ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Bùi Khánh Hằng

LUẬT SỐ LỚN CHO DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN KẾT ÂM VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

Hà Nội – 2026

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Bùi Khánh Hằng

LUẬT SỐ LỚN CHO DÃY BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN KẾT ÂM VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Lý thuyết xác suất và thống kê toán học
Mã số: 9460112.02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN ỨNG DỤNG

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. PGS. TS. Tạ Công Sơn
2. PGS. TS. Trần Mạnh Cường

Hà Nội – 2026

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của cá nhân tôi, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Tạ Công Sơn và PGS. TS. Trần Mạnh Cường. Các số liệu, kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác. Đồng thời, tôi xin cam đoan các đồng tác giả trong những công trình công bố chung đã đồng ý cho tôi sử dụng các kết quả để đưa vào luận án.

Nghiên cứu sinh

Bùi Khánh Hằng

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận án, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS. TS. Tạ Công Sơn và PGS. TS. Trần Mạnh Cường - hai người Thầy kính mến đã luôn đồng hành, dành nhiều thời gian và tâm huyết để hướng dẫn và cho tôi những lời khuyên bổ ích trong suốt quá trình thực hiện và hoàn thành luận án này.

Bên cạnh đó, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới các Thầy Cô trong Hội đồng Seminar tổng thể luận án tại đơn vị chuyên môn và Hội đồng đánh giá luận án về những lời nhận xét và góp ý để luận án của tôi thêm hoàn thiện.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới toàn thể các Thầy Cô trong Bộ môn Xác suất - Thống kê và Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội đã góp ý, động viên và tận tình hỗ trợ trong suốt quá trình học tập nghiên cứu sinh của tôi.

Kính chúc toàn thể quý Thầy Cô luôn dồi dào sức khỏe, hạnh phúc và đạt được nhiều thành tựu trong sự nghiệp!

Hà Nội, ngày tháng năm 2026

Nghiên cứu sinh

Bùi Khánh Hằng

Mục lục

Lời cam đoan i

Lời cảm ơn ii

Mục lục iii

Danh mục các kí hiệu và chữ viết tắt v

Mở đầu vii

1 Kiến thức chuẩn bị 1
1.1 Hàm biến đổi chính quy 1
1.2 Véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert 4
1.3 Một số dạng phụ thuộc của dãy biến ngẫu nhiên 6
1.4 Một số dạng hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên 13

2 Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm 16
2.1 Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm 17
2.2 Ứng dụng trong mô hình hồi quy 32
2.2.1 Ước lượng vững trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn 33
2.2.2 Ước lượng vững trong mô hình hồi quy phi tham số 36
2.3 Mô phỏng 41

3 Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng 47
3.1 Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng 49
3.2 Ứng dụng 63
3.2.1 Ước lượng vững trong mô hình Value-at-Risk 63
3.2.2 Ước lượng vững trong mô hình hồi quy bán tham số 67

4 Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert **75**

4.1 Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert 75

4.2 Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert với phân phối đuôi nặng 85

4.3 Sự hội tụ của thống kê von Mises suy biến 93

Kết luận và kiến nghị **98**

Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án **100**

Tài liệu tham khảo **101**

Phụ lục **111**

DANH MỤC CÁC KÍ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$a_n \sim b_n$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$
$a_n = o(b_n)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$
$a_n = O(b_n)$	Tồn tại hằng số C sao cho $a_n \leq Cb_n$ với mọi $n \geq 1$
$a_n \asymp b_n$	$0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} < \infty$
$\lvert A\rvert$	Lực lượng (số phần tử) của tập A
C	Biểu thị một hằng số ($0 < C < \infty$) nhưng không nhất thiết giống nhau trong mỗi lần xuất hiện
$c(g)$	Tập hợp các điểm liên tục của hàm g
I_A	Hàm chỉ tiêu của tập A
x^+	Phần dương của x, $\max\{x, 0\}$
x^-	Phần âm của x, $-\min\{x, 0\}$
$\lfloor x \rfloor$	Phần nguyên của x, số nguyên lớn nhất không vượt quá x
$\ell(x)$	Hàm biến đổi chậm
$\ell^{\#}(x)$	Liên hợp de Bruijn của hàm biến đổi chậm $\ell(x)$
$\log x$	Loga cơ số tự nhiên của x
$\log^+(x)$	$\max\{0, \log x\}$
$\log_+(x)$	$\max\{1, \log_2 x\}$
$\phi^{-1}(x)$	Hàm nghịch đảo (hàm ngược) của hàm $\phi(x)$
$\mathbb{N}$	Tập số tự nhiên
$\mathbb{R}$	Tập số thực
$\mathbb{H}$	Không gian Hilbert
$\lVert x\rVert$	Chuẩn của véctơ x
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Tích vô hướng
Ω	Không gian mẫu
$\mathcal{F}$	σ-đại số trên Ω
$P(A)$	Xác suất của biến cố A
E, EX	Kỳ vọng, kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X

D, DX	Phương sai, phương sai của biến ngẫu nhiên X
$\mathrm{Cov}(X, Y)$	Hiệp phương sai (covariance) của X và Y
$\mathrm{med}(X)$	Median (trung vị) của biến ngẫu nhiên X
VaR	Giá trị rủi ro (Value-at-Risk)
$VaR_a(X)$	Giá trị rủi ro của biến ngẫu nhiên X với độ tin cậy $1-a$, $a \in (0,1)$
$cVaR$	Giá trị rủi ro điều kiện (Conditional Value-at-Risk)
$cVaR_a(X)$	Giá trị rủi ro điều kiện của biến ngẫu nhiên X với độ tin cậy $1-a$, $a \in (0,1)$
$\xrightarrow{c.c.}$	Hội tụ đầy đủ
$\xrightarrow{h.c.c.}$	Hội tụ hầu chắc chắn
$\not\xrightarrow{h.c.c.}$	Không hội tụ hầu chắc chắn
$\xrightarrow{P}$	Hội tụ theo xác suất
$\mathcal{RV}_\rho$	Lớp các hàm biến đổi chính quy với chỉ số ρ
$\mathcal{SV}$	Lớp các hàm biến đổi chậm
ANA	Asymptotic negatively associated
END	Extended negatively dependent
m-ANA	m-asymptotic negatively associated
m-END	m-extended negatively dependent
NA	Negatively associated
NOD	Negatively orthant dependent
NQD	Negatively quadrant dependent
NSD	Negatively superadditive dependent
PNQD	Pairwise negatively quadrant dependent
$:=$	Được gán bằng, được định nghĩa bởi
$\square$	Kết thúc chứng minh

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Các định lý giới hạn là một trong những nền tảng quan trọng của lý thuyết xác suất, đóng vai trò then chốt trong nhiều lĩnh vực khoa học và ứng dụng thực tiễn. Chúng được xem là những viên ngọc của lý thuyết xác suất bởi các định lý này không chỉ là công cụ nghiên cứu lý thuyết mà còn là cơ sở cho các ứng dụng trong thống kê sinh học, y học, kinh tế và nhiều ngành khác. Đặc biệt, Luật số lớn là một trong những định lý hội tụ nổi bật, liên quan đến sự hội tụ của trung bình mẫu. Nội dung này được xây dựng và phát triển bởi các nhà toán học vĩ đại như Kolmogorov, Khinchin, Chebyshev và nhiều tác giả khác. Khi nghiên cứu các định lý giới hạn dạng luật số lớn, nhiều dạng hội tụ đã được xét: hội tụ theo xác suất, hội tụ hầu chắc chắn, hội tụ đầy đủ. Luật yếu số lớn được Bernoulli thiết lập năm 1713 (xem [9]). Sau đó, kết quả này được Poisson, Chebyshev, Markov, Liapunov mở rộng. Tuy nhiên, phải đến năm 1909 Luật mạnh số lớn mới được Borel phát hiện (xem [12]). Tiếp đến, Kolmogorov đã phát triển kết quả của Borel vào năm 1926 (xem [60]), thường gọi là Luật số lớn Kolmogorov. Đồng thời, Kolmogorov [61] cũng chỉ ra rằng: Nếu $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối thì điều kiện cần và đủ để $\frac{S_n - n\mu}{n}$ hội tụ hầu chắc chắn về 0 là mômen tuyệt đối cấp một hữu hạn $E|X| < \infty$, trong đó $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, EX = \mu$. Marcinkiewicz và Zygmund [70] đã mở rộng kết quả này (thường gọi là Luật số lớn dạng Marcinkiewicz-Zygmund) với mômen bậc cao hơn. Tiếp tục, Brunk [13] và Prokhorov [80] đã khái quát điều kiện đủ dạng Kolmogorov với mômen bậc cao hơn và thu được định lý hội tụ hầu chắc chắn dạng Brunk-Prokhorov cho dãy biến ngẫu nhiên độc lập không nhất thiết cùng phân phối. Năm 1947, Hsu và Robbins [45] đã đưa ra khái niệm hội tụ đầy đủ: Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là hội tụ đầy đủ về hằng số C nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n - C| > \varepsilon\right) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.$$

Kết hợp với bổ đề Borel-Cantelli, sự hội tụ đầy đủ suy ra sự hội tụ hầu chắc chắn, nhưng điều ngược lại không phải lúc nào cũng đúng. Vậy dưới những điều kiện nào thì $\frac{S_n - n\mu}{n}$ hội tụ đầy đủ về 0? Trường hợp $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, Hsu và Robbins [45] đã chỉ ra điều kiện đủ là $EX^2 < \infty$ và sau đó Erdös [30] đã chỉ ra chiều ngược lại. Các tác giả Baum và Katz [8] tiếp tục mở rộng kết quả Hsu-Robbins-Erdös cho dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối để đưa ra tốc độ hội tụ cho luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund: Với $r > 1$, $1 \leq p < 2$, $EX = 0$ và $E|X|^{rp} < \infty$ khi và chỉ khi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\Big(|S_n - n\mu| > \varepsilon n^{1/p}\Big) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.$$

Các kết quả này tiếp tục được mở rộng theo các hướng khác nhau, chẳng hạn mở rộng cho các tổng trung bình trượt được nghiên cứu bởi Li và các công sự [64]; một số mở rộng với các điều kiện mômen bậc cao hơn, có thể kể đến như Lanzinger [62], Gut và Stadtmüller [38], Sung [100], v.v. Một số khác tập trung vào sự hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên trong không gian Banach, điển hình là các công trình của Ahmed và cộng sự [2], Hu và cộng sự [49], Sung [96], Wang và cộng sự [112], v.v.

Ở một khía cạnh khác, để phù hợp với các cấu trúc dữ liệu phức tạp, nhiều nhà nghiên cứu gần đây đã mở rộng và phát triển các khái niệm về dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc. Các khái niệm này có nhiều ứng dụng trong lý thuyết độ tin cậy của hệ thống (Statistical theory of reliability, xem Barlow và Proschan [7]). Năm 1966, Lehmann [63] đã giới thiệu khái niệm biến ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm (negatively quadrant dependent, NQD). Theo đó, hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là NQD nếu

$$P(X \leq x,\ Y \leq y) \ \leq \ P(X \leq x)P(Y \leq y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Một dãy biến ngẫu nhiên được gọi là phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp (pairwise negatively quadrant dependent, PNQD) nếu mọi cặp biến ngẫu nhiên trong dãy đều là NQD. Kể từ đó, đã có nhiều bài báo viết về chủ đề này (xem [33, 48, 99], v.v.). Khái niệm dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm (negative association, NA) được đưa ra đầu tiên bởi Alam và Saxena [56], sau đó được nhóm tác giả Joag-Dev và Proschan [55] nghiên cứu sâu hơn: Một họ biến ngẫu nhiên $\{X_1, \ldots, X_n\}$ được gọi là liên kết âm nếu với mọi tập con rời nhau $A, B \subset \{1, \ldots, n\}$ và với mọi hàm thực không giảm theo từng tọa độ f trên $\mathbb{R}^{|A|}$ và g trên $\mathbb{R}^{|B|}$,

$$\mathrm{Cov}(f(X_k, k \in A), g(X_k, k \in B)) \leq 0,$$

trong đó giả thiết hiệp phương sai Cov (covariance) tồn tại, $|A|$ là lực lượng của tập hợp A. Rõ ràng, dãy biến ngẫu nhiên độc lập là một trường hợp đặc biệt của cả dãy NA và PNQD. Từ định nghĩa, chúng ta thấy rằng khái niệm NA mạnh hơn khái niệm PNQD, bởi vì một dãy NA luôn là một dãy PNQD, nhưng điều ngược lại thì không đúng. Joag-Dev và Proschan [55] cũng chỉ ra nhiều ví dụ về dãy NA, chẳng hạn phân phối hoán vị (permutation distributions), phân phối đồng thời của hạng (rank) các biến ngẫu nhiên, phân phối chuẩn đồng thời có tương quan âm. Do đó, việc mở rộng các kết quả của dãy biến ngẫu nhiên độc lập sang dãy NA hoặc sang dãy PNQD là một hướng nghiên cứu rất tiềm năng, có ý nghĩa cả về lý thuyết lẫn ứng dụng. Để tìm hiểu thêm về các kết quả của dãy NA, chúng ta có thể tham khảo các tài liệu [14, 54, 66, 86, 107] v.v. Ngoài ra, các nhà nghiên cứu cũng quan tâm đến nhiều cấu trúc phụ thuộc khác, bao gồm: NOD (negatively orthant dependent), NSD (negatively superadditive dependent), dãy φ-mixing, dãy ρ-mixing, dãy ρ^*-mixing, dãy hiệu martingale, xem [22, 57, 58, 77, 78, 92, 93, 111, 116], v.v.

Năm 2011, Sung [97] đã đưa ra kết quả về sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối. Cụ thể, ông đã chứng minh rằng với $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối và $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một dãy hằng số thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{\alpha} = O(n)$ với $1 < \alpha \leq 2$.
Nếu

$$EX = 0 \quad \text{và} \quad \begin{cases} E|X|^{\alpha} < \infty, & \text{với } \alpha > \gamma, \\ E|X|^{\alpha} \log(1 + |X|) < \infty, & \text{với } \alpha = \gamma, \\ E|X|^{\gamma} < \infty, & \text{với } \alpha < \gamma, \end{cases}$$

thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} a_{ni} X_i \right| > \varepsilon n^{1/\alpha} \log^{1/\gamma}(n) \right) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0, \tag{1}$$

trong đó $\gamma > 0$. Bên cạnh đó, Chen và Sung [14] cũng chỉ ra khi $\alpha < \gamma$ thì điều kiện $E|X|^{\gamma} < \infty$ là tối ưu, còn khi $\alpha > \gamma$ thì $E\left(|X|^{\alpha} \log^{1-\alpha/\gamma}(|X| + 2)\right) < \infty$ là điều kiện gần như tối ưu để thiết lập kết quả (1). Góp phần vào chuỗi nghiên cứu trên, năm 2019, sử dụng tính chất của hàm biến đổi chính quy, Anh và cộng sự [5] đã đưa ra điều kiện cần và đủ để thiết lập sự hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} a_{ni} X_i \right| > \varepsilon n^{1/\alpha} \ell^{\#}(n^{1/\alpha}) \right) < \infty \text{ với mọi } \varepsilon > 0, \tag{2}$$

cho một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối $\{X, X_n, n \geq 1\}$, trong đó $\ell^{\#}(\cdot)$ là liên hợp de Bruijn của hàm biến đổi chậm $\ell(\cdot)$ xác định trên tập $[A, \infty)$ với $A > 0$. Lấy $\ell(x) = \log^{-1/\gamma}(x), x \geq 2$ thì $\ell^{\#}(x) = \log^{1/\gamma}(x)$, ta thu được điều kiện mômen tối ưu cho kết quả (1), còn khi $\ell(x) = 1$ thì $\ell^{\#}(x) = 1$, ta thu được Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Đặc biệt, tại thời điểm ấy, kết quả (2) vẫn là mới ngay cả khi dãy biến ngẫu nhiên là độc lập cùng phân phối.

Xuất phát từ các kết quả trên, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là liệu các kết quả này có thể làm tổng quát hơn được không, chẳng hạn như thay điều kiện dãy trọng số tất định bằng dãy trọng số ngẫu nhiên hoặc thay dãy chuẩn hóa $b_n = n^{1/\alpha} \ell^{\#}(n^{1/\alpha})$ hoặc $b_n = n^{1/\alpha} \log^{1/\gamma}(n)$ bằng một lớp hàm $\phi(n)$ tổng quát hơn. Ngoài ra, liệu các định lý hội tụ tương tự có thể được thiết lập cho các cấu trúc phụ thuộc khác ngoài liên kết âm hay không. Mặc dù đã có nhiều công trình nghiên cứu nhưng việc mở rộng các định lý hội tụ cho tổng có trọng số của dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc vẫn còn nhiều thách thức. Điều này đã tạo động lực để chúng tôi tìm kiếm các điều kiện tổng quát nghiên cứu Luật số lớn thông qua sự hội tụ đầy đủ của dãy biến ngẫu nhiên có cấu trúc phụ thuộc với dãy hàm chuẩn hóa tổng quát.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu lý thuyết của luận án là tìm các điều kiện để thiết lập sự hội tụ đầy đủ có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k}(w_i X_i - a_i)\right| > \varepsilon b_n\right) < \infty,$$

hoặc

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(w_i X_i - a_i)\right| > \varepsilon b_n\right) < \infty,$$

cho dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc $\{X_n, n \geq 1\}$, trong đó $\varepsilon > 0$, α là một hằng số, $\{w_n, n \geq 1\}$ là một dãy trọng số (ngẫu nhiên hoặc tất định), $\{a_n, n \geq 1\}$ là một dãy số thực và $\{b_n, n \geq 1\}$ là một dãy số thực dương không giảm.

Bên cạnh đó, mục tiêu ứng dụng của luận án là áp dụng các kết quả lý thuyết vào một số mô hình thống kê (mô hình hồi quy, V-thống kê, ...) khi mà giả thiết về tính độc lập của các quan sát không được thỏa mãn.

3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị thực và dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị trên không gian Hilbert.

4. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của luận án là các định lý hội tụ cho dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị thực và dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc nhận giá trị trên không gian Hilbert.

5. Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng các kỹ thuật của giải tích và xác suất để chứng minh các định lý hội tụ. Ngoài ra, chúng tôi cũng sử dụng các kết quả và bất đẳng thức quan trọng khác như bổ đề Borel-Catelli, bất đẳng thức cực đại Kolmogorov, bất đẳng thức cực đại Rosenthal, bất đẳng thức C_r, bất đẳng thức mômen, v.v.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Kết quả của luận án góp phần làm phong phú thêm các kết quả về sự hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc trong không gian thực và không gian Hilbert. Luận án có thể được sử dụng để tham khảo trong các nghiên cứu liên quan của sinh viên và các nhà khoa học trong lĩnh vực lý thuyết xác suất và thống kê toán học.

7. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án và Tài liệu tham khảo, luận án được trình bày trong 4 chương.

- **Chương 1** nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích và xác suất.
- **Chương 2** trình bày về luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.
- **Chương 3** trình bày về luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng.
- **Chương 4** trình bày về luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp.

Kính mong nhận được những nhận xét, góp ý và phản biện từ quý Thầy Cô cùng bạn đọc để luận án được hoàn chỉnh hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản của giải tích và xác suất có liên quan đến nội dung luận án. Chúng tôi sẽ lần lượt nhắc lại một số kiến thức cơ bản của lớp hàm biến đổi chính quy, véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Hilbert, một số dạng phụ thuộc và hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên.

1.1 Hàm biến đổi chính quy

Tầm quan trọng của hàm biến đổi chính quy trong xác suất được đề cập đến trong tài liệu của Seneta [85], Bingham và cộng sự [10] và bài báo gần đây của Jessen và Mikosch [53]. Ngoài ra, tính chất của hàm biến đổi chính quy cũng là một trong những ý tưởng chính để mô hình hóa hoạt động của các mạng viễn thông lớn (Heath và cộng sự [41], Mikosch và cộng sự [75]). Trong phần này, chúng ta sẽ nhắc lại khái niệm và các tính chất cơ bản của hàm biến đổi chính quy được viết trong cuốn sách của Bingham và cộng sự [10].

Định nghĩa 1.1 ([10], trang 1, 6) *(Hàm biến đổi chính quy)*
Cho $f(\cdot)$ là một hàm dương đo được, xác định trên $[A, \infty)$ với $A > 0$ và thỏa mãn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^{\rho} \quad \text{với mọi } \lambda > 0.$$

Khi đó f được gọi là hàm biến đổi chính quy (tại vô cùng) với chỉ số ρ. Khi $\rho = 0$, ta nói f là một hàm biến đổi chậm (tại vô cùng).

Theo định nghĩa,

$$x^{\rho},\ x^{p}\log x,\ x^{\rho}\log(\log x),\ x^{\rho}\frac{\log x}{\log(\log x)},$$

là những hàm biến đổi chính quy với chỉ số ρ. Ngoài ra,

$$\log(\log x),\ \log^{\alpha} x \text{ với mọi } \alpha \in \mathbb{R},\ e^{\log^{\alpha} x} \text{ với } \alpha \in (0,1),$$

là các hàm biến đổi chậm.

Định lý biểu diễn là một trong những kết quả quan trọng của lý thuyết hàm biến đổi chính quy, được phát biểu như sau:

Định lý 1.2 ([10], Định lý 1.3.1) *Cho $\ell(\cdot)$ là một hàm dương đo được xác định trên $[A,\infty)$ với $A>0$. Khi đó, $\ell(\cdot)$ là hàm biến đổi chậm khi và chỉ khi nó được biểu diễn dưới dạng*

$$\ell(x)=c(x)\exp\Big(\int_B^x \frac{\varepsilon(u)du}{u}\Big),\quad x\geq B,$$

trong đó $B\geq A$, $c(\cdot)$ là hàm dương đo được bị chặn trên $[B,\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to\infty}c(x)=c\in(0,\infty)$ và $\varepsilon(\cdot)$ là hàm liên tục xác định trên $[B,\infty)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$.

Năm 1973, Seneta [84] đã chứng minh rằng: Nếu $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm xác định trên $[A,\infty)$ với $A>0$, thì tồn tại $B\geq A$ sao cho $\ell(\cdot)$ bị chặn trên mọi khoảng đóng hữu hạn $[a,b]\subset[B,\infty)$. Ngoài ra, $f(\cdot)$ là một hàm biến đổi chính quy với chỉ số ρ khi và chỉ khi nó có dạng

$$f(x)=x^\rho\ell(x),$$

trong đó $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm.

Kí hiệu $\mathcal{RV}_\rho$ là lớp các hàm biến đổi chính quy với chỉ số ρ, $\mathcal{SV}$ là lớp các hàm biến đổi chậm.

Mệnh đề 1.3 ([10], Mệnh đề 1.3.6) *Cho ℓ,ℓ_1,ℓ_2 là các hàm biến đổi chậm. Khi đó:*

i) $(\log\ell(x))/\log x\to 0$ *khi* $x\to\infty$,

ii) $(\ell(x))^\alpha\in\mathcal{SV}$ *với mọi* $\alpha\in\mathbb{R}$,

iii) $\ell_1\ell_2\in\mathcal{SV}$, $\ell_1+\ell_2\in\mathcal{SV}$,

iv) Với mọi $\alpha>0$,

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha\ell(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}x^{-\alpha}\ell(x)=0. \tag{1.1}$$

Mệnh đề 1.4 ([10], Mệnh đề 1.5.7) *Cho $f_1\in\mathcal{RV}_{\rho_1}$, $f_2\in\mathcal{RV}_{\rho_2}$. Khi đó:*

i) $f_1^\alpha\in\mathcal{RV}_{\alpha\rho_1}$ *với mọi* $\alpha\in\mathbb{R}$,

ii) $f_1+f_2\in\mathcal{RV}_\rho$ *với* $\rho=\max\{\rho_1,\rho_2\}$,

iii) $f_1f_2\in\mathcal{RV}_{\rho_1+\rho_2}$,

iv) Nếu $f_2(x)\to\infty$ *khi* $x\to\infty$ *thì* $(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))\in\mathcal{RV}_{\rho_1\rho_2}$.

Định lý dưới đây cung cấp thông tin về dáng điệu tiệm cận của tích phân các hàm biến đổi chính quy, thường được gọi là Định lý (tích phân) Karamata.

Định lý 1.5 ([10], Định lý 1.5.11) *Cho $f\in\mathcal{RV}_\rho$, bị chặn địa phương trên $[A,\infty)$. Khi đó:*

(i) Với $\sigma \geq -(\rho+1)$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sigma+1}f(x)}{\int\limits_A^x t^\sigma f(t)dt} = \sigma+\rho+1,$$

(ii) Với $\sigma < -(\rho+1)$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sigma+1}f(x)}{\int\limits_x^\infty t^\sigma f(t)dt} = -(\sigma+\rho+1).$$

(Khi $\sigma = -(\rho+1)$*, kết quả trên vẫn đúng nếu* $\int\limits_x^\infty t^{-(\rho+1)}f(t)dt < \infty$*.)*

Kết quả dưới đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 1.5.

Nhận xét 1.6 Cho $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm. Khi đó với mọi $r > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^{-1+r}\ell(i) \asymp Cn^r\ell(n),$$
$$\sum_{i=n}^{\infty} i^{-1-r}\ell(i) \asymp Cn^{-r}\ell(n).$$

Định lý 1.7 ([10], Định lý 1.5.12) *Nếu* $f \in \mathcal{RV}_\rho$ *với* $\rho \neq 0$ *thì tồn tại* $g \in \mathcal{RV}_{1/\rho}$ *sao cho*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(g(x))}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{g(f(x))}{x} = 1.$$

Khi đó, hàm g *được xem là hàm nghịch đảo của hàm* f *và được xác định duy nhất (theo nghĩa tương đương tiệm cận).*

Định nghĩa 1.8 ([10], Định lý 1.5.13) (*Liên hợp de Bruijn*)

Cho $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm. Khi đó tồn tại duy nhất (theo nghĩa tương đương tiệm cận) một hàm biến đổi chậm $\ell^\#(\cdot)$ thỏa mãn

$$\lim_{x\to\infty} \ell(x)\ell^\#(x\ell(x)) = 1 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to\infty} \ell^\#(x)\ell(x\ell^\#(x)) = 1.$$

Khi đó, $\ell^\#$ được gọi là là liên hợp de Bruijn của ℓ và $(\ell, \ell^\#)$ được gọi là một cặp liên hợp.

Mệnh đề 1.9 ([10], Mệnh đề 1.5.14) *Nếu* $(\ell, \ell^\#)$ *là một cặp liên hợp thì*

$$\Big(\ell(ax), \ell^\#(bx)\Big),\ \Big(a\ell(x), a^{-1}\ell^\#(x)\Big),\ \Big((\ell(x^\alpha))^{1/\alpha}, (\ell^\#(x^\alpha))^{1/\alpha}\Big),$$

cũng là một cặp liên hợp, trong đó $a, b, \alpha > 0$.

Mệnh đề 1.10 ([10], Mệnh đề 1.5.15) *Cho* $\alpha, \beta > 0$ *và* $f(x) = x^{\alpha\beta}\ell^\alpha(x^\beta)$*, trong đó* $\ell(\cdot)$ *là một hàm biến đổi chậm. Khi đó hàm nghịch đảo* g *của* f *được viết dưới dạng*

$$g(x) \sim x^{\frac{1}{\alpha\beta}}\ell^{\#\frac{1}{\beta}}(x^{\frac{1}{\alpha}}) \quad \textit{khi } x \to \infty. \tag{1.2}$$

Nhóm tác giả Bojanic và Seneta [11] (xem Định lý 1, trang 304) đã chứng minh rằng nếu $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm thỏa mãn

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ell(\lambda_0 x)}{\ell(x)}-1\right)\log(\ell(x))=0,\quad \lambda_0>1, \tag{1.3}$$

thì với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$ ta có

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell(x\ell^{\alpha}(x))}{\ell(x)}=1.$$

Do đó, có thể chọn $\ell^{\#}(x)\sim 1/\ell(x)$ (sai khác tương đương tiệm cận). Trường hợp đặc biệt, nếu $\ell(x)=\log x$ thì $\ell^{\#}(x)=1/\log x$. Không mất tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $\ell^{\#}(x)$ cũng xác định trên $[A,\infty)$, cả $\ell(x)$ và $\ell^{\#}(x)$ đều bị chặn trên các khoảng đóng hữu hạn.

1.2 Véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert

Nếu không nói gì thêm, trong toàn bộ nội dung của luận án, ta đều xét $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert thực tách được với với chuẩn $\|\cdot\|$ được sinh bởi tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Kí hiệu $\mathscr{B}(\mathbb{H})$ là σ-trường Borel sinh bởi các tập mở trên $\mathbb{H}$ và $\{e_j, j\in B\}$ là một cơ sở trực chuẩn trên $\mathbb{H}$, B là một tập chỉ số.

Xét $(\Omega,\mathcal{F},P)$ là một không gian xác suất và $(\mathbb{H},\mathscr{B}(\mathbb{H}))$ là một không gian đo.

Định nghĩa 1.11 ([101], Định lý 7.1.2) (*Véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị*)

Ánh xạ $X:\Omega\to\mathbb{H}$ được gọi là một véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ (hoặc véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị), nếu

$$\forall A\in\mathscr{B}(\mathbb{H}): X^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega\ :\ X(\omega)\in A\}\in\mathcal{F}.$$

Định nghĩa 1.12 ([101], Định lý 7.1.2) (*Phân phối xác suất của véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị*)

Phân phối xác suất của một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị là một độ đo xác suất F_X trên $\mathbb{H}$ được xác định bởi

$$F_X(A)=P\left(X^{-1}(A)\right)=P(\omega: X(\omega)\in A)\quad \forall A\in\mathscr{B}(\mathbb{H}).$$

Trường hợp $\mathbb{H}=\mathbb{R}$, ta nói X là một biến ngẫu nhiên thực.

Nhận xét 1.13 ([101], Định lý 2.4.13) Với mỗi $j\in B$, đặt $X^j=\langle X,e_j\rangle$. Khi đó, X^j là một biến ngẫu nhiên thực và

$$X=\sum_{j\in B}\langle X,e_j\rangle\, e_j=\sum_{j\in B}X^j e_j.$$

Mệnh đề 1.14 *Cho X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị và $h : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ đo được. Khi đó $h(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ là một biến ngẫu nhiên thực.*

Kỳ vọng và Phương sai của một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị

Nhắc lại rằng nếu X là một biến ngẫu nhiên thực thì kỳ vọng của nó chính là tích phân Lebesgue được tính bởi

$$\int_\Omega X(\omega)dP(\omega).$$

Bây giờ, xét X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị, khi đó X được gọi là đơn giản nếu

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}(\omega), \quad A_i \in \mathcal{F},\ x_i \in \mathbb{H},\ n \in \mathbb{N},$$

([101], Định nghĩa 2.6.1). Nếu $P(A_i) < \infty$, ta nói véctơ ngẫu nhiên đơn giản X *khả tích Bochner* ([101], Định nghĩa 2.6.2), kí hiệu bởi

$$\int_\Omega X dP = \sum_{i=1}^{n} x_i P(A_i). \tag{1.4}$$

Ta có thể kiểm tra rằng giá trị của tích phân được định nghĩa như trên không phụ thuộc vào biểu diễn của X. Bây giờ chúng ta sẽ định nghĩa tích phân Bochner cho một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị bất kỳ.

Định nghĩa 1.15 ([101], Định nghĩa 2.6.3) (*Tích phân Bochner của một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị bất kỳ*)

Cho X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị. Khi đó, X được gọi là khả tích Bochner nếu tồn tại một dãy véctơ ngẫu nhiên đơn giản và khả tích Bochner $\{X_n, n \geq 1\}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|X_n - X\| \, \mathrm{d}P = 0. \tag{1.5}$$

Khi đó, tích phân Bochner của X được định nghĩa là

$$\int_\Omega X \, \mathrm{d}P = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n \, \mathrm{d}P. \tag{1.6}$$

Nhận xét 1.16 Từ (1.4), với mọi hàm đơn giản X_n ta có

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\Omega X_n(\omega)dP(\omega) \right\| &= \left\| \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} x_i I_{A_i}(\omega)dP(\omega) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i P\left(A_i\right) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \, P\left(A_i\right) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} \|x_i\| \, I_{A_i}(\omega)dP(\omega) \\
&= \int_\Omega \|X_n(\omega)\| \, dP(\omega).
\end{aligned}$$

Giả sử X là khả tích Bochner. Khi đó, áp dụng bất đẳng thức trên cho hiệu hai véctơ ngẫu nhiên đơn giản $X_n - X_m$ ta có

$$\begin{aligned}\left\|\int_\Omega X_n dP - \int_\Omega X_m dP\right\| &\leq \int_\Omega \|X_n - X_m\| \, dP \\ &\leq \int_\Omega \|X - X_n\| \, dP + \int_\Omega \|X - X_m\| \, dP \\ &\to 0 \quad \text{khi} \;\; n, m \to \infty.\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ dãy $\{\int_\Omega X_n dP, n \geq 1\}$ là một dãy Cauchy trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$ và do đó giới hạn trong (1.6) tồn tại do tính đầy đủ của $\mathbb{H}$.

Tích phân Bochner có thể xem là sự mở rộng tự nhiên của kỳ vọng của một biến ngẫu nhiên thực cho trường hợp véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị.

Định nghĩa 1.17 ([101], Định nghĩa 7.2.1) Cho X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị và giả sử $E\|X\| < \infty$. Kỳ vọng của X, kí hiệu là EX, được định nghĩa bởi tích phân Bochner

$$EX = \int_\Omega X dP.$$

Rõ ràng, kỳ vọng của một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị là một véctơ $\mathbb{H}$-giá trị.

Định lý 1.18 ([101], Định lý 3.1.7) *Cho X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị và giả sử $E\|X\| < \infty$. Đặt $\mu = EX$. Khi đó, với $h \in \mathbb{H}$ bất kỳ, ta có:*

$$\langle \mu, h \rangle = \langle EX, h \rangle = E(\langle X, h \rangle).$$

Nhận xét 1.19 Các tính chất của kỳ vọng EX của một véctơ ngẫu nhiên X nhận giá trị trong không gian Hilbert được thừa hưởng trực tiếp từ các tính chất của kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên trong không gian thực. Hơn nữa, nếu $\{e_j, j \in B\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{H}$, thì kỳ vọng EX có thể viết thành

$$EX = \sum_{j \in B} E \langle X, e_j \rangle e_j.$$

Định lý 1.20 ([101], Định lý 7.2.2) *Cho X là một biến ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị và giả sử $E\|X\|^2 < \infty$. Đặt $\mu = EX$. Khi đó,*

$$E\|X - \mu\|^2 = E\|X\|^2 - \|\mu\|^2.$$

1.3 Một số dạng phụ thuộc của dãy biến ngẫu nhiên

Trong lĩnh vực xác suất thống kê cổ điển, phần lớn các kết quả đều được xây dựng dựa trên giả thiết các biến ngẫu nhiên là độc lập. Tuy nhiên, trong nhiều mô hình

thực tế, giả thiết này lại không còn phù hợp. Do đó, trong phần này, chúng tôi sẽ giới thiệu một số khái niệm về dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc sẽ được nghiên cứu trong các phần tiếp theo của luận án. Cụ thể, chúng tôi sẽ lần lượt trình bày các khái niệm phụ thuộc góc phần tư âm và liên kết âm. Ở đây và trong các phần tiếp theo, chúng ta giả thiết rằng tất cả các biến ngẫu nhiên được xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Năm 1966, tác giả Lehmann [63] đã đưa ra khái niệm biến ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm (negatively quadrant dependent, NQD), cụ thể:

Định nghĩa 1.21 ([63], trang 815) *(Phụ thuộc góc phần tư âm)*

Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là phụ thuộc góc phần tư âm (NQD) nếu với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$P(X \leq x,\ Y \leq y) \ \leq \ P(X \leq x)P(Y \leq y).$$

Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp (pairwise negatively quadrant dependent, PNQD) nếu X_i và X_j là NQD với mọi $i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j$.

Mệnh đề 1.22 ([63], trang 816) *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD nhận giá trị thực và $\{f_n, n \geq 1\}$ là một dãy các hàm không giảm (hoặc không tăng), trong đó $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Khi đó $\{f_n(X_n), n \geq 1\}$ cũng là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD.*

Dãy biến ngẫu nhiên NOD (negatively orthant dependent) được Ebrahimi và Ghosh [28] đưa ra vào năm 1981.

Định nghĩa 1.23 ([28], Định nghĩa 2.2) Một họ các biến ngẫu nhiên $\{X_1, \ldots, X_n\}$ được gọi là NOD nếu với mọi số thực $x_1, \ldots, x_n$ ta có

$$\begin{aligned} P(X_1 > x_1, \ldots, X_n > x_n) \ &\leq \ \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i), \\ P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \ &\leq \ \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i). \end{aligned}$$

Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là NOD nếu mọi dãy con hữu hạn của nó là NOD.

Nhận xét 1.24 Từ định nghĩa của dãy biến ngẫu nhiên NOD và PNQD ta thấy rằng NOD là PNQD nhưng chiều ngược lại không phải lúc nào cũng đúng. Phản ví dụ cho trường hợp này có thể xem trong bài báo của Wang và cộng sự [115].

Mệnh đề 1.25 ([28], trang 312) *Nếu $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên NOD và $\{f_n, n \geq 1\}$ là một dãy các hàm đo được, đơn điệu tăng (hoặc đơn điệu giảm), thì $\{f_n(X_n), n \geq 1\}$ cũng là một dãy các biến ngẫu nhiên NOD.*

Khái niệm liên kết âm (negative association, NA) được hai nhà toán học Alam và Saxena giới thiệu lần đầu vào năm 1981 (xem [56]), sau đó nhóm tác giả Joag-Dev và Proschan [55] đã đưa ra những kết quả nghiên cứu sâu hơn về đối tượng này.

Định nghĩa 1.26 ([55], Định nghĩa 2.1) *(Liên kết âm)*

Một họ các biến ngẫu nhiên $\{X_1, \ldots, X_n\}$ được gọi là liên kết âm (NA) nếu với mọi tập con rời nhau $A, B \subset \{1, \ldots, n\}$ và với mọi hàm thực không giảm theo từng tọa độ f trên $\mathbb{R}^{|A|}$ và g trên $\mathbb{R}^{|B|}$,

$$\mathrm{Cov}(f(X_k, k \in A), g(X_k, k \in B)) \leq 0, \tag{1.7}$$

trong đó giả thiết hàm hiệp phương sai Cov (covariance) tồn tại, kí hiệu $|A|$ là lực lượng của tập hợp A.

Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là NA nếu mọi dãy con hữu hạn của nó là NA.

Nhận xét 1.27 Rõ ràng dãy biến ngẫu nhiên NA là NOD. Tuy nhiên, chiều ngược lại không phải lúc nào cũng đúng. Joag-Dev và Proschan [55], nhóm tác giả Chen [15] đã đưa ra ví dụ mà NOD không là NA.

Dưới đây là ví dụ của nhóm tác giả Chen [15].

Ví dụ 1.28 ([15], Ví dụ 1) Cho (X_1, X_2, X_3) có bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

(x_1, x_2, x_3)	(0,0,0)	(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)	(1,0,0)	(1,0,1)	(1,1,0)	(1,1,1)
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Ta sẽ chỉ ra X_1, X_2, X_3 là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc trực giao âm. Với $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ ta có:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3) = 3/16,\ P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2)P(X_3 \leq x_3) = 1/4,$$
$$P(X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2, X_3 \geq x_3) = 1/2,\ P(X_1 \geq x_1)P(X_2 \geq x_2)P(X_3 \geq x_3) = 1/2.$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại. Do đó, với mọi x_1, x_2, x_3 bằng 0 hoặc 1, ta có:

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3) \leq P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2)P(X_3 \leq x_3),$$
$$P(X_1 \geq x_1, X_2 \geq x_2, X_3 \geq x_3) \leq P(X_1 \geq x_1)P(X_2 \geq x_2)P(X_3 \geq x_3).$$

Suy ra X_1, X_2, X_3 là các biến ngẫu nhiên phụ thuộc trực giao âm. Mặt khác,

$$P(X_1 \leq 0, X_2 + X_3 \leq 1) > P(X_1 \leq 0)P(X_2 + X_3 \leq 1),$$

do $P(X_1 \leq 0, X_2 + X_3 \leq 1) = 7/16$ và $P(X_1 \leq 0)P(X_2 + X_3 \leq 1) = 13/32$.

Do đó, X_1, X_2, X_3 không là các biến ngẫu nhiên liên kết âm.

Nhiều phân phối có cấu trúc liên kết âm đã được Joag-Dev và Proschan [55] chỉ ra, bao gồm các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn đồng thời tương quan âm, phân phối hoán vị (permutation distribution, Định nghĩa 2.10 trong [55]), phân phối mẫu ngẫu nhiên không hoàn lại (sampling without replacement), v.v. Để minh họa, chúng tôi sẽ trình bày một ví dụ về dãy liên kết âm ngay dưới đây.

Ví dụ 1.29 ([23], Bổ đề 8) Cho $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên nhận giá trị 0 hoặc 1 sao cho $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1$. Khi đó dãy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là liên kết âm.

Thật vậy, với A, B là hai tập con rời nhau của $\{1, 2, \ldots, n\}$, xét $f : \mathbb{R}^{|A|} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R}^{|B|} \to \mathbb{R}$ là các hàm tăng theo từng tọa độ. Đặt

$$f'(X) = f(X) - f(0), \quad g'(X) = g(X) - g(0).$$

Khi đó f' và g' cũng là các hàm tăng theo từng tọa độ và $f'(0) = g'(0) = 0$. Do $\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1$ nên có tối đa một trong các X_i nhận giá trị bằng 1, còn lại là bằng 0. Khi đó $f'(X_i, i \in A)g'(X_j, j \in B) = 0$. Suy ra,

$$E[f'(X_i, i \in A)g'(X_j, j \in B)] = 0 \leq E[f'(X_i, i \in A)]E[g'(X_j, j \in B)].$$

Mặt khác, $\forall\, i \in A, j \in B$ ta có

$$\begin{aligned} &E[f(X_i, i \in A)g(X_j, j \in B)] \\ &\quad = E[((f'(X_i) + f(0))(g'(X_j) + g(0))] \\ &\quad = E[f'(X_i)g'(X_j)] + f(0)E[g'(X_j)] + g(0)E[f'(X_i)] + f(0)g(0), \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &E[f(X_i, i \in A)]E[g(X_j, j \in B)] \\ &\quad = E[f(X_i) + f(0)]E[g(X_j) + g(0)] \\ &\quad = E[f'(X_i)]E[g'(X_j)] + f(0)E[g'(X_j)] + g(0)E[f'(X_i)] + f(0)g(0). \end{aligned}$$

Từ đó, $E[f(X_i, i \in A)g(X_j, j \in B)] \leq E[f(X_i, i \in A)]E[g(X_j, j \in B)]$, điều kiện (1.7) được thỏa mãn.

Mệnh đề 1.30 ([55], Tính chất P_2, trang 288) *Cho $X_1, \ldots, X_n$ là một dãy các biến ngẫu nhiên liên kết âm và $A_1, \ldots, A_m$ là các tập con rời nhau của $\{1, \ldots, n\}$. Với mỗi $1 \leq i \leq m$, xét $f_i : \mathbb{R}^{|A_i|} \to \mathbb{R}$ là các hàm dương và đơn điệu tăng. Khi đó,*

$$E\Big(\prod_{i=1}^{m} f_i(X_j, j \in A_i)\Big) \leq \prod_{i=1}^{m} E\left(f_i(X_j, j \in A_i)\right).$$

Mệnh đề 1.31 ([55], Tính chất P_6, trang 288) *Cho $X_1, \ldots, X_n$ là một dãy các biến ngẫu nhiên liên kết âm và $A_1, \ldots, A_m$ là các tập con rời nhau của $\{1, \ldots, n\}$. Với mỗi $1 \leq j \leq m$, xét $f_j : \mathbb{R}^{|A_j|} \to \mathbb{R}$ là các hàm đơn điệu. Khi đó, dãy các biến ngẫu nhiên*

$$f_1(X_k, k \in A_1), \ldots, f_m(X_k, k \in A_m)$$

cũng là liên kết âm.

Trong việc chứng minh Luật số lớn, có một sự khác biệt quan trọng giữa dãy biến ngẫu nhiên độc lập và dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Với một dãy biến ngẫu nhiên độc lập $\{X_n, n \geq 1\}$, việc chặt cụt một biến ngẫu nhiên thông thường (chẳng hạn $Y_n = X_n I_{(|X_n| \leq c)}$) vẫn đảm bảo tính độc lập. Tuy nhiên, với dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, việc chặt cụt có thể phá vỡ tính liên kết âm.

Ví dụ sau cho thấy một trường hợp đơn giản, việc chặt cụt hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc có tương quan âm lại tạo ra cặp biến ngẫu nhiên mới có tương quan dương. Cho véctơ ngẫu nhiên rời rạc (X, Y) có bảng phân phối xác suất đồng thời dưới đây:

X \ Y	-1	1
-1	1/8	1/4
0	1/8	1/8
1	1/4	1/8

Bảng 1.1: Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y)

Từ bảng phân phối xác suất đồng thời, X, Y là hai biến ngẫu nhiên phụ thuộc có $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - EX.EY = (-1/4) - 0.0 = -1/4 < 0$. Xét biến ngẫu nhiên mới $X' = I_{(X=1)}$ và $Y' = I_{(Y=-1)}$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
&EX' = P(X = 1) = 1/4 + 1/8 = 3/8,\\
&EY' = P(Y = -1) = 1/8 + 1/8 + 1/4 = 1/2,\\
&E\,(X'Y') = P(X = 1, Y = -1) = 1/4,\\
&\text{Cov}\,(X', Y') = E\,(X'Y') - EX'.EY' = 1/4 - (3/8)(1/2) = 1/16 > 0.
\end{aligned}$$

Để giải quyết vấn đề này, các nhà toán học đã đưa ra một kỹ thuật chặt cụt cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm để bảo toàn tính liên kết âm.

Hệ quả 1.32 ([34], trang 48) *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Khi đó với mọi $a_n, b_n \in \mathbb{R},\ a_n \leq b_n$, dãy biến ngẫu nhiên $Y_n = f_n(X_n)$ trong đó,*

$$f_n(x) = a_n I_{(-\infty, a_n)}(x) + x I_{[a_n, b_n]}(x) + b_n I_{(b_n, \infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

là liên kết âm.

Hệ quả 1.33 ([34], trang 48) *Cho* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, khi đó dãy* $\{X_n^+, n \geq 1\}$ *và* $\{X_n^-, n \geq 1\}$ *cũng là dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.*

Mệnh đề 1.34 ([90], Bổ đề 1) *Cho* $\{X_n, n \geq 1\}$ *và* $\{Y_n, n \geq 1\}$ *là các dãy biến ngẫu nhiên không âm, liên kết âm và độc lập với nhau. Khi đó* $\{X_nY_n, n \geq 1\}$ *cũng là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.*

Chứng minh. Với hai tập con rời nhau $A, B \subset \{1, 2, ..., n\}$ và với f, g là các hàm không giảm theo từng tọa độ sao cho hiệp phương sai trong (1.7) tồn tại. Kí hiệu $E_{\mathbb{X}}$ và $E_{\mathbb{Y}}$ lần lượt là kỳ vọng của $\{X_k, k \in A \cup B\}$ và $\{Y_k, k \in A \cup B\}$. Ta có:

$$
\begin{aligned}
&E(f(X_iY_i, i \in A)g(X_jY_j, j \in B)) \\
&= \int \cdots \int f(x_iy_i, i \in A)g(x_jy_j, j \in B)dF_{X_i,X_j,Y_i,Y_j:i\in A,j\in B}(x_i, x_j, y_i, y_j : i \in A, j \in B) \\
&= \int \cdots \int E_{\mathbb{Y}}[f(x_iY_i, i \in A)g(x_jY_j, j \in B)]dF_{X_i,X_j:i\in A,j\in B}(x_i, x_j : i \in A, j \in B) \\
&\qquad \text{(Theo tính độc lập của hai dãy } \{X_n, n \geq 1\}, \{Y_n, n \geq 1\}) \\
&\leq \int \cdots \int E_{\mathbb{Y}}[f(x_iY_i, i \in A)]E_{\mathbb{Y}}[g(x_jY_j, j \in B)]dF_{X_i,X_j:i\in A,j\in B}(x_i, x_j, i \in A, j \in B) \\
&\qquad \text{(Theo tính chất liên kết âm của dãy } \{Y_n, n \geq 1\}) \\
&\quad = E_{\mathbb{X}}\Big[E_{\mathbb{Y}}\left(f(X_iY_i, i \in A)\right)E_{\mathbb{Y}}\left(g(X_jY_j, j \in B)\right)\Big] \\
&\leq E_{\mathbb{X}}\Big[E_{\mathbb{Y}}\left(f(X_iY_i, i \in A)\right)\Big]E_{\mathbb{X}}\Big[E_{\mathbb{Y}}\left(g(X_jY_j, j \in B)\right)\Big] \\
&\qquad \text{(Theo tính chất liên kết âm của dãy } \{X_n, n \geq 1\}) \\
&\quad = Ef(X_iY_i, i \in A)Eg(X_jY_j, j \in B). \\
&\qquad \text{(Theo tính độc lập của hai dãy } \{X_n, n \geq 1\}, \{Y_n, n \geq 1\}).
\end{aligned}
$$

Do đó, $\{X_1Y_1, \ldots, X_nY_n\}$ là một dãy liên kết âm với mọi $n \geq 1$. □

Bổ đề 1.35 ([66], Bổ đề 3.1) *Cho* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và* $\{a_{nj}, 1 \leq j \leq n, n \geq 1\}$ *là một mảng các số thực. Khi đó, tồn tại một hằng số* $C > 0$ *sao cho với mọi* $n \geq 1$ *và với mọi* $\varepsilon > 0$*, ta có:*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} P(|a_{nj}X_j| > \varepsilon) \leq (1 + C)P\left(\max_{1\leq j\leq n} |a_{nj}X_j| > \varepsilon\right) \\
+ \sum_{j=1}^{n} P(|a_{nj}X_j| > \varepsilon)P\left(\max_{1\leq j\leq n} |a_{nj}X_j| > \varepsilon\right).
\end{aligned}
$$

Ngoài ra, nếu $\lim_{n\to\infty} P(\max_{1\leq j\leq n} |a_{nj}X_j| > \varepsilon) = 0$ *với mọi* $\varepsilon > 0$*, thì tồn tại một hằng số* $C > 0$ *sao cho với mọi* n *đủ lớn và với mọi* $\varepsilon > 0$*, bất đẳng thức sau được thỏa mãn:*

$$
\sum_{j=1}^{n} P(|a_{nj}X_j| > \varepsilon) \leq CP\left(\max_{1\leq j\leq n} |a_{nj}X_j| > \varepsilon\right).
$$

Việc nghiên cứu các kết quả hội tụ cho dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc NQD, NOD và NA nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trên thế giới. Bên cạnh đó, việc mở rộng các khái niệm này sang không gian Hilbert cũng được một số nhà toán học quan tâm. Cụ thể, Hiền và cộng sự [44] đã mở rộng khái niệm NOD, tác giả Huấn [51], Ko và cộng sự [59], Thành [102] đã mở rộng khái niệm NA trong không gian Hilbert. Đáng chú ý, khái niệm dãy vectơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ đã được giới thiệu bởi Dũng và cộng sự [25]. Để đi sâu tìm hiểu khái niệm này, xét $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert thực tách được với chuẩn $\|.\|$ được sinh bởi tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và $\{e_j, j \in B\}$ là một cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{H}$. Cho X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị, kí hiệu $X^j := \langle X, e_j\rangle$. Khi đó $X = \sum\limits_{j\in B}\langle X, e_j\rangle e_j = \sum\limits_{j\in B} X^j e_j$.

Định nghĩa 1.36 ([25], trang 460) (*PNQD theo tọa độ*)

Một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là PNQD theo tọa độ nếu với mọi $j \in B$, dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n^j, n \geq 1\}$ là PNQD.

Trong định nghĩa trên, không có ràng buộc NQD nào giữa hai tọa độ khác nhau của một véctơ.

Ví dụ 1.37 ([25], Ví dụ 2.2) Cho $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD. Với mỗi $n \geq 1$, $j \in B$, đặt $X_n^j = |c_j|Y_n$ trong đó $\sum\limits_{j\in B} c_j^2 < \infty$. Xét $X_n = \sum\limits_{j\in B} X_n^j e_j$, $n \geq 1$, khi đó $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ.

Nếu một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị là độc lập từng cặp thì nó là PNQD theo tọa độ nhưng điều ngược lại không đúng. Ví dụ dưới đây chỉ ra một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ nhưng không độc lập từng cặp.

Ví dụ 1.38 ([25], Ví dụ 2.3) Cho $\{Z_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng có phân phối chuẩn tắc $N(0, 1)$. Khi đó $\{Z_n - Z_{n+1}, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên có cùng phân phối chuẩn $N(0, 2)$. Gọi F là hàm phân phối của $N(0, 2)$ và $\{F_n, n \geq 1\}$ là một dãy các hàm phân phối F_n liên tục. Với $n \geq 1$, đặt

$$F_n^{-1}(t) = \inf\{x : F_n(x) \geq t\},\ 0 \leq t \leq 1 \quad \text{và} \quad Y_n = F_n^{-1}(F(Z_n - Z_{n+1})).$$

Nhóm nghiên cứu của Li [65] đã chứng minh $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD và hàm phân phối xác suất của Y_n là F_n. Với mỗi $n \geq 1, j \in B$, đặt $X_n^j = a_j Y_n$ trong đó $a_j \geq 0$ với mọi $j \geq 1$ và $\sum\limits_{j\in B} a_j^{\alpha/2} < \infty$. Áp dụng tính chất của hàm hiệp phương sai Cov ta có

$$\mathrm{Cov}(Z_n - Z_{n+1}, Z_{n+1} - Z_{n+2}) = -1.$$

Suy ra, X_n và X_{n+1} không độc lập. Do đó $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên không độc lập từng cặp.

Mệnh đề 1.39 ([18], Bổ đề 4) *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ thỏa mãn mỗi tọa độ X^j không âm và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực không âm PNQD. Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là độc lập. Khi đó $\{X_nY_n, n \geq 1\}$ cũng là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ.*

Chứng minh. Áp dụng giả thiết của dãy $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$, Mệnh đề 1.22(i), ta có với mọi $t \geq 0$, $z \geq 0$, $k \neq l$ và với mỗi $j \in B$,

$$\begin{aligned}
&P(X_k^j Y_k \leq t, X_l^j Y_l \leq z)\\
&= \int \dots \int I_{(x_k y_k \leq t, x_l y_l \leq z)} dF_{X_k^j, X_l^j, Y_k, Y_l}(x_k, x_l, y_k, y_l)\\
&= \int \dots \int I_{(x_k y_k \leq t, x_l y_l \leq z)} dF_{X_k^j, X_l^j}(x_k, x_l) dF_{Y_k^j, Y_l^j}(y_k, y_l)\\
&= \int \dots \int P(x_k Y_k \leq t, x_l Y_l \leq z) dF_{X_k^j, X_l^j}(x_k, x_l)\\
&\leq \int \dots \int P(x_k Y_k \leq t) P(x_l Y_l \leq z) dF_{X_i^j, X_j^j}(x_k, x_l)\\
&\leq E\Big(F_{Y_k}(t/X_k^j) F_{Y_l}(z/X_l^j)\Big)\\
&\leq E(F_{Y_k}(t/X_k^j))\ E(F_{Y_l}(z/X_l^j))\\
&= \iint I_{(x_k y_k \leq t)} dF_{Y_k}(y_k) dF_{X_k^j}(x_k) \iint I_{(x_l y_l \leq z)} dF_{Y_l}(y_l) dF_{X_l^j}(x_l)\\
&= \iint I_{(x_k y_k \leq t)} dF_{X_k^j, Y_k}(x_k, y_k) \iint I_{(x_l y_l \leq z)} dF_{X_l^j, Y_l}(x_l, y_l)\\
&= P(X_k^j Y_k \leq t) P(X_l^j Y_l \leq z).
\end{aligned}$$

Vậy $\{X_nY_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ. □

1.4 Một số dạng hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên

Chúng tôi sẽ trình bày một vài dạng hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên thực và của dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Hilbert sẽ được nhắc tới trong phần sau của luận án.

Định nghĩa 1.40 ([37], trang 202, 203) (*Các dạng hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên thực*)

Cho X là một biến ngẫu nhiên và $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

i) (*Hội tụ theo xác suất*) Ta nói X_n hội tụ theo xác suất đến biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{P} X$, nếu với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

ii) (*Hội tụ hầu chắc chắn*) Ta nói X_n hội tụ hầu chắc chắn đến biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{h.c.c.} X$, nếu

$$P(\{\omega \in \Omega \ : \ \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\}) = 1.$$

iii) (*Hội tụ đầy đủ*) Ta nói X_n hội tụ đầy đủ đến biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{c.c.} X$, nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.$$

Áp dụng bổ đề Borel-Cantelli, sự hội tụ đầy đủ suy ra sự hội tụ hầu chắc chắn nhưng điều ngược lại không đúng. Mối quan hệ giữa ba dạng hội tụ này được thể hiện qua sơ đồ dưới đây:

$$X_n \xrightarrow{c.c.} X \implies X_n \xrightarrow{h.c.c.} X \implies X_n \xrightarrow{P} X.$$

Tuy nhiên, khi dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ là độc lập và $X \equiv C$ là một hằng số thì sự hội tụ đầy đủ và sự hội tụ hầu chắc chắn là tương đương nhau (xem Định lý 5.3.2 trong [37]).

Các dạng hội tụ của dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Hilbert cũng được định nghĩa tương tự như đối với dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực.

Định nghĩa 1.41 *(Các dạng hội tụ của dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị)*

Cho X là một véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị và $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị.

i) (*Hội tụ theo xác suất*) Ta nói X_n hội tụ theo xác suất đến véctơ ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{P} X$, nếu với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\|X_n - X\| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

ii) (*Hội tụ hầu chắc chắn*) Ta nói X_n hội tụ hầu chắc chắn đến véctơ ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{h.c.c.} X$, nếu

$$P(\{\omega \in \Omega \ : \ \lim_{n\to\infty} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| = 0\}) = 1.$$

iii) (*Hội tụ đầy đủ*) Ta nói X_n hội tụ đầy đủ đến véctơ ngẫu nhiên X, kí hiệu $X_n \xrightarrow{c.c.} X$, nếu

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\|X_n - X\| > \varepsilon) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.$$

Kết luận Chương 1

Chương 1 đã nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích và xác suất có liên quan đến nội dung luận án, gồm một số kiến thức cơ bản của lớp hàm biến đổi chính quy, véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trên không gian Hilbert, một số dạng phụ thuộc và hội tụ của dãy biến ngẫu nhiên.

Phần tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày các kết quả của luận án.

Chương 2

Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm

Năm 2003, tác giả Jajte [52] đã thiết lập luật mạnh số lớn cho một lớp tổng trọng số của dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Kết quả của ông đã khái quát một số định lý cổ điển cho dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Kết quả này được phát biểu như sau.

Định lý 2.1 ([52], trang 410) *Cho* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Cho* $g(x)$ *là một hàm dương, tăng thỏa mãn* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ *và* $h(x)$ *là một hàm dương sao cho* $\phi(x) = g(x)h(x)$ *thỏa mãn các điều kiện dưới đây:*

(i) Với $d \geq 0$, $\phi(x)$ *là hàm tăng chặt trên* $[d, \infty)$ *và nhận giá trị trên* $[0, \infty)$,

(ii) Tồn tại hằng số C *và số nguyên dương* k_0 *sao cho* $\frac{\phi(x+1)}{\phi(x)} \leq C$ *với mọi* $x \geq k_0$,

(iii) Tồn tại các hằng số a *và* b *sao cho với mọi* $s > d$,

$$\phi^2(s) \int_s^\infty \frac{1}{\phi^2(x)} dx \leq as + b.$$

Nếu $E\phi^{-1}(|X_1|) < \infty$ *thì*

$$\frac{1}{g(n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - m_i}{h(i)} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \tag{2.1}$$

trong đó $m_i = E(X_i I_{(|X_i| \leq \phi(i))})$ *và* ϕ^{-1} *là hàm nghịch đảo của* ϕ.

Jajte chỉ ra rằng trong lớp hàm chuẩn hóa trên, ta có thể thu được luật số lớn dạng trung bình Cesaro ($g(x) = x, h(x) = 1$), trung bình logarit ($g(x) = \log x, h(x) = x$) và luật số lớn Marcinkiewicz-Zygmund ($g(x) = x^{1/\alpha}, h(x) = 1$, với $\alpha \in (0, 2), \alpha \neq 1$). Jajte cũng chứng minh rằng điều kiện mômen $E\phi^{-1}(|X_1|) < \infty$ là điều kiện cần cho (2.1). Sau khi công bố, kết quả này đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Jing và Liang [54] đã mở rộng kết quả này cho các biến ngẫu nhiên liên kết âm, Meng và Lin [74] đã mở rộng cho các biến ngẫu nhiên $\tilde{\rho}$-mixing (xem Định nghĩa A.22), Wang [107] đã mở rộng cho các biến ngẫu nhiên liên kết âm không cùng phân phối. Trong những năm gần đây, nhiều tác giả vẫn tiếp tục nghiên cứu các định lý giới hạn dạng (2.1) và đã thu được nhiều kết quả quan trọng.

Bên cạnh đó, việc nghiên cứu tốc độ hội tụ của Luật số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cũng nhận được sự quan tâm của nhiều tác giả, chẳng hạn Baum và Katz [8], Heyde và Rohatgi [43], Rohatgi [82], Alf [3], Alsmeyer [4], Hu và Weber [50]. Trong đó, chúng tôi nhắc lại kết quả của Baum và Katz dưới đây:

Định lý 2.2 ([8], Định lý 3) *Cho $r \geq 1$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) $E|X|^r < \infty$ *và* $EX = \mu$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\Big(|S_n - n\mu| > \varepsilon n\Big) < \infty \quad$ *với mọi* $\varepsilon > 0$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k - k\mu| > \varepsilon n\Big) < \infty \quad$ *với mọi* $\varepsilon > 0$.

Trường hợp $r = 1$ và $r = 2$ đã được chứng minh lần lượt bởi Spitzer [91] và Erdös [30].

Chúng tôi tiếp tục phát triển kỹ thuật của Jajte để nghiên cứu sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và thiết lập định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát (xem Định lý 2.4, Định lý 2.9, Định lý 2.11). Việc áp dụng các kết quả này cho phép đưa ra tốc độ hội tụ cho ước lượng vững đầy đủ[1] trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn (Định lý 2.17) và trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên (Định lý 2.19). Ngoài ra, chúng tôi đưa ra hai ví dụ mô phỏng để kiểm chứng hiệu quả của các kết quả lý thuyết (xem Ví dụ 2.21, Ví dụ 2.23).

2.1 Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm

Dựa trên lớp hàm ϕ trong bài báo của Jaite (Định lý 2.1), chúng tôi lần lượt xét các lớp hàm $\boldsymbol{\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}_r}$ và $\boldsymbol{\mathcal{L}^{\beta}_{r,\kappa}}$ dưới đây.

Lớp $\boldsymbol{\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}}$ gồm tất cả các hàm ϕ thỏa mãn các điều kiện sau:

(iv) $\phi(x)$ là một hàm tăng chặt trên $[0, +\infty)$ và nhận giá trị trên $[0, \infty)$,

(v) Tồn tại hằng số dương a, b và số nguyên dương n_0 thỏa mãn

$$\phi^{\alpha}(s) \int_s^{\infty} \frac{x^{r-1}dx}{\phi^{\alpha}(x)} \leq aR(s) + b, \quad s > n_0,$$

trong đó $r \geq 1, \alpha \in (1, 2]$, $R = R(s)$ là một hàm tăng chặt xác định trên $(0, +\infty)$ và nhận giá trị trên $(0, +\infty)$. Khi $R(s) = s^r$, lớp $\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$ được kí hiệu bởi $\boldsymbol{\mathcal{K}^{\alpha}_{r}}$. Chú ý rằng, lớp $\mathcal{K}^{\alpha}_{r}$ chứa các hàm chuẩn hóa cơ bản và quan trọng, chẳng hạn $\phi(x) = x^p, r < \alpha p$ và các hàm biến đổi chính quy với chỉ số p $(r < \alpha p)$.

[1] Ở đây, sự hội tụ được hiểu theo nghĩa hội tụ đầy đủ.

Lớp $\boldsymbol{\mathcal{H}_r}$ gồm tất cả các hàm ϕ thỏa mãn các điều kiện sau:

(vi) Tồn tại N sao cho $\dfrac{\phi(2x)}{\phi(x)} \leq N$ với mọi $x > 0$,

(vii) Tồn tại hằng số dương c, d và số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $s > n_0$,

$$\phi(s) \int_1^s \frac{x^{r-1}dx}{\phi(x)} \leq cs^r + d, \quad r \geq 1.$$

Khi $\alpha > 2$, xét lớp $\boldsymbol{\mathcal{L}^{\beta}_{r,\kappa}}$ (trong đó $\beta, \kappa, r > 0$), gồm tất cả các hàm ϕ thỏa mãn điều kiện:

(viii) Tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho với mọi $s > n_0$,

$$\phi^{\beta}(s) \int_1^s \frac{x^{r-1}dx}{\phi^{\beta}(x)} \geq \frac{s^r}{\kappa} \quad \text{với mọi} \quad s > n_0.$$

Dựa trên tính chất giải tích của lớp $\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$, chúng tôi đưa ra các điều kiện để thiết lập định lý hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa $\phi \in \mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$ với $\alpha \in (1, 2]$ (xem Định lý 2.4). Trong Định lý 2.9, chúng tôi đưa ra Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa $\phi \in \mathcal{K}^{\alpha}_{r} \cap \mathcal{H}_r$ với $\alpha \in (1, 2]$. Khi $\alpha > 2$, chúng tôi tiếp tục thiết lập Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với hàm chuẩn hóa $\phi \in \mathcal{K}^{\alpha}_{r} \cap \mathcal{H}_r \cap \mathcal{L}^{\beta}_{r,\kappa}$ (xem Định lý 2.11).

Trước khi đi vào chi tiết, chúng tôi nhắc lại bất đẳng thức cực đại Rosenthal cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.

Bổ đề 2.3 ([86], Định lý 2) *Cho $p \geq 1$, $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm có kỳ vọng bằng 0 và $E|X_i|^p < \infty$ với mọi $1 \leq i \leq n$. Khi đó,*

i) $E \max\limits_{1 \leq k \leq n} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} X_i \right|^p \leq 2^{3-p} \sum\limits_{i=1}^{n} E|X_i|^p$ *với* $1 < p \leq 2$,

ii) $E \max\limits_{1 \leq k \leq n} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} X_i \right|^p \leq 2(15p/\log p)^p \left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} EX_i^2 \right)^{p/2} + \sum\limits_{i=1}^{n} E|X_i|^p \right)$ *với* $p > 2$.

Kết quả dưới đây đưa ra các điều kiện để thiết lập định lý hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy hàm chuẩn hóa thuộc lớp $\mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$.

Định lý 2.4 *Cho $r \geq 1$, $\alpha \in (1, 2]$, $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối và $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}|^{\alpha}) = O(n). \tag{2.2}$$

Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ *và* $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ *là độc lập. Nếu tồn tại* $\phi \in \mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$ *sao cho* $E(\phi^{-1}(|X|))^r < \infty$ *và* $E[R(\phi^{-1}(|X|))] < \infty$*, thì với mọi* $\varepsilon > 0$*,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i I_{(|X_i|\leq \phi(n))})) \right| > \varepsilon\phi(n) \right) < \infty. \tag{2.3}$$

Chứng minh. Ta viết

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i I_{(|X_i|\leq\phi(n))})) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{k} [A^+_{ni}X^+_i - E(A^+_{ni}X^+_i I_{(X^+_i\leq\phi(n))})] - \sum_{i=1}^{k} [A^-_{ni}X^+_i - E(A^-_{ni}X^+_i I_{(X^+_i\leq\phi(n))})] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} [A^+_{ni}X^-_i - E(A^+_{ni}X^-_i I_{(X^-_i\leq\phi(n))})] + \sum_{i=1}^{k} [A^-_{ni}X^-_i - E(A^-_{ni}X^-_i I_{(X^-_i\leq\phi(n))})].
\end{aligned}$$

Theo Hệ quả 1.33, $\{X^+_n, n \geq 1\}$, $\{X^-_n, n \geq 1\}$ là các dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và $\{A^+_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$, $\{A^-_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ cũng là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm. Do đó, không mất tổng quát, ta giả sử rằng $A_{ni} \geq 0$ hầu chắc chắn và $X_n \geq 0$ hầu chắc chắn với mọi $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$.
Đặt

$$S_{nk} = \sum_{i=1}^{k} \left[A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i I_{(X_i\leq\phi(n))}) \right].$$

Với mọi $\varepsilon > 0$ cố định, ta có

$$\begin{aligned}
P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_{nk}| > \varepsilon\phi(n) \right) &\leq \sum_{i=1}^{n} P(X_i > \phi(n)) \\
&+ P\left(\max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} [A_{ni}X_i I_{(X_i\leq\phi(n))} - E(A_{ni}X_i I_{(X_i\leq\phi(n))})] \right| > \varepsilon\phi(n) \right).
\end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng Bổ đề A.10 ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} \sum_{i=1}^{n} P(X_i > \phi(n)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-r}} P(X > \phi(n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-r}} \sum_{k=n}^{\infty} P(k < \phi^{-1}(X) \leq k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(k < \phi^{-1}(X) \leq k+1) \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{1-r}} \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{r}\right) \sum_{k=1}^{\infty} k^r P(k < \phi^{-1}(X) \leq k+1) \\
&= \left(1 + \frac{1}{r}\right) \sum_{k=1}^{\infty} E\Big((\phi^{-1}(X))^r I_{(k<\phi^{-1}(X)\leq k+1)} \Big) \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{r}\right) E(\phi^{-1}(X))^r < \infty.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Để hoàn thành chứng minh, ta cần chỉ ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\le k\le n} \left| \sum_{i=1}^{k} [A_{ni} X_i I_{(X_i \le \phi(n))} - E(A_{ni} X_i I_{(X_i \le \phi(n))})] \right| > \varepsilon \phi(n) \right) < \infty.$$

Với $n \ge 1, 1 \le i \le k \le n$, kí hiệu

$$Y_{ni} = X_i I_{(X_i \le \phi(n))} + \phi(n) I_{(X_i > \phi(n))}, \quad Z_{ni} = \phi(n) I_{(X_i > \phi(n))}$$
$$U_k = \sum_{i=1}^{k} [A_{ni} Y_{ni} - E(A_{ni} Y_{ni})], \quad V_k = \sum_{i=1}^{k} [A_{ni} Z_{ni} - E(A_{ni} Z_{ni})].$$

Do Y_{ni} và Z_{ni} là các hàm tăng đối với X_i, theo Mệnh đề 1.31, với mỗi $n \ge 1$, $\{Y_{ni}, 1 \le i \le n\}$ và $\{Z_{ni}, 1 \le i \le n\}$ cũng là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Khi đó, theo Mệnh đề 1.34, với mỗi $n \ge 1$, $\{A_{ni} Y_{ni} - E(A_{ni} Y_{ni}), 1 \le i \le n\}$ và $\{A_{ni} Z_{ni} - E(A_{ni} Z_{ni}), 1 \le i \le n\}$ cũng là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\le k\le n} \left| \sum_{i=1}^{k} [A_{ni} X_i I_{(X_i \le \phi(n))} - E(A_{ni} X_i I_{(X_i \le \phi(n))})] \right| > \varepsilon \phi(n) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\le k\le n} |U_k - V_k| > \varepsilon \phi(n) \right) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\le k\le n} |V_k| > \frac{\varepsilon \phi(n)}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\le k\le n} |U_k| > \frac{\varepsilon \phi(n)}{2} \right) \\
&:= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Xét I_1,

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \frac{2^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r} \phi^\alpha(n)} E(\max_{1\le k\le n} |V_k|^\alpha) \\
&\le \frac{8}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r} \phi^\alpha(n)} \sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}|^\alpha |Z_{ni}|^\alpha) = \frac{8}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(X > \phi(n))}{n^{2-r}} \sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}|^\alpha) \\
&\le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(X > \phi(n))}{n^{1-r}} \le C E(\phi^{-1}(X))^r < \infty,
\end{aligned}$$

trong đó chúng tôi lần lượt áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), bất đẳng thức cực đại Rosenthal cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm (Bổ đề 2.3) và điều kiện (2.2). Tiếp tục áp dụng những bất đẳng thức này ta được

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \frac{2^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r} \phi^\alpha(n)} E(\max_{1\le k\le n} |U_k|^\alpha) \le \frac{2^3}{\varepsilon^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} \sum_{i=1}^{n} \frac{E(|A_{ni}|^\alpha |Y_{ni}|^\alpha)}{\phi^\alpha(n)} \\
&\le C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-r}} P(X > \phi(n)) + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} \sum_{i=1}^{n} \frac{E(|A_{ni}|^\alpha |X_i|^\alpha I_{(X_i \le \phi(n))})}{\phi^\alpha(n)} \\
&\le C E(\phi^{-1}(X))^r + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r} \phi^\alpha(n)} E(X^\alpha I_{(X \le \phi(n))}) \sum_{i=1}^{n} E|A_{ni}|^\alpha
\end{aligned}$$

$$\leq CE((\phi^{-1}(X))^r) + C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(X^\alpha I_{(X\leq\phi(n))})}{n^{1-r}\phi^\alpha(n)}.$$

Để chứng minh $I_2 < \infty$, ta chỉ cần chỉ ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(X^\alpha I_{(X\leq\phi(n))})}{n^{1-r}\phi^\alpha(n)} < \infty.$$

Đặt $k_0 = \max\{\lfloor\phi^{-1}(X)\rfloor + 1, n_0\}$. Do $\phi \in \mathcal{K}^\alpha_{r,R}$, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^\alpha I_{(X\leq\phi(n))}}{n^{1-r}\phi^\alpha(n)} &\leq \sum_{n=1}^{k_0}\frac{1}{n^{1-r}} + \sum_{n=k_0+1}^{\infty}\frac{X^\alpha I_{(X\leq\phi(n))}}{n^{1-r}\phi^\alpha(n)} \\
&\leq k_0^r + 2^{r-1}X^\alpha\sum_{n=\lfloor\phi^{-1}(X)\rfloor+2}^{\infty}\frac{(n-1)^{r-1}}{\phi^\alpha(n)} \\
&\leq (\lfloor\phi^{-1}(X)\rfloor + 1 + n_0)^r + 2^{r-1}X^\alpha\int_{\phi^{-1}(X)}^{\infty}\frac{x^{r-1}dx}{\phi^\alpha(x)} \\
&\leq 2^{r-1}(\phi^{-1}(X))^r + 2^{r-1}(1+n_0)^r + 2^{r-1}\Big[aR(\phi^{-1}(X)) + b\Big],
\end{aligned}$$

điều này suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(X^\alpha I_{(X\leq\phi(n))})}{n^{1-r}\phi^\alpha(n)} \leq 2^{r-1}\left[E(\phi^{-1}(X))^r + (1+n_0)^r + aE(R(\phi^{-1}(X))) + b\right] < \infty.$$

Chứng minh Định lý 2.4 được hoàn thành. □

Chú ý 2.5 Trong Định lý 2.4, nếu $\phi \in \mathcal{K}^\alpha_r$ thì $E[R(\phi^{-1}(|X|))] = E(\phi^{-1}(|X|))^r < \infty$, do đó điều kiện $E[R(\phi^{-1}(|X|))] < \infty$ có thể bỏ qua.

Để minh họa kết quả Định lý 2.4, chúng tôi sẽ trình bày ví dụ về phân phối Pareto hai phía.

Ví dụ 2.6 Cho $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên có phân phối Pareto hai phía với hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{2|x|^{\theta+1}} & \text{nếu } |x| > 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại,} \end{cases}$$

trong đó $0 < \theta < \alpha$. Giả sử $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.

- Với $0 < rp < \theta$, đặt $\phi(x) = x^{1/p}$.
  Dễ thấy $\phi \in \mathcal{K}^\alpha_r$ và $E(\phi^{-1}(|X|)^r) = E(|X|^{rp}) < \infty$. Do đó, với mọi mảng biến ngẫu nhiên $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ thỏa mãn điều kiện (2.2) và với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\left(\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{i=1}^{k}[A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_iI_{(|X_i|\leq n^{1/p})})]\right| > \varepsilon n^{1/p}\right) < \infty. \quad (2.5)$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder (Bổ đề A.5) và (2.2) ta có

$$E(|A_{ni}|) \le n^{1-\frac{1}{\alpha}} \Big(\sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}|^{\alpha}) \Big)^{\frac{1}{\alpha}} \le Cn. \tag{2.6}$$

Khi $1 < \theta < \alpha$ thì $EX = 0$, từ (2.6),

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{n} |E(A_{ni} X_i I_{(|X_i| \le \phi(n))})|}{n^{1/p}} &\le \frac{E(|X| I_{(|X| > n^{1/p})})}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}|) \\ &\le CE(n^{\frac{p-1}{p}} |X| I_{(|X| > n^{1/p})}) \\ &\le CE(|X|^{p-1} |X| I_{(|X| > n^{1/p})}) = CE(|X|^{p} I_{(|X| > n^{1/p})}) \\ &\le CE(|X|^{rp} I_{(|X| > n^{1/p})}) \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \end{aligned}$$

Kết hợp với (2.5), ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1 \le k \le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_{ni} X_i \Big| > \varepsilon n^{1/p} \Big) < \infty. \tag{2.7}$$

- Xét trường hợp $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập, nếu $rp \ge \theta$ thì kết quả (2.7) không còn đúng nữa. Thật vậy, do $X, X_1, X_2, \ldots$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và đối xứng, khi đó kết hợp Bổ đề A.14 và Bổ đề A.15 với $x > 0$, $0 < \delta < 1$ và n đủ lớn, ta có

$$\begin{aligned} 2P\Big(\Big| \sum_{k=1}^{n} X_k \Big| > x \Big) &\ge P\Big(\max_{1 \le k \le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} X_i \Big| > x \Big) \\ &\ge P\Big(\max_{1 \le k \le n} |X_k| > 2x \Big) = 1 - \Big(1 - P(|X| > 2x) \Big)^{n} \\ &\ge (1-\delta) n P(|X| > 2x) \ge (1-\delta) n \frac{1}{(2x)^{\theta}}. \end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1 \le k \le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} X_i \Big| > \varepsilon n^{1/p} \right) \ge \frac{1-\delta}{2(2\varepsilon)^{\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-(rp-\theta)/p}} = \infty.$$

Lấy hàm $\phi(x) = x^{\frac{r}{\alpha}} \log^{\frac{r}{\gamma}} x$ trong đó $r > 0$, $1 < \alpha \le 2$ và $\alpha r > \gamma$. Khi đó $\phi \in \mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$ với $R(x) = x^r \log x$. Chúng ta thu được Hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.7 *Cho $r \ge 1$, $1 < \alpha \le 2$, $\alpha r > \gamma$ và $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với $EX = 0$ và $E\left(|X|^{\alpha} \log^{1-\frac{r\alpha}{\gamma}}(|X|)\right) < \infty$, $\{A_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng thỏa mãn (2.2). Giả sử $\{X_n, n \ge 1\}$ và $\{A_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ độc lập với nhau.*
Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1 \le k \le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_{ni} X_i \Big| > \varepsilon n^{\frac{r}{\alpha}} \log^{\frac{r}{\gamma}} n \right) < \infty.$$

Chú ý 2.8 Năm 2011, Sung [98] đã chứng minh rằng: Với $1 < \alpha \leq 2$, $\alpha > \gamma$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với $EX = 0$. Nếu $E|X|^\alpha < \infty$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} a_{ni} X_n \right| > \varepsilon n^{\frac{1}{\alpha}} \log^{\frac{1}{\gamma}} n \right) < \infty, \tag{2.8}$$

trong đó $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là các hằng số thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^\alpha = O(n).$$

Ngoài ra, Hệ quả 2.2 trong bài báo năm 2014 của Chen và Sung [14] đã chỉ ra rằng kết quả (2.8) đúng với điều kiện gần như tối ưu là $E\left(|X|^\alpha \log^{1-\frac{\alpha}{\gamma}}(|X|)\right) < \infty$. Bằng cách lấy $r = 1$, Hệ quả 2.7 của chúng tôi đã tổng quát kết quả của Sung (2.8) cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.

Định lý dưới đây được xem là định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát.

Định lý 2.9 *Cho $r \geq 1$, $1 < \alpha \leq 2$, $\phi \in \mathcal{K}_r^\alpha \cap \mathcal{H}_r$, $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(1) Biến ngẫu nhiên X thỏa mãn

$$EX = 0 \quad khi \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\phi(n)} \neq 0, \quad E(\phi^{-1}(|X|))^r < \infty. \tag{2.9}$$

(2) Với mọi mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ thỏa mãn điều kiện (2.2) và độc lập với dãy $\{X_n, n \geq 1\}$, với $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} A_{ni} X_i \right| > \varepsilon \phi(n) \right) < \infty. \tag{2.10}$$

Chứng minh.
Chúng ta sẽ chứng minh chiều (1) $\Rightarrow$ (2) trước. Từ Định lý 2.4, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\leq k\leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} (A_{ni} X_i - E(A_{ni} X_i I_{(|X_i|\leq \phi(n))}) \right| > \varepsilon \phi(n) \right) < \infty. \tag{2.11}$$

Với điều kiện (2.9), chúng ta sẽ chỉ ra

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \left| E(A_{ni} X_i I_{(|X_i|\leq \phi(n))}) \right|}{\phi(n)} \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty. \tag{2.12}$$

Thật vậy, xét trường hợp $\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\phi(n)} \neq 0$ với $n \geq 1$, khi đó $EX = 0$. Với mọi biến ngẫu nhiên X có $EX = 0$ thì

$$|E(XI_{(|X|\leq\phi(n))})| = |E(XI_{(|X|>\phi(n))})| \leq E(|X|I_{(|X|>\phi(n))}).$$

Kết hợp với (2.6) ta có

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|E(A_{ni}X_iI_{(|X_i|\leq\phi(n))})\right|}{\phi(n)} &\leq \frac{E(|X|I_{(|X|>\phi(n))})}{\phi(n)}\sum_{i=1}^{n}E|A_{ni}| \\ &\leq \frac{CnE(|X|I_{(|X|>\phi(n))})}{\phi(n)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Do $\phi \in \mathcal{H}_r$ và $r \geq 1$, khi đó

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(|X|I_{(|X|>\phi(n))})}{\phi(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi(n)}\sum_{k=n}^{\infty}E(|X|I_{(\phi(k)<|X|\leq\phi(k+1))}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}E(|X|I_{(\phi(k)<|X|\leq\phi(k+1))})\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\phi(n)} \\ &\leq \frac{k_0}{\phi(1)}\sum_{k=1}^{k_0}E(|X|I_{(\phi(k)<|X|\leq\phi(k+1))}) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}E(I_{(\phi(k)<|X|\leq\phi(k+1))})\phi(k+1)\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{\phi(n)} \\ &\leq \frac{k_0\phi(k_0+1)}{\phi(1)} + N\sum_{k=k_0+1}^{\infty}E(I_{(\phi(k)<|X|\leq\phi(k+1))})\phi(k)\sum_{n=1}^{k}\frac{n^{r-1}}{\phi(n)} \\ &\leq \frac{k_0\phi(k_0+1)}{\phi(1)} + N\sum_{k=1}^{\infty}E((ck^r+d)I_{(k<\phi^{-1}(|X|)\leq k+1)}) \\ &\leq \frac{k_0\phi(k_0+1)}{\phi(1)} + N\sum_{k=1}^{\infty}E\left(c(\phi^{-1}(|X|))^r+d)I_{(k<\phi^{-1}(|X|)\leq k+1)}\right) \\ &\leq \frac{k_0\phi(k_0+1)}{\phi(1)} + cNE(\phi^{-1}(|X|))^r + Nd < \infty. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Áp dụng Bổ đề Kronecker (Bổ đề A.8),

$$\frac{nE(|X|I_{(|X|>\phi(n))})}{\phi(n)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n}E(|X|I_{(|X|>\phi(k))})}{\phi(n)} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.15}$$

Kết hợp (2.13) và (2.15), ta thu được (2.12).

Trường hợp còn lại khi $\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\phi(n)} = 0$. Kết hợp (2.14) và vế thứ hai của (2.9) ta có

$$\begin{aligned}E|X| &\leq \phi(1) + E(|X|I_{(|X|>\phi(1))}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(|X|I_{(|X|>\phi(n))})}{\phi(n)} \\ &\leq \frac{k_0\phi(k_0+1)}{\phi(1)} + cNE(\phi^{-1}(|X|))^r + Nd < \infty. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Kết hợp với (2.6) ta được

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left|E(A_{ni}X_iI_{(|X_i|\le\phi(n))})\right|}{\phi(n)} &\le \frac{E(|X|I_{(|X|>\phi(n))})}{\phi(n)}\sum_{i=1}^{n}E(|A_{ni}|)\\ &\le \frac{CnE(|X|I_{(|X|>\phi(n))})}{\phi(n)}\\ &\le \frac{Cn}{\phi(n)}E(|X|)\to 0 \quad \text{khi } n\to\infty.\end{aligned}$$

Do đó, (2.12) được chứng minh.
Mặt khác,

$$\begin{aligned}&P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}A_{ni}X_i\Big|>\varepsilon\phi(n)\Big)\\ &\le P\left(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(A_{ni}X_i-E(A_{ni}X_iI_{(|X_i|\le\phi(n))}))\Big|>\phi(n)\Big(\varepsilon-\frac{\sum_{i=1}^{n}|E(A_{ni}X_iI_{(|X_i|\le\phi(n))})|}{\phi(n)}\Big)\right).\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.11) và (2.12), ta được (2.10).

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh chiều (2) ⇒ (1).
Đặt $A_{ni}=1$ với $1\le i\le n$, $n\ge 1$. Kết hợp (2.10) và bất đẳng thức

$$\max_{1\le i\le n}|X_i|\le 2\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}X_k\Big|,$$

ta có với mọi $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\max_{1\le k\le n}|X_k|>\varepsilon\phi(n)\Big)<\infty.$$

Từ Bổ đề A.19, ta có $P\Big(\max_{1\le k\le n}|X_k|>\varepsilon\phi(n)\Big)\to 0$ khi $n\to\infty$. Do vậy, theo Bổ đề 1.35 ta có

$$nP(|X|>\varepsilon\phi(n))=\sum_{i=1}^{n}P(|X_i|>\varepsilon\phi(n))\le CP\Big(\max_{1\le k\le n}|X_k|>\varepsilon\phi(n)\Big).$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}P(|X|>\varepsilon\phi(n))\le C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\max_{1\le k\le n}|X_k|>\varepsilon\phi(n)\Big)<\infty.$$

Mặt khác

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}P(|X|>\varepsilon\phi(n))=\sum_{n=1}^{\infty}n^{r-1}P\Big(\phi^{-1}\Big(\frac{|X|}{\varepsilon}\Big)>n\Big)<\infty,$$

tương đương với

$$E\Big(\phi^{-1}\Big(\frac{|X|}{\varepsilon}\Big)\Big)^r<\infty, \tag{2.17}$$

và do đó phần thứ hai của (2.9) đúng.

Tiếp đến, chúng tôi sẽ chứng minh $EX = 0$. Từ (2.16), ta có $E(|X|) < \infty$. Khi đó tồn tại n_1 sao cho $\phi(n_1) > 2E(|X|)$. Do $|X - EX| \le |X| + E(|X|)$ và $\phi \in \mathcal{H}_r$, kết hợp với (2.17) suy ra

$$\begin{aligned} E(\phi^{-1}(|X - EX|))^r &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P(|X - EX| > \phi(n)) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P(|X| > \phi(n) - E|X|) \\ &\le n_1^r + \sum_{n=n_1+1}^{\infty} n^{r-1} P\left(|X| > \frac{\phi(n)}{2}\right) \\ &\le n_1^r + E(\phi^{-1}(2|X|))^r < \infty. \end{aligned}$$

Bằng cách thay X_i bởi $X_i - EX_i$ trong chứng minh (1) $\Rightarrow$ (2) phía trên, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1 \le k \le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} (X_i - EX_i) \Big| > \varepsilon \phi(n) \Big) < \infty.$$

Kết hợp với (2.10) và chú ý rằng $r \ge 1$, ta có

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n|EX|}{\phi(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{|\sum_{i=1}^{n} EX_i|}{\phi(n)} = 0.$$

Kết hợp với giả thiết $\limsup_{n \to \infty} \dfrac{n}{\phi(n)} \ne 0$ ta có $EX = 0$. Vậy chứng minh được hoàn thành. □

Lấy $r = 1$ trong Định lý 2.9, chúng ta thu được hệ quả dưới đây, được xem là luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát.

Hệ quả 2.10 *Cho $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với kỳ vọng 0, $\{A_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{n} E(|A_i|^{\alpha}) = O(n), \quad 1 < \alpha \le 2.$$

Giả sử $\{X_n, n \ge 1\}$ và $\{A_n, n \ge 1\}$ là độc lập với nhau. Nếu tồn tại hàm $\phi \in \mathcal{K}_1^{\alpha} \cap \mathcal{H}_1$ sao cho $E(\phi^{-1}(|X|)) < \infty$, thì

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} A_i X_i}{\phi(n)} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.9 với $r = 1, A_{ni} = A_i$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_i X_i \Big| > \varepsilon \phi(n) \Big) < \infty.$$

Do $\phi \in \mathcal{K}_1^{\alpha} \cap \mathcal{H}_1$, với mọi $\varepsilon > 0$, suy ra

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} P\Big(\max_{1\le k\le 2^m} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_i X_i \Big| > \varepsilon \phi(2^m) \Big) \\
&= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{2^{m+1}} P\Big(\max_{1\le k\le 2^m} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_i X_i \Big| > \varepsilon \phi(2^m) \Big) \\
&\le 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n} P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_i X_i \Big| > \frac{\varepsilon \phi(n)}{N} \Big) \\
&= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_i X_i \Big| > \frac{\varepsilon}{N} \phi(n) \Big) < \infty.
\end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.3) ta có

$$\frac{1}{\phi(2^m)} \max_{1\le k\le 2^m} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_i X_i \Big| \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad m \to \infty.$$

Mặt khác, với n cố định, luôn tồn tại m sao cho $2^m \le n < 2^{m+1}$, khi đó

$$\frac{1}{\phi(n)} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_i X_i \Big| \le \frac{N}{\phi(2^{m+1})} \max_{1\le k\le 2^{m+1}} \Big| \sum_{i=1}^{k} A_i X_i \Big| \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Định lý được chứng minh. □

Để minh họa Hệ quả 2.10, chúng ta xét lại dãy biến ngẫu nhiên có phân phối Pareto hai phía $\{X, X_n, n \ge 1\}$ như trong Ví dụ 2.6 với $1 < \theta < \alpha < 2$ và giả sử $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Lưu ý rằng $EX = 0$, $E|X|^s < \infty$ với $0 < s < \theta$ và $E|X|^s = \infty$ với $s \ge \theta$. Khi đó, áp dụng Hệ quả 2.10 với $A_n = 1$ với mọi $n \ge 1$ và $\phi(x) = x^{1/\theta} (\log x)^{(1+\delta)/\theta}$, trong đó $\delta > 0$ nhỏ tùy ý, ta có

$$\frac{1}{n^{1/\theta} (\log n)^{(1+\delta)/\theta}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.18}$$

Mặt khác, nếu $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập, Luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund (xem Định lý A.17) phát biểu rằng,

$$\frac{1}{n^{1/s}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.19}$$

Như vậy, kết quả (2.18) tốt hơn luật số lớn Marcinkiewicz-Zygmund (2.19). Ngoài ra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > C(n \log n)^{1/\theta}) = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \infty \text{ với mọi } C > 0.$$

Áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.4),

$$P(|X_n| > C(n\log n)^{1/\theta} \text{ xuất hiện vô hạn lần}) = 1 \quad \text{với mọi} \quad C > 0.$$

Do đó

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{(n\log n)^{1/\theta}} = \infty \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Điều này suy ra

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{(n\log n)^{1/\theta}} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Mặt khác, áp dụng Hệ quả 2.10 với $A_n = 1$ với mọi $n \geq 1$ và

$$\phi(x) = (x\log x)^{1/\theta}(\log(\log x + 4))^{(1+\delta)/\theta},$$

trong đó δ là số dương nhỏ tùy ý, ta thu được

$$\frac{1}{(n\log n)^{1/\theta}(\log(\log n + 4))^{(1+\delta)/\theta}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Với giả thiết $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập, áp dụng tiếp bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.4),

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{(n\log n)^{1/\theta}(\log(\log n + 4))^{1/\theta}} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Khi $\alpha > 2$, chúng tôi tiếp tục thiết lập định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát.

Định lý 2.11 *Cho $r \geq 1$, $2(r-\kappa) > \beta$, $\alpha > \max\left\{2, \frac{2(r-1)\beta}{2(r-\kappa)-\beta}\right\}$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với $E(|X|^2) < \infty$, $\phi \in \mathcal{K}_r^\alpha \cap \mathcal{H}_r \cap \mathcal{L}_{r,\kappa}^\beta$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(1) Biến ngẫu nhiên X thỏa mãn

$$EX = 0, \quad E(\phi^{-1}(|X|))^r < \infty.$$

(2) Với $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng thỏa mãn (2.2) và độc lập với $\{X_n, n \geq 1\}$, với $\varepsilon > 0$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} A_{ni}X_i\Big| > \varepsilon\phi(n)\Big) < \infty.$$

Chứng minh.

Chúng ta sẽ chứng minh chiều (1) ⇒ (2) trước. Tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.4, không mất tổng quát, giả sử $A_{ni} \geq 0$ hầu chắc chắn và $X_n \geq 0$ hầu chắc chắn với mọi $1 \leq i \leq n$. Với mỗi $n \geq 1, 1 \leq i \leq k \leq n$, ta đặt Y_{ni}, Z_{ni}, U_k, V_k giống như trong chứng minh Định lý 2.4. Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 2.4 và Định lý 2.9, ta cần chỉ ra

$$J_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\leq k\leq n} |V_k| > \frac{\varepsilon\phi(n)}{2}\right) < \infty,$$

và

$$J_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\leq k\leq n} |U_k| > \frac{\varepsilon\phi(n)}{2}\right) < \infty.$$

Xét J_1, lần lượt áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), (2.6) và (2.4), ta có

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{2-r}\varepsilon\phi(n)} \sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}Z_{ni} - E(A_{ni}Z_{ni})|) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4P(X > \phi(n))}{\varepsilon n^{2-r}} \sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}|) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-r}} P(X > \phi(n)) = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-r}} \sum_{k=n}^{\infty} P(k < \phi^{-1}(X) \leq k+1) \\
&\leq C E(\phi^{-1}(X))^r < \infty.
\end{aligned}$$

Xét J_2, lần lượt áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), bất đẳng thức cực đại Rosenthal cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm (Bổ đề 2.3, chú ý $\alpha > 2$), ta có

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^\alpha}{n^{2-r}\varepsilon^\alpha\phi^\alpha(n)}) \Bigg(\sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}Y_{ni} - E(A_{ni}Y_{ni})|^\alpha) \\
&\qquad + \left(\sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}Y_{ni} - E(A_{ni}Y_{ni})|^2) \right)^{\alpha/2} \Bigg) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^\alpha}{n^{2-r}\varepsilon^\alpha\phi^\alpha(n)} \sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}Y_{ni} - E(A_{ni}Y_{ni})|^\alpha) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^\alpha}{n^{2-r}\varepsilon^\alpha\phi^\alpha(n)} \left(\sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}Y_{ni} - E(A_{ni}Y_{ni})|^2) \right)^{\alpha/2} \\
&:= J_{21} + J_{22}.
\end{aligned}$$

Từ chứng minh $I_2 < \infty$ trong Định lý 2.4 ta có $J_{21} < \infty$. Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra $J_{22} < \infty$. Áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), bất đẳng thức Lyapounov (Bổ đề A.6, chú ý $\alpha > 2$), bất đẳng thức Hölder (Bổ đề A.5) và điều kiện (2.2) ta có

$$J_{22} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^\alpha}{n^{2-r}\varepsilon^\alpha\phi^\alpha(n)} \left(\sum_{i=1}^{n} E(A_{ni}Y_{ni})^2 \right)^{\alpha/2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\alpha}\left(E(Y_{n1}^2)\right)^{\alpha/2}}{n^{2-r}\varepsilon^{\alpha}\phi^{\alpha}(n)} \Big(\sum_{i=1}^{n} E(A_{ni}^2) \Big)^{\alpha/2}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\alpha}\left(E(X^2)\right)^{\alpha/2}}{n^{2-r}\varepsilon^{\alpha}\phi^{\alpha}(n)} n^{\frac{\alpha}{2}-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} E(A_{ni}^{\alpha}) \Big)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{2-r-\frac{\alpha}{2}}\phi^{\alpha}(n)}.$$

Chúng ta sẽ đi đánh giá đại lượng $\phi(n)$. Do $\phi \in \mathcal{L}_{r,\kappa}^{\beta}$ nên $\dfrac{x^r}{\phi^{\beta}(x)\int_1^x \frac{t^{r-1}dt}{\phi^{\beta}(t)}} \leq \kappa$ với mọi $x > n_0$. Đặt

$$\Phi(x) = \frac{x^r}{\phi^{\beta}(x)\int_1^x \frac{t^{r-1}dt}{\phi^{\beta}(t)}}. \tag{2.20}$$

Chọn $m > 1$, khi đó

$$\int_m^x \Phi(t)/tdt = \log\left(\int_1^x \frac{t^{r-1}}{\phi^{\beta}(t)}dt \Big/ M \right),$$

trong đó $M = \int_1^m \dfrac{t^{r-1}}{\phi^{\beta}(t)}dt$. Điều này dẫn tới

$$\int_1^x \frac{t^{r-1}}{\phi^{\beta}(t)}dt = M\exp\left(\int_m^x \Phi(t)/tdt \right).$$

Kết hợp (2.20) và khẳng định trên ta có

$$\phi^{-\beta}(x) = x^{-r}\Phi(x)\int_1^x \frac{t^{r-1}dt}{\phi^{\beta}(t)} = Mx^{-r}\Phi(x)\exp\left(\int_m^x \Phi(t)/tdt \right)$$
$$= Mm^{-r}\Phi(x)\exp\left(\int_m^x (\Phi(t)-r)dt/t \right).$$

Chú ý rằng $\Phi(x) \leq \kappa$ với $x > n_0$, suy ra

$$\phi^{-\beta}(x) \leq Mm^{-r}\kappa\exp\left(\int_m^x (\kappa - r)dt/t \right) = Cx^{\kappa-r} = \frac{C}{x^{r-\kappa}} \text{ với mọi } x > n_0.$$

Từ đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{2-r-\frac{\alpha}{2}}\phi^{\alpha}(n)} \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{C}{n^{2-r-\frac{\alpha}{2}}\phi^{\alpha}(n)} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{C}{n^{2-r-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha(r-\kappa)}{\beta}}}.$$

Do $2(r-\kappa) > \beta$ và $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2(r-1)\beta}{2(r-\kappa)-\beta}\right\}$, suy ra $2 - r - \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha(r-\kappa)}{\beta} > 1$. Từ đó, $J_{22} < \infty$.

Chứng minh chiều (2) ⇒ (1) tương tự như trong Định lý 2.9. □

Chú ý 2.12 Dựa trên chứng minh của Định lý 2.4 và Định lý 2.11, ta có thể kết luận rằng khẳng định (2.3) trong Định lý 2.4 vẫn đúng khi $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2(r-1)\beta}{2(r-\kappa)-\beta}\right\}$, $r \geq 1$, $2(r-\kappa) > \beta$ và điều kiện bổ sung $\phi \in \mathcal{K}_r^{\alpha} \cap \mathcal{L}_{r,\kappa}^{\beta}$.

Xét hàm

$$\phi(x) = x^p \ell(x^p), \tag{2.21}$$

trong đó $p \neq 0$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Từ (1.2) suy ra $\phi^{-1}(x) \sim (x\ell^{\#}(x))^{1/p}$, trong đó $\ell^{\#}(x)$ là liên hợp de Bruijn của $\ell(x)$. Áp dụng Định lý Karamata (Định lý 1.5) ta có: Trường hợp $1 < \alpha \leq 2$, với điều kiện $\frac{r}{\alpha} < p \leq r$, $r \geq 1$ thì hàm $\phi(x) \in \mathcal{K}_r^\alpha \cap \mathcal{H}_r$; trường hợp $\alpha > 2$, với điều kiện $r \geq 1$, $p > 1/2$ và $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2(r-1)}{2p-1}\right\}$ thì hàm $\phi(x) \in \mathcal{K}_r^\alpha \cap \mathcal{H}_r \cap \mathcal{L}_{r,r-p}^1$ (Chú ý là theo định nghĩa của lớp hàm $\mathcal{L}_{r,\kappa}^\beta$ thì $\kappa = r - p > 0$). Việc lựa chọn hàm $\phi(x)$ cụ thể như trên dẫn đến Hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.13 *Cho $r \geq 1$, $\alpha > 1$, $\max\{\frac{1}{2}, \frac{r}{\alpha}\} < p < r$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối, $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Các khẳng định dưới đây là tương đương:*

(1) Biến ngẫu nhiên X thỏa mãn

$$EX = 0, \quad E((|X|\ell^{\#}(|X|))^{r/p}) < \infty.$$

(2) Với mọi mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ thỏa mãn (2.2) với $1 < \alpha \leq 2$ hoặc $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2(r-1)}{2p-1}\right\}$ và độc lập với $\{X, X_n, n \geq 1\}$, với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\max_{1\leq k\leq n} \left|\sum_{i=1}^{k} A_{ni} X_i\right| > \varepsilon n^p \ell(n^p)\right) < \infty.$$

Xét Hệ quả 2.13, lấy $r = 1, \alpha = 2$, $A_{ni} = a_{ni}$ với mọi $1 \leq i \leq n$, trong đó $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng các hằng số thực và $\phi(x) = x^p \ell(x^p)$ là một hàm biến đổi chính quy, ta thu được Định lý 3.1 của Anh và cộng sự [5].

Chú ý 2.14 Những định lý và hệ quả trên vẫn đúng với các cấu trúc phụ thuộc khác, chẳng hạn như dãy biến ngẫu nhiên NSD, hiệu martingale, biến ngẫu nhiên φ-mixing với $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(n) < \infty$, biến ngẫu nhiên ρ^*-mixing (hoặc $\tilde{\rho}$-mixing), biến ngẫu nhiên m-ANA (xem Định nghĩa A.22),... Lý do là vì NA suy ra NSD (xem [16], trang 142) và các cấu trúc phụ thuộc vừa được liệt kê đều có bất đẳng thức Rosenthal, chẳng hạn:

- Kết quả của Hall và Heyde ([40], Định lý 2.11) cho dãy hiệu martingale: Nếu $\{X_i, \mathcal{F}_i, 1 \leq i \leq n\}$ là một dãy hiệu martingale và $p > 0$, thì tồn tại một hằng số dương C chỉ phụ thuộc vào p sao cho

$$E\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} X_i\Big|^p\Big) \leq C_p\Big[E\Big(\sum_{i=1}^{n} E\big(X_i^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\big)\Big)^{p/2} + E\Big(\max_{1\leq i\leq n} |X_i|^p\Big)\Big].$$

- Kết quả của Utev và Peligrad ([106], Định lý 2.1) cho dãy biến ngẫu nhiên ρ^*-mixing: Cho $q > 1$ và $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên ρ^*-mixing với $EX_n = 0$ và $E|X_n|^q < \infty$ với mỗi $n \geq 1$. Khi đó với mỗi $n \geq 1$,

$$E\Big(\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} X_i\Big|^q\Big) \leq C_q \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q, \quad 1 < q \leq 2,$$

và

$$E\Big(\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} X_i\Big|^q\Big) \leq C_q\Big(\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q + \Big(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\Big)^{q/2}\Big), \quad q > 2,$$

trong đó $C_q > 0$ là một hằng số chỉ phụ thuộc q và hệ số ρ^*-mixing.

- Kết quả của nhóm nghiên cứu Wang ([111], Bổ đề 1.7) cho dãy biến ngẫu nhiên φ-mixing với $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(n) < \infty$: Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên φ-mixing thỏa mãn $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(n) < \infty$. Giả sử $q \geq 2$, $EX_n = 0$ và $E|X_n|^q < \infty$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó tồn tại một hằng số C chỉ phụ thuộc vào q và hàm $\varphi(\cdot)$ sao cho

$$E\Big(\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=a+1}^{a+j} X_i\Big|^q\Big) \leq C_q\Big[\sum_{i=a+1}^{a+n} E|X_i|^q + \Big(\sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2\Big)^{q/2}\Big],$$

với mọi $a \geq 0$ và $n \geq 1$. Đặc biệt, ta có

$$E\Big(\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{j} X_i\Big|^q\Big) \leq C_q\Big[\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^q + \Big(\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\Big)^{q/2}\Big],$$

với mọi $n \geq 1$.

Chú ý 2.15 Trong Định lý 2.4 và trong chứng minh khẳng định (1) $\Rightarrow$ (2) của Định lý 2.9, Định lý 2.11 và Hệ quả 2.13, giả thiết "dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm" có thể làm yếu đi thành "một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng" và giả thiết "cùng phân phối" có thể làm yếu đi thành "bị chặn ngẫu nhiên" (xem Định nghĩa A.20).

Do đó, trong phần ứng dụng thống kê dưới đây, chúng tôi sẽ thay giả thiết "dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối" bằng giả thiết "một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng, bị chặn ngẫu nhiên bởi một biến ngẫu nhiên".

Chú ý 2.16 Trong các định lý và hệ quả trên, lấy $r = 2$, ta thu được sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.

2.2 Ứng dụng trong mô hình hồi quy

Trong phần này, chúng tôi sẽ áp dụng các kết quả nêu trên để nghiên cứu ước lượng vững đầy đủ cho các tham số trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn và mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên.

2.2.1. Ước lượng vững trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn

Xét mô hình hồi quy tuyến tính đơn với thiết kế ngẫu nhiên như sau

$$Y_{nj} = a + bX_{nj} + \varepsilon_{nj}, \quad 1 \le j \le n, \tag{2.22}$$

trong đó, a và b là các tham số chưa biết, $\{X_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$ là các điểm thiết kế ngẫu nhiên, $\{Y_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$ là một mảng biến quan sát và $\{\varepsilon_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$ là các sai số ngẫu nhiên.

Với mỗi $n \ge 1$, đặt

$$\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} X_{nk},\ \overline{Y}_n = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} Y_{nk},\ S_n^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_{nk} - \overline{X}_n)^2.$$

Khi đó, ước lượng bình phương tối thiểu cho b và a tương ứng là

$$\hat{b}_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(Y_{nk} - \overline{Y}_n)(X_{nk} - \overline{X}_n)}{S_n^2}, \quad \hat{a}_n = \overline{Y}_n - \hat{b}_n\overline{X}_n, \tag{2.23}$$

(xem [15]). Trường hợp các điểm thiết kế ngẫu nhiên $\{X_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên NOD theo hàng cùng phân phối với biến ngẫu nhiên X, $\{\varepsilon_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên NOD theo hàng cùng phân phối với biến ngẫu nhiên ε và độc lập với $\{X_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$, Chen và cộng sự [15] đã đưa ra tốc độ hội tụ cho ước lượng vững mạnh[2] của $\hat{a}_n$ và $\hat{b}_n$.

Trong phần này, chúng tôi giả sử các điểm thiết kế ngẫu nhiên $\{X_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X, các sai số ngẫu nhiên $\{\varepsilon_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng với kỳ vọng bằng 0, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên ε và độc lập với $\{X_{nj}, n \ge 1, 1 \le j \le n\}$. Kết quả dưới đây chỉ ra tốc độ hội tụ của ước lượng vững mạnh $\hat{a}_n$ và $\hat{b}_n$.

Định lý 2.17 *Trong mô hình (2.22), giả sử $E(|X|^{\max\{4,\alpha\}}) < \infty$ và $E\varepsilon = 0$. Nếu tồn tại $\phi \in \mathcal{K}_2^\alpha \cap \mathcal{H}_2$ với $1 < \alpha \le 2$ hoặc $\phi \in \mathcal{K}_2^\alpha \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{L}_{2,\kappa}^\beta$ với $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2\beta}{2(2-\kappa)-\beta}\right\}$, $2(2-\kappa) > \beta$, sao cho*

$$E((\phi^{-1}(|\varepsilon|))^2) < \infty,$$

thì

$$\frac{n}{\phi(n)}(\hat{b}_n - b) \xrightarrow{c.c.} 0 \quad khi\ n \to \infty, \tag{2.24}$$

và

$$\frac{n}{\phi(n)}(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{c.c.} 0 \quad khi\ n \to \infty. \tag{2.25}$$

[2] Ở đây, sự hội tụ được hiểu theo nghĩa hội tụ hầu chắc chắn.

Chứng minh. Chúng ta sẽ đi chứng minh (2.24) trước. Kết hợp (2.22) và (2.23), ta có với mọi $n \geq 1$,

$$\hat{b}_n - b = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_{nk}\varepsilon_{nk} - \overline{X}_n \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{nk}}{S_n^2}, \quad \hat{a}_n - a = -\overline{X}_n(\hat{b}_n - b) + \bar{\varepsilon}_n, \tag{2.26}$$

trong đó $\bar{\varepsilon}_n = n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{nk}$. Điều này suy ra

$$\frac{n}{\phi(n)}(\hat{b}_n - b) = \frac{\frac{1}{\phi(n)} \sum\limits_{k=1}^{n} X_{nk}\varepsilon_{nk} - \overline{X}_n \frac{1}{\phi(n)} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{nk}}{\frac{1}{n}S_n^2} := \frac{Z_n}{\frac{1}{n}S_n^2}. \tag{2.27}$$

Chúng ta sẽ lần lượt đi chứng minh $Z_n \xrightarrow{c.c.} 0$ và $\frac{1}{n}S_n^2 \xrightarrow{c.c.} DX$. Áp dụng Định lý 2.9, Định lý 2.11 và Nhận xét 2.15 với $r = 2$, ta có

$$\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{n} X_{nk}\varepsilon_{nk} \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty, \tag{2.28}$$

và

$$\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{nk} \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.29}$$

Đặt $\mu = EX$, $\sigma^2 = DX$. Tiếp tục áp dụng Định lý 2.9 và Nhận xét 2.15 với $r = 2$, $\phi(n) = n$ và $A_{ni} = 1$, ta có

$$\overline{X}_n \xrightarrow{c.c.} \mu \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.30}$$

Kết hợp (2.28), (2.29) và (2.30), ta thu được

$$Z_n \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.31}$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ đi đánh giá $\frac{1}{n}S_n^2$. Dễ thấy, $\frac{1}{n}S_n^2 = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_{nk}^2 - \overline{X}_n^2$.

Với $\varepsilon > 0$ cố định,

$$P(|\overline{X}_n^2 - \mu^2| > 2\varepsilon) \leq P(|\overline{X}_n - \mu| > \sqrt{\varepsilon}) + P(2\mu|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon).$$

Từ đó

$$\overline{X}_n^2 \xrightarrow{c.c.} \mu^2 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.32}$$

Mặt khác, áp dụng Hệ quả 2.13 và Nhận xét 2.15 với $r = 2$, $\phi(n) = n$ và $A_{ni} = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{nk}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} ((X_{nk}^+)^2 + (X_{nk}^-)^2) \\ &\xrightarrow{c.c.} E(X^+)^2 + E(X^-)^2 = E(X^2) \quad \text{khi } n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Kết hợp (2.32) và (2.33), cùng với khẳng định $\frac{1}{n}S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{nk}^2 - \overline{X}_n^2$, thu được

$$\frac{1}{n}S_n^2 \xrightarrow{c.c.} \sigma^2 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Ngoài ra, với mỗi $0 < \varepsilon < \frac{1}{\sigma^2}$, ta có

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{\frac{1}{n}S_n^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\frac{1}{n}S_n^2 > \frac{\sigma^2}{\sigma^2\varepsilon + 1}\right) + P\left(\frac{1}{n}S_n^2 < \frac{\sigma^2}{1 - \sigma^2\varepsilon}\right) \\ &\le P\left(\left|\frac{1}{n}S_n^2 - \sigma^2\right| > \frac{\sigma^4\varepsilon}{\sigma^2\varepsilon + 1}\right) + P\left(\left|\frac{1}{n}S_n^2 - \sigma^2\right| > \frac{\sigma^4\varepsilon}{1 - \sigma^2\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Khi đó

$$\frac{1}{\frac{1}{n}S_n^2} \xrightarrow{c.c.} \frac{1}{\sigma^2} \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.34}$$

Kết hợp (2.27), (2.31) và (2.34), với mỗi $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{Z_n}{\frac{1}{n}S_n^2}\right| > 2\varepsilon\right) &\le P\left(|Z_n|\left|\frac{1}{\frac{1}{n}S_n^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right| > \varepsilon\right) + P\left(|Z_n| > \sigma^2\varepsilon\right) \\ &\le P\left(\left|\frac{1}{\frac{1}{n}S_n^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right| > \sqrt{\varepsilon}\right) + P\left(|Z_n| > \sqrt{\varepsilon}\right) + P\left(|Z_n| > \sigma^2\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Từ đó, (2.24) được chứng minh.

Tiếp theo, từ (2.26) ta có $\frac{n}{\phi(n)}(\hat{a}_n - a) = -\bar{X}_n \frac{n}{\phi(n)}(\hat{b}_n - b) + \frac{n}{\phi(n)}\bar{\varepsilon}_n$. Kết quả (2.25) thu được từ (2.24), (2.30) và (2.29). Chứng minh Định lý 2.17 được hoàn thành. □

Lấy $\phi(x) = x^p\ell(x^p)$ là một hàm biến đổi chậm, áp dụng Định lý 2.17, chúng ta thu được Hệ quả sau.

Hệ quả 2.18 *Cho $\phi(x) = x^p\ell(x^p)$, trong đó $\frac{1}{2} < p \le 1$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Trong mô hình (2.22), giả sử $E(|X|^{\max\{4,\alpha\}}) < \infty$ với $\alpha > \dfrac{2}{2p-1}$, $E\varepsilon = 0$ và*

$$E((|\varepsilon|\ell^{\#}(|\varepsilon|))^{2/p}) < \infty.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{p-1}\ell(n^p)}(\hat{b}_n - b) &\xrightarrow{c.c.} 0 \quad \textit{khi } n \to \infty, \\ \frac{1}{n^{p-1}\ell(n^p)}(\hat{a}_n - a) &\xrightarrow{c.c.} 0 \quad \textit{khi } n \to \infty. \end{aligned}$$

Chứng minh. Kết hợp (2.21) và giả thiết của Định lý 2.17, xét trường hợp $\alpha > 2$, lấy $\beta = 1$, $\kappa = 2 - p > 0$. Khi đó, điều kiện $2(2-\kappa) > \beta$ trở thành $2(2-2+p) > 1 \Leftrightarrow p > 1/2$. Với $\frac{1}{2} < p \le 1$ suy ra $\frac{2\beta}{2(2-\kappa)-\beta} = \frac{2}{2p-1} \ge 2$. Do đó, điều kiện $\alpha > \max\left\{2, \frac{2\beta}{2(2-\kappa)-\beta}\right\}$ trở thành $\alpha > \frac{2}{2p-1}$. Áp dụng Định lý 2.17 với hàm $\phi \in \mathcal{K}_2^{\alpha} \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{L}_{r,r-p}^1$ thỏa mãn các điều kiện nêu trên ta được điều phải chứng minh. □

2.2.2. Ước lượng vững trong mô hình hồi quy phi tham số

Xét mô hình hồi quy phi tham số

$$Y_{ni} = f(x_{ni}) + \varepsilon_{ni}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

trong đó $f(x)$ là một hàm chưa biết xác định trên tập compact $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^d$, $\{x_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ là các điểm thiết kế cố định đã biết thuộc $\mathbf{A}$ và $\{\varepsilon_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ là các sai số ngẫu nhiên. Chúng tôi nghiên cứu ước lượng có trọng số cho hàm $f(x)$ có dạng

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) Y_{ni},$$

trong đó $W_{ni}(x) = W_{ni}(x, x_{n1}, \ldots, x_{nn})$ là các hàm trọng số. Nhiều tác giả đã nghiên cứu tính tiệm cận của $\hat{f}_n(x)$ với các hàm trọng số W_{ni} ngẫu nhiên hoặc tất định. Bạn đọc có thể tham khảo kết quả của Tran và cộng sự [103], Hu [47], Wang và cộng sự [113], Deng và cộng sự [21].

Tiếp đến, chúng ta nghiên cứu mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên

$$Y_{ni} = f(X_{ni}) + \varepsilon_{ni}, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{2.35}$$

trong đó X_{ni} là các điểm thiết kế ngẫu nhiên nhận giá trị trong tập compact $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^d$, ε_{ni} là các sai số ngẫu nhiên. Ước lượng phi tham số cho $f(x)$ được xác định bởi

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) Y_{ni},$$

trong đó $W_{ni}(x) = W_{ni}(x, X_{n1}, \ldots, X_{nn})$ là các hàm trọng số ngẫu nhiên phụ thuộc vào x, $X_{ni}, \ldots, X_{nn}$ (xem thêm trong tài liệu [105]).

Trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên, để xây dựng ước lượng cho hàm hồi quy chưa biết $f(x)$, người ta thường dùng một trong những phương pháp: Ước lượng phân hoạch (*Partitioning estimate*), Ước lượng hạt nhân Nadaraya-Watson (*Nadaraya–Watson kernel estimate*), Ước lượng lân cận gần nhất (*The nearest neighbor estimate*). Nói chung, các phương pháp này đều dựa trên ý tưởng lấy trung bình có trọng số các giá trị Y_{ni} trong một lân cận của điểm x cần ước lượng. Sự khác biệt giữa các phương pháp nằm ở cách định nghĩa lân cận và gán trọng số. Dưới đây, chúng tôi sẽ trình bày tóm tắt đặc điểm chính của các phương pháp này (chi tiết tham khảo trong cuốn sách của Györfi và cộng sự [39]):

- Ước lượng phân hoạch: Chọn một phân hoạch hữu hạn hoặc đếm được $\mathcal{P}_n = \{A_{n1}, A_{n2}, \ldots\}$ của $\mathbb{R}^d$. Để ước lượng giá trị của hàm tại một điểm x, ta xác định phân hoạch A_{nj} chứa x và lấy trung bình tất cả các giá trị Y_{ni} mà X_{ni} cũng nằm trong cùng vùng đó,

$$\hat{f}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{(X_{ni} \in A_{nj})} Y_{ni}}{\sum_{i=1}^{n} I_{(X_{ni} \in A_{nj})}} \quad \text{với } x \in A_{nj}.$$

Khi đó,

$$W_{ni}(x) = \frac{I_{(X_{ni} \in A_{nj})}}{\sum_{i=1}^{n} I_{(X_{ni} \in A_{nj})}} \quad \text{với } x \in A_{nj}.$$

(Để thuận tiện, ta quy ước $\frac{0}{0} = 0$). Trọng số $W_{ni}(x)$ trong trường hợp này là bằng nhau đối với mọi điểm $X_{ni} \in A_{nj}$ và bằng 0 nếu $X_{ni} \notin A_{nj}$.

- Ước lượng hạt nhân Nadaraya-Watson: Phương pháp này sử dụng một hàm hạt nhân $K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ để gán trọng số cho các điểm dữ liệu. Trong đó, trọng số của mỗi điểm Y_{ni} phụ thuộc vào khoảng cách giữa X_{ni} và điểm x cần ước lượng, và một tham số h, gọi là độ rộng băng thông (*bandwidth*). Ước lượng hạt nhân được định nghĩa bởi

$$\hat{f}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_{ni}}{h}\right) Y_{ni}}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_{ni}}{h}\right)} \quad \text{nếu } \sum_{i=1}^{n} K\Big(\frac{x - X_{ni}}{h}\Big) \neq 0.$$

Khi đó,

$$W_{ni}(x) = \frac{K\left(\frac{x - X_{ni}}{h}\right)}{\sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - X_{ni}}{h}\right)}.$$

Nếu chọn $K(x) = I_{(\|x\| \leq 1)}$, thì

$$\hat{f}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{(\|x - X_{ni}\| \leq h)} Y_{ni}}{\sum_{i=1}^{n} I_{(\|x - X_{ni}\| \leq h)}},$$

tức là, $f(x)$ được ước lượng bằng cách lấy trung bình các Y_{ni} sao cho khoảng cách giữa X_{ni} và x không lớn hơn h.

- Ước lượng lân cận gần nhất: Đây là một phương pháp phổ biến, dựa trên ý tưởng là tìm ra k điểm dữ liệu X_{ni} gần nhất (về mặt khoảng cách) với điểm x cần ước lượng. Sau đó, giá trị ước lượng của $f(x)$ được tính bằng cách lấy trung bình cộng của các giá trị Y_{ni} tương ứng với k điểm lân cận này. Cụ thể, cố định $x \in \mathbb{R}^d$, ta sắp xếp lại n điểm dữ liệu $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ theo giá trị tăng dần của $\|X_{ni} - x\|$. Dãy dữ liệu sau khi sắp xếp lại được kí hiệu là

$$X_{R_1(x)}^{(n)},\ X_{R_2(x)}^{(n)}, \ldots,\ X_{R_n(x)}^{(n)},$$

sao cho

$$\|X_{R_1(x)}^{(n)} - x\| \leq \ldots \leq \|X_{R_n(x)}^{(n)} - x\|,$$

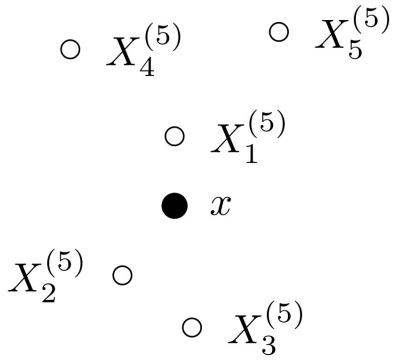
trong đó $(R_1(x), \ldots, R_n(x))$ là phép thế của $(1, \ldots, n)$ và $X_k^{(n)}$ được xem là lân cận gần thứ k của x. Nếu X_{ni} và X_{nj} cách đều x, tức là $\|X_{ni} - x\| = \|X_{nj} - x\|$, thì X_{ni} được xem là gần x hơn nếu $i < j$.

Với k_n là một số nguyên dương, $1 \leq k_n \leq n$, ước lượng lân cận gần nhất được định nghĩa bởi

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} Y_{ni},$$

Khi đó, trọng số

$$W_{ni}(x) = \begin{cases} 1/k_n & \text{nếu } \|X_{ni} - x\| \leq \|X^{(n)}_{R_{k_n}(x)} - x\|, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$



Hình 2.1: Minh họa k điểm lân cận gần nhất của x

Để làm rõ cách xác định trọng số theo phương pháp lân cận gần nhất, ta xét ví dụ cụ thể với các tham số thiết kế được thiết lập như sau: Lấy $A = [0, 1]$, $n = 5$, $k = k_n = 2$. Các điểm thiết kế thuộc $A = [0, 1]$ được lấy cố định theo quy tắc $x_i^{(n)} = \frac{i}{n},\ i = 1, 2, \ldots, n$. Để cho đơn giản, ta viết: $x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1.0$. Tại điểm $x \in A$ bất kỳ, các trọng số $W_{ni}(x)$ được xác định dựa trên việc sắp xếp các khoảng cách $|x_i - x|$ theo thứ tự tăng dần. Kết quả tại một số điểm x được chọn như sau:

- Tại $x = 0.3$, ta sắp xếp các khoảng cách $|x_i - x|$ theo thứ tự tăng dần:

  $$|0.2 - 0.3| \leq |0.4 - 0.3| \leq |0.6 - 0.3| \leq |0.8 - 0.3| \leq |1.0 - 0.3|,$$

  hay

  $$|x_1 - 0.3| \leq |x_2 - 0.3| \leq |x_3 - 0.3| \leq |x_4 - 0.3| \leq |x_5 - 0.3|.$$

  Do đó, bộ $(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$. Với $k = 2$, các trọng số $W_{ni}(x)$ được xác định bởi

  $$W_{51}(0.3) = W_{52}(0.3) = \frac{1}{2} = 0.5, \quad W_{53}(0.3) = W_{54}(0.3) = W_{55}(0.3) = 0.$$

- Tại $x = 0.5$, tương tự như trên, ta có

$$|x_2 - 0.5| \le |x_3 - 0.5| \le |x_1 - 0.5| \le |x_4 - 0.5| \le |x_5 - 0.5|,$$

do đó bộ $(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) = (2, 3, 1, 4, 5)$ và các trọng số

$$W_{52}(0.5) = W_{53}(0.5) = 0.5, \quad W_{51}(0.5) = W_{54}(0.5) = W_{55}(0.5) = 0.$$

- Tại $x = 0.9$,

$$|x_4 - 0.9| \le |x_5 - 0.9| \le |x_3 - 0.9| \le |x_2 - 0.9| \le |x_1 - 0.9|,$$

do đó bộ $(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) = (4, 5, 3, 2, 1)$ và các trọng số

$$W_{54}(0.9) = W_{55}(0.9) = 0.5, \quad W_{51}(0.9) = W_{52}(0.9) = W_{53}(0.9) = 0.$$

Gần đây, nhóm tác giả Dũng và Sơn [24] đã đưa ra kết quả về ước lượng vững mạnh cho $\hat{f}_n(x)$ với sai số ngẫu nhiên có cấu trúc m-ANA và chỉ ra một dãy hàm trọng số W_{ni} theo phương pháp lân cận gần nhất. Kế thừa và phát triển hướng nghiên cứu này, chúng tôi sẽ thiết lập ước lượng vững đầy đủ cho $\hat{f}_n(x)$ với sai số là các biến ngẫu nhiên liên kết âm. Để minh họa cho các kết quả lý thuyết, chúng tôi sẽ đưa ra một dãy hàm trọng số $W_{ni}(x)$ cụ thể theo phương pháp lân cận gần nhất thỏa mãn các điều kiện dưới đây và thực hiện các mô phỏng số ở phần sau của mục này.

Với mỗi $x \in \mathbf{A}$, giả sử hàm trọng số ngẫu nhiên $W_{ni}(x)$ thỏa mãn:

$(\boldsymbol{A_1})$ $\Big|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) - 1\Big| \xrightarrow{c.c.} 0,$

$(\boldsymbol{A_2})$ $\sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)| \le M$ hầu chắc chắn,

$(\boldsymbol{A_3})$ $\sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)|.|f(X_{ni}) - f(x)| I_{(\|X_{ni}-x\|>a)} \xrightarrow{c.c.} 0$ với mọi $a > 0$.

Định lý 2.19 *Trong mô hình (2.35), giả sử $\{\varepsilon_{ni}, n \ge 1, 1 \le i \le n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng với kỳ vọng 0, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên ε và $\{W_{ni}(x), i \le 1 \le n, n \ge 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng và độc lập với $\{\varepsilon_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$. Giả sử tồn tại $\phi \in \mathcal{K}_2^{\alpha} \cap \mathcal{H}_2$ với $1 < \alpha \le 2$ hoặc $\phi \in \mathcal{K}_2^{\alpha} \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{L}_{2,\kappa}^{\beta}$ với $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2\beta}{2(2-\kappa)-\beta}\right\}$ và $2(2-\kappa) > \beta$, sao cho*

$$E((\phi^{-1}(|\varepsilon|))^2) < \infty,$$

với mọi $x \in \mathbf{A}$,

$$\sum_{i=1}^{n} E(W_{ni}^{\alpha}(x)) = O(n/\phi^{\alpha}(n)).$$

Khi đó với mọi $x \in c(f)$,

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{c.c.} f(x) \quad khi\ n \to \infty,$$

trong đó $c(f)$ *là tập hợp tất cả các điểm liên tục của hàm* $f(x)$ *trên* $\mathbf{A}$.

Chứng minh. Với mọi $x \in \mathbf{A}$, ta có

$$\hat{f}_n(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)\varepsilon_{ni} + \Big[\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)f(X_{ni}) - f(x)\Big].$$

Với $r = 2$ và $A_{ni} = \phi(n)W_{ni}(x)$, điều kiện (2.2) được thỏa mãn nhờ giả thiết (A_2). Áp dụng Mệnh đề 1.31 ta có $\{\phi(n)W_{ni}(x), i \le 1 \le n, n \ge 1\}$ cũng là một mảng các biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng. Từ đó, áp dụng Định lý 2.9 và Định lý 2.11, ta có,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)\varepsilon_{ni} \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Do đó, để hoàn thành chứng minh, ta cần chỉ ra

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)f(X_{ni}) - f(x) \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{2.36}$$

Do $x \in c(f)$, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$ đúng với mọi $x' \in \mathbf{A}$ và $\|x' - x\| < \delta$. Chọn $a \in (0, \delta)$, ta có

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)f(X_{ni}) - f(x)\Big| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)||f(X_i) - f(x)|I_{(\|X_i - x\| \le a)} \\
&+ \sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)||f(X_i) - f(x)|I_{(\|X_i - x\| > a)} + \Big|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) - 1\Big||f(x)| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3M}\sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)| + \sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)||f(X_i) - f(x)|I_{(|X_i - x\| > a)} + \Big|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) - 1\Big||f(x)| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)|\ |f(X_i) - f(x)|I_{(\|X_i - x\| > a)} + \Big|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) - 1\Big||f(x)|.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
P\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x)f(X_{ni}) - f(x)\Big| > \varepsilon\Big) &\le P\Big(\sum_{i=1}^{n} |W_{ni}(x)||f(X_i) - f(x)|I_{(\|X_i - x\| > a)} > \frac{\varepsilon}{3}\Big) \\
&+ P\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x) - 1\Big||f(x)| > \frac{\varepsilon}{3}\Big).
\end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết (A_1) và (A_3), suy ra (2.36). Định lý 2.19 được chứng minh. □

Hệ quả 2.20 *Cho* $\frac{1}{2} < p \leq 1$, $\alpha > \frac{2}{2p-1}$ *và* $\ell(x)$ *là một hàm biến đổi chậm. Trong mô hình* (2.35)*, giả sử* $\{\varepsilon_{ni}, n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ *là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng với kỳ vọng* 0*, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên* ε *và* $\{W_{ni}(x), i \leq 1 \leq n, n \geq 1\}$ *là một mảng biến ngẫu nhiên liên kết âm theo hàng và độc lập với* $\{\varepsilon_{ni}, n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$*. Nếu* $E((|\varepsilon|\ell^{\#}(|\varepsilon|))^{2/p}) < \infty$ *và*

$$\sum_{i=1}^{n} E(W_{ni}^{\alpha}(x)) = O(n^{1-\alpha p}/\ell^{\alpha}(n^{p})) \quad \forall x \in \mathbf{A}, \tag{2.37}$$

thì với mọi $x \in c(f)$*, ta có*

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{c.c.} f(x) \quad khi \quad n \to \infty.$$

2.3 Mô phỏng

Trong phần này, chúng tôi đưa ra hai ví dụ mô phỏng để kiểm chứng các kết quả lý thuyết. Ví dụ đầu tiên nghiên cứu tính vững đầy đủ cho ước lượng bình phương tối thiểu $\hat{a}_n, \hat{b}_n$ trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn với thiết kế ngẫu nhiên.

Ví dụ 2.21 Với $n \geq 3$ cố định, xét $(\varepsilon_{n1}, \ldots, \varepsilon_{nn})$ là một véctơ ngẫu nhiên chuẩn $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, trong đó $\mathbf{0}$ là véctơ không và $\mathbf{\Sigma}$ là ma trận hiệp phương sai

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1+\theta^2 & -\theta & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+\theta^2 & -\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\theta & 1+\theta^2 & -\theta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & -\theta & 1+\theta^2 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

với $\theta = 0.5$. Theo Joag-Dev và Proschan ([55], trang 293), ta có $\varepsilon_{n1}, \ldots, \varepsilon_{nn}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với mỗi $n \geq 3$ và có mômen hữu hạn mọi cấp.
Xét mô hình hồi quy tuyến tính

$$Y_{ni} = a + bX_{ni} + \varepsilon_{ni}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

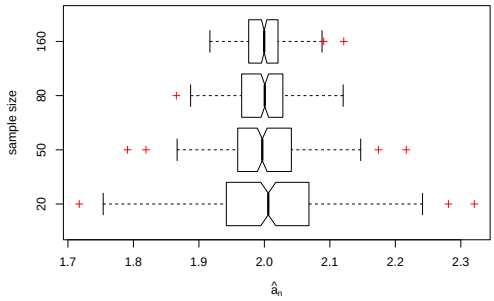
Giả sử $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối đều liên tục trên tập $[0, 1]$, $\{Y_{nj}, n \geq 1, 1 \leq j \leq n\}$ là một mảng biến quan sát. Ước lượng bình phương tối thiểu cho b và a tương ứng là

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_{nk} - \overline{Y}_n)(X_{nk} - \overline{X}_n)}{S_n^2}, \quad \hat{a}_n = \overline{Y}_n - \hat{b}_n \overline{X}_n.$$

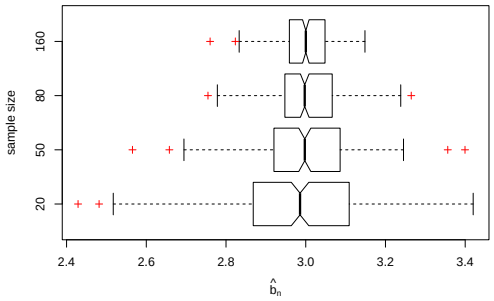
Lấy $\frac{1}{2} < p < 1$, $\alpha > \frac{2}{2p-1}$ và $\ell(x) = 1$, áp dụng Hệ quả 2.18 ta được

$$n^{1-p}(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{c.c.} 0 \text{ và } n^{1-p}(\hat{b}_n - b) \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Lấy $a = 2$, $b = 3$ và kích thước mẫu n lần lượt là 20, 50, 80 và 160. Với mỗi kích thước mẫu, ta tính $\hat{a}_n$ và $\hat{b}_n$ 300 lần và thu được biểu đồ hộp (boxplot) Hình 2.2a và Hình 2.2b tương ứng với từng kích thước mẫu ở trên. Bảng 2.1 đưa ra trung bình, căn bậc hai của trung bình bình phương sai số (RMSE) của $\hat{a}_n$ và $\hat{b}_n$. Khi cỡ mẫu n tăng, trong Bảng 2.1, RMSE của $\hat{a}_n$ và $\hat{b}_n$ giảm đáng kể. Những kết quả này về cơ bản phù hợp với kết quả chúng ta đã chứng minh.



Hình 2.2a: Boxplot của $\hat{a}_n$



Hình 2.2b: Boxplot của $\hat{b}_n$

Bảng 2.1: Trung bình và RMSE của $\hat{a}_n$ và $\hat{b}_n$

n	a	Trung bình của $\hat{a}_n$	RMSE của $\hat{a}_n$	b	Trung bình của $\hat{b}_n$	RMSE của $\hat{b}_n$
20	2	2.01	0.092	3	2.99	0.176
50	2	2.00	0.059	3	3.00	0.114
80	2	2.00	0.043	3	3.00	0.083
160	2	2.00	0.033	3	3.00	0.066

Tiếp đến, chúng tôi thực hiện mô phỏng để nghiên cứu tính vững đầy đủ cho ước lượng có trọng số của hàm $f(x)$ trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên theo phương pháp lân cận gần nhất.

Bổ đề đưới đây là mở rộng của Bổ đề 6.1 trong tài liệu của Györfi và cộng sự [39]. Giả sử $\{X_{ni}, 1 \le i \le k_n, n \ge 1\}$ là một mẫu ngẫu nhiên được rút ra từ biến ngẫu nhiên X. Kí hiệu độ đo xác suất của X là μ, $S_{x,\varepsilon}$ là hình cầu tâm x bán kính $\varepsilon > 0$ và support$(\mu) = \{x : \mu(S_{x,\varepsilon}) > 0 \ \forall \varepsilon > 0\}$ được gọi là giá (*support*) của μ (hoặc của X).

Bổ đề 2.22 *Nếu $x \in$ support(μ) và $\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 0$ thì*

$$\|X^{(n)}_{R_{k_n}(x)} - x\| \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \textit{khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Lấy ε tùy ý và $M > \frac{\varepsilon}{\mu(S_{x,\varepsilon})}$. Theo định nghĩa, $x \in \text{support}(\mu)$, với n đủ lớn, ta có

$$\begin{aligned}\{\|X^{(n)}_{R_{k_n}(x)} - x\| > \varepsilon\} &= \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(X_{ni}\in S_{x,\varepsilon})} < \frac{k_n}{n}\right\} \\ &\subset \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(X_{ni}\in S_{x,\varepsilon})} < \mu(S_{x,\varepsilon}) - \varepsilon/M\right\} \\ &\subset \left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(X_{ni}\in S_{x,\varepsilon})} - \mu(S_{x,\varepsilon})\right| > \varepsilon/M\right\}.\end{aligned}$$

Vì

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(X_{ni}\in S_{x,\varepsilon})} \xrightarrow{c.c.} \mu(S_{x,\varepsilon}) \text{ khi } n \to \infty,$$

nên

$$\|X^{(n)}_{R_{k_n}(x)} - x\| \xrightarrow{c.c.} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

□

Ví dụ 2.23 Xét mô hình hồi quy phi tham số

$$Y_{ni} = f(X_{ni}) + \varepsilon_{ni}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

trong đó $f(x)$ là một hàm liên tục chưa biết trên tập $[0, 1]$, $\{\varepsilon_{ni}, 1 \le i \le n\}$ được cho trong Ví dụ 2.21.

Giả sử $X_{n1}, \ldots, X_{nn}$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối đều liên tục trên $[0, 1]$. Với mọi $x \in [0, 1]$, gọi R_{ni} là hạng (*rank*) của $\|X_{ni} - x\|$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Khi đó, theo Joag-Dev và Proschan ([55], trang 292) ta có $R_{n1}, R_{n2}, \ldots, R_{nn}$ là các biến ngẫu nhiên liên kết âm. Lấy $0 < h_n < n$ sao cho $\frac{h_n}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$, ta xác định các hàm trọng số $W_{ni}(x), 1 \le i \le n$ theo phương pháp lân cận gần nhất bởi $W_{ni}(x) = h_n^{-1} I_{(R_{ni}\le h_n)}$. Khi đó $W_{n1}(x), \ldots, W_{nn}(x)$ là liên kết âm. Rõ ràng điều kiện (A_1) và (A_2) thỏa mãn. Ngoài ra, theo Bổ đề 2.22, với mọi $x \in \mathbf{A}$,

$$\|X^{(n)}_{h_n} - x\| \xrightarrow{c.c.} 0 \text{ khi } n \to \infty,$$

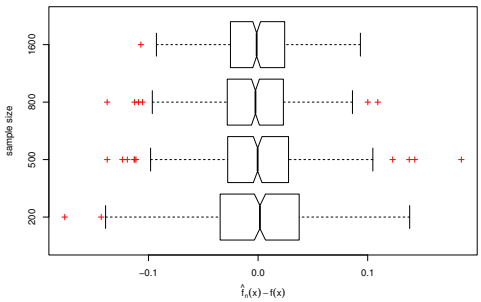
từ đó suy ra điều kiện (A_3) thỏa mãn.
Mặt khác, $P(R_{ni} = r) = \frac{1}{n}$ với $r = 1, 2, \ldots, n$ nên

$$\sum_{i=1}^{n} E(W^{\alpha}_{ni}) = \frac{1}{h_n^{\alpha-1}}.$$

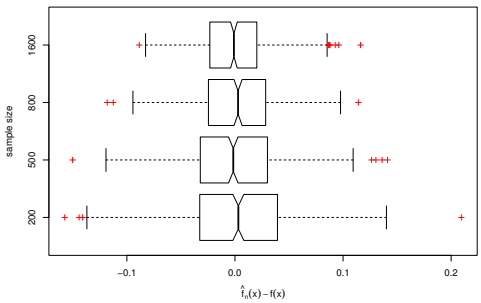
Do đó, lấy $p = 3/4$, $\alpha = 5$, $\ell(x) = 1$, $h_n = \lfloor n^{0.75} \rfloor$. Khi đó $E(|\varepsilon|^{2/p}) < \infty$ và điều kiện (2.37) thỏa mãn. Áp dụng Hệ quả 2.20 ta có với mọi $x \in (0, 1)$,

$$\hat{f}_n(x) \xrightarrow{c.c.} f(x) \quad \text{khi } n \to \infty.$$

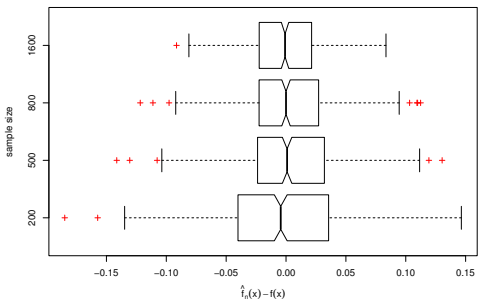
Lấy $f(x) = x^2$ nếu $x \in [0,1]$ và $f(x) = 0$ nếu $x \notin [0,1]$. Lấy kích thước mẫu n lần lượt là 200, 500, 800 và 1600. Với mỗi kích thước mẫu ta tính $\hat{f}_n(x) - f(x)$ 500 lần tại $x = 0.1$, 0.5, 0.9 tương ứng với từng kích thước mẫu. Các kết quả này được thể hiện trong biểu đồ hộp tương ứng Hình 2.3, 2.4, 2.5. Bảng 2.2 đưa ra trung bình và căn bậc hai của trung bình bình phương sai số (RMSE) của $\hat{f}_n(x) - f(x)$ với $x = 0.1$, 0.5, 0.9 tương ứng. Có thể thấy rằng dù $x = 0.1$, 0.5, 0.9 thì độ lệch $\hat{f}_n(x) - f(x)$ vẫn dao động quanh 0 khi cỡ mẫu n tăng lên. Bảng 2.2 cho thấy thấy rằng RMSE của $\hat{f}_n(x) - f(x)$ giảm đáng kể khi n tăng. Những kết quả này về cơ bản phù hợp với kết quả chúng ta đã chứng minh.



Hình 2.3: Boxplot của $\hat{f}_n(x) - f(x)$ tại $x = 0.1$



Hình 2.4: Boxplot của $\hat{f}_n(x) - f(x)$ tại $x = 0.5$



Hình 2.5: Boxplot của $\hat{f}_n(x) - f(x)$ tại $x = 0.9$

Bảng 2.2: Trung bình và RMSE của $\hat{f}_n(x)$

n	x	$f(x)$	Trung bình	RMSE
200	0.1	0.01	0.011	0.057
	0.5	0.25	0.253	0.054
	0.9	0.81	0.807	0.055
500	0.1	0.01	0.010	0.044
	0.5	0.25	0.248	0.045
	0.9	0.81	0.814	0.042
800	0.1	0.01	0.007	0.038
	0.5	0.25	0.251	0.039
	0.9	0.81	0.811	0.039
1600	0.1	0.01	0.009	0.033
	0.5	0.25	0.250	0.032
	0.9	0.81	0.810	0.031

Kết luận Chương 2

Chương 2 thiết lập các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát. Nội dung này được viết dựa trên công trình số **[2]** trong **Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án**. Cụ thể:

- Định lý 2.4 đưa ra các điều kiện để thiết lập định lý hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa $\phi \in \mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$ trong đó $r \geq 1$, $\alpha \in (1, 2]$. Để minh họa kết quả Định lý 2.4, chúng tôi trình bày Ví dụ 2.6 về phân phối Pareto hai phía. Tiếp đến, lấy hàm $\phi(x) = x^{\frac{r}{\alpha}} \log^{\frac{r}{\gamma}} x \in \mathcal{K}^{\alpha}_{r,R}$, trong đó $r > 0$, $1 < \alpha \leq 2$ và $\alpha r > \gamma$ ta thu được Hệ quả 2.7. Ngoài ra, Hệ quả 2.7 này đã tổng quát kết quả của Chen và Sung [14].

- Định lý 2.9 có thể xem là định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa $\phi \in \mathcal{K}^{\alpha}_{r} \cap \mathcal{H}_r$ trong đó $r \geq 1$, $\alpha \in (1, 2]$. Lấy $r = 1$ trong Định lý 2.9, chúng ta thu được Hệ quả 2.10 được xem là luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Để minh họa Hệ quả 2.10, chúng ta xét lại dãy biến ngẫu nhiên có phân phối Pareto hai phía và lấy $\phi(x) = x^{1/\theta}(\log x)^{(1+\delta)/\theta}$, trong đó $\delta > 0$ nhỏ tùy ý, thu được kết quả tốt hơn luật số lớn Marcinkiewicz–Zygmund cổ điển.

- Khi $\alpha > 2$ chúng tôi tiếp tục thiết lập Định lý 2.11 được xem là định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa $\phi \in \mathcal{K}_r^\alpha \cap \mathcal{H}_r \cap \mathcal{L}_{r,\kappa}^\beta$, trong đó $r \geq 1$, $2(r-\kappa) > \beta$, $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2(r-1)\beta}{2(r-\kappa)-\beta}\right\}$. Lấy $\phi(x) = x^p\ell(x^p)$, $\frac{r}{\alpha} < p < r$, $r \geq 1$, ta thu được Hệ quả 2.13.

- Dựa trên chứng minh của Định lý 2.4 và Định lý 2.11, ta có thể kết luận rằng kết quả của Định lý 2.4 vẫn đúng khi $\alpha > \max\left\{2, \dfrac{2(r-1)\beta}{2(r-\kappa)-\beta}\right\}$, $r \geq 1$, $2(r-\kappa) > \beta$ và điều kiện bổ sung $\phi \in \mathcal{K}_r^\alpha \cap \mathcal{L}_{r,\kappa}^\beta$.

- Những định lý và hệ quả trên vẫn đúng với các cấu trúc phụ thuộc khác, chẳng hạn như hiệu martingale, biến ngẫu nhiên NSD, biến ngẫu nhiên φ-mixing với $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(n) < \infty$, biến ngẫu nhiên ρ^*-mixing (hoặc $\tilde{\rho}$-mixing), biến ngẫu nhiên m-ANA.

Ngoài ra, áp dụng các kết quả vừa nêu, chúng tôi đưa ra tốc độ hội tụ cho ước lượng vững đầy đủ trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn và trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên. Cũng trong phần này, chúng tôi đưa ra ví dụ mô phỏng để kiểm chứng hiệu quả của các kết quả lý thuyết. Cụ thể:

- Định lý 2.17 chỉ ra tốc độ hội tụ của ước lượng vững đầy đủ cho hai tham số trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn với thiết kế ngẫu nhiên (2.22) bằng cách áp dụng Định lý 2.9, Định lý 2.11 với $r = 2$. Lấy $\phi(x) = x^p\ell(x^p)$ trong đó $\frac{1}{2} < p \leq 1$, $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm, ta thu được Hệ quả 2.18.

- Khi nghiên cứu mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên (2.35), Định lý 2.19 đưa ra ước lượng vững đầy đủ cho hàm $f(x)$ bằng cách áp dụng Định lý 2.9, Định lý 2.11 và các giả thiết $(A_1) - (A_3)$ của hàm trọng số ngẫu nhiên.

- Chúng tôi thực hiện hai ví dụ mô phỏng để kiểm chứng hiệu quả của các kết quả lý thuyết. Trong cả hai mô phỏng, dữ liệu quan sát được giả định là độc lập và có cùng phân phối đều liên tục trên $[0, 1]$. Ví dụ 2.21 nghiên cứu tính vững đầy đủ cho ước lượng tham số trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn với thiết kế ngẫu nhiên. Ví dụ 2.23 nghiên cứu tính vững đầy đủ cho ước lượng có trọng số của hàm $f(x)$ trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên theo phương pháp lân cận gần nhất (*The nearest neighbor estimate*).

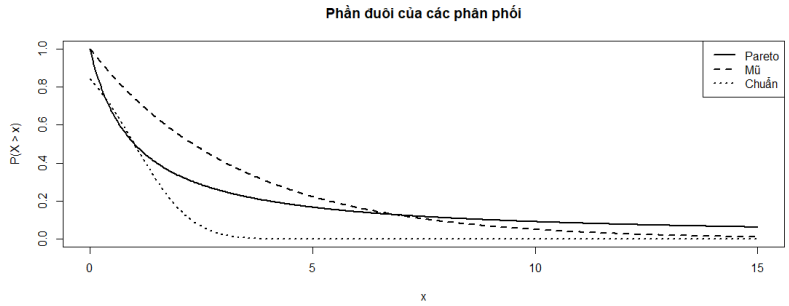
Chương 3

Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng

Các phân phối như Pareto, phân phối log-gamma, phân phối Cauchy, phân phối Weibull, đều có xác suất ở phần đuôi $P(X > x)$ lớn hơn so với phân phối mũ. Người ta gọi những phân phối có tính chất như vậy là phân phối đuôi nặng. Rolski và cộng sự ([83], trang 49) đã đưa ra định nghĩa: Một biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối đuôi nặng nếu $E(e^{\lambda X}) = \int_0^\infty e^{\lambda x} dF(x) = \infty$ với mọi $\lambda > 0$. Khi đó, với mọi $\lambda > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(X > x)}{e^{-\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} P(X > x) = \infty.$$

Nói cách khác, một biến ngẫu nhiên có đuôi nặng thì xác suất ở phần đuôi của nó $P(X > x)$ giảm chậm hơn hàm mũ $e^{-\lambda x}$. Chính đặc điểm "đuôi nặng" này đã dẫn



đến những kết quả bất ngờ trong lý thuyết xác suất, điển hình là kết quả của Heyde ([42], Định lý 3): Xét $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối đuôi nặng $P(|X| > x) = x^{-\alpha}\ell(x)$ thỏa mãn $EX = 0$ nếu $E|X| < \infty$, trong đó $0 \leq \alpha < 2, \alpha \neq 1$, $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Khi đó, dãy tổng riêng $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ không tuân theo luật mạnh số lớn thông thường, tức là chúng ta không thể tìm được dãy hằng số chuẩn hóa $0 < b_n \uparrow$ để $S_n/b_n \to 1$ hầu chắc chắn. Ngoài ra, dữ liệu đuôi nặng cũng xuất hiện trong nhiều lĩnh vực như kinh tế, thủy văn, vật lý và viễn thông. Mandelbrot [69] là người đầu tiên đưa khái niệm đuôi nặng vào lĩnh vực tài chính bằng cách chỉ ra sự thay đổi trong giá bông có tính chất đuôi nặng. Sau đó, nhiều ví dụ khác về phân phối đuôi nặng đã được nghiên cứu, bao gồm tín hiệu điện thoại (Stuck [94]), lưu lượng tệp trên internet (Crovella và cộng sự [17]), lợi nhuận trên thị trường tài chính (Embrechts và cộng sự [29]), cường độ động đất và lũ lụt (Malik [68]), thống kê thu nhập (Malik [68]). Các mô hình như vậy đều có đặc điểm là trung bình vô hạn hoặc phương sai vô hạn. Chính điều này đã thúc đẩy

nhiều nhà toán học phát triển các định lý giới hạn cho dãy biến ngẫu nhiên có phân phối đuôi nặng. Tác giả Gut [36] đã đưa ra luật yếu số lớn cho các biến ngẫu nhiên không âm có trung bình vô hạn trong trò chơi St. Petersburg. Dũng và cộng sự đã thiết lập được sự hội tụ trung bình và định lý giới hạn trung tâm cho tổng trọng số của các biến ngẫu nhiên đuôi nặng ([26]) và đưa ra luật yếu số lớn cho các biến ngẫu nhiên có mômen cấp r vô hạn (xét với $0 < r < 2$, [27]). Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu luật số lớn Marcinkiewicz cho tổng trọng số tất định của các biến ngẫu nhiên liên kết âm và đuôi nặng.

Dựa trên tính chất giải tích của các hàm biến đổi chậm và định lý Karamata, chúng tôi sẽ thiết lập Luật yếu số lớn Marcinkiewicz cho tổng trọng số tất định

$$S_n = \sum_{j=1}^{m_n} c_{nj} X_j,$$

trong đó $\{c_{nj}, 1 \leq j \leq m_n, n \geq 1\}$ là một mảng số thực, $\{X_n,\ n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X (xem Định nghĩa A.20) thỏa mãn

$$P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x), \tag{3.1}$$

trong đó $0 < r < 2$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm (xem Định lý 3.1). Trường hợp $\ell(x) = 1$ và $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập, chúng ta thu được Định lý 12 trong [27]. Trong Hệ quả 3.2, chúng tôi đưa ra điều kiện cụ thể của hằng số chuẩn hóa cho luật yếu số lớn Marcinkiewicz khi $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$. Sau đó, chúng tôi chứng minh rằng dãy chuẩn hóa trong Hệ quả 3.2 là tối ưu đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối (xem Hệ quả 3.4). Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày Ví dụ 3.3 để làm rõ ý nghĩa của của Hệ quả 3.2 so với luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund. Tiếp theo, trong Định lý 3.5, chúng tôi phát triển kỹ thuật Adler và Rosalsky [1] để nghiên cứu tốc độ hội tụ của luật mạnh số lớn Marcinkiewicz thông qua sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thỏa mãn (3.1). Sau đó, chúng tôi chứng minh rằng dãy chuẩn hóa trong Định lý 3.5 là tối ưu đối với dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối (xem Định lý 3.8). Lấy $\alpha = 1$ trong Định lý 3.5, chúng ta thu được luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewiczc-Zygmund cho tổng có trọng số của các biến ngẫu nhiên liên kết âm (xem Hệ quả 3.9). Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày ví dụ về phân phối log-gamma hai phía và trò chơi Feller (xem Ví dụ 3.10, Ví dụ 3.11) để minh họa Hệ quả 3.9. Từ các kết quả thu được, chúng tôi áp dụng để tìm ước lượng vững cho giá trị rủi ro có điều kiện $cVaR$ với dữ liệu đuôi nặng và nghiên cứu tính vững của các ước lượng trong mô hình hồi quy bán tham số với các sai số đuôi nặng (Định lý 3.12 và Định lý 3.14).

3.1 Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng

Luật yếu số lớn

Định lý 3.1 *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thỏa mãn $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$, trong đó $0 < r < 2$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{c_{nk}, 1 \leq k \leq m_n, n \geq 1\}$ là một mảng tam giác số thực thỏa mãn $m_n \nearrow \infty$, $\sup\limits_{1\leq k\leq n} c_{nk} \to 0$ khi $n \to \infty$ và*

$$\sum_{k=1}^{m_n} |c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) = o(1). \tag{3.2}$$

Nếu $0 < r < 1$ thì

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Nếu $r = 1$ thì

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}(X_k - E(X_k I_{(|c_{nk}X_k|\leq 1)})) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.4}$$

Nếu $1 < r < 2$ thì

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}(X_k - EX_k) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.5}$$

Trường hợp $0 < r < 1$, giả thiết $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm có thể bỏ qua.

Chứng minh. Do $c_{nk} = c_{nk}^+ - c_{nk}^-$, không mất tổng quát, giả sử $c_{nk} \geq 0$. Với $n \geq 1$, $1 \leq k \leq m_n$, đặt

$$X'_{nk} = -I_{(c_{nk}X_k<-1)} + c_{nk}X_k I_{(|c_{nk}X_k|\leq 1)} + I_{(c_{nk}X_k>1)}.$$

Theo Mệnh đề 1.31, $\{X'_{nk} - EX'_{nk}, 1 \leq k \leq m_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với kỳ vọng 0. Với mọi $\varepsilon > 0$, lần lượt áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2) cho bất đẳng thức đầu tiên, bất đẳng thức cực đại Rosenthal cho dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm (Bổ đề 2.3) cho bất đẳng thức thứ hai, bất đẳng thức C_r (Bổ đề A.7) cho bất đẳng thức thứ ba, Bổ đề A.21 cho bất đẳng thức thứ tư và Nhận xét 1.6 cho bất đẳng thức cuối cùng ta có ($q = 1$ nếu $0 < r < 1$ và $q = 2$ nếu $1 \leq r < 2$):

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{k=1}^{m_n}(X'_{nk} - EX'_{nk})\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon^q} E\left|\sum_{k=1}^{m_n}(X'_{nk} - EX'_{nk})\right|^q \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1}^{m_n} E|X'_{nk} - EX'_{nk}|^q \end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1}^{m_n} E(|X'_{nk}|^q) = \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1}^{m_n}\Big(P(|X_k| > |c_{nk}|^{-1}) + c_{nk}^q E(X_k^q I_{(|X_k|\leq |c_{nk}|^{-1})})\Big)$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} P(|X| > |c_{nk}|^{-1}) + \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} c_{nk}^q E(X^q I_{(|X|\leq |c_{nk}|^{-1})})$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} P(|X| > |c_{nk}|^{-1}) + \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} c_{nk}^q \sum_{1\leq j\leq \lfloor c_{nk}^{-1}\rfloor+1} j^q P(j-1 < |X| \leq j)$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} P(|X| > |c_{nk}|^{-1}) + \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} c_{nk}^q \sum_{1\leq j\leq \lfloor c_{nk}^{-1}\rfloor+1} j^{q-1} P(|X| > j)$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n}\left(|c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) + c_{nk}^q \sum_{1\leq j\leq \lfloor c_{nk}^{-1}\rfloor+1} j^{q-r-1}\ell(j)\right)$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon^q}\sum_{k=1}^{m_n} |c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) \to 0 \quad \text{khi } n\to\infty.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{k=1}^{m_n}(X'_{nk} - EX'_{nk}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n\to\infty. \tag{3.6}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{k=1}^{m_n}(c_{nk}X_k - X'_{nk})\right| > \varepsilon\right) &\leq \sum_{k=1}^{m_n} P(c_{nk}X_k \neq X'_{nk}) \\ &= \sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} P(|X_k| > |c_{nk}|^{-1}) \\ &\leq C\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} P(|X| > |c_{nk}|^{-1}) \\ &\leq C\sum_{k=1}^{m_n} |c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) \to 0 \quad \text{khi } n\to\infty. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Kết hợp (3.6) và (3.7) ta có

$$\sum_{k=1}^{m_n}(c_{nk}X_k - EX'_{nk}) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n\to\infty. \tag{3.8}$$

Phần còn lại của chứng minh định lý, chúng tôi chia thành ba trường hợp.

Trường hợp 1: $r = 1$. Ta viết

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}(X_k - E(X_k I_{(|c_{nk}X_k|\leq 1)})) &= \sum_{k=1}^{m_n}(c_{nk}X_k - c_{nk}E(X_k I_{(|c_{nk}X_k|\leq 1)})) \\ &= \sum_{k=1}^{m_n}(c_{nk}X_k - EX'_{nk}) + \sum_{k=1}^{m_n}\Big(EX'_{nk} - c_{nk}E(X_k I_{(|c_{nk}X_k|\leq 1)})\Big). \end{aligned}$$

Ta có

$$\left|\sum_{k=1}^{m_n}\Big(EX'_{nk} - c_{nk}E(X_k I_{(|c_{nk}X_k|\leq 1)})\Big)\right|$$

$$= \Big| \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} (-P(X_k < -c_{nk}^{-1}) + P(X_k > c_{nk}^{-1})) \Big|$$
$$\leq \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} P(|X| > |c_{nk}|^{-1}) \leq C \sum_{k=1}^{m_n} |c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}).$$

Kết hợp với (3.2) và (3.8), ta thu được (3.4).

Trường hợp 2: $0 < r < 1$. Ta sẽ chỉ ra $\sum_{k=1}^{m_n} EX'_{nk} \to 0$ khi $n \to \infty$, để kết hợp với (3.8) ta có đpcm. Thật vậy, áp dụng Bổ đề A.21 và Nhận xét 1.6,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=1}^{m_n} EX'_{nk}\Big| &\leq \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big(P(|X_k| > c_{nk}^{-1}) + c_{nk} E|X_k| I_{(|X_k| \leq c_{nk}^{-1})}\Big) \\
&\leq \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big((C_0 + C_1) P(|X| > c_{nk}^{-1}) + C_1 c_{nk} E|X| I_{(|X| \leq c_{nk}^{-1})}\Big) \\
&\leq C \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big(P(|X| > c_{nk}^{-1}) + c_{nk} \sum_{1 \leq j \leq \lfloor c_{nk}^{-1} \rfloor + 1} jP(j-1 < |X| \leq j)\Big) \\
&\leq C \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big(P(|X| > c_{nk}^{-1}) + c_{nk} \sum_{1 \leq j \leq \lfloor c_{nk}^{-1} \rfloor + 1} P(|X| > j)\Big) \\
&\leq C \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big(|c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) + c_{nk} \sum_{1 \leq j \leq \lfloor c_{nk}^{-1} \rfloor + 1} j^{-r} \ell(j)\Big) \\
&\leq C \sum_{k=1}^{m_n} |c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.9), (3.2) và (3.8) ta suy ra khẳng định (3.3).

Trường hợp 3: $1 < r < 2$. Tiếp tục áp dụng Bổ đề A.21 và Nhận xét 1.6, ta có

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=1}^{m_n} EX'_{nk} - \sum_{k=1}^{m_n} c_{nk} EX_k\Big| \leq \sum_{k=1}^{m_n} |E(X'_{nk} - c_{nk} X_k)| \\
&\leq \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big(P(|X_k| > c_{nk}^{-1}) + c_{nk} E|X_k| I_{(|X_k| > c_{nk}^{-1})}\Big) \\
&\leq C \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big(P(|X| > c_{nk}^{-1}) + c_{nk} \sum_{j=\lfloor c_{nk}^{-1} \rfloor}^{\infty} (j+1) P(j < |X| \leq j+1)\Big) \\
&\leq C \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big(P(|X| > c_{nk}^{-1}) + c_{nk} \sum_{j=\lfloor c_{nk}^{-1} \rfloor}^{\infty} P(|X| > j)\Big) \\
&\leq C \sum_{k=1, c_{nk}\neq 0}^{m_n} \Big(|c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) + c_{nk} \sum_{j=\lfloor c_{nk}^{-1} \rfloor}^{\infty} j^{-r} \ell(j)\Big) \\
&\leq C \sum_{k=1}^{m_n} |c_{nk}|^r \ell(|c_{nk}|^{-1}) \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Khẳng định (3.5) được suy ra từ (3.2), (3.8) và (3.10). □

Từ chứng minh Định lý 3.1, chúng ta suy ra được Hệ quả dưới đây.

Hệ quả 3.2 *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với kỳ vọng 0, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thỏa mãn $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$, trong đó $1 < r < 2$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n \geq 1\}$ là một dãy số thực dương. Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có*

$$P\Big(\frac{1}{a_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| > \varepsilon\Big) \leq \frac{C_\varepsilon n\ell(a_n)}{a_n^r},$$

trong đó C_ε là một hằng số dương phụ thuộc ε.
Ngoài ra, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\ell(a_n)}{a_n^r} = 0, \tag{3.11}$$

thì

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{khi} \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Joag-Dev và Proschan [55] đã chỉ ra rằng các biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn đồng thời có tương quan âm là liên kết âm. Dựa vào kết quả này, chúng tôi trình bày ví dụ sau để minh họa Hệ quả 3.2.

Ví dụ 3.3 Cho $\{e_n, n \geq 1\}$ là một quá trình Gauss thời gian rời rạc sao cho mọi họ hữu hạn $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ đều có phân phối Gauss đồng thời $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, trong đó $\mathbf{0}$ là véctơ không và

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & -\rho & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 1 & -\rho & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\rho & 1 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\rho & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Khi đó $e_i \sim N(0,1)$ với mọi $i \geq 1$. Gọi $\Phi(x)$ là hàm phân phối của phân phối chuẩn tắc và đặt $e_i' = \Phi(e_i),\ i \geq 1$. Theo Joag-Dev và Proschan [55], $\{e_n, n \geq 1\}$ và $\{e_n', n \geq 1\}$ là các dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.

Cho X là một biến ngẫu nhiên có phân phối log-gamma hai phía với hàm mật độ

$$f(x, r, \nu) = \frac{1}{2} r^\nu |x|^{-r-1} (\log(|x|))^{\nu-1}/\Gamma(\nu), \quad |x| \geq 1, \tag{3.13}$$

trong đó $\nu \geq 1$, $1 < r < 2$. Ta có $EX = 0$, $E|X|^r = \infty$ và $E|X|^s < \infty$ với $0 < s < r$.

Gọi $F(x)$ là hàm phân phối tích lũy của X, đặt $X_i = F^{-1}(e_i')$. Khi đó $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và có cùng phân phối xác suất với X. Luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund (xem Định lý A.16) chỉ ra

$$\frac{1}{n^{1/s}}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Mặt khác, $P(|X| > x) \asymp x^{-r}(\log^+(x))^{\nu-1}$ (trong đó $\log^+(x) = \max\{0, \log x\}$). Áp dụng Hệ quả 3.2 với

$$a_n = n^{1/r}(\log^+(n))^{\frac{\nu-1}{r}} g(n), \text{ trong đó } \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty,$$

ta thu được

$$\frac{1}{n^{1/r}(\log^+(n))^{\frac{\nu-1}{r}} g(n)} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Kết quả này tốt hơn luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund.

Khi $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với dãy tổng riêng $\{S_n, n \geq 1\}$, Định lý 1.3 trong Gut [35] đã chỉ ra rằng, với $r \in (0, 1]$, $x^r \ell^{-1}(x) P(|X| > x) \to 0$ khi $n \to \infty$ là điều kiện cần và đủ để thiết lập sự hội tụ

$$\frac{S_n - nE(XI_{(|X|\leq n^{1/r}\ell(n))})}{n^{1/r}\ell(n)} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Bằng kỹ thuật đối xứng, Hệ quả đưới đây chỉ ra rằng (3.11) là điều kiện tối ưu của dãy chuẩn hóa để thiết lập kết quả (3.12) trong trường hợp dãy biến ngẫu nhiên là độc lập cùng phân phối.

Hệ quả 3.4 *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với kỳ vọng 0 thỏa mãn $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$, trong đó $1 < r < 2$ và $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n \geq 1\}$ là một dãy số thực dương. Khi đó,*

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{khi } n \to \infty \tag{3.14}$$

khi và chỉ khi

$$\frac{n\ell(a_n)}{a_n^r} \to 0 \quad \textit{khi } n \to \infty. \tag{3.15}$$

Chứng minh. Rõ ràng điều kiện đủ được suy ra trực tiếp từ Hệ quả 3.2. Chúng ta sẽ đi chứng minh điều kiện cần.

Giả sử (3.14) đúng. Với mỗi $n \geq 1$, giả sử X_n và X_n' là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Khi đó $X_n^s := X_n - X_n'$ là một biến ngẫu nhiên đối xứng (Định nghĩa A.11). Khi đó,

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k^s \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.16}$$

Do $|X_k^s| \leq |\sum_{i=1}^{k} X_i^s| + |\sum_{i=1}^{k-1} X_i^s|$ suy ra $\max_{1\leq i\leq n} |X_i^s| \leq 2 \max_{1\leq k\leq n} |\sum_{i=1}^{k} X_i^s|$. Áp dụng Bổ đề A.14 và Bổ đề A.15 với $\delta = \frac{1}{2}$, ta có với mọi $\varepsilon > 0$ và n đủ lớn,

$$P\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} X_i^s\Big| > \varepsilon a_n\Big) \geq \frac{1}{2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k} X_i^s\Big| > \varepsilon a_n\Big)$$

$$\geq \frac{1}{2}P\left(\max_{1\leq k\leq n}|X_k^s| > 2\varepsilon a_n\right) = \frac{1}{2}\left[1-\left(1-P\left(|X^s|>2\varepsilon a_n\right)\right)^n\right]$$
$$\geq \frac{n}{4}P\left(|X^s|>2\varepsilon a_n\right)$$
$$\geq \frac{n}{2}P\left(|X|>\varepsilon a_n\right) \asymp \frac{n\ell(a_n)}{a_n^r}.$$

Kết hợp với (3.16) ta được (3.15). □

Luật mạnh số lớn

Phần tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu tốc độ hội tụ của luật mạnh số lớn thông qua sự hội tụ đầy đủ của luật số lớn Baum–Katz cho tổng trọng số tất định của các biến ngẫu nhiên liên kết âm có phân phối đuôi nặng với dãy chuẩn hóa tổng quát. Để chứng minh các kết quả, chúng tôi đã áp dụng các phương pháp trong Adler và Rosalsky [1], Wang và cộng sự [110].

Định lý 3.5 *Cho $\{X_n, n\geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thỏa mãn*

$$P(|X|>x) \asymp x^{-r}\ell(x), \quad 0<r<2, \tag{3.17}$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n\geq 1\}$ là một dãy số thực dương thỏa mãn

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}a_n^{-r}\ell(a_n) < \infty, \tag{3.18}$$

trong đó $1\leq\alpha\leq 2$ và $\{c_{ni}, n\geq 1, 1\leq i\leq n\}$ là một mảng số thực thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n}|c_{ni}|^s = O(n) \quad \text{với} \quad s>r. \tag{3.19}$$

Khi đó với mọi $\varepsilon>0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2}P\Big(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\Big(X_i - E(X_iI_{(|X_i|\leq a_n)})\Big)\Big| > \varepsilon a_n\Big) < \infty. \tag{3.20}$$

Ngoài ra nếu $1<r<2$ và $EX_n=0$ với mọi $n\geq 1$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2}P\Big(\max_{1\leq k\leq n}|\sum_{i=1}^{k}c_{ni}X_i| > \varepsilon a_n\Big) < \infty \quad \text{với mọi} \quad \varepsilon>0. \tag{3.21}$$

Trường hợp $0<r\leq 1$, giả thiết $\{X_n, n\geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm có thể lược bỏ.

Nhận xét 3.6 Kết hợp bất đẳng thức Hölder (Bổ đề A.5) và điều kiện (3.19), với $0<v<s$,

$$\sum_{i=1}^{n}c_{ni}^v \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}1\Big)^{\frac{s-v}{s}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\big(|c_{ni}|^v\big)^{\frac{s}{v}}\Big)^{\frac{v}{s}} \leq Cn. \tag{3.22}$$

Chứng minh. Ta có

$$P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\Big(X_i-E(X_iI_{(|X_i|\le a_n)})\Big)\Big|>\varepsilon a_n\Big)\le\sum_{i=1}^{n}P(|X_i|>a_n)$$
$$+P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\Big(X_iI_{(|X_i|\le a_n)}-E(X_iI_{(|X_i|\le a_n)})\Big)\Big|>\varepsilon a_n\Big).$$

Mặt khác

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-2}\sum_{i=1}^{n}P\left(|X_i|>a_n\right)\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}P(|X|>a_n)$$
$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}a_n^{-r}\ell(a_n)<\infty. \tag{3.23}$$

Do đó, để chứng minh (3.20) ta cần chỉ ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}}P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\Big(X_iI_{(|X_i|\le a_n)}-E(X_iI_{(|X_i|\le a_n)})\Big)\Big|>\varepsilon a_n\Big)<\infty.$$

Với mỗi $n\ge 1$ cố định, $1\le i\le k\le n$, đặt

$$Y_{ni}=-a_nI_{(X_i<-a_n)}+X_iI_{(|X_i|\le a_n)}+a_nI_{(X_i>a_n)},$$
$$Z_{ni}=-a_nI_{(X_i<-a_n)}+a_nI_{(X_i>a_n)},$$
$$U_k=\sum_{i=1}^{k}(c_{ni}Y_{ni}-E(c_{ni}Y_{ni})),\quad V_k=\sum_{i=1}^{k}(c_{ni}Z_{ni}-E(c_{ni}Z_{ni})).$$

Do $c_{nk}=c_{nk}^{+}-c_{nk}^{-}$, nên không mất tổng quát, giả sử $c_{nk}\ge 0$. Áp dụng Hệ quả 1.32, ta có với mỗi $n\ge 1$, dãy $\{Y_{ni},n\ge 1,1\le i\le n\}$ và $\{Z_{ni},n\ge 1,1\le i\le n\}$ là liên kết âm. Tiếp tục, xét một dãy hàm không giảm $\{f_j,j\ge 1\}$, trong đó $f_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_j(x)=w_jx$, $w_j\ge 0$. Khi đó, với mỗi $n\ge 1$, áp dụng Mệnh đề 1.31 ta có dãy $\{c_{ni}Y_{ni},1\le i\le n,n\ge 1\}$ và $\{c_{ni}Z_{ni},1\le i\le n,n\ge 1\}$ là liên kết âm. Do đó, $\{c_{ni}Y_{ni}-E(c_{ni}Y_{ni}),1\le i\le n,n\ge 1\}$ và $\{c_{ni}Z_{ni}-E(c_{ni}Z_{ni}),1\le i\le n,n\ge 1\}$ cũng là dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với kỳ vọng 0. Khi đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}}P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\Big(X_iI_{(|X_i|\le a_n)}-E(X_iI_{(|X_i|\le a_n)})\Big)\Big|>\varepsilon a_n\Big)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}}P\Big(\max_{1\le k\le n}|U_k-V_k|>\varepsilon a_n\Big)$$
$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\max_{1\le k\le n}|V_k|>\frac{\varepsilon a_n}{2}\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}}P\Big(\max_{1\le k\le n}|U_k|>\frac{\varepsilon a_n}{2}\Big)$$
$$:=I_1+I_2.$$

Xét I_1, với $0 < t \leq \min\{1, s\}$, áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), bất đẳng thức C_r (Bổ đề A.7) và (3.22) ta có

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{2^t}{\varepsilon^t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha} a_n^t} E(\max_{1\leq k\leq n} |V_k|^t) \\
&\leq \frac{2^t}{\varepsilon^t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha} a_n^t} E\Big(\sum_{i=1}^{n} (|c_{ni}|^t |Z_{ni}|^t + |c_{ni}|^t E|Z_{ni}|^t) \Big) \\
&= \frac{2^{t+1}}{\varepsilon^t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha} a_n^t} \sum_{i=1}^{n} |c_{ni}|^t E|Z_{ni}|^t \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(|X| > a_n)}{n^{2-\alpha}} \sum_{i=1}^{n} |c_{ni}|^t \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} P(|X| > a_n) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} a_n^{-r} \ell(a_n) < \infty.
\end{aligned}$$

Để chứng minh $I_2 < \infty$, ta chia thành hai trường hợp.

Trường hợp 1: $0 < r < 1$. Lấy $r < t < \min\{1, s\}$. Áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), bất đẳng thức C_r (Bổ đề A.7), Bổ đề A.21, (3.22) và Nhận xét 1.6, ta được

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{2^t}{\varepsilon^t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha} a_n^t} E(\max_{1\leq k\leq n} |U_k|^t) \\
&\leq \frac{2^t}{\varepsilon^t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha} a_n^t} E\Big(\sum_{i=1}^{n} (|c_{ni}|^t |Y_{ni}|^t + |c_{ni}|^t E|Y_{ni}|^t) \Big) \\
&= \frac{2^{t+1}}{\varepsilon^t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha} a_n^t} \sum_{i=1}^{n} |c_{ni}|^t E(|Y_{ni}|^t) \\
&= \frac{2^{t+1}}{\varepsilon^t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha} a_n^t} \sum_{i=1}^{n} |c_{ni}|^t \Big(E(|X_i|^t I_{(|X_i|\leq a_n)}) + a_n^t P(|X_i| > a_n) \Big) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \Big(\frac{E(|X|^t I_{(|X|\leq a_n)})}{a_n^t} + P(|X| > a_n) \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} c_{ni}^t \Big) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \Big(\frac{1}{a_n^t} \sum_{1\leq k\leq \lfloor a_n \rfloor + 1} k^t P(k-1 < |X| \leq k) + P(|X| > a_n) \Big) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \Big(\frac{1}{a_n^t} \sum_{1\leq k\leq \lfloor a_n \rfloor + 1} k^{t-1} P(|X| > k) + P(|X| > a_n) \Big) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \Big(\frac{1}{a_n^t} \sum_{1\leq k\leq \lfloor a_n \rfloor + 1} k^{t-r-1} \ell(k) + a_n^{-r} \ell(a_n) \Big) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \Big(\frac{a_n^{t-r} \ell(a_n)}{a_n^t} + a_n^{-r} \ell(a_n) \Big) \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} a_n^{-r} \ell(a_n) < \infty.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2: $1 \leq r < 2$. Lấy $\nu = 1$ nếu $r = 1$ và $\max\{1, r\} < \nu < \min\{2, s\}$ nếu $1 < r < 2$, tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), bất đẳng thức C_r

(Bổ đề A.7), (3.22), Nhận xét 1.6 và Bổ đề A.21, ta thu được

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \frac{2^\nu}{\varepsilon^\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}a_n^\nu}E(\max_{1\le k\le n}|U_k|^\nu)\\
&\le \frac{2^\nu}{\varepsilon^\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}a_n^\nu}\sum_{i=1}^{n}E(|c_{ni}Y_{ni}-E(c_{ni}Y_{ni})|^\nu)\\
&\le \frac{2^{2\nu-1}}{\varepsilon^\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}a_n^\nu}\sum_{i=1}^{n}|c_{ni}|^\nu E(|Y_{ni}|^\nu)\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-2}\Big(\frac{E(|X|^\nu I_{(|X|\le a_n)})}{a_n^\nu}+P(|X|>a_n)\Big)\Big(\sum_{n=1}^{n}c_{ni}^\nu\Big)\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}\Big(\frac{E(|X|^\nu I_{(|X|\le a_n)})}{a_n^\nu}+P(|X|>a_n)\Big)\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}\Big(\frac{a_n^{\nu-r}\ell(a_n)}{a_n^\nu}+a_n^{-r}\ell(a_n)\Big)\\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}a_n^{-r}\ell(a_n)<\infty.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-\alpha}}P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\Big(X_iI_{(|X_i|\le a_n)}-E(X_iI_{(|X_i|\le a_n)})\Big)\Big|>\varepsilon a_n\Big)<\infty. \tag{3.24}$$

Kết hợp (3.23) và (3.24), ta suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-2}P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\Big(X_i-E(X_iI_{(|X_i|\le a_n)})\Big)\Big|>\varepsilon a_n\Big)<\infty, \tag{3.25}$$

chính là khẳng định (3.20).

Cuối cùng, với $1<r<2$ và $EX_n=0$ với mọi $n\ge 1$, kết hợp Bổ đề A.21, (3.22) và Nhận xét 1.6 ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n}|c_{ni}|E(X_iI_{(|X_i|\le a_n)})}{a_n} &\le \frac{\sum_{i=1}^{n}|c_{ni}|E|X_iI_{(|X_i|>a_n)}|}{a_n}\\
&\le \frac{E(|X|I_{(|X|>a_n)})}{a_n}\sum_{i=1}^{n}|c_{ni}|\\
&\le Cn\frac{E(|X|I_{(|X|>a_n)})}{a_n}\\
&\le Cn\Big(\frac{1}{a_n}\sum_{k=\lfloor a_n\rfloor}^{\infty}kP(k<|X|\le k+1\Big)\\
&\le Cn\Big(\frac{1}{a_n}\sum_{k=\lfloor a_n\rfloor}^{\infty}P(|X|>k)\Big)\\
&\le Cn\Big(\frac{1}{a_n}\sum_{k=\lfloor a_n\rfloor}^{\infty}k^{-r}\ell(k)\Big)
\end{aligned}$$

$$\leq Cna_n^{-r}\ell(a_n) \to 0 \quad \text{khi } n \to 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\left(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k} c_{ni}X_i\Big| > \varepsilon a_n\right)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\left(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k} c_{ni}\Big(X_i - E(X_i I_{(|X_i|\leq a_n)})\Big)\Big| > \varepsilon a_n - \Big|\sum_{i=1}^{n} c_{ni}E(X_i I_{(|X_i|\leq a_n)})\Big|\right)\\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\left(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k} c_{ni}\Big(X_i - E(X_i I_{(|X_i|\leq a_n)})\Big)\Big| > a_n\left(\varepsilon - \frac{\sum_{i=1}^{n}|c_{ni}E(X_i I_{(|X_i|\leq a_n)})|}{a_n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Kết hợp kết quả trên và (3.25) và ta thu được (3.21). □

Ví dụ dưới đây sẽ chỉ ra rằng ngay cả khi điều kiện mômen của Định lý A.18 không được thỏa mãn, Định lý 3.5 của chúng tôi vẫn có thể áp dụng được.

Ví dụ 3.7 Cho $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối, trong đó X có phân phối Pareto hai phía với hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{r}{2|x|^{r+1}} & \text{nếu } |x| > 1,\\ 0 & \text{nếu ngược lại,}\end{cases}$$

với $1 < r \leq 2$. Dễ thấy $EX = 0$, $E|X|^r = \infty$ với $r > 1$. Do đó, điều kiện mômen trong Định lý A.18 không thỏa mãn (định lý này yêu cầu $E|X|^r < \infty$ với $r > 0$ và nếu $r \geq 1$ thì $EX = 0$).

Từ hàm mật độ của phân phối Pareto, $P(|X| > x) \asymp x^{-r}$. Lấy $a_n = n^{\alpha/r}(\log^+ n)^{\beta/r}$, trong đó $\beta > 1$, $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$, ta có $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}a_n^{-r} = \frac{1}{n^{\alpha+1-\alpha}(\log^+ n)^{\beta}} = \frac{1}{n(\log^+ n)^{\beta}} < \infty$. Với mọi mảng hằng số $\{c_{ni}, n \geq 1, 1 \leq i \leq n\}$ thỏa mãn điều kiện (3.19), áp dụng Định lý 3.5, ta được

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\Big(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k} c_{ni}X_i\Big| > \varepsilon n^{\alpha/r}(\log^+ n)^{\beta/r}\Big) < \infty, \quad \text{với mọi} \quad \varepsilon > 0.$$

Mặt khác, trường hợp $\beta = 1$, kết hợp Bổ đề A.14 và Bổ đề A.15 ta có

$$2P\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big| > x\Big) \geq (1-\delta)n\frac{1}{(2x)^r}, \quad x > 0,$$

với mọi $0 < \delta < 1$ và n đủ lớn. Từ đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}} P\left(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k} X_i\Big| > \varepsilon n^{\alpha/r}(\log^+ n)^{1/r}\right) \geq \frac{1-\delta}{2(2\varepsilon)^r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log^+ n} = \infty.$$

Tương tự, áp dụng Định lý 3.5 với $a_n = n^{\alpha/r}(\log^+ n)^{1/r}(\log^+(\log^+ n))^{\beta/r}$ với $\beta > 1$ và với mọi $\varepsilon > 0$ ta thu được,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big|\sum_{i=1}^{k} c_{ni}X_i\Big| > \varepsilon n^{\alpha/r}(\log^+ n)^{1/r}(\log^+(\log^+ n))^{\beta/r}\Big) < \infty.$$

Trong khi đó, với $\beta = 1$ ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big|\sum_{i=1}^{k} X_i\Big| > \varepsilon n^{\alpha/r}(\log^+ n \log^+(\log^+ n))^{1/r}\Big) = \infty.$$

Một câu hỏi tự nhiên là điều kiện tối ưu của dãy chuẩn hóa $\{a_n, n \ge 1\}$ là gì để thiết lập sự hội tụ đầy đủ (3.21). Định lý sau đây chỉ ra (3.18) chính là điều kiện tối ưu để có kết quả (3.21) đối với dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối.

Định lý 3.8 *Cho $1 \le \alpha \le 2$ và $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với kỳ vọng 0 thỏa mãn (3.17) với $1 < r < 2$. Giả sử $\{a_n, n \ge 1\}$ là một dãy không giảm các số thực dương thỏa mãn $a_{2n} = O(a_n)$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(i) Dãy $\{a_n, n \ge 1\}$ thỏa mãn

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} a_n^{-r} \ell(a_n) < \infty.$$

(ii) Với mọi mảng hằng số $\{c_{ni}, n \ge 1, 1 \le i \le n\}$ thỏa mãn (3.19), ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big|\sum_{i=1}^{k} c_{ni}X_i\Big| > \varepsilon a_n\Big) < \infty \quad \text{với mọi} \quad \varepsilon > 0.$$

Chứng minh. Từ Định lý 3.5, ta suy ra trực tiếp được chiều $(i) \Rightarrow (ii)$.

Ta đi chứng minh chiều ngược lại $(ii) \Rightarrow (i)$. Đặt $c_{ni} = 1$ với $1 \le i \le n$. Kết hợp khẳng định (ii) và bất đẳng thức $\max\limits_{1\le i\le n} |X_i| \le 2 \max\limits_{1\le k\le n} |\sum\limits_{i=1}^{k} X_k|$, với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\Big(\max_{1\le k\le n} |X_k| > \varepsilon a_n\Big) < \infty. \tag{3.26}$$

Do $a_{2n} = O(a_n)$ nên tồn tại một số dương C sao cho $a_{2n} \le Ca_n$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}} P\Big(\max_{1\le k\le n} |X_k| > \varepsilon a_n\Big) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{2^i\le n<2^{i+1}} \frac{1}{n^{2-\alpha}} P\Big(\max_{1\le k\le n} |X_k| > \varepsilon a_n\Big) \\
&\ge \sum_{i=0}^{\infty} P\big(\max_{1\le k\le 2^i} |X_k| > \varepsilon a_{2^{i+1}}\big) \sum_{2^i\le n<2^{i+1}} \frac{1}{n^{2-\alpha}} \\
&\ge \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{2^{(i+1)(2-\alpha)}} P\big(\max_{1\le k\le 2^i} |X_k| > C\varepsilon a_{2^i}\big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2^\alpha}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i(1-\alpha)}} P(\max_{1\le k\le 2^i} |X_k| > C\varepsilon a_{2^i}).$$

Kết hợp (3.26) và $1 \le \alpha \le 2$, ta thu được

$$\lim_{i\to\infty} P\Big(\max_{1\le k\le 2^i} |X_k| > \varepsilon_1 a_{2^i}\Big) = 0 \quad \text{với mọi} \quad \varepsilon_1 > 0. \tag{3.27}$$

Với mỗi $n \ge 1$, xét $i_n \ge 1$ sao cho $2^{i_n-1} \le n < 2^{i_n}$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P\Big(\max_{1\le k\le n} |X_k| > \varepsilon a_n\Big) &\le P\Big(\max_{1\le k\le 2^{i_n}} |X_k| > \varepsilon a_{2^{i_n-1}}\Big) \\ &\le P\Big(\max_{1\le k\le 2^{i_n}} |X_k| > \frac{\varepsilon}{C} a_{2^{i_n}}\Big) \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Từ (3.27), suy ra $P\Big(\max_{1\le k\le n} |X_k| > \varepsilon a_n\Big) \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó, áp dụng Bổ đề 1.35 ta có

$$nP(|X| > \varepsilon a_n) = \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > \varepsilon a_n) \le CP\Big(\max_{1\le k\le n} |X_k| > \varepsilon a_n\Big).$$

Kết hợp với (3.26) ta có,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} a_n^{-r} \ell(a_n) \le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} P(|X| > \varepsilon a_n) < \infty.$$

Do đó (3.18) được chứng minh. □

Lấy $\alpha = 1$ trong Định lý 3.5, ta thu được luật mạnh số lớn Marcinkiewicz - Zygmund cho tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.

Hệ quả 3.9 *Cho $0 < r < 2$, $\{X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X thỏa mãn $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$, trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n \ge 1\}$ và $\{c_n, n \ge 1\}$ là các dãy số dương thỏa mãn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-r} \ell(a_n) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = O(n).$$

Khi đó:

i) Nếu $0 < r \le 1$, ta có

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i\Big(X_i - E(X_i I_{(|X_i|\le a_n)})\Big)}{a_n} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty,$$

ii) Nếu $1 < r < 2$, ta có

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} c_i(X_i - EX_i)}{a_n} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Trường hợp $0 < r \leq 1$ được suy ra từ kết quả (3.20) với $\alpha = 1$. Trường hợp còn lại, không mất tổng quát, giả sử $EX = 0$. Với $1 < r < 2$, áp dụng Định lý 3.5 với $\alpha = 1, c_{ni} = c_i$, thu được

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \Big| > \varepsilon a_n \Big) < \infty.$$

Với mọi $\varepsilon > 0$, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} P\Big(\max_{1\leq k\leq 2^m} \Big| \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \Big| > \varepsilon a_{2^m} \Big) &\leq 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{n} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \Big| > \frac{\varepsilon a_n}{C} \Big) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \Big| > \frac{\varepsilon}{C} a_n \Big) < \infty. \end{aligned}$$

Áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.3) ta được

$$\frac{1}{a_{2^m}} \max_{1\leq k\leq 2^m} \Big| \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \Big| \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } m \to \infty.$$

Mặt khác, với mọi n cố định, tồn tại m sao cho $2^m \leq n < 2^{m+1}$, ta thu được

$$\frac{1}{a_n} \Big| \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \Big| \leq \frac{C}{a_{2^{m+1}}} \max_{1\leq k\leq 2^{m+1}} \Big| \sum_{i=1}^{k} c_i X_i \Big| \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } m \to \infty.$$

Chứng minh được hoàn thành. □

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một ví dụ về phân phối log-gamma hai phía để minh họa Hệ quả 3.9.

Ví dụ 3.10 Cho $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối, trong đó X có phân phối log-gamma hai phía với hàm mật độ được cho trong Ví dụ 3.3. Đặt $a_n = n^{1/r}(\log^+(n))^\beta$ trong đó $\beta > \frac{\nu}{r}$. Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-r} (\log^+(a_n))^{\nu-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n(\log^+(n))^{\beta r+1-\nu}} < \infty.$$

Áp dụng Hệ quả 3.9 ta có

$$\frac{1}{n^{1/r}(\log^+(n))^\beta} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Khi $\beta = \frac{\nu}{r}$, áp dụng Ví dụ 3.3 với $g(n) = (\log^+(n))^{\frac{1}{r}}$, ta thu được

$$\frac{1}{n^{1/r}(\log^+(n))^{\nu/r}} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Ngoài ra, với mọi $c > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > ck^{1/r}(\log^+(k))^{\nu/r}) \asymp \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{k\log^+(k)} \to \infty \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Do đó, nếu ta giả sử thêm rằng $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.4),

$$P\Big(|X_n| > cn^{1/r}(\log^+(n))^{\nu/r} \text{ xuất hiện vô hạn lần}\Big) = 1 \quad \text{với mọi } c > 0.$$

Suy ra

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n^{1/r}(\log^+(n))^{\nu/r}} = \infty \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Mặt khác,

$$\frac{X_n}{n^{1/r}(\log^+(n))^{\nu/r}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n^{1/r}(\log^+(n))^{\nu/r}} - \frac{(n-1)^{1/r}(\log^+(n-1))^{\nu/r}}{n^{1/r}(\log^+(n))^{\nu/r}} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} X_k}{(n-1)^{1/r}(\log^+(n-1))^{\nu/r}}.$$

Điều này suy ra

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n^{1/r}(\log^+(n))^{\nu/r}} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Do đó, không suy ra được luật mạnh số lớn

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n^{1/r}(\log^+(n))^{\nu/r}} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Trong ví dụ tiếp theo, chúng tôi sẽ sử dụng trò chơi Feller để minh họa kết quả lý thuyết. Trò chơi này được Feller giới thiệu năm 1957 trong [31] và sau đó được nhóm tác giả Matsumoto và Nakata [71] tiếp tục nghiên cứu.

Ví dụ 3.11 ([71]) Luật của trò chơi Feller như sau: Tung một đồng xu cân đối cho đến khi số mặt ngửa và mặt sấp bằng nhau thì dừng chơi. Nếu điều này xảy ra ở lần tung thứ $2k$ thì người chơi nhận được số tiền là $2k$ (đơn vị tiền tệ) với $k \in \mathbb{N}$. Gọi X là số tiền người chơi nhận được, khi đó phân phối xác suất của X được xác định như sau:

$$P(X = 2k) = \frac{1}{2k-1} C_{2k}^{k}\, 2^{-2k} \text{ với } k = 1, 2, \ldots \tag{3.28}$$

Đáng chú ý, $EX = \infty$. Matsumoto và Nakata [71] đã tổng quát phân phối xác suất của X bằng cách đưa thêm hằng số $\alpha > 0$,

$$P(X^{(\alpha)} = (2k)^{1/2\alpha}) = \frac{1}{2k-1} C_{2k}^{k}\, 2^{-2k} \text{ với } k = 1, 2, \ldots \tag{3.29}$$

Rõ ràng, với $\alpha = 1/2$ thì phân phối xác suất của (3.29) và (3.28) là như nhau.

Giả sử $\{X_n^{(\alpha)}, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập, từ Bổ đề 2 trong [71], $P(X^{(1)} > x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1}$ và $H(x) = E(X^{(1)} I_{(X^{(1)} \leq x)}) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \log^+(x)$. Áp dụng Định lý 3.1 với $r = 1$, ta có

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}(X_k^{(1)} - E(X_k^{(1)} I_{(|c_{nk} X_k^{(1)}| \leq 1)})) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty,$$

trong đó $\{c_{nk}, 1 \leq k \leq m_n, n \geq 1\}$ là một mảng số thực thỏa mãn

$$\sum_{k=1}^{m_n} |c_{nk}| \ell(|c_{nk}|^{-1}) = o(1).$$

Lấy $m_n = n$, $c_{nk} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi} n \log^+(n)}}$, $\ell(x) = 1$, kết quả thu được trở thành một trường hợp riêng của Định lý 3 trong [71] khi $\alpha = 1$, cụ thể:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi} n \log^+ n}} \sum_{k=1}^{n} X_k^{(1)} \xrightarrow{P} 1 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Để thiết lập luật mạnh số lớn cho trò chơi Feller, áp dụng Hệ quả 3.9 với $c_{nk} = 1$ và $a_n = n(\log^+ n)(\log^+(\log^+(n)))^\nu$ với $\nu > 1$, thu được

$$\frac{1}{n(\log^+ n)(\log^+(\log^+ n))^\nu} \sum_{k=1}^{n} X_k^{(1)} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Ngoài ra, nếu giả thiết thêm rằng $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập, áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.4),

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n(\log^+ n)(\log^+(\log^+ n))} \sum_{k=1}^{n} X_k^{(1)} = \infty \quad \text{hầu chắc chắn.}$$

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ nghiên cứu tính vững của ước lượng trong mô hình Value-at-Risk và trong mô hình hồi quy bán tham số bằng cách áp dụng các kết quả nêu trên.

3.2 Ứng dụng

3.2.1. Ước lượng vững trong mô hình Value-at-Risk

Mô hình Value-at-Risk (VaR) là một công cụ thống kê đo lường mức độ rủi ro tài chính của một công ty hoặc một danh mục đầu tư. Giá trị này thường được các ngân hàng đầu tư và thương mại sử dụng nhằm xác định mức độ cũng như tỷ lệ xảy ra tổn thất tiềm năng trong danh mục đầu tư của họ. Dựa theo dữ liệu mà mô hình

VaR cung cấp thì các tổ chức có thể lựa chọn khoản đầu tư hợp lý. Giả sử X là một biến ngẫu nhiên mà chúng ta quan tâm có hàm phân phối $F(x) = P(X \leq x)$. Cho trước $a \in (0, 1)$, giá trị rủi ro VaR của X với độ tin cậy $1 - a$ được định nghĩa như sau:

$$VaR_a(X) = \inf\{x : F(x) \geq 1 - a\}.$$

Mặc dù VaR là một phép đo phổ biến, nhưng nó vẫn tồn tại những hạn chế nhất định. Chẳng hạn, Artzner và cộng sự [6] đã chỉ ra, VaR thiếu một vài đặc điểm toán học mong muốn như thiếu tính cộng tính (subadditivity) và tính lồi (convexity). Ngoài ra, Mausser và Rosen [72], Mckay và Keefer [73] cũng chỉ ra rằng giá trị VaR khó tối ưu hóa khi tính toán. Để khắc phục những hạn chế của VaR, một số nhà khoa học đã đề xuất sử dụng Giá trị rủi ro có điều kiện ($cVaR$) để thay thế VaR. Cụ thể, Giá trị rủi ro điều kiện $cVaR$ của X với độ tin cậy $1 - a$ là kỳ vọng có điều kiện

$$cVaR_a(X) = E(X \mid X \geq VaR_a(X)).$$

Nếu giá trị rủi ro VaR_a là mức tổn thất tối đa (thiệt hại, chi phí phát sinh, v.v.) có thể vượt quá trong $(1 - a)100\%$ các trường hợp, thì $cVaR$, là một thước đo rủi ro để thay thế VaR (theo Föllmer và Schied [32]). Khi tổn thất X vượt quá mức $VaR_a(X)$ thì $cVaR$ cho chúng ta biết mức tổn thất trung bình mà chúng ta có thể phải đối mặt. Năm 2000, Pflug [79] đã chỉ ra rằng $cVaR_a(X)$ có thể được xem là nghiệm của bài toán tối ưu

$$cVaR_a(X) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{x + a^{-1}E(X - x)^+\},$$

trong đó $z^+ = \max\{z, 0\}$.
Kí hiệu $\theta^* = cVaR_a(X)$ và $h_a(X, x) = x + a^{-1}(X - x)^+$. Khi đó,

$$\theta^* = \inf_{x \in \mathbb{R}} E(h_a(X, x)).$$

Nhóm tác giả Rochafellar và Uryasev [81], Trindade và cộng sự [104] đã đưa ra ước lượng cho $cVaR_a(X)$ là

$$\hat{\theta}_n = \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_a(X_i, x).$$

Ước lượng vững cho θ^* đã được nghiên cứu trên nhiều mẫu khác nhau: Trindade và cộng sự [104] xây dựng cho mẫu độc lập cùng phân phối, Luo và Yang [67] đưa ra ước lượng vững mạnh và tiệm cận chuẩn cho mẫu ρ-mixing (xem Định nghĩa A.22), Xing và cộng sự [118] nghiên cứu ước lượng vững mạnh cho mẫu φ-mixing, và gần đây, Wu và Wang [117] nghiên cứu đối với mẫu m-END (xem Định nghĩa A.22) cùng phân phối. Tiếp nối các hướng nghiên cứu này, chúng tôi sẽ nghiên cứu ước lượng vững cho θ^* đối với mẫu đuôi nặng.

Định lý 3.12 *Giả sử* $\{X, X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với kỳ vọng* 0 *thỏa mãn* $P(|X| > x) \asymp x^{-r}\ell(x)$, *trong đó* $\ell(x)$ *là một hàm biến đổi chậm và* $1 < r < 2$.

Khi đó với mọi dãy hằng số $\{a_n, n \geq 1\}$ *thỏa mãn* (3.11), *ta có*

$$\frac{n}{a_n}\big(\hat{\theta}_n - \theta^*\big) \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{khi} \quad n \to \infty.$$

Chứng minh. Từ định nghĩa của $\hat{\theta}_n$ và θ^*,

$$\begin{aligned}
\frac{n}{a_n}|\hat{\theta}_n - \theta^*| &= \frac{n}{a_n}(\hat{\theta}_n - \theta^*)I_{(\hat{\theta}_n \geq \theta^*)} + \frac{n}{a_n}(\theta^* - \hat{\theta}_n)I_{(\hat{\theta}_n < \theta^*)} \\
&= \frac{n}{a_n}\Big(\inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_a(X_i, x) - \inf_{y\in\mathbb{R}} E(h_a(X, y))\Big)I_{(\hat{\theta}_n \geq \theta^*)} \\
&\quad + \frac{n}{a_n}\Big(\inf_{x\in\mathbb{R}} E(h_a(X, x)) - \inf_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_a(X_i, y)\Big)I_{(\hat{\theta}_n < \theta^*)} \\
&= \frac{n}{a_n}\inf_{x\in\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_a(X_i, x) - \inf_{y\in\mathbb{R}} E(h_a(X, y))\Big)I_{(\hat{\theta}_n \geq \theta^*)} \\
&\quad + \frac{n}{a_n}\inf_{x\in\mathbb{R}}\Big(E(h_a(X, x)) - \inf_{y\in\mathbb{R}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_a(X_i, y)\Big)I_{(\hat{\theta}_n < \theta^*)} \\
&\leq \inf_{x\in\mathbb{R}}\Big(\Big|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^n (h_a(X_i, x) - Eh_a(X_1, x))\Big| + \frac{n}{a_n}\Big|Eh_a(X_1, y) - \inf_{y\in\mathbb{R}} E(h_a(X, y))\Big|\Big) \\
&\quad + \inf_{x\in\mathbb{R}}\Big(\frac{1}{a_n}\Big|\sum_{i=1}^n (h_a(X_i, x) - Eh_a(X, x))\Big| + \frac{1}{a_n}\Big|\sum_{i=1}^n h_a(X_i, x) - \inf_{y\in\mathbb{R}}\sum_{i=1}^n h_a(X_i, y)\Big|\Big).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Theo Định lý 1 trong Rockafellar và Uryasev [81], ta có $E(h_a(X, y))$ và $\sum_{i=1}^n h_a(X_i, y)$ là hàm lồi đối với y. Do đó, tồn tại $y_0 \in \mathbb{R}$ và $y_n \in \mathbb{R}$ sao cho

$$E(h_a(X, y_0)) = \inf_{y\in\mathbb{R}} E(h_a(X, y)), \quad \sum_{i=1}^n h_a(X_i, y_n) = \inf_{y\in\mathbb{R}}\sum_{i=1}^n h_a(X_i, y). \tag{3.31}$$

Kết hợp (3.30) và (3.31), ta được

$$\frac{n}{a_n}|\hat{\theta}_n - \theta^*| \leq \Big|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^n (h_a(X_i, y_0)) - E(h_a(X_1, y_0))\Big| + \Big|\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^n (h_a(X_i, y_n) - Eh_a(X, y_n))\Big|. \tag{3.32}$$

Với mỗi $y \in \mathbb{R}$ và $n \geq 1$, đặt

$$X_n^y = h_a(X_n, y) - E(h_a(X_1, y)) \text{ và } \ Y = \frac{2}{a}(|X| + E|X|).$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ ra $\{X_n^y, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm, bị chặn ngẫu nhiên bởi một biến ngẫu nhiên Y có phân phối đuôi nặng. Trước tiên, chúng ta sẽ chỉ ra $\{X_n^y, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Thật vậy, xét hàm

$f_j(y) = h_a(y,x) = x + a^{-1}(y-x)^+$. Khi $y \le x$ thì $f_j(y) = h_a(y,x) = x + a^{-1}.0 = x$. Ngược lại, khi $y > x$ thì $f_j(y)$ là một hàm không giảm. Áp dụng Mệnh đề 1.31, $\{h_a(X_n, y), n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm. Từ đó, $\{X_n^y, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm.

Do $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm nên

$$\begin{aligned} P(|Y| > x) &= P\left(|X| > \frac{a}{2}(x - E|X|)\right) \\ &\asymp \left(\frac{a}{2}(x - E|X|)\right)^{-r} \ell\left(\frac{a}{2}(x - E|X|)\right) \\ &\asymp x^{-r}\ell(x). \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng $\{X_n^y, y \in \mathbb{R}, n \ge 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên Y.

Thật vậy, xét trường hợp $y \ge 0$,

$$\begin{aligned} P(|X_n^y| > x) &= P(|h_a(X_i, y) - E(h_a(X, y))| > x) \\ &= P\left(\frac{1}{a}\left|(X-y)^+ - E(X-y)^+\right| > x\right) \\ &\le P\left(\frac{1}{a}\left((X-y)^+ + E(X-y)^+\right) > x\right) \\ &\le P\left(\frac{1}{a}\left(XI_{(X\ge y)} + E(XI_{(X\ge y)})\right) > x\right) \\ &\le P\left(\frac{1}{a}\left(|X| + E|X|\right) > x\right) \\ &\le P(|Y| > x). \end{aligned}$$

Tiếp theo, xét trường hợp $y < 0$,

$$\begin{aligned} P(|X_n^y| > x) &= P(|h_a(X_i, y) - E(h_a(X, y))| > x) \\ &= P\left(\frac{1}{a}\Big|(X-y)^+ - E(X-y)^+\Big| > x\right) \\ &= P\left(\frac{1}{a}\Big|(X-y)I_{(X\ge y)} - E\Big((X-y)I_{(X\ge y)}\Big)\Big| > x\right) \\ &= P\left(\frac{1}{a}\Big|XI_{(X\ge y)} + E\Big(XI_{(X\ge y)}\Big) + yI_{(X<y)} - E\Big(yI_{(X<y)}\Big)\Big| > x\right) \\ &\le P\left(\frac{1}{a}\left(|X| + E|X| + |y|I_{(X<y)} + E\Big(|y|I_{(X<y)}\Big)\right) > x\right) \\ &\le P\left(\frac{1}{a}\left(|X| + E|X| + |X|I_{(X<y)} + E\Big(|X|I_{(X<y)}\Big)\right) > x\right) \\ &\le P\left(\frac{1}{a}\left(2|X| + 2E|X|\right) > x\right) = P(|Y| > x). \end{aligned}$$

Khi đó, áp dụng Hệ quả 3.2, với mọi $\varepsilon > 0$ và $y \in \mathbb{R}$,

$$P\Big(\frac{1}{a_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k^y\Big| > \varepsilon\Big) \le \frac{C_\varepsilon n\ell(n)}{a_n^r}.$$

Kết hợp với (3.32) và điều kiện (3.11), suy ra

$$P\Big(\frac{n}{a_n}|\hat{\theta}_n - \theta^*| > \varepsilon\Big) \le P\Big(\frac{1}{a_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k^{y_0}\Big| > \varepsilon/2\Big) + P\Big(\frac{1}{a_n}\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k^{y_n}\Big| > \varepsilon/2\Big)$$
$$\le \frac{C_\varepsilon n\ell(n)}{a_n^r} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Chứng minh được hoàn thành. □

Ví dụ 3.13 Cho véctơ ngẫu nhiên $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, trong đó $\mathbf{0}$ là véctơ không và

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Do đó $e_i \sim N(0, 2)$. Dựa trên cách xây dựng trong Ví dụ 3.3, chúng ta thu được một dãy các biến ngẫu nhiên liên kết âm $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ có cùng phân phối, với hàm mật độ xác suất được xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{r}{2|x|^{r+1}} & \text{nếu } |x| > 1, \\ 0 & \text{còn lại,} \end{cases}$$

trong đó $1 < r \le 2$.

Áp dụng Định lý 3.12 cho mẫu $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ với mức ý nghĩa a ta thu được kết quả

$$\frac{n^{1-1/r}}{g(n)}\left(\hat{\theta}_n - \theta^*\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty,$$

trong đó g là một hàm dương thỏa mãn $\lim\limits_{n\to\infty} g(n) = \infty$.

3.2.2. Ước lượng vững trong mô hình hồi quy bán tham số

Xét mô hình hồi quy bán tham số

$$y_{ni} = \gamma x_{ni} + g(t_{ni}) + \varepsilon_{ni}, \ 1 \le i \le n, \tag{3.33}$$

trong đó $g(t)$ là một hàm chưa biết xác định trên tập compact $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^d$ với $d \ge 1$, γ là một tham số chưa biết, y_{ni} là biến phản hồi thứ i của quan sát x_{ni} và t_{ni}, x_{ni} và t_{ni} không ngẫu nhiên, ε_{ni} là các sai số ngẫu nhiên. Giả sử $\{\varepsilon_{ni}, 1 \le i \le n\}$ có cùng phân phối với $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ với mỗi $n \ge 1$.

Năm 2003, Pan và cộng sự [76] đã đề xuất ước lượng có trọng số cho γ và $g(t)$ như sau:

$$\hat{\gamma}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}\widetilde{y}_{ni}}{S_n^2}, \quad \hat{g}_n(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)(y_{ni} - \hat{\gamma}_n x_{ni}), \tag{3.34}$$

trong đó $w_{ni}(t) = w_{ni}(t, t_{n1}, \ldots, t_{nn})$ là các hàm trọng số đo được,

$$\widetilde{x}_{ni} = x_{ni} - \sum_{k=1}^{n} w_{nk}(t_{ni})x_{nk}, \quad \widetilde{y}_{ni} = y_{ni} - \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t_{ni})y_{ni}, \quad S_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}^2.$$

Việc nghiên cứu ước lượng tiệm cận của γ và g trong mô hình (3.33) với phương sai sai số hữu hạn đã được một số tác giả nghiên cứu, chẳng hạn trong Pan và cộng sự [76], Hu [46], Hu [47], Deng và cộng sự [21], Wang và cộng sự [108]. Trong phần này, chúng tôi sẽ nghiên cứu ước lượng tiệm cận của γ và $g(t)$ trong mô hình (3.33) với các sai số đuôi nặng.

Để thiết lập sự hội tụ cho các ước lượng $\hat{\gamma}_n$ và $\hat{g}_n(t)$, chúng tôi cần một số giả thiết dưới đây:

$(\boldsymbol{H_1})$ $g(t)$ là một hàm Lipschitz trên $\mathbf{A}$, tức là tồn tại $K > 0$ sao cho

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq K|t_1 - t_2| \quad \text{với mọi} \quad t_1, t_2 \in \mathbf{A},$$

$(\boldsymbol{H_2})$ $n = O(S_n^2)$,

$(\boldsymbol{H_3})$ Tồn tại $1 < r < 2$, $0 < \delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2r}$ và một dãy số dương $\{h_n, n \geq 1\}$ thỏa mãn $\lim_{n\to\infty} h_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{n^{1-\delta}} = 0$, $\max_{1\leq i\leq n} |x_{ni}| = O(n^{\delta})$, và với mọi $t \in \mathbf{A}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |w_{ni}(t)| I_{(\|t-t_{ni}\| > \frac{h_n}{n})} = O(h_n/n),$$

$(\boldsymbol{H_4})$ Với mọi $t \in \mathbf{A}$, $w_{ni} \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ và $\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t) = 1$,

$(\boldsymbol{H_5})$ $\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=1}^{n} w_{nk}(t_{ni}) = O(1)$.

Các giả thiết $(H_1) - (H_5)$ về biến thiết kế và trọng số đã được thiết lập trong Hu [47] và Wang cùng cộng sự [114]. Trong đó, Mục 3 của Hu [47] đã khẳng định các trọng số xây dựng theo phương pháp lân cận gần nhất hoàn toàn đáp ứng các điều kiện này. Dưới đây, chúng tôi sẽ trình bày cách xây dựng các trọng số theo phương pháp lân cận gần nhất cho mô hình (3.34) thỏa mãn các giả thiết thiết kế $(H_2) - (H_5)$ trong [47], qua đó khẳng định khả năng ứng dụng thực tiễn của các kết quả nghiên cứu.

Không mất tổng quát, lấy $A = [0,1]$, $t_{ni} = \frac{i}{n}$ và $x_{ni} = (-1)^i \frac{i}{n}, i = 1, 2, \ldots, n$. Với $t \in A$, ta sắp xếp $|t_{n1} - t|, |t_{n2} - t|, \ldots, |t_{nn} - t|$ theo thứ tự tăng dần

$$\left|t^{(n)}_{R_1(t)} - t\right| \leq \left|t^{(n)}_{R_2(t)} - t\right| \leq \ldots \leq \left|t^{(n)}_{R_n(t)} - t\right|.$$

Trường hợp $|t_{ni} - t| = |t_{nj} - t|$ thì $|t_{ni} - t|$ sẽ đứng trước $|t_{nj} - t|$ nếu $t_{ni} < t_{nj}$. Với $1 \leq k_n \leq n$, hàm trọng số lân cận gần nhất $w_{ni}(t)$ trong (3.34) được định nghĩa bởi:

$$w_{ni}(t) = w_{ni}(t, t_{n1}, t_{n2}, \ldots, t_{nn}) = \begin{cases} \frac{1}{k_n} \text{ nếu } |t_{ni} - t| \leq \left|t^{(n)}_{R_{k_n}(t)} - t\right|, \\ 0 \quad \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Khi đó,

$$w_{nR_i(t)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{k_n} & \text{nếu } i \leq k_n, \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Lấy $k_n = \lfloor n^{0.6} \rfloor$, $h_n = \lfloor n^{0.8} \rfloor$. Khi đó, với mọi $t \in [0,1]$, dựa vào định nghĩa của $R_i(t)$ và cách chọn các điểm thiết kế t_{ni}, ta có:

- (H_4) được thỏa mãn do

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t) = \sum_{i=1}^{n} w_{nR_i(t)}(t) = \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{k_n} = 1.$$

- (H_5) được thỏa mãn do $\sum\limits_{i=1}^{n} w_{nk}(t_{ni}) \leq 2$ với $1 \leq k \leq n$.

- (H_3) được thỏa mãn do $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lfloor n^{0.8} \rfloor = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{h_n}{n^{1-\delta}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lfloor n^{0.8} \rfloor}{n^{1-\delta}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{0.2-\delta}} = 0$ với δ đủ nhỏ thỏa mãn $0 < \delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2r}$, $1 < r < 2$, và

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |w_{ni}(t)| I_{(\|t-t_{ni}\| > \frac{h_n}{n})} &\leq \sum_{i=1}^{n} |w_{ni}(t)| (t_{ni} - t)^2 \frac{n^2}{h_n^2} \\ &= \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{k_n} \frac{n^2}{h_n^2} \left(t^{(n)}_{R_i(t)} - t\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{k_n} \frac{n^2}{h_n^2} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{k_n} \frac{n^2}{h_n^2} \left(\frac{k_n}{n}\right)^2 = \left(\frac{k_n}{h_n}\right)^2 \leq C \frac{h_n}{n}, \end{aligned}$$

  với $k_n = \lfloor n^{0.6} \rfloor$, $h_n = \lfloor n^{0.8} \rfloor$ đã chọn ở trên.

- Xét (H_2), giả sử $k = k_n$ chẵn. Khi đó, theo Hu [47],

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t_l^{(n)}) x_i^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} w_{nR_i(\frac{l}{n})} \left(\frac{l}{n}\right) x^{(n)}_{R_i(\frac{l}{n})} \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x^{(n)}_{R_i(\frac{l}{n})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{R_i(\frac{l}{n})}R_i\Big(\frac{l}{n}\Big)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2n}, & \text{nếu } l = 1, 2, \ldots, \frac{k}{2}+1, \\ \frac{(-1)^j}{2n}, & \text{nếu } l = \frac{k}{2}+1+j,\ 1 \le j \le n-k-1, \\ \frac{(-1)^n}{2n}, & \text{nếu } n-\frac{k}{2}+1 \le l \le n. \end{cases}$$

Thật vậy, nếu $l \in \left\{1, 2, \ldots, \frac{k}{2}+1\right\}$, bộ $\left(R_1\left(\frac{l}{n}\right), \ldots, R_k\left(\frac{l}{n}\right)\right)$ là một phép thế của $(1, 2, \ldots, k)$ theo định nghĩa của $R_i(t)$. Do đó,

$$\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{R_i\left(\frac{l}{n}\right)}R_i\Big(\frac{l}{n}\Big) = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i i = \frac{1}{nk}\frac{k}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Nếu $l = \frac{k}{2}+1+j,\ 1 \le j \le n-k-1$, thì $\left(R_1\left(\frac{l}{n}\right), \ldots, R_k\left(\frac{l}{n}\right)\right)$ là một phép thế của $(j+1, j+2, \ldots, j+k)$, ta có

$$\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{R_i(\frac{l}{n})}R_i\Big(\frac{l}{n}\Big) = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}(i+j) = \frac{(-1)^j}{2n}.$$

Nếu $n-\frac{k}{n}+1 \le l \le n$, thì $\left(R_1\left(\frac{l}{n}\right), \ldots, R_k\left(\frac{l}{n}\right)\right)$ là một phép thế của $(n, n-1, n-2, \ldots, n-k-1)$, và

$$\begin{aligned} &\frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{R_i(\frac{l}{n})}R_i\Big(\frac{l}{n}\Big) \\ &\quad= \frac{1}{nk}\Big((-1)^n n + (-1)^{n-1}(n-1) + \ldots + (-1)^{n-k+1}(n-k+1)\Big) \\ &\quad= \frac{(-1)^n}{2n}. \end{aligned}$$

Do $0 < k < n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{k}{n} = 0$,

$$\begin{aligned} S_n^2 &= \sum_{l=1}^{n}\Big(x_l^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t_l^{(n)})x_i^{(n)}\Big)^2 \\ &\ge \sum_{l=\frac{k}{2}+2}^{\frac{k}{2}+1+n-k-1}\Big(x_l^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t_l^{(n)})x_i^{(n)}\Big)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-k-1}\left((-1)^l\frac{l}{n} - \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t_l^{(n)})x_i^{(n)}\right)^2\Bigg|_{l=\frac{k}{2}+1+j} \\ &= \sum_{j=1}^{n-k-1}\left((-1)^{\frac{k}{2}+1+j}\ \frac{\frac{k}{2}+1+j}{n} - \frac{(-1)^j}{2n}\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n-k-1}\left((-1)^{\frac{k}{2}+1}\left(\frac{k}{2n}+\frac{1}{n}+\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{2n}\right)^2 \ge \sum_{j=1}^{n-k-1}\frac{j^2}{n^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n-k-1)(n-k)(2n-2k-1)}{6n^2} \sim \frac{n}{3} \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Do đó, giả thiết (H_2) được thỏa mãn.

Với các giả thiết $(H_1) - (H_5)$, chúng tôi sẽ chỉ ra $\hat{\gamma}_n$ và $\hat{g}_n$ là các ước lượng vững cho tham số γ và hàm $g(t)$ trong mô hình hồi quy bán tham số bằng cách áp dụng Định lý 3.1.

Định lý 3.14 *Giả sử mô hình (3.33) thỏa mãn điều kiện $(H_1) - (H_5)$ và $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối với kỳ vọng 0, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên ε thỏa mãn*

$$P(|\varepsilon| > x) \asymp x^{-r}\ell(x),$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm và $1 < r < 2$. Khi đó,

$$n^{\delta}\left(\hat{\gamma}_n - \gamma\right) \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{khi } n \to \infty. \tag{3.35}$$

Ngoài ra, nếu với mọi $t \in \mathbf{A}$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} |w_{ni}(t)|^r \ell(|w_{ni}(t)|^{-1}) = o(1),$$

thì

$$\hat{g}_n(t) \xrightarrow{P} g(t) \quad \textit{khi } n \to \infty. \tag{3.36}$$

Chứng minh. Ta có

$$\hat{\gamma}_n - \gamma = \frac{1}{S_n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}\widetilde{g}(t_{ni}) + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni} \sum_{k=1}^{n} w_{nk}(t_{ni})\varepsilon_{nk}\Big),$$

trong đó $\widetilde{g}(t) = g(t) - \sum_{j=1}^{n} w_{nj}(t)g(t_{nj})$. Để chứng minh (3.35), ta sẽ lần lượt chỉ ra

$$J_n^1 = \frac{n^{\delta}}{S_n^2} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}\widetilde{g}(t_{ni}) \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty,$$

$$J_n^2 = \frac{n^{\delta}}{S_n^2} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}\varepsilon_i \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty,$$

$$J_n^3 = \frac{n^{\delta}}{S_n^2} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni} \sum_{k=1}^{n} w_{nk}(t_{ni})\varepsilon_{nk} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Xét J_n^1,

$$\left|\frac{n^{\delta}}{S_n^2} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}\widetilde{g}(t_{ni})\right| \leq n^{\delta} \max_{1 \leq i \leq n} |\widetilde{g}(t_{ni})| \Big(\frac{1}{S_n^2} \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{x}_{ni}|\Big).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và giả thiết (H_2) ta được

$$\frac{1}{S_n^2} \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{x}_{ni}| \leq \frac{n^{1/2}}{S_n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_{ni}^2\Big)^{1/2} = \left(\frac{n}{S_n^2}\right)^{1/2} \leq C.$$

Sử dụng các giả thiết $(H_1) - (H_5)$ ta có

$$\begin{aligned} n^\delta \max_{1\le i\le n} |\widetilde{g}(t_{ni})| &\le n^\delta \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n w_{nj}(t_{ni})\ |g(t_{ni}) - g(t_{nj})| \\ &\le Kn^\delta \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n w_{nj}(t_{ni})\ |t_{ni} - t_{nj}|\ I_{(|t_{ni}-t_{nj}|\le \frac{h_n}{n})} \\ &+ Kn^\delta \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n w_{nj}(t_{ni})\ |t_{ni} - t_{nj}|\ I_{(|t_{ni}-t_{nj}|> \frac{h_n}{n})} \\ &\le Kn^\delta\ \frac{h_n}{n} \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n w_{nj}(t_{ni}) + Cn^\delta \frac{h_n}{n} \le Cn^\delta \frac{h_n}{n}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$|J_n^1| \le Cn^\delta\ \frac{h_n}{n} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Xét J_n^2, đặt $c_{ni} = \dfrac{n^\delta\ \widetilde{x}_{ni}}{S_n^2}$ và $r' = \dfrac{2r}{r(1-2\delta)+1}$.

Với $0 < r' < r$ và $\delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2r'} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2r}$, áp dụng bất đẳng thức Hölder (Bổ đề A.5) và giả thiết (H_2), ta có

$$\sum_{i=1}^n c_{ni}^{r'} = \frac{n^{\delta r'}}{(S_n^2)^{r'}} \sum_{i=1}^n |\widetilde{x}_{ni}|^{r'} \le \frac{n^{\delta r'} n^{1-\frac{r'}{2}} (S_n^2)^{\frac{r'}{2}}}{(S_n^2)^{r'}} \le \frac{C}{n^{r'-\delta r'-1}} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Mặt khác, theo tính chất của hàm biến đổi chậm (phương trình (1.1)) ta có $x^{r'-r}\ell(x) \to 0$ khi $x \to \infty$. Kết hợp với tính chất hàm $\ell(x)$ bị chặn trên mọi khoảng đóng hữu hạn $[a, b] \subset [0, \infty)$, thì $x^{r'-r}\ell(x) \le M < \infty$ với mọi $x \ge 0$. Do đó,

$$\sum_{i=1}^n c_{ni}^r \ell(c_{ni}^{-1}) \le M \sum_{i=1}^n c_{ni}^{r'} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Áp dụng Định lý 3.1 ta được $J_n^2 \xrightarrow{P} 0$ khi $n \to \infty$.

Xét J_n^3, kết hợp (H_3) và (H_5),

$$\left| \sum_{i=1}^n \widetilde{x}_{ni} w_{nk}(t_{ni}) \right| \le \max_{1\le i\le n} |\widetilde{x}_{ni}| \sum_{i=1}^n |w_{nk}(t_{ni})| \le Cn^\delta.$$

Kết hợp với giả thiết (H_2) với $r' = \dfrac{2r}{r(1-2\delta)+1}$,

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{n^\delta}{S_n^2} \sum_{i=1}^n \widetilde{x}_{ni} w_{nk}(t_{ni}) \right)^{r'} \le \frac{C}{n^{r'-2\delta r'-1}} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Đặt $c_{ni} = \dfrac{n^\delta}{S_n^2} \sum\limits_{i=1}^n \widetilde{x}_{nk} w_{ni}(t_{nk})$, ta được

$$\sum_{i=1}^n c_{ni}^r \ell(c_{ni}^{-1}) \le C \sum_{i=1}^n c_{ni}^{r'} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Tiếp tục áp dụng Định lý 3.1 ta có $J_n^3 \xrightarrow{P} 0$ khi $n \to \infty$. Chứng minh (3.35) hoàn thành.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh (3.36). Kết hợp (3.33) và (3.34),

$$\begin{aligned}\hat{g}_n(t) - g(t) &= \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)(y_{ni} - \hat{\gamma}_n x_{ni} - g(t_{ni})) - \tilde{g}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)\varepsilon_i - \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)x_{ni}(\hat{\gamma}_n - \gamma) - \tilde{g}(t).\end{aligned}$$

Kết hợp (H_1), (H_3) và (H_4) ta có:

$$\begin{aligned}|\tilde{g}(t)| &= \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)\ |g(t) - g(t_{ni})| \\ &\le C\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)\ |t - t_{ni}|\ I_{(|t_{ni}-t_{nj}|\le \frac{h_n}{n})} + C\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)\ |t - t_{ni}|\ I_{(|t-t_{ni}|>\frac{h_n}{n})} \\ &\le C\frac{h_n}{n}\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t) + C\frac{h_n}{n} \ \le\ C\frac{h_n}{n} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.\end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 3.1 với $c_{ni} = w_{ni}(t)$ ta được

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)\varepsilon_{ni} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Để chứng minh $\hat{g}_n(t) \xrightarrow{P} g(t)$ khi $n \to \infty$ ta cần chỉ ra

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)x_{ni}(\hat{\gamma}_n - \gamma) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{3.37}$$

Kết hợp (H_3), (H_5) và (3.35), với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}P\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)x_{ni}(\hat{\gamma}_n - \gamma)\Big| > \varepsilon\Big) &\le P\Big(\max_{1\le i\le n}|x_{ni}|\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t)|\hat{\gamma}_n - \gamma| > \varepsilon\Big) \\ &\le P\Big(n^{\delta}|\hat{\gamma}_n - \gamma| > \varepsilon/C\Big) \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.\end{aligned}$$

Như vậy, chúng ta đã chứng minh được (3.37), qua đó hoàn thành chứng minh Định lý 3.14. □

Kết luận Chương 3

Nội dung Chương 3 của luận án được viết dựa trên công trình số **[4]** trong **Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án**, đã giải quyết được những vấn đề sau:

- Định lý 3.1 thiết lập Luật yếu số lớn Marcinkiewicz cho tổng trọng số tất định của các biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng. Tiếp đến, Hệ quả 3.2 chỉ ra điều kiện cụ thể của dãy hằng số chuẩn hóa để thiết lập luật yếu số lớn Marcinkiewicz và Hệ quả 3.4 chứng minh rằng dãy chuẩn hóa trong Hệ quả 3.2 là tối ưu đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối. Ví dụ 3.3 đưa ra một trường hợp cụ thể mà khi áp dụng Hệ quả 3.2 thu được kết quả tốt hơn luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cổ điển.

- Định lý 3.5 thiết lập các điều kiện hội cho luật mạnh số lớn Marcinkiewicz thông qua sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số tất định của các biến ngẫu nhiên liên kết âm và đuôi nặng. Định lý 3.8 chứng minh rằng dãy chuẩn hóa trong Định lý 3.5 là tối ưu đối với dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối. Lấy $\alpha = 1$ trong Định lý 3.5, chúng ta thu được Luật mạnh số lớn dạng Marcinkiewiczc-Zygmund cho tổng trọng số tất định của các biến ngẫu nhiên liên kết âm (Hệ quả 3.9). Ngoài ra, chúng tôi cũng trình bày ví dụ về phân phối log-gamma và trò chơi Feller (xem Ví dụ 3.10, Ví dụ 3.11) để minh họa các kết quả lý thuyết.

- Bên cạnh đó, dựa trên các kết quả đã đề cập, chúng tôi tiến hành nghiên cứu ước lượng vững cho mô hình Giá trị rủi ro có điều kiện ($cVaR$) và các ước lượng có trọng số trong mô hình hồi quy bán tham số với sai số đuôi nặng. Cụ thể, Định lý 3.12 đưa ra các điều kiện để thu được ước lượng vững cho $cVaR$ với dữ liệu đuôi nặng bằng cách áp dụng Hệ quả 3.2. Ví dụ 3.13 đưa ra một trường hợp cụ thể có thể áp dụng Định lý 3.12. Định lý 3.14 trình bày kết quả về ước lượng vững trong mô hình hồi quy bán tham số bằng cách áp dụng Định lý 3.1 và các giả thiết $(H_1) - (H_5)$.

Chương 4

Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert

Xét $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert thực tách được với chuẩn $\|\cdot\|$ được sinh bởi tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và $\{e_j, j \in B\}$ là một cơ sở trực chuẩn trong $\mathbb{H}$. Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số (ngẫu nhiên và tất định) của một dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp theo tọa độ. Đối với trường hợp trọng số ngẫu nhiên, chúng tôi tiếp tục phát triển các kỹ thuật của Jajte [52] để thiết lập sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với dãy chuẩn hóa ϕ tổng quát: Các kết quả thu được gồm Định lý 4.2, Định lý 4.4, Định lý 4.4. Trường hợp còn lại, luận án nghiên cứu luật mạnh số lớn cho tổng trọng số tất định của dãy véctơ ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ có phân phối đuôi nặng thỏa mãn

$$\sum_{j\in B} P\left(|X_n^j| > x\right) \asymp x^{-\alpha}\ell(x), \qquad n \geq 1,\ \alpha \in (1,2),$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Ý tưởng này được xem là một mở rộng tự nhiên của Hệ quả 3.9 trong không gian Hilbert. Các kết quả thu được gồm Định lý 4.8, Định lý 4.10, Định lý 4.11. Trong cả hai trường hợp, các kết quả đều được dùng để nghiên cứu sự hội tụ đầy đủ cho thống kê von Mises (V-thống kê) suy biến với dữ liệu nhận giá trị thực độc lập từng cặp (xem Định lý 4.12, Định lý 4.13).

4.1 Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert

Xét hàm ϕ thỏa mãn các điều kiện sau:

(K_1) $\phi:\ [s,\infty) \to [0,\infty)$ là một hàm tăng chặt và $\sup\limits_{n\geq 1} \frac{\phi(n+1)}{\phi(n)} < \infty$,

(K_2) $\phi(s)\int\limits_1^s \frac{x^{r-1}}{\phi(x)}dx \leq Cs^r$,

$(\boldsymbol{K_3})$ $\phi^2(s)\sum\limits_{s}^{\infty}\frac{x^{r-1}}{\phi^2(x)}dx \le Cs^r$,

$(\boldsymbol{K_4})$ $\phi^2(s)\sum\limits_{s}^{\infty}\frac{x^{r-1}\log_+^2(x)}{\phi^2(x)}dx \le Cs^r\log_+^2(s)$.

Ở đây và trong toàn Mục **4.1**, chúng tôi đều xét $r \ge 1$, $s > 0$ và $\log_+(x) = \max\{1, \log_2 x\}$. Khai thác tính chất của lớp hàm ϕ thỏa mãn điều kiện (K_1, K_2, K_3), chúng tôi thu được sự hội tụ đầy đủ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\Big\|\sum_{i=1}^{n}(A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i))\Big\| \ge \varepsilon\phi(n)\Big) < \infty,$$

trong đó $1 \le r \le 2$, $\{A_{ni}, n \ge 1, 1 \le i \le n\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực PNQD theo hàng và $\{X_n, n \ge 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ (xem Định lý 4.2). Kết quả thứ hai (Định lý 4.4) chỉ ra sự hội tụ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big\|\sum_{i=1}^{k}(A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i))\Big\| \ge \varepsilon\phi(n)\Big) < \infty,$$

bằng việc sử dụng điều kiện (K_1, K_2, K_4). Lấy $r = 1$ trong Định lý 4.4, ta thu được luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với dãy chuẩn hóa tổng quát.

Chúng tôi nhắc lại bổ đề quan trọng sau.

Bổ đề 4.1 ([44], Định lý 2.1) *Cho $\{X_n, n \ge 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với kỳ vọng 0 và $E\|X_n\|^2 < \infty$ với mọi $n \ge 1$. Khi đó,*

$$E\Big\|\sum_{i=1}^{n}X_i\Big\|^2 \le \sum_{i=1}^{n}E\|X_i\|^2,$$

$$E\Big(\max_{1\le k\le n}\Big\|\sum_{i=1}^{k}X_i\Big\|^2\Big) \le \log_2{}^2(2n)\sum_{i=1}^{n}E\|X_i\|^2.$$

Kết quả dưới đây thiết lập sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các biến ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với dãy chuẩn hóa ϕ thỏa mãn điều kiện (K_1, K_2, K_3).

Định lý 4.2 *Cho $1 \le r \le 2$ và $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ và cùng phân phối, $\{A_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực PNQD theo hàng thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{n}E(A_{ni})^2 = O(n). \tag{4.1}$$

Giả sử $\{X, X_n, n \geq 1\}$ *và* $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ *là độc lập. Nếu tồn tại* ϕ *thỏa mãn điều kiện* (K_1, K_2, K_3) *sao cho* $\sum\limits_{j\in B} E(\phi^{-1}(|X^j|))^r < \infty$*, thì với mọi* $\varepsilon > 0$ *ta có:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\Big\| \sum_{i=1}^{n} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i))\Big\| \geq \varepsilon\phi(n)\Big) < \infty.$$

Chứng minh. Ta viết

$$A_{ni}X_i = A_{ni}^+X_i^+ - A_{ni}^+X_i^- - A_{ni}^-X_i^+ + A_{ni}^-X_i^-,$$

trong đó $X_i^+ := \sum\limits_{j\in B} (X_i^j)^+ e_j,\ X_i^- := \sum\limits_{j\in B} (X_i^j)^- e_j$. Do đó, không mất tổng quát giả sử $A_{ni} \geq 0$ với mỗi $n \geq 1, 1 \leq i \leq n$ hầu chắc chắn và $X_n^j \geq 0$ hầu chắc chắn với mỗi $j \in B$.

Với mọi $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, $j \in B$, đặt

$$\begin{aligned}
Y_{ni}^j &= X_i^j I_{(X_i^j \leq \phi(n))} + \phi(n) I_{(X_i^j > \phi(n))},\ Y_{ni} = \sum_{j\in B} Y_{ni}^j e_j,\\
Z_{ni}^j &= \phi(n) I_{(X_i^j > \phi(n))},\ \ Z_{ni} = \sum_{j\in B} Z_{ni}^j e_j\\
U_n &= \sum_{i=1}^{n} (A_{ni}Y_{ni} - E(A_{ni}Y_{ni})),\ \ V_n = \sum_{i=1}^{n} (A_{ni}Z_{ni} - E(A_{ni}Z_{ni})),\\
M_{ni}^j &= X_i^j I_{(X_i^j > \phi(n))},\ \ M_{ni} = \sum_{j\in B} M_{ni}^j e_j,\ \ K_n = \sum_{i=1}^{n} E(A_{ni}M_{ni}).
\end{aligned}$$

Với $\varepsilon > 0$ cố định,

$$\begin{aligned}
&P\Big(\Big\| \sum_{i=1}^{n} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i))\Big\| \geq \varepsilon\phi(n)\Big)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} P\Big(|X_i^j| > \phi(n)\Big) + P\Big(\ \|U_n - V_n - K_n\| > \varepsilon\phi(n)\Big)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} P\Big(|X_i^j| > \phi(n)\Big) + P\Big(\ \|U_n - V_n\| + \sum_{i=1}^{n} \|E(A_{ni}M_{ni})\| \geq \varepsilon\phi(n)\Big).
\end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} P\Big(|X_i^j| > \phi(n)\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \sum_{j\in B} \sum_{k=n}^{\infty} P\Big(\phi(k) < |X^j| \leq \phi(k+1)\Big)\\
&= \sum_{j\in B} \sum_{k=1}^{\infty} P\Big(\phi(k) < |X^j| \leq \phi(k+1)\Big) \sum_{n=1}^{k} n^{r-1}\\
&\leq \sum_{j\in B} \sum_{k=1}^{\infty} k^r P\Big(k < \phi^{-1}(|X^j|) \leq k+1\Big)\\
&\leq \sum_{j\in B} E(\phi^{-1}(|X^j|))^r\ < \infty. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng ta đi chứng minh

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \|E(A_{ni}M_{ni})\|}{\phi(n)} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{4.3}$$

Thật vậy, với $n \geq 1$, áp dụng bất đẳng thức Hölder (Bổ đề A.5) và giả thiết (4.1),

$$\sum_{i=1}^{n} E|A_{ni}| \leq n^{1-\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} E(|A_{ni}|^2) \Big)^{\frac{1}{2}} \leq Cn. \tag{4.4}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{n} \|E(A_{ni}M_{ni})\|}{\phi(n)} &\leq \frac{E\|M_{n1}\| \sum_{i=1}^{n} E|A_{ni}|}{\phi(n)} \leq \frac{Cn \sum_{j\in B} E|M_{n1}^{j}|}{\phi(n)} \\ &\leq \frac{Cn}{\phi(n)} \sum_{j\in B} E\left(|X^j| I_{(|X^j|>\phi(n))}\right). \end{aligned}$$

Áp dụng điều kiện (K_2) ta có

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\phi(n)} \sum_{j\in B} E\left(|X^j| I_{(|X^j|>\phi(n))}\right) \\ &\quad = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j\in B} \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=n}^{\infty} E\left(|X^j| I_{(\phi(k)<|X^j|\leq\phi(k+1))}\right) \\ &\quad = \sum_{j\in B} \sum_{k=1}^{\infty} E\left(|X^j| I_{(\phi(k)<|X^j|\leq\phi(k+1))}\right) \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\phi(n)} \\ &\quad \leq C \sum_{j\in B} \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\phi(k) I_{(\phi(k)<|X^j|\leq\phi(k+1))}\right) \sum_{n=1}^{k} \frac{n^{r-1}}{\phi(n)} \\ &\quad \leq C \sum_{j\in B} \sum_{k=1}^{\infty} E\left(k^r I_{(\phi(k)<|X^j|\leq\phi(k+1))}\right) \\ &\quad \leq C \sum_{j\in B} E\left(\phi^{-1}(|X^j|)\right)^r < \infty. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề Kronecker (Bổ đề A.8) ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{Cn}{\phi(n)} \sum_{j\in B} E|X^j| I_{(|X^j|>\phi(n))} &\leq \frac{C}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j\in B} E\left(|X^j| I_{(|X^j|>\phi(k))}\right) \\ &\to 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \end{aligned}$$

Do đó, phần còn lại ta cần chỉ ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\|U_n - V_n\| \geq \varepsilon\phi(n)\right) < \infty.$$

Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\|U_n - V_n\| \geq \varepsilon\phi(n)\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\|V_n\| \geq \frac{\varepsilon\phi(n)}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\left(\|U_n\| \geq \frac{\varepsilon\phi(n)}{2}\right)$$
$$:= I_1 + I_2$$

Kết hợp Mệnh đề 1.22 và Mệnh đề 1.39, với mỗi n, ta có $\{A_{ni}Y_{ni} - E(A_{ni}Y_{ni}), 1 \leq i \leq n\}$ và $\{A_{ni}Z_{ni} - E(A_{ni}Z_{ni}), 1 \leq i \leq n\}$ đều là dãy PNQD theo tọa độ. Với I_1, lần lượt áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), Bổ đề 4.1 và giả thiết (4.1), ta có

$$I_1 \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}\phi^2(n)} E(\|V_n\|^2) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}\phi^2(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} E|A_{ni}Z_{ni}^j|^2$$
$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-r}} \sum_{j\in B} P(|X^j| > \phi(n)) \leq C \sum_{j\in B} E(\phi^{-1}(|X^j|))^r < \infty.$$

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra $I_2 < \infty$. Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), Bổ đề 4.1 và giả thiết (4.1), ta được

$$I_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{\varepsilon^2\phi^2(n)} E\left\| \sum_{i=1}^{n} (A_{ni}Y_{ni} - EA_{ni}Y_{ni}) \right\|^2$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{\varepsilon^2\phi^2(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} E|A_{ni}Y_{ni}^j|^2$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{\varepsilon^2\phi^2(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} E\left(A_{ni}^2\phi^2(n) I_{(|X^j|>\phi(n))} + A_{ni}^2 (X^j)^2 I_{(|X^j|\leq\phi(n))}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} E(A_{ni}^2 I_{(|X^j|>\phi(n))}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{\varepsilon^2\phi^2(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} E(A_{ni}^2 (X^j)^2 I_{(|X^j|\leq\phi(n))})$$
$$:= I_3 + I_4.$$

Từ giả thiết (4.1) và khẳng định (4.2),

$$I_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} E(A_{ni}^2) P(|X^j| > \phi(n))$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{\varepsilon^2} \sum_{j\in B} P(|X^j| > \phi(n)) \sum_{i=1}^{n} E(A_{ni}^2)$$
$$\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} \sum_{j\in B} P(|X^j| > \phi(n))$$
$$\leq C \sum_{j\in B} E\left(\phi^{-1}(|X^j|)^r\right) < \infty.$$

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra $I_4 < \infty$. Từ (4.1) và giả thiết (K_3),

$$I_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-2}}{\varepsilon^2\phi^2(n)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} E(A_{ni}^2) E((X^j)^2 I_{(|X^j|\leq\phi(n))})$$
$$\leq C \sum_{j\in B} E\left((X^j)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-1}}{\phi^2(n)} I_{(|X^j|\leq\phi(n))}\right)$$

$$\leq C \sum_{j\in B} E\Big(\phi^2(\phi^{-1}(|X^j|)) \sum_{n=\phi^{-1}(|X^j|)}^{\infty} \frac{n^{r-1}}{\phi^2(n)}\Big)$$
$$\leq C \sum_{j\in B} E(\phi^{-1}(|X^j|)^r) \ < \infty.$$

Chứng minh Định lý 4.2 hoàn thành. □

Ví dụ dưới đây minh họa kết quả của Định lý 4.2.

Ví dụ 4.3 Kí hiệu l_2 là không gian Hilbert thực tách được gồm tất cả các dãy số thực có tổng bình phương hữu hạn với tích vô hướng

$$l_2 = \Big\{(x_1, x_2, ...) \ : \ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\Big\}, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i,$$

trong đó $x = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ và $y = (y_1, y_2, ...) \in l_2$. Cho $\{Y_{nk}, n \geq 1, k \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên thực cùng phân phối với hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} & \text{nếu } |x| > 1, \\ 0 & \text{nếu ngược lại,} \end{cases} \tag{4.5}$$

trong đó $0 < \alpha < 2$. Ngoài ra, giả sử với mỗi $k \geq 1$, $\{Y_{nk}, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD được định nghĩa trong Ví dụ 1.38 với $\{F_n, n \geq 1\}$ là hàm phân phối xác suất tương ứng với hàm mật độ (4.5), và với mỗi $n \geq 1$, $\{Y_{nk}, k \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập. Đặt $X_n^j = a_j Y_{nj}$ với $n \geq 1$ và $j \geq 1$, trong đó $a_j \geq 0$ với mọi $j \geq 1$ và $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\alpha/2} < \infty$. Ta sẽ chứng minh $\{X_n = (X_n^1, X_n^2, \dots), n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị trong l_2, tức là, với mỗi $n \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (X_n^j)^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 Y_{nj}^2 < \infty \quad \text{(hầu chắc chắn).} \tag{4.6}$$

Thật vậy, đặt $\xi_{nj} = a_j^2 Y_{nj}^2 I_{(|a_j Y_{nj}|<1)}$, ta có

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(a_j^2 Y_{nj}^2 \neq \xi_{nj}) = \sum_{j=1}^{\infty} P(|Y_{nj}| > a_j^{-1}) \leq C \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\alpha/2} < \infty.$$

Áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.3), ta có $P(a_j^2 Y_{nj}^2 \neq \xi_{nj}$ xuất hiện vô hạn lần$) = 0$. Khi đó để chứng minh (4.6), ta chỉ cần chỉ ra

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_{nj} < \infty \quad \text{(hầu chắc chắn).}$$

Ta có

$$\sum_{j=1}^{\infty} E|\xi_{nj} - E\xi_{nj}|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} E\xi_{nj}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^4 E(Y_{nj}^4 I_{(|a_j Y_{nj}|<1)}) \leq C \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\alpha/2} < \infty.$$

Áp dụng tiêu chuẩn hội tụ Kolmogorov (Định lý A.9), $\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_{nj} - E\xi_{nj}) < \infty$ hầu chắc chắn. Ngoài ra,

$$\sum_{j=1}^{\infty} E\xi_{nj} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 E(Y_{nj}^2 I_{(|a_j Y_{nj}|<1)}) \le C\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{\alpha/2} < \infty.$$

Do đó, $\sum_{j=1}^{\infty}\xi_{nj} < \infty$ hầu chắc chắn. Xét một cơ sở trực chuẩn của l_2 là $\{e_n, n \ge 1\}$, trong đó $e_n \in l_2$ là véctơ có tọa độ thứ n bằng 1, các tọa độ còn lại bằng 0. Với giả thiết $j \ge 1$, $\{Y_{nj}, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD với kỳ vọng 0, khi đó $\{X_n, n \ge 1\}$ cũng là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD theo tọa độ nhận giá trị trong l_2 với kỳ vọng 0.

Đặt $\phi(x) = x^{1/p}$ với $1 \le rp < \alpha,\ 1 < \alpha < 2$. Khi đó $\phi(x)$ thỏa mãn điều kiện (K_1, K_2, K_3). Ta có

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(\phi^{-1}(|X^j|))^r = \sum_{j=1}^{\infty} E(|X^j|)^{rp} = E|Y_{11}|^{rp}\sum_{j=1}^{\infty} a_j^{rp} < \infty.$$

Do đó, với $\{A_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực PNQD theo hàng thỏa mãn điều kiện (4.1) và với mọi $\varepsilon > 0$ ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\Big\|\sum_{i=1}^{n} A_{ni}X_i\Big\| \ge \varepsilon n^{1/p}\Big) < \infty.$$

Khi $rp \ge \alpha$, ta giả thiết thêm rằng với mỗi $j \ge 1$, $\{Y_{nj}, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập và $a_1 = 1, a_j = 0$ với mọi $j \ge 2$, kết hợp Bổ đề A.14 và Bổ đề A.15 ta có với $0 < \delta < 1$ và n đủ lớn,

$$2P\Big(\Big\|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big\| > x\Big) = 2P\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n} Y_{k1}\Big| > x\Big) \ge (1-\delta)n\frac{1}{(2x)^{\alpha}},\quad x > 0.$$

Điều này suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\Big\|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big\| > n^{1/p}\varepsilon\Big) \ge \frac{1-\delta}{2(2\varepsilon)^{\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-(rp-\alpha)/p}} = \infty.$$

Định lý 4.4 *Cho $1 \le r \le 2$ và $\{X, X_n, n \ge 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ và cùng phân phối, $\{A_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực PNQD theo hàng thỏa mãn (4.1).*

Giả sử $\{X, X_n, n \ge 1\}$ và $\{A_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ là độc lập. Nếu tồn tại hàm ϕ thỏa mãn các điều kiện (K_1, K_2, K_4) sao cho

$$\sum_{j\in B} E\Big((\phi^{-1}(|X^j|))^r \log_+^2(\phi^{-1}(|X^j|))\Big) < \infty, \tag{4.7}$$

thì với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big\| \sum_{i=1}^{k} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i)) \Big\| \ge \varepsilon\phi(n) \Big) < \infty. \tag{4.8}$$

Trường hợp riêng, khi $r = 2$ *ta có*

$$\frac{\max\limits_{1\le k\le n} \Big\| \sum\limits_{i=1}^{k} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i)) \Big\|}{\phi(n)} \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \textit{khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Tương tự như chứng minh Định lý 4.2 phía trên, với mọi $\varepsilon > 0$ cố định,

$$\begin{aligned}
&P\Big(\max_{1\le k\le n} \Big\| \sum_{i=1}^{k} (A_{ni}X_i - E(A_{ni}X_i)) \Big\| \ge \varepsilon\phi(n) \Big) \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} P\Big(|X_i^j| > \phi(n) \Big) + P\Big(\max_{1\le k\le n} \|U_k - V_k - K_k\| \ge \varepsilon\phi(n) \Big). \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} P\Big(|X_i^j| > \phi(n) \Big) + P\Big(\max_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{k} \|E(A_{ni}Y_{ni})\| \ge \frac{\varepsilon\phi(n)}{2} \Big). \\
&+ P\Big(\max_{1\le k\le n} \|U_k - V_k\| \ge \frac{\varepsilon\phi(n)}{2} \Big).
\end{aligned}$$

Theo (4.2) ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in B} P\Big(|X_i^j| > \phi(n) \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-r}} \sum_{j\in B} P\Big(|X^j| > \phi(n) \Big) < \infty.$$

Theo kết quả (4.3) trong chứng minh Định lý 4.2, ta có

$$\frac{\max\limits_{1\le k\le n} \sum_{i=1}^{k} \|E(A_{ni}Y_{ni})\|}{\phi(n)} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} \|E(A_{ni}Y_{ni})\|}{\phi(n)} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-r}} P\Big(\max_{1\le k\le n} \|U_k - V_k\| \ge \frac{\varepsilon\phi(n)}{2} \Big) < \infty.$$

Dễ thấy,

$$\begin{aligned}
&P\Big(\max_{1\le k\le n} \|U_k - V_k\| \ge \frac{\varepsilon\phi(n)}{2} \Big) \\
&\le P\Big(\max_{1\le k\le n} \|V_k\| \ge \frac{\varepsilon\phi(n)}{4} \Big) + P\Big(\max_{1\le k\le n} \|U_k\| \ge \frac{\varepsilon\phi(n)}{4} \Big).
\end{aligned}$$

Theo Mệnh đề 1.22, với mỗi $n \ge 1$, ta có $\{A_{ni}Y_{ni} - E(A_{ni}Y_{ni}), 1 \le i \le n\}$ và $\{A_{ni}Z_{ni} - E(A_{ni}Z_{ni}), 1 \le i \le n\}$ đều là một dãy biến ngẫu nhiên PNQD theo tọa độ.

Lần lượt áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), Bổ đề 4.1, khẳng định (4.4) và kết quả (4.2), ta thu được kết quả dưới đây:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\max_{1\le k\le n}\|V_k\|\ge\frac{\varepsilon\phi(n)}{4}\Big)\\
&\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\varepsilon n^{2-r}\phi(n)}E\Big(\max_{1\le k\le n}\|V_k\|\Big)\\
&\qquad\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\varepsilon n^{2-r}\phi(n)}E\Big(\max_{1\le k\le n}\sum_{i=1}^{k}\|A_{ni}Z_{ni}-E(A_{ni}Z_{ni})\|\Big)\\
&\qquad\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{2-r}\phi(n)}E\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in B}|A_{ni}Z_{ni}^{j}|\Big)\\
&\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{2-r}\phi(n)}\sum_{j\in B}E(|Z_{n1}^{j}|)E\Big(\sum_{i=1}^{n}|A_{ni}|\Big)\\
&\qquad\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{1-r}}\sum_{j\in B}P(|X^{j}|>\phi(n))<\infty.
\end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2) và Bổ đề 4.1, ta có,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-r}}P\Big(\max_{1\le k\le n}\|U_k\|\ge\frac{\varepsilon\phi(n)}{4}\Big)\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{2-r}\varepsilon^{2}\phi^{2}(n)}E\Big(\max_{1\le k\le n}\|U_k\|^{2}\Big)\\
&\quad\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C\log^{2}(n)}{n^{2-r}\phi^{2}(n)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in B}E|A_{ni}Y_{ni}^{j}|^{2}\\
&\quad\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C\log^{2}(n)}{n^{2-r}\phi^{2}(n)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in B}\Big(E\Big(A_{ni}^{2}\phi^{2}(n)I_{(|X^{i}|>\phi(n))}\Big)+E\Big(A_{ni}^{2}(X^{j})^{2}I_{(|X^{j}|\le\phi(n))}\Big)\Big)\\
&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C\log^{2}(n)}{n^{2-r}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in B}E(A_{ni}^{2}I_{(|X^{j}|>\phi(n))})\\
&\qquad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C\log^{2}(n)}{n^{2-r}\phi^{2}(n)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in B}E(A_{ni}^{2}(X^{j})^{2}I_{(|X^{j}|\le\phi(n))})\\
&\quad:=I_1+I_2.
\end{aligned}$$

Với I_1, lần lượt áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), giả thiết (4.1) và (4.7), ta có:

$$\begin{aligned}
I_1&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C\log^{2}(n)}{n^{2-r}}\sum_{j\in B}P(|X^{j}|>\phi(n))\sum_{i=1}^{n}E(A_{ni}^{2})\\
&\le C\sum_{j\in B}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^{2}(n)}{n^{1-r}}\sum_{k=n}^{\infty}P\Big(\phi(k)<|X^{j}|\le\phi(k+1)\Big)\\
&\le C\sum_{j\in B}\sum_{k=1}^{\infty}P\Big(\phi(k)<|X^{j}|\le\phi(k+1)\Big)\sum_{n=1}^{k}\frac{\log_{+}^{2}(n)}{n^{1-r}}\\
&\le C\sum_{j\in B}\sum_{k=1}^{\infty}k^{r}\log_{+}^{2}(k)P\Big(k<\phi^{-1}(|X^{j}|)\le k+1\Big)
\end{aligned}$$

$$\leq C\sum_{j\in B} E\Big((\phi^{-1}(|X^j|))^r \log_+^2(\phi^{-1}(|X^j|))\Big) < \infty.$$

Với I_2, tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2), (4.1), giả thiết (K_4) và (4.7), ta thu được:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C\log^2(n)}{n^{2-r}\phi^2(n)} \sum_{j\in B} E\left((X^j)^2 I_{(|X^j|\leq\phi(n))}\right) \sum_{i=1}^{n} E(A_{ni}^2) \\
&\leq C\sum_{j\in B} E\Big((X^j)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{r-1}\log_+^2(n)}{\phi^2(n)} I_{(|X^j|\leq\phi(n))}\Big) \\
&\leq C\sum_{j\in B} E\Big(\phi^2(\phi^{-1}(|X^j|)) \sum_{n=\phi^{-1}(|X^j|)}^{\infty} \frac{n^{r-1}\log_+^2(n)}{\phi^2(n)}\Big) \\
&\leq \sum_{j\in B} E\Big((\phi^{-1}(|X^j|))^r \log_+^2(\phi^{-1}(|X^j|))\Big) < \infty.
\end{aligned}$$

Chứng minh Định lý 4.4 hoàn thành. □

Lấy $r = 1$ trong Định lý 4.4, ta thu được Hệ quả dưới đây được xem là luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cho dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ.

Hệ quả 4.5 *Cho $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ cùng phân phối với kỳ vọng bằng 0, $\{B_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực PNQD thỏa mãn*

$$\sum_{k=1}^{n} E(B_k)^2 = O(n).$$

Giả sử $\{X, X_n, n \geq 1\}$ và $\{B_n, n \geq 1\}$ là độc lập. Nếu tồn tại hàm ϕ thỏa mãn (K_1, K_2, K_4) sao cho

$$\sum_{j\in B} E\Big(\phi^{-1}(|X^j|)\log_+^2(\phi^{-1}(|X^j|))\Big) < \infty,$$

thì với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{\phi(n)}\sum_{i=1}^{n} B_i X_i \xrightarrow{h.c.c.} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Với mọi $\varepsilon > 0$, áp dụng Định lý 4.4 với $r = 1$, $A_{ni} = B_i$ với mỗi $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, ta có

$$\begin{aligned}
\infty &> \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big\|\sum_{i=1}^{k} B_i X_i\Big\| > \varepsilon\phi(n)\Big) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{n} P\Big(\max_{1\leq k\leq n} \Big\|\sum_{i=1}^{k} B_i X_i\Big\| > \varepsilon\phi(n)\Big)
\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{1}{2^{l+1}} P\Big(\max_{1\leq k\leq 2^l} \Big\| \sum_{i=1}^{k} B_i X_i \Big\| > \varepsilon \phi(2^l) \Big)$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} P\Big(\max_{1\leq k\leq 2^l} \Big\| \sum_{i=1}^{k} B_i X_i \Big\| > \varepsilon \phi(2^l) \Big).$$

Áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.3) và (4.8), ta được

$$\frac{1}{\phi(2^i)} \max_{1\leq k\leq 2^i} \Big\| \sum_{i=1}^{k} B_i X_i \Big\| \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad i \to \infty. \tag{4.9}$$

Với $2^k \leq n < 2^{k+1}$, ta có

$$0 \leq \frac{1}{\phi(n)} \Big\| \sum_{i=1}^{n} B_i X_i \Big\| \leq \frac{1}{\phi(2^i)} \max_{1\leq k\leq n} \Big\| \sum_{i=1}^{k} B_i X_i \Big\|. \tag{4.10}$$

Kết hợp (4.9) và (4.10) ta có điều phải chứng minh. □

Lấy $\phi(x) = x^{1/p}\ell^{1/p}(x)$, khi đó $\phi^{-1}(x) = x^p \ell^{\#}(x^p)$ theo (1.2). Với $1 \leq rp < 2$, hàm ϕ vừa nêu thỏa mãn điều kiện $(K_1) - (K_4)$. Chú ý rằng khi $rp = 2$, ta chọn $r = 2, p = 1, \ell(x) = \log_+^2(x)$. Khi đó điều kiện $(K_3), (K_4)$ vẫn thỏa mãn. Chúng ta thu được Hệ quả dưới đây.

Hệ quả 4.6 *Cho $1 \leq r \leq 2$, $1 \leq rp < 2$ và $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ cùng phân phối với kỳ vọng bằng 0, $\{B_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực PNQD thỏa mãn*

$$\sum_{k=1}^{n} E(B_k)^2 = O(n).$$

Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{B_n, n \geq 1\}$ là độc lập với nhau. Nếu

$$\sum_{j\in B} E\Big(\big(|X^j|^p \ell^{\#}(|X^j|^p)\big)^r \log_+^2 \big(|X^j|^p \ell^{\#}(|X^j|^p)\big) \Big) < \infty,$$

thì

$$\frac{1}{n^{1/p}\ell^{1/p}(n)} \sum_{i=1}^{n} B_i X_i \xrightarrow{h.c.c.} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

4.2 Luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp trong không gian Hilbert với phân phối đuôi nặng

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu luật mạnh số lớn cho tổng trọng số tất định của dãy véctơ ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD

theo tọa độ thỏa mãn phân phối đuôi nặng

$$\sum_{j\in B} P\left(|X_n^j| > x\right) \asymp x^{-\alpha}\ell(x), \quad n \geq 1,\ \alpha \in (1,2),$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm.

Trước khi đi vào các kết quả chính, chúng tôi nhắc lại kết quả quan trọng đối với dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ.

Bổ đề 4.7 ([89], Mệnh đề 6) *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ. Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ hội tụ hầu chắc chắn nếu với $c > 0$, các chuỗi sau hội tụ:*

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j\in B} P\left(|X_n^j| > c\right)$,

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j\in B} EX_n^j(c)\, e_j$,

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_{j\in B} \log_2^2 n\ D(X_n^j(c))$,

trong đó

$$X_n^j = \langle X_n, e_j\rangle, \quad X_n^j(c) = -cI_{(X_n^j<-c)} + X_n^j I_{(|X_n^j|\leq c)} + cI_{(X_n^j>c)},$$

với $n \geq 1, j \in B$.

Kết quả dưới đây được xem là luật mạnh số lớn cho tổng trọng số tất định của dãy vectơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với phân phối đuôi nặng.

Định lý 4.8 *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với kỳ vọng bằng 0 thỏa mãn*

$$\sum_{j\in B} P\left(|X_n^j| > x\right) \asymp x^{-\alpha}\ell(x), \quad \alpha \in (1,2),\ n \geq 1,$$

trong đó $\ell(x)$ là một hàm biến đổi chậm. Cho $\{a_n, n \geq 1\}$ và $\{b_n, n \geq 1\}$ là các dãy hằng số dương thỏa mãn $0 < b_n \nearrow \infty$. Đặt $c_n = \dfrac{b_n}{a_n \log_+ n}$ với $n \geq 1$. Giả sử

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-\alpha}\ell(c_n) < \infty. \tag{4.11}$$

Khi đó,

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k X_k \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad khi\ n \to \infty.$$

Chứng minh. Với $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$, $j \in B$, đặt

$$Y_k = \sum_{j\in B} Y_k^j e_j, \quad Y_k^j = -c_k I_{\left(X_k^j < -c_k\right)} + X_k^j I_{\left(|X_k^j| \leq c_k\right)} + c_k I_{\left(X_k^j > c_k\right)}.$$

Khi đó theo Mệnh đề 1.22, dãy $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ. Kết hợp Định lý Karamata (Định lý 1.5) và giả thiết (4.11), ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in B} \log_+^2 k \; D\left(\frac{a_k Y_k^j}{b_k}\right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in B} c_k^{-2} E(Y_k^j)^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in B} P\left(|X_k^j| > c_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in B} c_k^{-2} E(X_k^j)^2 I_{(|X_k^j|\leq c_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in B} P\left(|X_k^j| > c_k\right) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-2} \int_0^{c_k} t \sum_{j\in B} P\left(|X_k^j| > t\right) dt \\
&\asymp \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-\alpha}\ell(c_k) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-2} \int_0^{c_k} t^{1-\alpha}\ell(t)dt \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-\alpha}\ell(c_k) + C\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-2} c_k^{2-\alpha}\ell(c_k) \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-\alpha}\ell(c_k) < \infty.
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 4.7 ta có $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{a_k\left(Y_k - EY_k\right)}{b_k}$ hội tụ, tiếp tục áp dụng Bổ đề Kronecker (Bổ đề A.8) suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\left(Y_k - EY_k\right) = o\left(b_n\right) \quad \text{hầu chắc chắn.} \tag{4.12}$$

Chú ý rằng $EX_n^j = 0$, kết hợp Định lý Karamata (Định lý 1.5) và giả thiết (4.11), ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \log_+ k}{b_k} \|EY_k\| &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-1} \left\| \sum_{j\in B} E(Y_k^j e_j) \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-1} \left\| \sum_{j\in B} EX_k^j I\left(|X_k^j| \leq c_k\right) e_j \right\| + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in B} P\left(|X_k^j| > c_k\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-1} \sum_{j\in B} E|X_k^j| I_{\left(|X_k^j| > c_k\right)} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in B} P\left(|X_k^j| > c_k\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-1} \int_{c_k}^{\infty} \sum_{j\in B} P\left(|X_k^j| > t\right) dt + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j\in B} P\left(|X_k^j| > c_k\right) \\
&\asymp \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-1} \int_{c_k}^{\infty} t^{-\alpha}\ell(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-\alpha}\ell(c_k) \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-1}\ell\left(c_k\right) c_k^{-\alpha+1} + C\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-\alpha}\ell(c_k)
\end{aligned}$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{-\alpha} \ell(c_k) < \infty,$$

từ đó suy ra chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} EY_k \quad \text{hội tụ hầu chắc chắn.}$$

Kết hợp giả thiết của dãy $\{b_n, n \geq 1\}$ và Bổ đề Kronecker (Bổ đề A.8), ta có

$$\sum_{k=1}^{n} a_k EY_k = o(b_n). \tag{4.13}$$

Kết hợp (4.12) và (4.13),

$$\sum_{k=1}^{n} a_k Y_k = o(b_n) \quad \text{hầu chắc chắn} \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Để hoàn thành chứng minh Định lý 4.8, chúng ta cần chỉ ra

$$P\left(X_n \neq Y_n \quad \text{xuất hiện vô hạn lần}\right) = 0.$$

Từ giả thiết (4.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} P\left(\left|X_n^j - Y_n^j\right|^2 > 0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} P\left(|X_n^j| > c_n\right)$$
$$\asymp \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-\alpha} \ell(c_n) < \infty.$$

Áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.3) ta có

$$P\left(X_n \neq Y_n \quad \text{xuất hiện vô hạn lần}\right) = 0.$$

Chứng minh định lý được hoàn thành. □

Ví dụ 4.9 Xét $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD có phân phối xác suất $P(X_n^j = 0) = 1 - \dfrac{\alpha_j}{q_n^r}$ và xác suất đuôi

$$P\left(X_n^j > x\right) = \frac{\alpha_j}{(x + q_n)^r}, \quad \text{với } x > 0, \ j \in B, \tag{4.14}$$

trong đó $r > 1$, $\alpha_j \geq 0$, $\sum\limits_{j \in B} \alpha_j < \infty$ và $\{q_n, n \geq 1\}$ là một dãy số dương thỏa mãn

$$M = \max\{\alpha_j\} \leq q_n^r \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

Từ (4.14), ta có

$$EX_n^j = \int_0^{\infty} P\left(X_n^j > x\right) dx = \int_0^{\infty} \frac{\alpha_j}{(x + q_n)^r} dx = \frac{\alpha_j}{(r-1) q_n^{r-1}} \leq \frac{M^{1/r}}{r-1} < \infty,$$

và

$$EX_n = E\Big(\sum_{j\in B} X_n^j\Big) = \frac{\alpha}{(r-1)\, q_n^{r-1}}, \quad \text{trong đó} \quad \alpha = \sum_{j\in B} \alpha_j.$$

Ta có $\{X_n - EX_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với kỳ vọng 0 và với $n \geq 1$,

$$\sum_{j\in B} P\left(\left|X_n^j - EX_n^j\right| > x\right) \asymp \sum_{j\in B} P\left(|X_n^j| > x\right) \asymp x^{-r}.$$

Khi đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n - EX_n| > x\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in B} P\left(\left|X_n^j - EX_n^j\right| > x\right) \asymp \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in B} P\left(|X_n^j| > x\right).$$

Từ Định lý 4.8, với $n \geq 1$, lấy $a_n = 1$, $b_n = n^{1/r}\log_+^{\alpha} n$ và $c_n = \dfrac{n^{1/r}}{\log_+^{1-\alpha} n}$ với mọi $\alpha > 1 + \dfrac{1}{r}$, $\ell(x) = 1$ với mọi x, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n - EX_n| > c_n\right) \asymp \sum_{n=1}^{\infty}(c_n)^{-r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log_+^{r(\alpha-1)} n} < \infty.$$

Áp dụng Định lý 4.8 cho dãy biến ngẫu nhiên PNQD $\{X_n - EX_n,\, n \geq 1\}$ ta có

$$\frac{1}{n^{1/r}\log_+^{\alpha} n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Kết quả dưới đây có thể xem là mở rộng của Định lý 3.5 trong Wang [109] cho một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ.

Cho $\{c_n, n \geq 1\}$ là một dãy số dương. Với mỗi $n \geq 1$, đặt

$$N(n) = Card\{i : c_i \leq n\},$$

trong đó $Card(A)$ là số phần tử của tập A. Chú ý rằng, $N(0) = 0$ và $N(\cdot)$ là một hàm nhận giá trị nguyên không giảm với $\lim\limits_{n\to\infty} N(n) = \infty$.

Định lý 4.10 *Cho $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ cùng phân phối và $\{a_n, n \geq 1\}$ là một dãy số dương thỏa mãn $0 < A_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \nearrow \infty$. Giả sử*

$$EX = 0, \quad \sum_{j\in B} E|X^j|^r < \infty \ \text{ với } \ 1 < r < 2. \tag{4.15}$$

Đặt $c_n = \dfrac{A_n}{a_n \log_+ n}$ với $n \geq 1$. Giả sử

$$N(n) = O(n^r), \quad n \geq 1. \tag{4.16}$$

Khi đó,

$$\frac{1}{A_n}\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty. \tag{4.17}$$

Chứng minh. Từ định nghĩa của $N(n)$ suy ra $c_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ vì nếu điều ngược lại xảy ra, tức là tồn tại một dãy $\{c_i, i \geq 1\}$ và hằng số n_0 sao cho $c_i \leq n_0^r$. Khi đó, $N(n_0) = \infty$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $N(n_0) \leq C n_0^r$ theo (4.16).
Với mỗi $n \geq 1, j \in B$, đặt

$$Y_n = \sum_{j \in B} Y_n^j e_j, \quad Y_n^j = -c_n I_{\left(X_n^j < -c_n\right)} + X_n^j I_{\left(|X_n^j| \leq c_n\right)} + c_n I_{\left(X_n^j > c_n\right)}.$$

Kết hợp (4.15) và (4.16) ta có:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n \neq Y_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} P\left(\left|X_n^j - Y_n^j\right|^2 > 0\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} P\left(|X_n^j| > c_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \sum_{c_n \leq k < c_n + 1} P\left(|X_n^j| > c_n\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \sum_{k-1 < c_n \leq k} P\left(|X_n^j| > k-1\right) \\
&= \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{\infty} \left(N(k) - N(k-1)\right) P\left(|X^j| > k-1\right) \\
&= \sum_{j \in B} \sum_{k=1}^{\infty} \left(N(k) - N(k-1)\right) \sum_{l=k}^{\infty} P\left(l-1 < |X^j| \leq l\right) \\
&= \sum_{j \in B} \sum_{l=1}^{\infty} P\left(l-1 < |X^j| \leq l\right) \sum_{k=1}^{l} \left(N(k) - N(k-1)\right) \\
&= \sum_{j \in B} \sum_{l=1}^{\infty} N(l) P\left(l-1 < |X^j| \leq l\right) \\
&\leq C \sum_{j \in B} \sum_{l=1}^{\infty} l^r P\left(l-1 < |X^j| \leq l\right) \\
&\leq C \sum_{j \in B} E|X^j|^r < \infty.
\end{aligned}$$

Điều này suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X_n \neq Y_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in B} P\left(|X_n^j| > c_n\right) < \infty. \tag{4.18}$$

Áp dụng bổ đề Borel-Cantelli (Bổ đề A.3) ta có

$$P\left(X_n \neq Y_n \quad \text{xuất hiện vô hạn lần}\right) = 0. \tag{4.19}$$

Để hoàn thành chứng minh Định lý 4.10, ta cần chỉ ra

$$\frac{1}{A_n} \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty. \tag{4.20}$$

Kết hợp (4.15), (4.16) và (4.18), ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B}\log_+^2 i\ D\left(\frac{a_iY_i^j}{A_i}\right) \le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B} c_i^{-2}E(Y_i^j)^2\\
\le&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B} P\left(|X_i^j|>c_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B} c_i^{-2}E(X^j)^2 I_{(|X^j|\le c_i)}\\
\le& C + \sum_{j\in B}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{c_i\le k<c_i+1} c_i^{-2}E(X^j)^2 I_{(|X^j|\le c_i)}\\
\le& C + \sum_{j\in B}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k-1<c_i\le k} c_i^{-2}E(X^j)^2 I_{(|X^j|\le k)}\\
\le& C + \sum_{j\in B}\sum_{i=1}^{\infty}(N(k)-N(k-1))(k-1)^{-2}\sum_{l=1}^{k}E(X^j)^2 I_{(l-1<|X^j|\le l)}\\
\le& C + \sum_{j\in B}\sum_{l=2}^{\infty}E(X^j)^2 I_{(l-1<|X^j|\le l)}\sum_{k=l}^{\infty}N(k)((k-1)^{-2}-k^{-2})\\
\le& C + \sum_{j\in B}\sum_{l=2}^{\infty}E(X^j)^2 I_{(l-1<|X^j|\le l)}\sum_{k=l}^{\infty}k^{r-3}\\
\le& C + \sum_{j\in B}\sum_{l=2}^{\infty}l^{r-2}I_{(l-1<|X^j|\le l)}\\
\le& C + C\sum_{j\in B}E|X^j|^r < \infty.
\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 4.7 và Bổ đề Kronecker (Bổ đề A.8),

$$A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_i\left(Y_i - EY_i\right) \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n\to\infty.$$

Để chứng minh (4.20), ta cần chỉ ra

$$A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iEY_i \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } \ n\to\infty.$$

Kết hợp (4.15), (4.16) và (4.18),

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i\log_+ i}{A_i}\|EY_i\| = \sum_{i=1}^{\infty}c_i^{-1}\left\|\sum_{j\in B}EY_i^j e_j\right\|\\
\le&\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B}P\left(|X_i^j|>c_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty}c_i^{-1}\left\|\sum_{j\in B}EX_i^j I_{\left(|X_i^j|\le c_i\right)}e_j\right\|\\
\le&\sum_{i=1}^{\infty}c_i^{-1}\sum_{j\in B}E|X^j|I_{(|X^j|>c_i)}\\
\le& C + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B}\sum_{c_i\le l<c_i+1}c_i^{-1}E|X^j|I_{(|X^j|>c_i)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq & C+\sum_{j\in B}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{l-1<c_i\leq l} c_i^{-1}E|X^j|I_{(|X^j|>l-1)}\\
\leq & C+\sum_{j\in B}\sum_{l=2}^{\infty}\left(N\left(l\right)-N\left(l-1\right)\right)\left(l-1\right)^{-1}\sum_{k=l-1}^{\infty}E|X^j|I_{(k<|X^j|\leq k+1)}\\
\leq & C+C\sum_{j\in B}\sum_{k=1}^{\infty}E|X^j|I_{(k<|X^j|\leq k+1)}\sum_{l=2}^{k+1}N\left(l\right)\left(\left(l-1\right)^{-1}-l^{-1}\right)\\
\leq & C+C\sum_{j\in B}\sum_{k=1}^{\infty}E|X^j|I_{(k<|X^j|\leq k+1)}\sum_{l=2}^{k+1}l^{r-2}\\
\leq & C+C\sum_{j\in B}\sum_{k=1}^{\infty}k^{r-1}E|X^j|I_{(k<|X^j|\leq k+1)}\\
\leq & C+C\sum_{j\in B}\sum_{k=1}^{\infty}E|X^j|^rI_{(k<|X^j|\leq k+1)}\\
\leq & C\sum_{j\in B}E\left|X^j\right|^r<\infty.
\end{aligned}
$$

Điều này suy ra

$$A_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iEY_i\to 0 \quad \text{khi} \quad n\to\infty. \tag{4.21}$$

Kết hợp (4.19) và (4.21) ta thu được kết quả (4.17). Chứng minh Định lý được hoàn thành. □

Dựa trên ý tưởng của Shen và cộng sự [87], Định lý 4.11 dưới đây sẽ thiết lập sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số tất định của dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ. Trong đó, chúng tôi sử dụng dãy chuẩn hóa $b_n = n^\alpha\ell(n)$ với $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm, và thay dãy số dương $\{a_n, n\geq 1\}$ bởi một mảng số dương $\{a_{ni}, 1\leq i\leq n, n\geq 1\}$ thỏa mãn một vài điều kiện nhất định.

Định lý 4.11 *Cho $\{X_n, n\geq 1\}$ là một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với kỳ vọng 0 và $E(X_n^j)^2=(\sigma_n^j)^2<\infty$ với mỗi $n\geq 1, j\in B$. Cho $\{a_{ni}, 1\leq i\leq n, n\geq 1\}$ là một mảng số dương thỏa mãn $a_{ni}^2\leq Ca_{ii}^2$ với mỗi $n\geq 1, 1\leq i\leq n$. Với $\alpha>1/2$, giả sử*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B}\frac{a_{ii}^2\left(\sigma_i^j\right)^2}{i^{2\alpha-1}\ell^2(i)}<\infty, \tag{4.22}$$

trong đó $\ell(\cdot)$ là một hàm biến đổi chậm. Khi đó,

$$\frac{1}{n^\alpha\ell(n)}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \textit{khi} \quad n\to\infty.$$

Chứng minh. Từ giả thiết của Định lý 4.11 và Bổ đề 4.1, ta có

$$E\Big\|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i\Big\|^2\leq\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^2E\|X_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in B}a_{ni}^2\left(\sigma_i^j\right)^2\leq C\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in B}a_{ii}^2\left(\sigma_i^j\right)^2.$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Markov (Bổ đề A.2) và Định lý Karamata (Định lý 1.5), với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i\right\| > \varepsilon n^{\alpha}\ell(n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 n^{2\alpha}\ell^2(n)} E\left\|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i\right\|^2 \\
&\leq C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}\ell^2(n)} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in B} a_{ii}^2 (\sigma_i^j)^2 = C\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B} a_{ii}^2 \left(\sigma_i^j\right)^2 \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}\ell^2(n)} \\
&= C\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B} a_{ii}^2 \left(\sigma_i^j\right)^2 \int_{i}^{\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}\ell^2(x)} dx \\
&\leq C\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j\in B} a_{ii}^2 (\sigma_i^j)^2 \frac{1}{i^{2\alpha-1}\ell^2(i)} < \infty.
\end{aligned}$$

Do đó, $\dfrac{1}{n^{\alpha}\ell(n)} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}X_i \xrightarrow{\text{c.c.}} 0$ khi $n \to \infty$. □

4.3 Sự hội tụ của thống kê von Mises suy biến

Trong phần này, chúng tôi áp dụng các kết quả về sự hội tụ của dãy véctơ ngẫu nhiên trong không gian Hilbret đã thiết lập ở hai phần trước để nghiên cứu sự hội tụ của thống kê von Mises (một dạng phi tuyến) với dữ liệu nhận giá trị thực. Ở đây, chúng tôi xây dựng một không gian Hilbert thích hợp nhằm chuyển một dạng tổng phi tuyến về dạng tổng tuyến tính nhận giá trị trong chính không gian Hilbert đó.

Trước hết, chúng tôi sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản về thống kê von Mises (V-thống kê). Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ và $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là một hàm đối xứng, đo được. Khi đó, V-thống kê (bậc 2 có trọng số) được định nghĩa bởi

$$V_n = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ni}A_{nj}h(X_i, X_j),$$

với hạt nhân (*kernel*) h và $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên theo hàng nhận giá trị thực. Trường hợp đặc biệt, khi các trọng số $A_{ni} = \frac{1}{n}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ ta thu được

$$V_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} h\left(X_i, X_j\right),$$

là một V-thống kê với hạt nhân h (được trình bày trong tài liệu [19], trang 100). Thống kê von Mises được gọi là *suy biến* nếu $E(h(x, X_i)) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (xem [19], trang 101). Ngoài ra, chúng ta giả sử thêm rằng h liên tục Lipschitz và xác định dương, tức là

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j h(x_i, x_j) \geq 0,$$

với mọi $c_1, \ldots, c_n, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Để minh họa, xét dãy biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cùng phân phối với kỳ vọng bằng 0 và phương sai hữu hạn σ^2. Kí hiệu $\overline{X}_n$ và s_n^2 tương ứng là trung bình mẫu và phương sai mẫu, trong đó

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{và} \quad s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2.$$

Xét hai trường hợp đơn giản của V-thống kê là

$$V_n^k = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(X_i - X_j\right)^2, \quad \text{và} \quad V_n^h = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} X_i X_j,$$

trong đó hàm hạt nhân $k\left(x_i, x_j\right) = \frac{1}{2}\left(x_i - x_j\right)^2$ và $h\left(x_i, x_j\right) = x_i x_j$. Khi đó,

$$\begin{aligned} V_n^k &= \frac{1}{2n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(X_i - X_j\right)^2 = \frac{1}{2n^2}\cdot 2n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}_n^2\right) \\ &= \frac{1}{2n^2}\cdot 2n(n-1)s_n^2 = \frac{n-1}{n}s_n^2. \end{aligned}$$

và

$$V_n^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - V_n^h.$$

Áp dụng Định lý 14 trong [88] với lưu ý rằng V_n^h là một thống kê von Mises suy biến, ta có $V_n^h \xrightarrow{h.c.c.} 0$. Sau đó, áp dụng luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n^2, n \geq 1\}$, ta thu được tính vững cho ước lượng s_n^2 của σ^2. Ngoài ra, các V-thống kê còn đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết ước lượng và kiểm định giả thuyết đối với các thống kê phi tuyến.

Nhóm tác giả Sơn [88, 89] đã đưa ra sự hội tụ hầu chắc chắn cho thống kê von Mises suy biến đối với dữ liệu nhận giá trị thực độc lập và độc lập từng cặp với trọng số tất định. Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu V-thống kê để đưa ra các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của thống kê von Mises suy biến với dữ liệu nhận giá trị thực độc lập từng cặp.

Định lý 4.12 *Cho $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực độc lập từng cặp và cùng phân phối với kỳ vọng bằng 0, $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng biến ngẫu nhiên PNQD theo hàng thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} E(A_{ni})^2 = O(n)$ (4.1). Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{A_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là độc lập. Cho h là hàm liên tục Lipschitz xác định dương thỏa mãn*

$$E\left|h\left(X, X\right)\right| < \infty.$$

Khi đó

$$\frac{1}{n^2 \log_+^4(n)} \max_{1\leq k\leq n} V_k \xrightarrow{c.c.} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Từ kết quả của Sun [95], hàm $h(x,y)$ có biểu diễn

$$h(x,y) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \phi_l(x)\phi_l(y),$$

trong đó $(\phi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ là các hàm riêng trực giao thỏa mãn các tính chất dưới đây:

i) $E\phi_l(X_n) = 0$ và $E\phi_l^2(X_n) = 1$ với mọi $l \in \mathbb{N}$,

ii) $\lambda_l \geq 0$ với mọi $l \in \mathbb{N}$ và $\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l < \infty$.

Xét $\mathbb{H}$ là một không gian Hilbert gồm các dãy số thực $y = (y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ được trang bị tích vô hướng xác định như sau:

$$\langle y, z\rangle = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l y_l z_l.$$

Khi đó, $\|y\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l y_l^2$. Xét một dãy biến ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị $Y_n = (\phi_l(X_n))_{l\in\mathbb{N}}$. Khi đó $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với kỳ vọng 0 và

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2\log_+^4(n)} \max_{1\leq k\leq n} V_k &= \frac{1}{n^2\log_+^4(n)} \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i,j=1}^{k} A_{ni}A_{nj}h(X_i,X_j) \\
&= \frac{1}{n^2\log_+^4(n)} \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i,j=1}^{k} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l A_{ni}A_{nj}\phi_l(X_i)\phi_l(X_j) \\
&= \frac{1}{n^2\log_+^4(n)} \max_{1\leq k\leq n} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \Big(\sum_{i=1}^{k} A_{ni}\phi_l(X_i)\Big)^2 \\
&= \Big(\frac{1}{n\log_+^2(n)} \max_{1\leq k\leq n} \Big\|\sum_{i=1}^{k} A_{ni}Y_i\Big\|\Big)^2.
\end{aligned}$$

Lấy $\phi(x) = x\log_+^2(x)$, từ (1.2) và (1.3), ta có $\phi^{-1}(x) = x/\log_+^2(x)$. Ngoài ra,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in B} E\Big(\Big(\phi^{-1}(|X^j|)\Big)^2 \log_+^2\Big(\phi^{-1}(|X^j|)\Big)\Big) &= \sum_{j\in B} E\Big(\frac{|X^j|^2}{\log_+^4(|X^j|)} \log_+^2\Big(\frac{|X^j|}{\log_+^2(|X^j|)}\Big)\Big) \\
&\leq \sum_{j\in B} E\Big(|X^j|\Big)^2 = E|h(X,X)| < \infty.
\end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 4.4 với $r = 2$, hàm ϕ và ϕ^{-1} lấy như trên ta được

$$\frac{\max\limits_{1\leq k\leq n} \Big\|\sum\limits_{i=1}^{k} A_{ni}Y_i\Big\|}{n\log_+^2(n)} \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n\to\infty.$$

Điều này suy ra

$$\frac{1}{n^2\log_+^4(n)} \max_{1\leq k\leq n} V_k \xrightarrow{c.c.} 0 \quad \text{khi } n\to\infty.$$

□

Áp dụng Định lý 4.11 ta thu được sự hội tụ đầy đủ cho thống kê von Mises suy biến với dữ liệu nhận giá trị thực độc lập từng cặp.

Định lý 4.13 *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực độc lập từng cặp với kỳ vọng bằng 0. Cho $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là một mảng số dương sao cho $a_{ni}^2 \leq C a_{ii}^2$ với mỗi $1 \leq i \leq n, n \geq 1, j \in B$. Với $\alpha > 1/2$, giả sử hạt nhân h của V-thống kê là một hàm liên tục Lipschitz xác định dương thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}^2}{i^{2\alpha-1}} E\left|h(X_i, X_i)\right| < \infty.$$

Khi đó,

$$V_n = \frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ni} a_{nj} h(X_i, X_j) \xrightarrow{c.c.} 0 \qquad \text{khi } n \to \infty.$$

Chứng minh. Tương tự như trong chứng minh Định lý 4.12, xét một dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị $Y_n = (\phi_l(X_n))_{l \in \mathbb{N}}$. Khi đó, $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy véctơ $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với kỳ vọng 0. Khi đó,

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ni} a_{nj} h(X_i, X_i) = \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \left(\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \phi_l(X_k) \right)^2 \\ &= \left\| \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} Y_k \right\|^2. \end{aligned}$$

Với $\alpha > 1/2$, lấy $\ell(n) = 1$ với mọi $n \geq 1$, khi đó điều kiện (4.22) trong Định lý 4.11 được thỏa mãn vì

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \in B} \frac{a_{ii}^2}{i^{2\alpha-1}} (\sigma_i^j)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}^2}{i^{2\alpha-1}} E\|Y_i\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}^2}{i^{2\alpha-1}} E\left|h(X_i, X_i)\right| < \infty.$$

Áp dụng Định lý 4.11 ta có

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} Y_k \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Điều này suy ra

$$V_n = \left\| \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} Y_k \right\|^2 \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

□

Kết luận Chương 4

Chương 4 tập trung nghiên cứu luật số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert, phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp theo tọa độ. Trong đó,

Mục **4.1** tiếp tục phát triển các kỹ thuật của Jajte [52] để thiết lập sự hội tụ đầy đủ cho tổng trọng số ngẫu nhiên của các véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với dãy hàm chuẩn hóa ϕ thỏa mãn các điều kiện $(K_1) - (K_4)$, còn Mục **4.2** đưa ra các điều kiện để thiết lập luật mạnh số lớn cho tổng trọng số tất định của dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với phân phối đuôi nặng. Nội dung của hai mục này lần lượt được viết dựa trên công trình số **[3]** và số **[1]** trong **Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án**.

Các kết quả chính trong Chương 4 gồm:

- Định lý 4.2 thiết lập sự hội tụ đầy đủ cho dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert PNQD theo tọa độ dựa trên tính chất của lớp hàm ϕ thỏa mãn điều kiện (K_1, K_2, K_3). Ví dụ 4.3 xây dựng một dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert l_2 PNQD theo tọa độ để minh họa kết quả của Định lý 4.2. Định lý 4.4 chỉ ra sự hội tụ tương tự như trong Định lý 4.2 nhưng có max và hàm chuẩn hóa ϕ thỏa mãn điều kiện (K_1, K_2, K_4). Lấy $r = 1$ trong Định lý 4.4, ta thu được Hệ quả 4.5 được xem là luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với dãy chuẩn hóa tổng quát.

- Định lý 4.8 thiết lập các điều kiện để chứng minh luật mạnh số lớn cho tổng trọng số tất định của dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ với phân phối đuôi nặng. Kết quả này sau đó được minh họa cụ thể thông qua Ví dụ 4.9. Định lý 4.10 thu được bằng cách mở rộng Định lý 3.5 của Wang và cộng sự [109] cho dãy véctơ ngẫu nhiên $\mathbb{H}$-giá trị PNQD theo tọa độ. Định lý 4.11 có thể xem là một trường hợp riêng của Định lý 4.8, dựa trên ý tưởng của nhóm tác giả Shen [87].

- Áp dụng các kết quả phía trên để nghiên cứu sự hội tụ đầy đủ cho thống kê von Mises suy biến với dữ liệu nhận giá trị thực độc lập từng cặp ta thu được Định lý 4.12 (nhờ áp dụng Định lý 4.4) và Định lý 4.13 (nhờ áp dụng Định lý 4.11).

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Luận án tập trung nghiên cứu Luật số lớn cho dãy biến ngẫu nhiên có cấu trúc phụ thuộc (liên kết âm, phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp) thông qua sự hội tụ đầy đủ. Các đóng góp chính bao gồm việc mở rộng Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát, thiết lập Luật số lớn Marcinkiewicz cho tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng, sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số (ngẫu nhiên và tất định) của dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp theo tọa độ và nghiên cứu ước lượng trong mô hình hồi quy và một số mô hình thống kê khác. Những kết quả này không chỉ tổng quát một số kết quả đã công bố mà còn có thể ứng dụng vào việc nghiên cứu một số mô hình thống kê quan trọng.

Các đóng góp chính của luận án được tóm tắt dưới đây:

- Thiết lập các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và Định lý Baum-Katz cho tổng trọng số ngẫu nhiên của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm với dãy chuẩn hóa tổng quát. Kết quả này không chỉ tổng quát một số kết quả đã biết mà còn có thể áp dụng cho một vài cấu trúc phụ thuộc khác, chẳng hạn: hiệu martingale, biến ngẫu nhiên NSD, biến ngẫu nhiên φ-mixing với $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(n)<\infty$, biến ngẫu nhiên ρ^*-mixing (hoặc $\tilde{\rho}$-mixing), biến ngẫu nhiên m-ANA. Ngoài ra, dựa trên các kết quả vừa thiết lập, luận án đưa ra tốc độ hội tụ của các ước lượng vững đầy đủ trong mô hình hồi quy tuyến tính đơn và trong mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên.

- Thiết lập Luật số lớn Marcinkiewicz (cả Luật yếu số lớn và Luật mạnh số lớn) cho tổng trọng số tất định của dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm và phân phối đuôi nặng với dãy chuẩn hóa tổng quát. Đối với dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối hoặc dãy biến ngẫu nhiên liên kết âm cùng phân phối, chúng tôi đưa ra được điều kiện cần và đủ của dãy chuẩn hóa để thiết lập Luật số lớn dạng Marcinkiewiczc-Zygmund. Ngoài ra, chúng tôi sử dụng những kết quả này để đưa ra ước lượng vững cho giá trị rủi ro có điều kiện $cVaR$ và nghiên cứu tính vững của các ước lượng trong mô hình hồi quy bán tham số với các sai số đuôi nặng.

- Thiết lập Luật mạnh số lớn cho dãy véctơ ngẫu nhiên nhận giá trị trong không gian Hilbert, phụ thuộc góc phần tư âm từng cặp theo tọa độ thông qua sự hội

tụ đầy đủ và áp dụng các kết quả này để đưa ra các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của thống kê von Mises suy biến với dữ liệu thực độc lập từng cặp.

Kiến nghị

Trong quá trình nghiên cứu các vấn đề của luận án, chúng tôi đã nghĩ đến một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Nghiên cứu các điều kiện cho sự hội tụ đầy đủ của dãy biến ngẫu nhiên có cấu trúc phụ thuộc khác (END, WOD, ...).
- Nghiên cứu các mô hình thống kê với dữ liệu có cấu trúc phụ thuộc.

Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án

[1] Chien T.V., Hang B.K., Lien B.T.T. (2023), "Strong laws of large numbers for weighted sums of Hilbert-valued coordinatewise PNQD random variables with applications", *VNU Journal of Science: Mathematics – Physics* Vol. 39 (3), pp. 45-56.

[2] Son T.C., Cuong T.M., Hang B.K., Dung L.V. (2024), "On the Baum–Katz theorem for randomly weighted sums of negatively associated random variables with general normalizing sequences and applications in some random design regression models", *Statistical Papers* Vol. 65, pp. 1869-1900.

[3] Cuong T.M., Chien T.V., Hang B.K. (2024), "On the convergence for randomly weighted sums of Hilbert-valued coordinatewise pairwise NQD random variables", *Acta Mathematica Vietnamica* Vol. 49, pp. 265-281.

[4] Son T.C., Cuong T.M., Dung L.V., Hang B.K. (2025), "The Marcinkiewicz laws for weighted sums of heavy-tail random variables and applications to the Value-at-Risk estimators and semiparametric regression models", *Methodology and Computing in Applied Probability* Vol. 27 (74), pp. 1-32.

Tài liệu tham khảo

[1] Adler A., Rosalsky A. (1987), "Some general strong laws for weighted sums of stochastically dominated random variables", *Stochastic Analysis and Applications* Vol. 5, pp. 1-16.

[2] Ahmed S.E., Antonini R. G., Volodin A. (2002), "On the rate of complete convergence for weighted sums of arrays of Banach space valued random elements with application to moving average processes", *Statistics and Probability Letters* Vol. 58, pp. 185-194.

[3] Alf C. (1975), "Rates of convergence for the laws of large numbers for independent Banach-valued random variables", *Journal of Multivariate Analysis* Vol. 5, pp. 322-329.

[4] Alsmeyer G. (1990), "Convergence rates in the law of large numbers for martingales", *Stochastic Processes and their Applications* Vol. 36, pp. 181-194.

[5] Anh V.T.N., Hien N.T.T., Thanh L.V., Van V.T.H. (2021), "The Marcinkiewicz–Zygmund-Type strong law of large numbers with general normalizing sequences", *Journal of Theoretical Probability* Vol. 34, pp. 331-348.

[6] Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. (1999), "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance* Vol. 9 (3), pp. 203-228.

[7] Barlow R.E., Proschan F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[8] Baum L.E., Katz M. (1965), "Convergence rates in the law of large numbers", *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 120, pp. 108-123.

[9] Bernoulli J. (1713), *Ars Conjectandi*.

[10] Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. (1987), *Regular Variation*, Cambridge University Press.

[11] Bojanic R., Seneta E. (1971), "Slowly varying functions and asymptotic relations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol 34, pp. 302-315.

[12] Borel M. (1909), "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques", *Rendiconti Del Circolo Matematico Di Palermo* Vol. 27, pp. 247-271.

[13] Brunk H.D. (1948), "The strong law of large numbers", *Duke Mathematical Journal* Vol. 15, pp. 181-195.

[14] Chen P., Sung S.H. (2014), "On the strong convergence for weighted sums of negatively associated random variables", *Statistics and Probability Letters* Vol. 92, pp. 45–52.

[15] Chen P., Zhang T., Sung S.H. (2019), "Strong laws for randomly weighted sums of random variables and applications in the bootstrap and random design regression", *Statistica Sinica* Vol. 29, pp. 1739-1749.

[16] Christofides T.C., Vaggelatou E. (2004), "A connection between supermodular ordering and positive/negative association", *Journal of Multivariate Analysis* Vol. 88, pp. 138-151.

[17] Crovella M., Bestavros A. (1997), "Self-similarity in world wide web traffic: Evidence and possible causes", *IEEE/ACM Transactions on Networking* Vol. 5 (6), pp. 835-846.

[18] Cuong T.M., Chien T.V., Hang B.K. (2024), "On the convergence for randomly weighted sums of Hilbert-valued coordinatewise pairwise NQD random variables", *Acta Mathematica Vietnamica* Vol. 49, pp. 265–281.

[19] de Wet T. (1987), "Degenerate U- and V-statistics", *South African Statistical Journal* Vol. 21, pp. 99–129.

[20] Dehling H., Sharipov O.S., Wendler M. (2015), "Bootstrap for dependent Hilbert space-valued random variables with application to von Mises statistics", *Journal of Multivariate Analysis* Vol. 133C, pp. 200-215.

[21] Deng X., Wang X.J., Hu S., Hu M. (2019), "A general result on complete convergence for weighted sums of linear processes and its statistical applications", *Statistics* Vol. 53 (4), pp. 903-920.

[22] Deng X., Wang X.J., Wu Y., Ding Y. (2016), "Complete moment convergence and complete convergence for weighted sums of NSD random variables", *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A: Matemáticas* Vol. 110, pp. 97-120.

[23] Devdatt D., Desh R. (1996), "Balls and bins: A study in negative dependence", *BRICS Report Series* Vol. 3 (25).

[24] Dung L.V., Son T.C. (2021), "Complete moment convergence for m-ANA random variables and statistical applications", *Journal of Statistical Computation and Simulation* Vol. 92 (2), pp. 370-394.

[25] Dung L.V., Son T.C., Cuong T.M. (2019), "Weak laws of large numbers for weighted coordinatewise pairwise NQD random vectors in Hilbert spaces", *Journal of the Korean Mathematical Society* Vol. 56 (2), pp. 457-473.

[26] Dung L.V., Son T.C., Tu T.T. (2021), "Convergence in mean and central limit theorems for weighted sums of martingale difference random vectors with infinite rth moments", *Statistics* Vol. 55 (2), pp. 386-408.

[27] Dung L.V, Son T.C., Yen N.T.H. (2018), "Weak laws of large numbers for sequences of random variables with infinite rth moments", *Acta Mathematica Hungarica* Vol. 156, pp. 408-423.

[28] Ebrahimi N., Ghosh M. (1981), "Multivariate negative dependence", *Communications in Statistics-Theory and Methods* Vol. 10 (4), pp. 307-337.

[29] Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (1997), *Modelling Extremeal Events for Insurance and Finance*, Springer.

[30] Erdös P. (1949), "On a theorem of Hsu and Robbins", *The Annals of Mathematical Statistics* Vol. 20, pp. 286-291.

[31] Feller W. (1957), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (2nd Edition)*, John Willey.

[32] Föllmer H., Schied A. (2002), "Convex measures of risk and trading constraints", *Finance and Stochastics* Vol. 6 (4), pp. 429-447.

[33] Gan S.X. , Chen P.Y. (2008), "Some limit theorems for sequences of pairwise NQD random variables", *Acta Mathematicae Scientia (English Edition)* Vol. 28, pp. 269-281.

[34] Gerasimov M., Kruglov V., Volodin A. (2012), "On negatively associated random variables", *Lobachevskii Journal of Mathematics* Vol. 33, pp. 47-55.

[35] Gut A. (2004), "An extension of the Kolmogorov–Feller weak law of large numbers with an application to the St.Petersburg game", *Journal of Theoretical Probability* Vol. 17, pp. 769-779.

[36] Gut A. (2010), "Limit theorems for a generalized St Petersburg game", *Journal of Applied Probability* Vol. 47, pp. 752-760.

[37] Gut A. (2013), *Probability: A graduate course*, Second Edition, Springer New York, NY.

[38] Gut A., Stadtmüller U. (2011), “An intermediate Baum-Katz theorem”, *Statistics and Probability Letters* Vol. 81, pp. 1486-1492.

[39] Györfi L., Kohler M., Krzyżak A., Walk H. (2012) *A distribution-free theory of nonparametric regression*, Springer New York.

[40] Hall P., Heyde C.C. (1980), *Martingale Limit Theory and Its Application*, Academic Press, New York.

[41] Heath D., Resnick S., Samorodnitsky G. (1998), "Heavy tails and long range dependence in ON/OFF processes and associated fluid models", *Mathematics of Operations Research* Vol. 23, pp. 145-165.

[42] Heyde C.C. (1969), "A note concerning behaviour of iterated logarithm type", *Proceedings of the American Mathematical Society* Vol. 23, pp. 85-90.

[43] Heyde C.C., Rohatgi V.K. (1967), "A pair of complementary theorems on convergence rates in the law of large numbers", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* Vol. 63, pp. 73-82.

[44] Hien N.T.T., Thanh L.V., Van V.T.H. (2019), "On the negative dependence in Hilbert spaces with applications", *Applications of Mathematics* Vol. 64 (1), pp. 45-59.

[45] Hsu P.L., Robbins H. (1947), "Complete convergence and the law of large numbers", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* Vol. 33, pp. 25-31.

[46] Hu S.H. (1999), "Estimator for a semiparametric regression model", *Acta Mathematica Scientia, Series A* Vol. 19 (5), pp. 541-549.

[47] Hu S.H. (2006), "Fixed-design semiparametric regression for linear time series", *Acta Mathematica Scientia, Series B* Vol. 26 (1), pp. 74-82.

[48] Hu S., Liu X., Wang X., Li X. (2013), "Strong law of large numbers of partial sums for pairwise NQD sequences", *Journal of Mathematical Research with Applications* Vol. 33, pp. 111-116.

[49] Hu T.C., Rosalsky A., Szynal D., Volodin A. (1999), “On complete convergence for arrays of rowwise independent random elements in Banach spaces”, *Stochastic Analysis and Applications* Vol. 17, pp. 963-992.

[50] Hu T.C., Weber N.C. (1992), "On the rate of convergence in the strong law of large numbers for arrays", *Bulletin of the Australian Mathematical Society* Vol. 45, pp. 479-482.

[51] Huan N.V. (2015), "On the complete convergence for sequences of random vectors in Hilbert spaces", *Acta Mathematica Hungarica* Vol. 147, pp. 205-219.

[52] Jajte R. (2003), "On the strong law of large numbers", *The Annals of Probability* Vol. 31 (1), pp. 409-412.

[53] Jessen A.H., Mikosch T. (2006), "Regularly varying functions", *Publications de l'institut mathematiqué* Vol 80 (94), pp. 171-192.

[54] Jing B.Y., Liang H.Y. (2008), "Strong limit theorems for weighted sums of negatively associated random variables", *Journal of Theoretical Probability* Vol. 21, pp. 890-909.

[55] Joag-Dev K., Proschan K. (1983), "Negative association of random variables with applications", *Annals of Statistics* Vol. 11 (1), pp. 286-295.

[56] Khursheed A., Lai Saxena K.M. (1981), "Positive dependence in multivariate distributions", *Communications in Statistics-Theory and Methods* Vol. 10 (12), pp. 1183-1196.

[57] Ko M.H., Han K.H., Kim T.S. (2006), "Strong laws of large numbers for weighted sums of negatively dependent random variables", *Journal of the Korean Mathematical Society* Vol. 43 (6), pp. 1325-1338.

[58] Ko M.H., Kim T.S. (2005), "Almost sure convergence for weighted sums of negatively orthant dependent random variables", *Journal of the Korean Mathematical Society* Vol. 42 (5), pp. 949-957.

[59] Ko M.H., Kim T.S., Han K.H. (2009), "A note on the almost sure convergence for dependent random variables in a Hilbert space", *Journal of Theoretical Probability* Vol. 22 (2), pp. 506-513.

[60] Kolmogorov A.N. (1930), "Sur la loi forte des grandes hombres", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* Vol. 191, pp. 910-912.

[61] Kolmogorov A.N. (1950), "Foundations of the Theory of Probability", New York: Chelsea.

[62] Lanzinger H. (1998), "A Baum-Katz theorem for random variables under exponential moment conditions", *Statistics and Probability Letters* Vol. 39, pp. 89-95.

[63] Lehmann E.L. (1966), "Some concepts of dependence", *The Annals of Mathematical Statistics* Vol. 37 (5), pp. 1137-1153.

[64] Li W., Chen P., Hu T.C. (2014), "Complete convergence for moving average processes associated to heavy-tailed distributions and applications", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 420, pp. 66-76.

[65] Li D., Rosalsky A., Volodin A. (2006), "On the strong law of large numbers for sequences of pairwise negative quadrant dependent random variables", *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, New Series* Vol. 1 (2), pp. 281-305.

[66] Liang H.Y., Li D.L., Rosalsky A.(2010), "Complete moment and integral convergence for sums of negatively associated random variables", *Acta Mathematica Sinica, English Series* Vol. 26 (3), pp. 419-432.

[67] Luo Z. D., Yang S.C. (2013), "The asymptotic properties of CVaR estimator under ρ-mixing sequences", *Acta Mathematica Sinica, New Series* Vol. 56 (6), pp. 851-870.

[68] Malik H.J. (1970), "Estimation of the parameters of the pareto distribution", *Metrika* Vol. 15 (1), pp. 126-132.

[69] Mandelbrot B. (1963), "The variation of certain speculative prices", *The Journal of Business* Vol. 36, pp. 394-419.

[70] Marcinkiewicz J., Zygmund A. (1937), "Sur les fonctions inddpendantes", *Fundamenta Mathematicae* Vol. 29, pp. 60-90.

[71] Matsumoto K., Nakata T. (2013), "Limit theorems for a generalized Feller game", *Journal of Applied Probability* Vol. 50, pp. 54-63.

[72] Mausser H., Rosen D. (1998), "Beyond VaR: from measuring risk to managing risk", *Algorithms Research Quarterly* Vol. 1 (2), pp. 5-20.

[73] Mckay R., Keefer T.E. (1996), "VaR is a dangerous technique", *Corporate Financial Searching for System Sinte-gration Supplement* Vol. 9, pp. 16-30.

[74] Meng Y.J., Lin Z.Y. (2010), "Strong laws of large numbers for $\tilde{\rho}$-mixing random variables", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 365, pp. 711-717.

[75] Mikosch T., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. (2002), "Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion?", *The Annals of Applied Probability* Vol. 12, pp. 23-68.

[76] Pan G.M., Hu S.H., Fang L.B., Cheng Z.D. (2003), "Mean consistency for a semiparametric regression model", *Acta Mathematica Scientia, Series A* Vol. 23 (5), pp. 598-606.

[77] Peligrad M. (1985), "Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences", *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* Vol. 70, pp. 307-314.

[78] Peligrad M., Gut A. (1999), "Almost-sure results for a class of dependent random variables", *Journal of Theoretical Probability*, Vol. 12 (1), pp. 87-104.

[79] Pflug G.C. (2000), "Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk", *Probabilistic constrained optimization*, Springer, US, Boston, MA, pp. 272-281.

[80] Prokhorov Yu.V. (1950), "On the strong law of large numbers (Russian)", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya* Vol. 14 (6), pp. 523-536.

[81] Rockafellar R.T., Uryasev S. (2000), "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of Risk* Vol. 2 (3), pp. 21-41.

[82] Rohatgi V.K. (1968), "Convergence rates in the law of large numbers II", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* Vol. 64, pp. 485-488.

[83] Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.L. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley, Chichester.

[84] Seneta E. (1973), "An interpretation of some aspects of Karamata's theory of regular variation", *Publications de l'Institut Mathématique (Belgrade)* Vol. 15, pp. 111-119.

[85] Seneta E. (1976), *Regularly varying functions*, Springer Berlin, Heidelberg.

[86] Shao Q.M. (2000), "A comparison on maximum inequalities between negatively associated and independent random variables", *Journal of Theoretical Probability* Vol. 13, pp. 343-356.

[87] Shen A., Zhu H., Wu R., Zhang Y. (2015), "Complete convergence for weighted sums of LNQD random variables", *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes* Vol. 87 (1), pp. 160-169.

[88] Son T.C., Cuong T.M., Dung L.V. (2020), "On the almost sure convergence for sums of negatively superadditive dependent random vectors in Hilbert spaces and its application", *Communications in Statistics–Theory and Methods* Vol. 49, pp. 2770-2786.

[89] Son T.C., Cuong T.M., Dung L.V., Chien T.V. (2022), "On the convergence for weighted sums of Hilbert-valued coordinatewise pairwise NQD random variables and its application", *Communications in Statistics–Theory and Methods* Vol. 52 (3), pp. 1-17.

[90] Son T.C., Cuong T.M., Hang B.K., Dung L.V. (2024), "On the Baum–Katz theorem for randomly weighted sums of negatively associated random variables with general normalizing sequences and applications in some random design regression models", *Statistical Papers* Vol. 65 (3), pp. 1869-1900.

[91] Spitzer F. (1956), "A combinatorial lemma and its application to probability theory", *Transactions of the American Mathematical Society* Vol. 82, pp. 323-339.

[92] Stoica G. (2007), "Baum-Katz-Nagaev type results for martingales", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 336 (2), pp.1489-1492.

[93] Stoica G. (2011), "A note on the rate of convergence in the strong law of large numbers for martingales", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 381 (2), pp. 910-913.

[94] Stuck B.W. (1978), "Minimum error dispersion linear filtering of scalar symmetric stable processes", *IEEE Transaction of Automatic Control* Vol. 23, pp. 507-509.

[95] Sun H. (2005), "Mercer theorem for RKHS on noncompact sets", *Journal of Complexity* Vol. 21, pp. 337-349.

[96] Sung S.H. (2008), "A note on the complete convergence for arrays of rowwise independent random elements", *Statistics and Probability Letters* Vol. 78, pp. 1283-1289.

[97] Sung S.H. (2011), "On the strong convergence for weighted sums of random variables", *Statistical Papers* Vol. 52 (2), pp. 447-454.

[98] Sung S.H. (2011), "On the strong law of large numbers for weighted sums of random variables", *Computers and Mathematics with Applications* Vol. 62, pp. 4277-4287.

[99] Sung S.H. (2013), "Strong limit theorems for pairwise NQD random variables", *Communications in Statistics–Theory and Methods* Vol. 42, pp. 3965-3973.

[100] Sung S.H. (2013), "On the strong law of large numbers for pairwise i.i.d. random variables with general moment conditions", *Statistics and Probability Letters* Vol. 83, pp. 1963-1968.

[101] Tailen H., Randall E. (2015), *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with an Introduction to Linear Operators*, John Wiley & Sons, Ltd.

[102] Thanh L.V. (2013), "On the almost sure convergence for dependent random vectors in Hilbert spaces", *Acta Mathematica Hungarica* Vol. 139 (3), pp. 276-285.

[103] Tran L., Roussas G., Yakowitz S., Van B.T. (1996), "Fixed design regression for linear time series", *Annals of Statistics* Vol. 24 (3), pp. 975-991.

[104] Trindade A.A., Uryasev S., Shapiro A., Zrazhevsky G. (2007), "Financial prediction with constrained tail risk", *Journal of Banking & Finance* Vol. 31 (11), pp. 3524-3538.

[105] Tsybakov A. (2008), *Introduction to Nonparametric Estimation*, Springer New York.

[106] Utev S., Peligrad M. (2003), "Maximal inequalities and an invariant principle for a class of weakly dependent random variables", *Journal of Theoretical Probability* Vol. 16, pp. 101-115.

[107] Wang Z. (2011), "On strong law of large numbers for dependent random variables", *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 279754.

[108] Wang X., Ge M., Wu Y. (2019), "The asymptotic properties of the estimators in a semiparametric regression model", *Statistical Papers* Vol. 60, pp. 2087-2108.

[109] Wang X., Hu S., Volodin A.I. (2011), "Strong limit theorems for weighted sums of NOD sequence and exponential inequalities", *Bulletin of the Korean Mathematical Society* Vol. 48 (5), pp. 923-938.

[110] Wang X., Li X., Hu S., Yang W. (2011), "Strong limit theorems for weighted sums of negatively associated random variables", *Stochastic Analysis and Applications* Vol. 29, pp. 1-14.

[111] Wang X.J., Hu S.H., Yang W.Z., Shen Y. (2010), "On complete convergence for weighted sums of φ-mixing random variables", *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 372390, 13 pages.

[112] Wang X.C., Rao M.B., Yang X.Y. (1993), "Convergence rates on strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent elements", *Stochastic Analysis and Applications* Vol. 11, pp. 115-132.

[113] Wang X.J., Wu Y., Hu S.H. (2018), "Complete moment convergence for double indexed randomly weighted sums and its applications", *Statistics* Vol. 52 (3), pp. 503-518.

[114] Wang X.J., Wu Y., Hu S., Ling N. (2020), "Complete moment convergence for negatively orthant dependent random variables and its applications in statistical models", *Statistical Papers* Vol. 61 (3), 1147-1180.

[115] Wang Y.B., Yan J.G., Cheng F.Y., Cai X.Z. (2001), "On the strong stability for Jamison type weighted product sums of pairwise NQD series with different distribution", *Chinese Annals of Mathematics (Series A)* Vol 22A (6), pp. 701-706.

[116] Wu Q. (2010), "Complete convergence for negatively dependent sequences of random variables", *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 507293.

[117] Wu Y., Wang X.J. (2021), "Strong laws for weighted sums of m-extended negatively dependent random variables and its applications", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 494 (2), pp. 124566.

[118] Xing G.D., Yang S.C., Li Y.M. (2014), "Strong consistency of conditional value-at-risk estimate for φ-mixing samples", *Communications in Statistics–Theory and Methods* Vol. 43, pp. 5105-5113.

Phụ lục

Để chứng minh các kết quả của luận án, chúng tôi sẽ nhắc lại một vài kết quả xác suất đã biết.

Bổ đề A.1 ([37], Định lý 3.5.1) *(Bất đẳng thức Jensen)*
Cho X là một biến ngẫu nhiên và g là một hàm lồi. Giả sử X và $g(X)$ là khả tích, khi đó

$$g(EX) \leq Eg(X).$$

Bổ đề A.2 ([37], Định lý 3.1.1) *(Bất đẳng thức Markov)*
Cho $x > 0$. Giả sử $E|X|^p < \infty$ với $p > 0$, khi đó

$$P(|X| > x) \leq \frac{E|X|^p}{x^p}.$$

Với $\{A_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến cố tùy ý trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, xét biến cố

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Nếu $\omega \in \Omega$, khi đó, $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n \iff \omega \in \{A_n \text{ xuất hiện vô hạn lần}\}$.

Bổ đề A.3 ([37], Định lý 2.18.1) *(Bổ đề Borel-Cantelli thứ nhất)*
Cho $\{A_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến cố tùy ý, khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \implies P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Bổ đề A.4 ([37], Định lý 2.18.2) *(Bổ đề Borel-Cantelli thứ hai)*
Cho $\{A_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến cố độc lập, khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \implies P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Bổ đề A.5 ([37], Định lý 3.2.4) *(Bất đẳng thức Hölder)*
Nếu $\{a_n, n \geq 1\}, \{b_n, n \geq 1\}$ là hai dãy số thực dương và $p, q > 1$ sao cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, thì

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \ldots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$.

Bổ đề A.6 ([37], Định lý 3.2.5) *(Bất đẳng thức Lyapounov)*
Cho X là một biến ngẫu nhiên và $0 < p \leq r$. Khi đó

$$(E|X|^p)^{1/p} \leq (E|X|^r)^{1/r}.$$

Bổ đề A.7 ([37], Định lý 3.2.2) *(Bất đẳng thức C_r)*

Cho $r > 0$, X và Y là các biến ngẫu nhiên. Giả sử $E|X|^r < \infty$ và $E|Y|^r < \infty$, khi đó

$$E|X+Y|^r \le C_r(E|X|^r + E|Y|^r),$$

trong đó $C_r = 1$ khi $r \le 1$ và $C_r = 2^{r-1}$ khi $r \ge 1$.

Bổ đề A.8 ([37], Bổ đề A.6.2) *(Bổ đề Kronecker)*

Giả sử $\{x_n, n \ge 1\}$ và $\{a_n, n \ge 1\}$ là các dãy số thực, trong đó $0 < a_1 \le a_2 \le \dots$ và $a_n \nearrow +\infty$ khi $n \to \infty$. Khi đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n} \text{ hội tụ } \implies \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Định lý A.9 ([37], Định lý 6.5.2) *(Tiêu chuẩn hội tụ Kolmogorov)*

Cho $\{X_n, n \ge 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập. Khi đó,

$$\sum_{n=1}^{\infty} DX_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty}(X_n - EX_n) \text{ hội tụ hầu chắc chắn.}$$

Ngoài ra, nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} EX_n$ hội tụ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ hội tụ hầu chắc chắn.

Bổ đề A.10 ([37], Bổ đề A.3.1) *Với $0 < \beta \le 1$,*

$$\frac{n^\beta - 1}{\beta} \le \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} \le \frac{n^\beta - 1}{\beta} + n^{\beta-1} \le \frac{n^\beta}{\beta},$$

và với $\beta > 1$,

$$\frac{n^\beta}{\beta} \le \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} \le \frac{n^\beta}{\beta} + n^{\beta-1} \le \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) n^\beta.$$

Trong cả hai trường hợp,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\beta} \sum_{k=1}^{n} k^{\beta-1} = \frac{1}{\beta}.$$

Định nghĩa A.11 ([37], Định nghĩa 3.6.1) (*Biến ngẫu nhiên đối xứng*)

Cho X và X' là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng trong phân phối. Khi đó ta gọi $X^s = X - X'$ là biến ngẫu nhiên đối xứng.

Bổ đề A.12 ([37], Mệnh đề 3.6.2) *(Bất đẳng thức đối xứng yếu)*

Với mọi x và a,

$$\frac{1}{2}P(X - med(X) \ge x) \le P(X^s \ge x),$$
$$\frac{1}{2}P(|X - med(X)| \ge x) \le P(|X^s| \ge x) \le 2P(|X - a| \ge x/2).$$

Đặc biệt,

$$\frac{1}{2}P(|X - med(X)| \ge x) \le P(|X^s| \ge x) \le 2P(|X - med(X)| \ge x/2),$$

trong đó $med(X)$ là median của biến ngẫu nhiên X.

Bổ đề A.13 ([37], Định lý 3.7.1) *(Bất đẳng thức Lévy)*

Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập và* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1$. *Với mọi* x,

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n}(S_k - med(S_k - S_n)) > x\right) \leq 2P(S_n > x),$$
$$P\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k - med(S_k - S_n)| > x\right) \leq 2P(|S_n| > x).$$

Đặc biệt, trong trường hợp đối xứng,

$$P\Big(\max_{1\leq k\leq n} S_k > x\Big) \leq 2P(S_n > x),$$
$$P\Big(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| > x\Big) \leq 2P(|S_n| > x).$$

Từ bất đẳng thức Lévy, ta suy ra được kết quả sau (xem [37], Hệ quả 3.7.1): Nếu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên đối xứng, khi đó với mọi x và $1 \leq k \leq n$ ta có,

$$P\left(S_k > x\right) \leq 2P\left(S_n > x\right),$$
$$P\left(|S_k| > x\right) \leq 2P\left(|S_n| > x\right).$$

Bổ đề A.14 ([37], Mệnh đề 6.1.4) *Cho* $\{X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập, đối xứng. Đặt* $Y_n = \max\limits_{1\leq k\leq n}|X_k|$, *và* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k, n \geq 1$. *Khi đó,*

$$P(Y_n > 2x) \leq P\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k| > x\right) \leq 2P(|S_n| > x), \quad x > 0.$$

Bổ đề A.15 ([37], Bổ đề A.4.2) *Với* $n \geq 1$, *cho* $0 \leq a_n < \delta < 1$. *Khi đó*

$$(1 - a_n)^n \to 1 \text{ khi } n \to \infty \iff na_n \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Ngoài ra, với $\delta \in (0, 1)$ *cho trước,* $na_n < \delta(1 - \delta) < 1$ *với* n *đủ lớn,*

$$(1 - \delta)na_n \leq 1 - (1 - a_n)^n \leq na_n/(1 - \delta).$$

Định lý A.16 ([37], Định lý 6.3.2) *(Luật yếu số lớn Marcinkiewicz-Zygmund)*

Cho $0 < r < 2$. *Giả sử* $\{X, X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với dãy tổng riêng* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. *Giả sử* $E|X|^r < \infty$ *và* $EX = 0$ *khi* $1 \leq r < 2$. *Khi đó,*

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Định lý A.17 ([37], Định lý 6.7.1) *(Luật mạnh số lớn Marcinkiewicz-Zygmund)*

Cho $0 < r < 2$. *Giả sử* $\{X, X_n, n \geq 1\}$ *là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với dãy tổng riêng* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. *Giả sử* $E|X|^r < \infty$ *và* $EX = 0$ *khi* $1 \leq r < 2$. *Khi đó,*

$$\frac{S_n}{n^{1/r}} \xrightarrow{h.c.c.} 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Ngược lại, nếu kết quả trên đúng thì $E|X|^r < \infty$ *và* $EX = 0$ *khi* $1 \leq r < 2$.

Định lý A.18 ([37], Định lý 6.12.1) *Cho $p, r > 0, r \geq p, p < 2$. Giả sử $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với dãy tổng riêng $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geq 1$. Nếu*

$$E|X|^r < \infty \text{ và nếu } r \geq 1,\ EX = 0,$$

thì

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(r/p)-2} P\left(|S_n| > n^{1/p}\varepsilon\right) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(r/p)-2} P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > n^{1/p}\varepsilon\right) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.$$

Nếu $r > p$ ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(r/p)-2} P\left(\sup_{k\geq n} \left|S_k/k^{1/p}\right| > \varepsilon\right) < \infty \quad \text{với mọi } \varepsilon > 0.$$

Ngược lại, nếu một trong các tổng trên là hữu hạn với $\varepsilon > 0$ nào đó, thì các tổng còn lại cũng hữu hạn (với r và p thích hợp), $E|X|^r < \infty$ và nếu $r \geq 1, EX = 0$.

Kết quả dưới đây đóng vai trò quan trọng trong việc chứng minh kết quả của luận án.

Bổ đề A.19 ([90], Bổ đề 2) *Cho $\alpha \geq -1$ và $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là một hàm tăng sao cho $N = \sup_{n\geq 1} \frac{\phi(2n)}{\phi(n)} < \infty$. Nếu dãy các biến ngẫu nhiên không âm $\{Y_n, n \geq 1\}$ là một dãy không giảm thỏa mãn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(Y_n > x\phi(n)) < \infty \quad \text{với mọi} \quad x > 0, \tag{A.1}$$

thì

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n > x\phi(n)) = 0 \quad \text{với mọi} \quad x > 0. \tag{A.2}$$

Chứng minh. Rõ ràng nếu $\alpha \geq 0$ thì (A.2) đúng. Do đó xét $-1 \leq \alpha < 0$ ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} P(Y_n > x\phi(n)) &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{2^i\leq n<2^{i+1}} n^{\alpha} P(Y_n > x\phi(n)) \\
&\geq \sum_{i=0}^{\infty} P(Y_{2^i} > x\phi(2^{i+1})) \sum_{2^i\leq n<2^{i+1}} n^{\alpha} \\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty} 2^i 2^{\alpha(i+1)} P(Y_{2^i} > Nx\phi(2^i)) \\
&= 2^{\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i(\alpha+1)} P(Y_{2^i} > Nx\phi(2^i)).
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện (A.1) và $\alpha \geq -1$, ta suy ra

$$\lim_{i\to\infty} P(Y_{2^i} > x\phi(2^i)) = 0 \quad \text{với mọi} \quad x > 0.$$

Với mỗi $n \geq 1$, tồn tại $i_n \geq 1$ sao cho $2^{i_n-1} \leq n < 2^{i_n}$. Khi đó, với mọi $x > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(Y_n > x\phi(n)) &\leq \lim_{n\to\infty} P(Y_{2^{i_n}} > x\phi(2^{i_n-1})) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} P\left(Y_{2^{i_n}} > \frac{x}{N}\phi(2^{i_n})\right) \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.\end{aligned}$$

Vậy Bổ đề A.19 được chứng minh. □

Định nghĩa A.20 ([1], trang 3) (*Bị chặn ngẫu nhiên*)

Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X nếu tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho

$$P(|X_n| > x) \leq CP(|X| > x) \quad \text{với mọi } \ x \geq 0, \ n \geq 1.$$

Rõ ràng, nếu $\{X, X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối thì $\{X_n, n \geq 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X. Kết quả dưới đây là một tính chất cơ bản của dãy biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên (xem Adler và Rosalsky [1]).

Bổ đề A.21 ([1], Bổ đề 1) *Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X. Khi đó với mọi $n \geq 1$, $\alpha > 0$ và $b > 0$ ta có:*

i) $E|X_n|^\alpha I_{(|X_n|\leq b)} \leq C\Big(E|X|^\alpha I_{(|X|\leq b)} + b^\alpha P(|X| > b)\Big)$,

ii) $E|X_n|^\alpha I_{(|X_n|>b)} \leq CE|X|^\alpha I_{(|X|>b)}$.

Định nghĩa A.22 *(Một số dạng phụ thuộc của dãy biến ngẫu nhiên được nhắc tới trong luận án)*

Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Với $\mathcal{M}$ là một σ-đại số, kí hiệu $L^2(\mathcal{M})$ là lớp tất cả các biến ngẫu nhiên $\mathcal{M}$-đo được với mômen bậc hai hữu hạn.

Cho n, m là các số nguyên dương và $S, T \subset \mathbb{N}$. Kí hiệu $\mathcal{F}_n^m = \sigma\left(X_i, n \leq i \leq m\right)$, $\mathcal{F}_S = \sigma\left(X_i, i \in S \subset \mathbb{N}\right)$ và $\text{dist}(S,T) = \inf\{|s-t| : s \in S, t \in T\}$.

i) (ρ-*mixing*, [67] trang 853 và $\tilde{\rho}$-*mixing*/ρ^*-*mixing*, [74], trang 711)

Cho $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai σ-đại số trong $\mathcal{F}$, đặt

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{X\in L^2(\mathcal{A}), Y\in L^2(\mathcal{B})} \frac{|EXY - EXEY|}{\sqrt{DX.DY}}.$$

Đặt

$$\rho(n) = \sup_{k\geq 1} \rho\left(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{k+n}^\infty\right), \ n \geq 0,$$

$$\tilde{\rho}(n) = \sup\left\{\rho\left(\mathcal{F}_S, \mathcal{F}_T\right) : \ S, T \subset \mathbb{N}, \text{ sao cho } \text{dist}(S,T) \geq n\right\}, \ n \geq 0.$$

Khi đó, dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geqslant 1\}$ được gọi là ρ-mixing nếu $\rho(n) \to 0$ khi $n \to \infty$. Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là $\tilde{\rho}$-mixing nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $\tilde{\rho}(k) < 1$. (Trong một số tài liệu, $\tilde{\rho}$-mixing còn được kí hiệu là ρ^*-mixing, chẳng hạn xem [106], trang 102.)

ii) *(ψ-mixing, φ-mixing*, [111], trang 1) Cho $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ là các σ-đại số trong $\mathcal{F}$, đặt:

$$\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, P(A)P(B) > 0} \left| \frac{P(AB)}{P(A)P(B)} - 1 \right|,$$
$$\varphi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}, P(A) > 0} |P(B|A) - P(B)|.$$

Đặt

$$\psi(n) = \sup_{k \geq 1} \psi(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{k+n}^\infty), \quad \varphi(n) = \sup_{k \geq 1} \varphi(\mathcal{F}_1^k, \mathcal{F}_{k+n}^\infty), \quad n \geq 0.$$

Khi đó, dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là ψ-mixing (hoặc φ-mixing) nếu $\psi(n) \to 0$ (hoặc $\varphi(n) \to 0$) khi $n \to \infty$.

iii) *(NSD*, [16], trang 142) Hàm số $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là (siêu) cộng tính (super-additive) nếu

$$\Phi(x \vee y) + \Phi(x \wedge y) \geq \Phi(x) + \Phi(y),$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, trong đó $x \vee y = (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n), x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$, kí hiệu $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$.

Một véctơ ngẫu nhiên $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ được gọi là NSD (negatively superadditive dependent) nếu:

$$E\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq E\Phi(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*), \tag{A.3}$$

trong đó $X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*$ là độc lập, X_i^* và X_i có cùng phân phối với mỗi $1 \leq i \leq n$, và Φ là một hàm cộng tính sao cho các kỳ vọng trong (A.3) tồn tại. Một dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là NSD nếu với mọi $n \geq 1$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ là NSD.

iv) *(Hiệu martingale*, [37], Định nghĩa 10.2.6) Kí hiệu $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ là một bộ lọc (dãy tăng các σ-đại số) trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là tương thích với $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$ nếu X_n là $\mathcal{F}_n$-đo được với mọi $n \geq 1$.

Cho $\{X_n, n \geq 1\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên khả tích ($E|X_n| < \infty$) và tương thích với $\{\mathcal{F}_n, n \geq 1\}$. Khi đó, $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là một dãy hiệu martingale (martingale difference) nếu

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0 \quad \text{với mọi } n \geq 1.$$

v) *(m-ANA*, [24], trang 3) Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là ANA (asymptotic negatively associated) nếu

$$\rho^-(s) = \sup\{\rho^-(S,T); S,T \subset \mathbb{N} : \text{dist}(S,T) \geq s\} \to 0 \quad \text{khi } s \to \infty,$$

trong đó,

$$\rho^-(S,T) = 0 \vee \sup\left\{ \frac{\text{Cov}(f(X_i, i \in S), g(X_j, j \in T))}{\sqrt{D(f(X_i, i \in S))D(g(X_j, j \in T))}} : f, g \in \mathcal{C} \right\},$$

với $\mathcal{C}$ là tập hợp các hàm không giảm và kí hiệu $a \vee b = \max\{a, b\}$.

Cho m là một số nguyên dương cố định. Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là m-ANA (m-asymptotic negatively associated) nếu với mọi $n \geq 2$ và với mọi bộ chỉ số $i_1, i_2, \ldots, i_n$ thỏa mãn điều kiện khoảng cách $|i_k - i_l| \geq m$ với mọi $1 \leq k \neq l \leq n$, thì $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ là một dãy biến ngẫu nhiên ANA.

vi) *(m-END*, [117], trang 2) Một họ hữu hạn các biến ngẫu nhiên $X_1, X_2, \ldots, X_n$ được gọi là END (extended negatively dependent) nếu tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \ldots, X_n > x_n) \leq M \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i),$$
$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) \leq M \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i).$$

Một dãy vô hạn biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là END nếu mọi tập con hữu hạn của nó đều là END.

Cho $m \geq 1$ là một số nguyên cố định. Một dãy biến ngẫu nhiên $\{X_n, n \geq 1\}$ được gọi là m-END (m-extended negatively dependent) nếu với mọi $n \geq 2$ và mọi bộ chỉ số $i_1, i_2, \ldots, i_n$ thỏa mãn $|i_k - i_j| \geq m$ với mọi $1 \leq k \neq j \leq n$, ta có $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ là END.