x_n^{q^{m-1}})$ .

Từ cấu trúc đặc biệt của  $f(x_2, \dots, x_n)$  trong Bổ đề 2.5.2, chúng tôi khai thác thêm mối liên hệ giữa các toán tử  $\delta_{a;b}$  và phép nâng lũy thừa trong trường hợp  $f$  là lũy thừa bậc  $q$  của một đa thức  $g$ . Bổ đề sau mô tả tác động của toán tử  $\delta$  trên các đa thức như vậy khi thay thế biến đầu tiên bằng 0, đồng thời cung cấp công cụ quan trọng cho phép xác định cách toán tử  $\Phi$  tác động lên các phần tử trong  $\mathcal{B}_{m-1}(1^{n-1})$ .

**Bổ đề 2.5.3.** Nếu đa thức  $f(x_1, x_2, \dots, x_c)$  thỏa mãn

$$f(0, x_2, \dots, x_c) = g(x_2, \dots, x_c)^q,$$

và  $\delta_{a+1, b+1}(f)$  là đa thức thì  $\delta_{a+1; b+1}(f)(0, x_2, \dots, x_{c+1}) = (\delta_{a; b}(g)(x_2, \dots, x_{c+1}))^q$ .  
Vì vậy, nếu  $Y \in \mathcal{B}_{m-1}(1^{n-1})$  thì

$$\Phi Y(0, x_2, \dots, x_n) = Y(x_2, \dots, x_n)^q.$$

Từ các bổ đề trên, chúng tôi thu được kết quả tổng quát sau, khẳng định rằng tập  $\mathcal{B}_m(1^n)$  tạo thành một cơ sở của không gian các  $B_n$ -bất biến trong  $\mathcal{Q}_m(n)$ .

**Định lý 2.5.4.** Hệ  $\mathcal{B}_m(1^n)$  là một cơ sở của  $\mathbb{F}_q$ -không gian vectơ các  $B_n$ -bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$ .

## 2.6 Chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$

Sau khi đã thiết lập cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$ , chúng tôi khảo sát chuỗi Hilbert-Poincaré tương ứng. Từ đó, chúng tôi chứng minh Giả thuyết Parabolic 1.5 của Lewis, Reiner và Stanton đối với trường hợp nhóm con Borel của  $GL_n$ .

Chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$  là hàm  $F_{n,m}(t)$  được xác định như sau

$$F_{n,m}(t) = \sum_{\beta \leq 1^n, |\beta| \leq m} t^{e(m, 1^n, \beta)} \left[ \beta, m - |\beta| \right]_{q,t},$$

ở đó

- $e(m, 1^n, \beta) = \sum_{i=1}^n (1 - \beta_i) (q^m - q^{B_i})$  với  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  và  $B_i = \sum_{j \leq i} \beta_j$ ,
- $\left[ \beta, m - |\beta| \right]_{q,t} = \frac{\prod_{j=1}^{|\beta|-1} (1 - t^{q^m - q^j})}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=0}^{\beta_i-1} (1 - t^{q^{B_i} - q^{B_{i-1} + j}})}$ .

Tiếp theo, chúng ta có tính chất đơn giản sau về hàm  $F_{n,m}(t)$ . Kết quả này cho thấy hàm  $F_{n,m}(t)$  được xây dựng một cách quy nạp tương tự như tập  $\mathcal{B}_m(1^n)$ .

**Bổ đề 2.6.2.** Ta có

$$F_{n,m}(t) = t^{q^m-1} F_{n-1,m}(t) + \frac{1 - t^{q^m-1}}{1 - t^{q-1}} F_{n-1,m-1}(t^q).$$

Dựa vào kết quả trên, chúng ta có thể chứng minh được Giả thuyết 1.5 của Lewis, Reiner và Stanton cho trường hợp nhóm con Borel của nhóm tuyến tính tổng quát.

**Định lý 2.6.3.** Chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$  là  $F_{n,m}(t)$ .  
Vây giả thuyết 1.5 của Lewis - Reiner - Stanton đúng cho trường hợp nhóm con Borel.

Mỗi số hạng trong tổng định nghĩa  $F_{n,m}(t)$  đều tương ứng với các phần tử trong cơ sở  $\mathcal{B}_m(1^n)$  của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$ . Nhận xét sau mô tả rõ cấu trúc của các phần tử  $Y_m(I, J)$  tương ứng với từng chỉ số của  $\beta$ .

## Chương 3

# Bất biến của vành đa thức modulo lũy thừa Frobenius dưới tác động của các nhóm con Parabolic chiều thấp

Giả thuyết Parabolic 1.5 của Lewis, Reiner và Stanton đưa ra một công thức dự đoán cho chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$ , trong đó  $P_\alpha$  là một nhóm con Parabolic của nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_n$ .

Dựa trên giả thuyết về chuỗi Hilbert-Poincaré, chúng tôi đề xuất một giả thuyết mạnh hơn, không chỉ xác định kích thước của không gian bất biến mà còn cung cấp mô tả tường minh về một hệ cơ sở tuyến tính cụ thể của không gian  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$ .

Giả thuyết tổng quát của chúng tôi về hệ cơ sở tuyến tính của không gian  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  được trình bày cụ thể như sau.

**Giả thuyết 3.0.1.** Một cơ sở cho không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  là tập  $\mathcal{B}_m(\alpha)$  gồm các phần tử có dạng

$$\delta_{B_1+1;m}^{\alpha_1-\beta_1} \left( f_1 \delta_{B_2+1;m}^{\alpha_2-\beta_2} \left( \dots f_{l-1} \delta_{B_l+1;m}^{\alpha_l-\beta_l} (f_l) \dots \right) \right), \quad 0 \leq s \leq \min(\alpha_1, m),$$

với  $\beta \leq \alpha$ ,  $|\beta| \leq m$ ,  $B_i = \beta_1 + \dots + \beta_i$  (quy ước  $B_0 = 0$ ) và

$$f_i \in \Phi^{B_{i-1}} \Delta_{\beta_i}^{m-B_{i-1}} \subset \Delta_{B_i}^{m-B_i}.$$

Với trường hợp đặc biệt của nhóm Parabolic là nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_n$  ứng với nhóm  $P_\alpha, \alpha = (n)$ , chúng tôi có giả thuyết.

**Giả thuyết 3.0.2.** Tập hợp  $\mathcal{B}_m(n)$  gồm các phần tử có dạng

$$\delta_{s+1;m}^{n-s} (f), \quad f \in \Delta_s^m, \quad 0 \leq s \leq \min(m, n)$$

tạo thành một cơ sở cho không gian vectơ  $\mathcal{Q}_m(n)^{GL_n}$  trên  $\mathbb{F}_q$ .

### 3.1 Toán tử $\delta$ và tập $\Delta$

Trong lý thuyết bất biến trên trường hữu hạn, các đa thức Dickson giữ vai trò trung tâm trong việc xây dựng và mô tả các không gian bất biến dưới tác động của

nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_n$  và các nhóm con Parabolic của nó. Không chỉ cung cấp một hệ sinh cho không gian bất biến, các bất biến Dickson còn là nền tảng cho việc phát triển các cấu trúc đại số, đặc biệt là trong định nghĩa và vận dụng các toán tử  $\delta$  cũng như tập  $\Delta_s^m$ , đóng vai trò thiết yếu trong việc xây dựng các cơ sở tuyến tính cho các không gian bất biến.

### 3.1.1 Toán tử $\delta$ và vai trò kết hợp với $\Delta$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày định nghĩa và tác động của toán tử  $\delta$ , cùng với cách thức kết hợp nó với các đơn thức trong  $\Delta_s^m$  để tạo nên các bất biến Parabolic. Nội dung này sẽ làm sáng tỏ vai trò của  $\Delta_s^m$  như một khối xây dựng quan trọng trong cấu trúc của không gian bất biến.

Trước khi giới thiệu định nghĩa về tập  $\Delta_s^m$ , chúng tôi nhắc lại khái niệm đơn thức Dickson có kiểu phân hoạch.

**Định nghĩa 3.1.1.** Với một số nguyên dương  $s$  và phân hoạch  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$  sao cho  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 0$ , một đơn thức Dickson  $Q_{s,s-1}^{e_1} \cdots Q_{s,0}^{e_s}$  trong đại số Dickson  $\mathcal{D}_s$  được gọi là có kiểu  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  nếu từng phần tử  $e_i$  thỏa mãn điều kiện

$$e_i \in \left[ \frac{q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i+1}}}{q-1}, \frac{q^{\lambda_{i+1}} - q^{\lambda_{i+2}}}{q-1} \right)$$

với  $1 \leq i \leq s$ .

**Định nghĩa 3.1.2** (Định nghĩa 5.4 Reiner - Staton). Không gian con  $\Delta_s^m$  của đại số Dickson được xác định là hợp rời rạc của các tập con  $\Delta_{(\lambda_1, \dots, \lambda_s)}$  trong đó

- Mỗi phân hoạch  $(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$  thỏa mãn điều kiện  $m - s \geq \lambda_1$ .
- $\Delta_{(\lambda_1, \dots, \lambda_s)}$  là tập hợp tất cả các đơn thức Dickson có kiểu tương ứng.
- Nếu  $s > m$  thì quy ước  $\Delta_s^m = \emptyset$ .

Các đơn thức Dickson trong  $\Delta_s^m$  với  $s \leq \min(m, n)$ , cùng với các toán tử  $\delta$  đóng vai trò quan trọng để xây dựng cơ sở của không gian bất biến. Ta gọi một đơn thức Dickson trong  $\Delta_s^m$  là một đơn thức cốt yếu.

**Định nghĩa 3.1.3.** Chúng ta gọi các đơn thức biên là các đơn thức Dickson không nằm trong  $\Delta_s^m$  nhưng có tính chất "biên" thỏa mãn

$$e_i \in \left[ \frac{q^{\lambda_i} - q^{\lambda_{i+1}}}{q-1}, \frac{q^{\lambda_{i+1}} - q^{\lambda_{i+2}}}{q-1} \right) \text{ với mọi } i \neq j,$$

và

$$e_j = \frac{q^{\lambda_{j+1}} - q^{\lambda_{j+2}}}{q-1}$$

với chỉ số  $j$  cố định trước.

Theo Định nghĩa toán tử  $\delta$ , nếu  $f(x_1, x_2) \in \mathbb{F}_q[x_1, x_2]$  thì

$$\delta_3(f) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} f(x_2, x_3) & x_2^{q^m} f(x_1, x_3) & x_3^{q^m} f(x_1, x_2) \end{vmatrix}}{L_3}.$$

Trong Chương 2 chúng ta đã chứng minh tổng quát hơn rằng  $\delta_s(f)$  thông thường không phải là đa thức, nhưng trong nhiều trường hợp nó không những là một đa thức mà còn là một đa thức bất biến của  $\mathcal{Q}_m(s+1)$  dưới tác động của nhóm Borel  $B_{s+1}$ . Mệnh đề tiếp theo, chúng tôi đưa một phát biểu chính xác cho trường hợp riêng của toán tử  $\delta_3$  và trình bày một chứng minh "cơ bản" hơn về tính đa thức của  $\delta_3(f)$ , đồng thời sử dụng kết quả này để chỉ ra tính  $GL_3$ -bất biến của  $\delta_3(f)$  khi  $f$  là  $GL_2$ -bất biến.

**Mệnh đề 3.1.4.** *Nếu  $f$  là một đa thức  $GL_2$ -bất biến thì  $\delta_3(f)$  là một đa thức và là một  $GL_3$ -bất biến của không gian  $\mathcal{Q}_m(3)$ .*

### 3.1.2 Toán tử $\delta$ và Đại số Dickson

Với mỗi hợp thành  $\alpha$  của  $n$ , không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  là một môđun trên đại số Dickson  $\mathcal{D}_n$ . Kết quả sau đây mô tả cách toán tử  $\delta$  tương tác với đại số Dickson trong trường hợp hạng thấp.

**Mệnh đề 3.1.6.** *Ta có các đẳng thức sau trong  $\mathcal{Q}_m$ .*

- (1)  $Q_{s,0}\delta_s(f) = 0$  với mọi  $f$ .
- (2)  $Q_{2,1}\delta_2(f) = \delta_2(Q_{1,0}^q f)$  với mọi  $f \in \mathcal{D}_1$ .
- (3)  $Q_{3,i}\delta_3(f) = \delta_3(Q_{2,i-1}^q f)$  với  $i = 1$  hoặc  $2$  và mọi  $f \in \mathcal{D}_2$ .
- (4)  $Q_{3,2}\delta_2^2(f) = \delta_2^2(Q_{1,0}^{q^2} f)$  với mọi  $f \in \mathcal{D}_1$ .
- (5)  $Q_{3,1}\delta_2^2(f) = 0$  với mọi  $f \in \mathcal{D}_1$ .

## 3.2 Chặn trên của tổng số chiều của các không gian con bất biến

Giả thuyết Parabolic dự đoán rằng chuỗi Hilbert-Poincaré cho không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$ , trong đó  $\alpha$  là một hợp thành của  $n$ , là đa thức (hữu hạn)  $C_{\alpha,m}(t)$  có công thức tường minh được nhắc lại trong Giả thuyết 1.4.2. Đặc biệt, giá trị của  $C_{\alpha,m}(t)$  khi  $t = 1$  là tổng số chiều của các  $\mathbb{F}_q$ -không gian vectơ phân bậc  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$ . Chúng tôi chỉ ra kết quả sau.

**Mệnh đề 3.2.1.** *Với mỗi  $m, n \geq 1$  và hợp thành  $\alpha$  bất kỳ của  $n$ , tổng số chiều của không gian vectơ phân bậc  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  không nhỏ hơn  $C_{\alpha,m}(1)$ .*

Tiếp theo, chúng tôi có kết quả sau về chuỗi Hilbert-Poincaré sinh bởi tập  $\mathcal{B}_m(\alpha)$ .

**Bổ đề 3.2.2.** *Với mỗi hợp thành  $\alpha$  của  $n$ , chuỗi Hilbert-Poincaré của  $\mathbb{F}_q$ -không gian vectơ sinh bởi tập  $\mathcal{B}_m(\alpha)$  không lớn hơn  $C_{\alpha,m}(t)$ .*

**Nhận xét 3.2.3.** i) Giả sử chúng ta có thể xây dựng một hệ sinh cho không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  sao cho sau khi tính toán số chiều thì chuỗi Hilbert-Poincaré  $C'_{m,\alpha}(t)$  của  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  không lớn hơn  $C_{\alpha,m}(t)$  (ở đó,  $f(t) \leq g(t)$  nếu  $g - f$  là một đa thức với các hệ số không âm). Sau đó, vì có một bất đẳng thức ngược lại  $C'_{m,\alpha}(1) \geq C_{\alpha,m}(1)$  khi xét tại  $t = 1$ , chúng ta có thể kết luận rằng hai chuỗi này

là đồng nhất vì cả hai đều là các đa thức có bậc hữu hạn với hệ số không âm. Do đó, hệ sinh của chúng ta thực chất là một cơ sở cho  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$ .

### 3.3 Cơ sở của không gian bất biến của $\mathcal{Q}_m(2)$ dưới tác động của các nhóm con Parabolic

Trường hợp hạng 2 thì nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_2$  chỉ có hai nhóm con là chính nó và nhóm Borel  $B_2$ . Không gian bất biến dưới tác động của nhóm con Borel  $B_2$  là trường hợp riêng của Định lý 2.5.4, theo đó chúng ta có kết quả sau.

**Hệ quả 3.3.1.** *Hệ gồm 2 họ các phần tử lập thành một  $\mathbb{F}_q$ -cơ sở của  $\mathcal{Q}_m(2)^{B_2}$  ( $m \geq 1$ ).*

- (1)  $\delta_{1;m}(D_1^a) = \delta_{1;m}(Q_{1,0}^a)$ ,  $a \leq [m]_q$ .
- (2)  $D_1^a D_2^b = Q_{1,0}^a Q_{2,1}^b$ ,  $a < [m]_q, b \leq [m-1]_q$ .

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một nhận xét quan trọng liên quan đến các đơn thức Dickson có dạng  $Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-q^i}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}$  nằm ở "biên" của  $\Delta_2^m$ . Kết quả này rất quan trọng trong việc xác định hệ sinh của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(2)^{GL_2}$ .

**Mệnh đề 3.3.2.** *Với mỗi  $0 \leq i \leq m-1$ , ta có phép phân tích trong  $\mathcal{Q}_m(2)$*

$$Q_{2,1}^{\frac{q^{m-1}-q^i}{q-1}} Q_{2,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}} = \delta_2(Q_{1,0}^{\frac{q^i-1}{q-1}}) + \text{đơn thức cốt yếu chia hết cho } Q_{2,0}.$$

**Mệnh đề 3.3.3.** *Tập hợp  $\mathcal{B}_m(2)$ , bao gồm 3 họ phần tử*

- (1)  $\delta_1(\delta_1(1)) = x_1^{q^{m-1}} x_2^{q^{m-1}}$ ,
- (2)  $\delta_2(\Delta_1^m)$ ,
- (3)  $\Delta_2^m$

*lập thành một  $\mathbb{F}_q$ -cơ sở của không gian con bất biến  $\mathcal{Q}_m(2)^{GL_2}$ .*

### 3.4 Cơ sở của không gian bất biến của $\mathcal{Q}_m(3)$ dưới tác động của các nhóm con Parabolic

Trường hợp hạng 3 thì nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_3$  có bốn nhóm con gồm nhóm Borel  $B_3 = P_{(1,1,1)}$ , nhóm con Parabolic  $P_{(2,1)}$ , nhóm con Parabolic  $P_{(1,2)}$  và nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_3 = P_{(3)}$ . Không gian bất biến dưới tác động của nhóm con Borel  $B_3$  là trường hợp riêng của Định lý 2.5.4, theo đó chúng ta có kết quả sau.

**Hệ quả 3.4.1.** *Hệ gồm 4 họ phần tử sau tạo thành một  $\mathbb{F}_q$ -cơ sở của  $\mathcal{Q}_m(3)^{B_3}$  ( $m \geq 2$ ).*

- (1)  $\delta_1^2(D_1^a) = \delta_1^2(Q_{1,0}^a)$ ,  $a \leq [m]_q$ .
- (2)  $\delta_1(D_1^a D_2^b) = \delta_1(Q_{1,0}^a Q_{2,1}^b)$ ,  $a < [m]_q, b \leq [m-1]_q$ .

$$(3) D_1^a \delta_2 (D_2^b) = Q_{1,0}^a \delta_2 (Q_{2,1}^b), \quad a < [m]_q, b \leq [m-1]_q.$$

$$(4) D_1^a D_2^b D_3^c = Q_{1,0}^a Q_{2,1}^b Q_{3,2}^c, \quad a < [m]_q, b < [m-1]_q, c \leq [m-2]_q.$$

### 3.4.1 Đối với nhóm con Parabolic $P_{(2,1)}$

Trong phần này, chúng tôi phát biểu và chứng minh Giả thuyết 3.0.1 cho trường hợp nhóm con Parabolic  $P_{(2,1)}$ .

**Mệnh đề 3.4.2.** *Tập hợp  $\mathcal{B}_m(2,1)$  bao gồm 6 nhóm dưới đây tạo thành một  $\mathbb{F}_q$ -cơ sở cho không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(3)^{P_{(2,1)}}$ .*

$$(1) Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2} Q_{3,2}^i, \quad (i_1, i_2) \in \Delta_2^m, i < [m-2]_q.$$

$$(2) Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2} \delta_3(1), \quad (i_1, i_2) \in \Delta_2^m.$$

$$(3) \delta_2 (Q_{1,0}^{i_1} Q_{2,1}^i), \quad i_1 < [m]_q, i < [m-1]_q.$$

$$(4) \delta_2 (Q_{1,0}^{i_1} \delta_2(1)), \quad i_1 < [m]_q.$$

$$(5) \delta_1 (\delta_1(Q_{1,0}^i)), \quad i < [m]_q.$$

$$(6) \delta_1 (\delta_1(\delta_1(1))).$$

### 3.4.2 Đối với nhóm con Parabolic $P_{(1,2)}$

Trong phần này, chúng tôi phát biểu và chứng minh Giả thuyết 3.0.1 cho trường hợp nhóm con Parabolic  $P_{(1,2)}$ .

**Mệnh đề 3.4.4.** *Tập hợp  $\mathcal{B}_m(1,2)$  bao gồm 6 họ dưới đây tạo thành một cơ sở cho không gian con bất biến  $\mathcal{Q}_m(3)^{P_{(1,2)}}$ .*

$$(1) Q_{1,0}^{j_1} Q_{3,2}^{i_1} Q_{3,1}^{i_2}, \quad j_1 < [m]_q, \quad (i_1, i_2) \in \Delta_2^{m-1}.$$

$$(2) Q_{1,0}^{j_1} \delta_3 (Q_{2,1}^{j_2}), \quad j_1 < [m]_q, \quad j_2 < [m-1]_q.$$

$$(3) Q_{1,0}^{j_1} \delta_2 (\delta_2(1)), \quad j_1 < [m]_q.$$

$$(4) \delta_1 (Q_{2,1}^{i_1} Q_{2,0}^{i_2}), \quad (i_1, i_2) \in \Delta_2^m.$$

$$(5) \delta_1 (\delta_2(Q_{1,0}^{j_1})), \quad j_1 < [m]_q.$$

$$(6) \delta_1 (\delta_1(\delta_1(1))).$$

### 3.4.3 Đối với nhóm tuyến tính tổng quát $GL_3$

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh Giả thuyết 3.0.2 cho trường hợp nhóm tuyến tính tổng quát hạng 3. Cụ thể, chúng tôi sẽ chỉ ra  $\mathcal{B}_m(3)$  là một hệ sinh của  $\mathcal{Q}_m(3)^{GL_3}$ , từ đó suy ra nó cũng là một cơ sở của  $\mathcal{Q}_m(3)^{GL_3}$ . Phương pháp chứng minh được tiến hành tương tự như trong trường hợp hạng 2. Chứng minh được chia thành

ba bước. Đầu tiên, sử dụng ánh xạ transfer và xây dựng một hệ sinh  $\mathcal{B}'$  lớn hơn so với hệ sinh mong muốn là  $\mathcal{B}_m(3)$  mà trong  $\mathcal{B}'$  không hạn chế các đa thức Dickson

$$\mathcal{B}' = \delta_1^3(\Delta_0^m) \amalg \delta_2^2(\Delta_1^m) \amalg \delta_3(\mathcal{D}_2) \amalg \mathcal{D}_3.$$

Sau đó, chúng ta chứng minh rằng  $\delta_3(\mathcal{D}_2)$  thuộc trong không gian sinh bởi

$$\delta_1^3(\Delta_0^m) \amalg \delta_2^2(\Delta_1^m) \amalg \delta_3(\Delta_2^m),$$

tức là  $\mathcal{D}_2$  có thể được thay thế bằng tập con nhỏ hơn  $\Delta_2^m$ . Cuối cùng, chúng ta chứng minh rằng khi giới hạn trong  $\mathcal{Q}_m(3)$  thì đại số Dickson hạng 3 thuộc không gian con sinh bởi  $\mathcal{B}_m(3)$ . Điều này được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng tất cả các đơn thức "biên" của  $\Delta_3^m$  đều thuộc vào trong không gian này. Do đó, không gian con sinh bởi  $\mathcal{B}_m(3)$  là một  $\mathcal{D}_3$ -môđun con của  $\mathcal{Q}_m(3)^{\text{GL}_3}$ . Vì nó chứa  $\Delta_3^m$  nên nó sẽ chứa toàn bộ  $\mathcal{D}_3$ . Trước hết, chúng ta có kết quả sau.

**Bổ đề 3.4.6.** *Tập  $\mathcal{B}'$  gồm 4 họ phần tử sau là một hệ sinh của  $\mathcal{Q}_m(3)^{\text{GL}_3}$ .*

$$(1) \delta_1^3(\Delta_0^m) = x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} x_3^{q^m-1}.$$

$$(2) \delta_2^2(\Delta_1^m) = \{a_{m,3,s}, 0 \leq s < [m]_q\}.$$

$$(3) \delta_3(\mathcal{D}_2).$$

$$(4) \mathcal{D}_3.$$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một kết quả kỹ thuật hỗ trợ việc mô tả tường minh các phần tử trong không gian bất biến.

**Hệ quả 3.4.8.** *Với  $g \in \mathcal{D}_2$  và  $i \geq 0$ , thì  $\delta_3(g\delta_2(Q_{1,0}^i))$  là tổ hợp tuyến tính của các họ sau.*

$$i) \delta_2^2(Q_{1,0}^s), \quad 0 \leq s < [m]_q.$$

$$ii) x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} x_3^{s(q-1)}, \quad 0 \leq s \leq [m]_q.$$

Từ kết quả trên, chúng tôi thu được mô tả tường minh về hệ sinh của không gian con của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(3)^{\text{GL}_3}$ , được trình bày trong mệnh đề sau.

**Bổ đề 3.4.9.** *Không gian con của  $\mathcal{Q}_m(3)^{\text{GL}_3}$  được sinh bởi ba họ phần tử gồm*

$$(1) \delta_1^3(\Delta_0^m),$$

$$(2) \delta_3^2(\Delta_1^m),$$

$$(3) \delta_3(\Delta_2^m)$$

*chứa không gian con bất biến  $\delta_3(\mathcal{D}_2)$ .*

Cuối cùng, chúng ta sẽ thay thế toàn bộ đại số Dickson  $\mathcal{D}_3$  bằng các tập hợp được tạo ra từ các toán tử  $\delta$  tác động lên các không gian  $\Delta_s^m$ , cụ thể là  $\delta_1^3(\Delta_0^m)$ ,  $\delta_2^2(\Delta_1^m)$ ,  $\delta_3(\Delta_2^m)$  và  $\Delta_3^m$ .

**Hệ quả 3.4.13.** Các đơn thức Dickson ở biên của  $\Delta_3^m$  sau cũng thuộc trong không gian sinh bởi  $\mathcal{B}_m(3)$ .

$$(1) Q_{3,0}^{\frac{q^{m-2}-1}{q-1}}.$$

$$(2) Q_{3,1}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}} \text{ với } m-3 \geq \lambda_3.$$

$$(3) Q_{3,2}^{\frac{q^{m-2}-q^{\lambda_2}}{q-1}} Q_{3,1}^{\frac{q^{\lambda_2}-q^{\lambda_3}}{q-1}} Q_{3,0}^{\frac{q^{\lambda_3}-1}{q-1}} \text{ với } m-3 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3.$$

**Mệnh đề 3.4.14.** Tập hợp  $\mathcal{B}_m(3)$  gồm 4 họ phần tử sau là một cơ sở của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{\text{GL}_3}$ .

$$(1) \delta_1^3(\Delta_0^m) = x_1^{q^m-1} x_2^{q^m-1} x_3^{q^m-1}.$$

$$(2) \delta_2^2(\Delta_1^m).$$

$$(3) \delta_3(\Delta_2^m).$$

$$(4) \Delta_3^m.$$

Từ đó, chúng tôi có kết quả sau.

**Định lý 3.4.15.** Các giả thuyết về cơ sở của không gian bất biến 3.0.1 3.0.2 và các Giả thuyết 1.4.1, 1.4.2 về chuỗi Hilbert-Poincaré của không gian bất biến đúng với hạng không vượt quá 3.

### 3.5 Lọc của các môđun con

Với mỗi số nguyên dương  $n$ ,  $0 \leq k \leq n$ , gọi  $\mathcal{F}_{n,k}$  là  $\mathbb{F}_q$ -không gian con của  $\mathcal{Q}_m(n)^{\text{GL}_n}$  được xác định

$$\mathcal{F}_{n,k} = \text{Span} \left\{ \delta_{s+1}^{n-s}(f) : f \in \Delta_s^m, 0 \leq s \leq \min(m, k) \right\}.$$

Chúng tôi có giả thuyết tổng quát sau.

**Giả thuyết 3.5.1.** Với  $0 \leq k \leq \min(m, n)$ , các không gian con

$$\mathcal{F}_{n,k} = \text{Span} \left\{ \delta_{s+1}^{n-s}(f) : f \in \Delta_s^m, 0 \leq s \leq \min(m, k) \right\}$$

là một  $\mathcal{A}$ -môđun con và cũng là một  $\mathcal{D}_n$ - môđun con của  $\mathcal{Q}_m(n)^{\text{GL}_n}$ . Hơn nữa,  $\mathcal{F}_{n,k}$  bị triệt tiêu bởi các bất biến Dickson  $Q_{n,0}, Q_{n,1}, \dots, Q_{n,n-k-1}$ .

Tiếp theo, chúng tôi mô tả cách các toán tử Steenrod tác động lên toán tử  $\delta$ .

**Bổ đề 3.5.3.** Nếu  $f$  là một đa thức  $\text{GL}_1$ -bất biến theo ẩn đầu tiên và  $1 \leq k \leq \deg(\delta_2(f)) = q^m - q + \deg(f)$  thì

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^k(\delta_2 f) + Q_{2,1} \mathcal{P}^{k-q}(\delta_2 f) + Q_{2,0} \mathcal{P}^{k-q-1}(\delta_2 f) = \\ \delta_2(Q_{1,0} \mathcal{P}^{k-1} f) + \delta_2(\mathcal{P}^k f) + \delta_{2,m+1}(Q_{1,0} \mathcal{P}^{k-1-q^m} f) + \delta_{2,m+1}(\mathcal{P}^{k-q^m} f). \end{aligned}$$

**Hệ quả 3.5.4.** Với mỗi  $0 \leq k \leq 2$  thì  $\mathcal{F}_{2,k}$  là một môđun con của  $\mathcal{Q}_m(2)^{\text{GL}_2}$  trên đại số Steenrod  $\mathcal{A}$ .

**Hệ quả 3.5.5.**  $\mathcal{F}_{3,1}$  là một môđun con của  $\mathcal{Q}_m(3)^{\text{GL}_3}$  trên đại số Steenrod  $\mathcal{A}$ .

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số kết quả liên quan đến sự tương tác giữa các toán tử Steenrod và toán tử  $\delta_3$ . Những kết quả này làm cơ sở cho việc thiết lập các hệ thức tương tự trong không gian con  $\mathcal{F}_{3,2}$ .

**Bổ đề 3.5.6.**

$$\mathcal{P}^k(\delta_3 f) + \sum_{i < k} \frac{\mathcal{P}^{k-i} L_3}{L_3} \mathcal{P}^i(\delta_3 f) = \frac{\mathcal{P}^k \left( \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^q & x_2^q & x_3^q \\ x_1^{q^m} f(x_2, x_3) & x_2^{q^m} f(x_1, x_3) & x_3^{q^m} f(x_1, x_2) \end{array} \right)}{L_3}.$$

Hơn nữa, vế phải của đẳng thức trên bằng  $\delta_{3;m}(F)$  hoặc  $\delta_{3;m+1}(F)$ , trong đó  $F$  là một tổ hợp tuyến tính của các đa thức có dạng  $g\mathcal{P}^i f$ , với  $g \in \mathcal{D}_2$  và  $0 \leq i \leq k$ .

Tiếp theo, chúng tôi phân tích trường hợp  $\delta_{3;m+1}(f)$  tương ứng với  $c = m+1$  trong Bổ đề trên. Kết quả thu được được trình bày trong Bổ đề sau.

**Bổ đề 3.5.7.** Nếu  $h \in \mathcal{D}_2$  và  $q \geq 3$  thì ta có đẳng thức sau trong  $\mathcal{Q}_m$

$$\delta_{3;m+1}(h) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } q > 3 \\ & \text{hoặc } q = 3 \text{ và } \deg(h) > 0 \\ \delta_{3;m}(Q_{2,1}^{q^{m-1}}) & \text{nếu } q = 3 \text{ và } h = 1. \end{cases}$$

Với  $q = 2$  thì  $\delta_{3;m+1}(h) \in \text{Span} \{ \delta_{2;m}^2(\Delta_1^m), \delta_{1;m}^3(1) \}$ .

Từ các kết quả trên, ta có

**Định lý 3.5.9.** Giả thuyết 3.5.1 đúng với trường hợp  $n \leq 3$ . Tức là, với  $n \leq 3$  và  $0 \leq k \leq n$ , các không gian con của không gian  $\mathcal{Q}_m(n)^{\text{GL}_n}$

$$\mathcal{F}_{n,k} = \text{Span} \{ \delta_{s+1}^{n-s}(f) : f \in \Delta_s^m, 0 \leq s \leq \min(m, k) \}.$$

là một  $\mathcal{A}$ -môđun con và cũng là một  $\mathcal{D}_n$ -môđun con của  $\mathcal{Q}_m(n)^{\text{GL}_n}$ . Hơn nữa,  $\mathcal{F}_{n,k}$  bị triệt tiêu bởi các đa thức Dickson  $Q_{n,0}, Q_{n,1}, \dots, Q_{n,n-k-1}$ .

# KẾT LUẬN

Trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả sau.

Thứ nhất, chúng tôi định nghĩa toán tử  $\delta$  như là một biến thể của hàm Schur (Macdonal I.G.) và trình bày một số tính chất quan trọng của nó. Cụ thể, chúng tôi đưa ra công thức tính các toán tử  $\delta$  lặp (Mệnh đề 2.1.4) và mở rộng nó trong các trường hợp tổng quát hơn (Mệnh đề 2.1.7). Dựa trên các tính chất của toán tử  $\delta$ , chúng tôi xây dựng cơ sở tuyến tính cho không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$  dưới tác động của nhóm Borel trong trường hợp tổng quát (Định lý 2.5.4). Từ đó, chúng tôi đã chứng minh được giả thuyết của Lewis - Reiner - Staton về chuỗi Hilbert của không gian bất biến  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$  (Định lý 2.6.3).

Thứ hai, chúng tôi xây dựng các giả thuyết về cơ sở tuyến tính cho các không gian bất biến, cụ thể là không gian  $\mathcal{Q}_m(n)^{P_\alpha}$  và  $\mathcal{Q}_m(n)^{GL_n}$  dựa trên cơ sở tuyến tính đã biết của không gian  $\mathcal{Q}_m(n)^{B_n}$  (Giả thuyết 3.0.1 và 3.0.2). Chúng tôi chứng minh các giả thuyết này đúng với hạng 2 và hạng 3, bằng cách sử dụng tác động của ánh xạ chuyển để xây dựng các hệ sinh và thu gọn chúng sao cho phù hợp với các hệ sinh trong giả thuyết. Cụ thể, đối với hạng 2, chỉ có hai nhóm con parabolic là nhóm Borel và nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_2$  (Mệnh đề 3.3.3). Đối với hạng 3, các nhóm con parabolic bao gồm nhóm Borel và ba nhóm khác như  $P_{(2,1)}$ ,  $P_{(1,2)}$ , cùng với nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_3$  (Mệnh đề 3.4.2, 3.4.4, 3.4.14 và Định lý 3.4.15). Chúng tôi cũng trình bày và chứng minh giả thuyết về lọc  $\mathcal{F}_{n,k}$  (Giả thuyết 3.5.1), chứng minh rằng giả thuyết này đúng với hạng  $\leq 3$ , và xem xét nó như một môđun trên đại số Dickson và Steenrod (Định lý 3.5.9). Các kết quả này đã xác định rõ ràng các cơ sở tuyến tính của không gian bất biến ứng với các nhóm parabolic và nhóm tuyến tính tổng quát  $GL_3$ , qua đó góp phần khẳng định tính Giả thuyết là đúng với trường hợp hạng không vượt quá 3.

## CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Lê Minh Hà, Nguyễn Đăng Hồ Hải, Nguyễn Văn Nghĩa (2024), "A proof of the Lewis-Reiner-Stanton conjecture for the Borel subgroup". *Transactions of the American Mathematical Society* vol 377, pp. 8221-8243.
2. Lê Minh Hà, Nguyễn Đăng Hồ Hải, Nguyễn Văn Nghĩa (2025), "On modular invariants of the truncated polynomial ring in low ranks", *Journal of Algebra* vol 683, pp. 319-354.

## CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN ĐƯỢC TRÌNH BÀY TẠI

- Hội nghị Toán học toàn quốc năm 2023 (VMC 2023) tại Đại học Sư phạm Đà Nẵng (8-12/8/2023).
- Hội thảo tại Trường đồng về Tô pô đại số và ứng dụng do Viasm tổ chức tại Đại học Quy Nhơn (4-8/12/2023).
- Hội nghị khoa học Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội (9/10/2024).
- Hội thảo "Toán học và các ngành có liên quan", Viện Toán học - Viện hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam và Trường Đại học Hùng Vương (29/3/2025).
- Seminar Bộ môn Đại số - Hình học - Tô pô, Khoa Toán Cơ Tin, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội (13/8/2025).
- Hội thảo Gặp gỡ Toán học 2025 do Viện Toán học Việt Nam - Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội - Đại học Bách khoa Hà Nội - Đại học Sư phạm Hà Nội 2 phối hợp tổ chức tại Đại học Sư phạm Hà Nội 2(27-28/9/2025).