

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Ngô Thị Thương

CÁC PHƯƠNG PHÁP QUÁN TÍNH HỮU HIỆU
GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG
VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI – 2026

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Ngô Thị Thương

CÁC PHƯƠNG PHÁP QUẢN TÍNH HỮU HIỆU
GIẢI MỘT SỐ LỚP BÀI TOÁN CÂN BẰNG
VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 9460112.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh
2. TS. Nguyễn Thế Vinh

HÀ NỘI – 2026

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan các kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của bản thân nghiên cứu sinh trong thời gian học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh và TS. Nguyễn Thế Vinh. Các kết quả trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực. Các kết quả sử dụng tham khảo đều đã được trích dẫn đầy đủ và theo đúng quy định. Những kết quả viết chung đưa vào luận án đều được sự đồng ý của các tác giả.

Hà Nội, ngày tháng năm 2026

Nghiên cứu sinh

Ngô Thị Thương

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và trân trọng nhất tới GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN) và TS. Nguyễn Thế Vinh (Trường Đại học Giao thông Vận tải), những người thầy đã trực tiếp hướng dẫn tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu. Hai thầy không chỉ định hướng khoa học tận tình, tỉ mỉ mà còn luôn dành cho tôi sự quan tâm, khích lệ và động viên quý báu. Sự nghiêm túc, tận tâm và sáng tạo trong nghiên cứu của hai thầy là tấm gương sáng để tôi học hỏi và noi theo. Tôi kính ghi công lao to lớn của hai thầy đối với sự tiến bộ của tôi trong nghiên cứu khoa học cũng như sự hoàn thiện luận án này.

Tôi xin trân trọng gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN, cùng Phòng Đào tạo, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi về học tập và nghiên cứu. Đồng thời, tôi cũng xin chân thành cảm ơn Khoa Toán – Cơ – Tin học, đặc biệt là Bộ môn Toán học Tính toán và Toán ứng dụng – ngôi nhà thứ hai của tôi trong suốt hơn 15 năm qua. Tại đây, tôi đã được đón nhận, được định hướng và dìu dắt từ những bước chập chững đầu tiên trên con đường học tập, giảng dạy và nghiên cứu khoa học. Môi trường học thuật chuyên nghiệp, năng động và cởi mở cùng với sự tận tâm chỉ bảo của các thầy, cô và sự hỗ trợ quý báu từ các đồng nghiệp đã đóng vai trò vô cùng quan trọng trong việc hình thành, phát triển tư duy khoa học cũng như trong quá trình hoàn thiện luận án này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Đề án Nâng cao năng lực đội ngũ giảng viên, cán bộ quản lý các cơ sở giáo dục đại học đáp ứng yêu cầu đổi mới căn

bản toàn diện giáo dục và đào tạo giai đoạn 2019 - 2030 (Đề án 89) của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu. Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF) đã tài trợ và hỗ trợ kinh phí trong thời gian tôi thực hiện nghiên cứu thông qua Chương trình Học bổng Thạc sĩ, Tiến sĩ trong nước với các mã số: VINIF.2022.TS126, VINIF.2023.TS124 và VINIF.2024.TS007. Quỹ VINIF, Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn (VNCDDL) được Tập đoàn Vingroup thành lập, nhiều cá nhân và tổ chức nghiên cứu đã có thêm điều kiện để tạo ra những giá trị thiết thực, góp phần vào sự phát triển bền vững của đất nước. Bên cạnh đó, tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn đến Quỹ học bổng IMU, quỹ học bổng của Liên minh Toán học Quốc tế nhằm tài trợ cho các nghiên cứu sinh trẻ thuộc các nước đang phát triển, trong đó có tôi. Sự đồng hành và hỗ trợ quý báu từ các chương trình và quỹ học bổng không chỉ mang lại những điều kiện vật chất thuận lợi cho quá trình học tập, nghiên cứu mà còn là nguồn động viên tinh thần to lớn, tiếp thêm cho tôi niềm tin, nghị lực và động lực để kiên trì theo đuổi con đường nghiên cứu khoa học.

Tiếp theo, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới các đồng nghiệp thân thiết và những người bạn nghiên cứu sinh đã luôn đồng hành cùng tôi trong suốt chặng đường học tập và nghiên cứu. Sự sẻ chia, hỗ trợ nhiệt tình cùng những cuộc trao đổi học thuật bổ ích và các buổi thảo luận đầy cảm hứng không chỉ giúp tôi mở rộng kiến thức, hoàn thiện tư duy nghiên cứu mà còn mang đến nhiều góc nhìn quý giá trong quá trình thực hiện luận án. Bên cạnh đó, sự động viên, khích lệ và tình bạn chân thành trong cuộc sống thường ngày đã trở thành nguồn động lực quan trọng, giúp tôi vượt qua những khó khăn và thêm vững tin trên con đường mình đã lựa chọn.

Cuối cùng, từ tận đáy lòng mình, tôi xin gửi lời biết ơn sâu sắc nhất tới gia đình thân yêu, đặc biệt là chồng và con gái nhỏ Tuệ Minh. Tình yêu thương, sự thấu hiểu, cảm thông và những hy sinh thầm lặng của gia đình luôn là nguồn động lực lớn lao, là chỗ dựa bình yên để tôi vững bước trên hành trình học tập và nghiên cứu. Mỗi thành quả mà tôi đạt được hôm nay đều có sự đồng hành, sẻ chia và đóng góp vô giá của những người thân yêu. Chính niềm tin, sự động viên và tình cảm thiêng liêng ấy đã tiếp thêm cho tôi sức mạnh để vượt qua những khó khăn, thử thách và kiên trì theo đuổi mục tiêu của mình đến ngày hôm nay.

Với tất cả lòng kính trọng, tôi xin được ghi nhớ và tri ân sự giúp đỡ, hỗ trợ và đồng hành của tất cả các cá nhân, tập thể để tôi có thể viết nên hành trình ý nghĩa này.

Trân trọng và biết ơn!

Hà Nội, ngày tháng năm 2026

Nghiên cứu sinh

Ngô Thị Thương

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN	i
LỜI CẢM ƠN.....	iv
MỤC LỤC.....	v
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU	vii
DANH MỤC CÁC THUẬT NGỮ ANH-VIỆT	viii
DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT	ix
DANH MỤC HÌNH VẼ.....	xii
DANH MỤC BẢNG BIỂU	xiii
MỞ ĐẦU	1
CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ.....	13
1.1. Một số công cụ của giải tích lồi và lý thuyết toán tử trong không gian Hilbert.....	13
1.1.1. Toán tử chiếu và các tính chất hình học.....	13
1.1.2. Dưới đạo hàm, nón pháp tuyến và bài toán tối ưu lồi	14
1.1.3. Toán tử đơn điệu, giả đơn điệu và các tính chất cơ bản.....	18
1.2. Bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân.....	19
1.2.1. Bài toán bất đẳng thức biến phân	19
1.2.2. Bài toán cân bằng và các bài toán liên quan	19
1.2.3. Sự tồn tại duy nhất nghiệm.....	21
1.3. Một số mô hình toán học liên quan đến bài toán cân bằng.....	25
1.3.1. Bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác	25
1.3.2. Bài toán điểm yên ngựa.....	25

CHƯƠNG 2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG	27
2.1. Phương pháp chiếu phân rã kiểu Tseng	27
2.1.1. Mô hình bài toán và các giả thiết	27
2.1.2. Xây dựng thuật toán và phân tích hội tụ	28
2.1.3. Thử nghiệm số và ứng dụng	41
2.2. Phương pháp phân rã một phép chiếu	52
2.2.1. Động lực xây dựng phương pháp phân rã một phép chiếu	52
2.2.2. Xây dựng thuật toán và phân tích hội tụ	52
2.2.3. Thử nghiệm số và so sánh	65
CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP DƯỚI ĐẠO HÀM, DƯỚI ĐẠO HÀM TĂNG CƯỜNG CHO BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG	73
3.1. Phương pháp chiếu dưới đạo hàm cho bất đẳng thức biến phân	73
3.1.1. Xây dựng thuật toán chiếu dưới đạo hàm nối lỏng	73
3.1.2. Phân tích sự hội tụ	74
3.1.3. Thử nghiệm số và ứng dụng trong khử mờ ảnh	80
3.2. Phương pháp dưới đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng	85
3.2.1. Thuật toán với cỡ bước tăng	87
3.2.2. Biến thể quán tính và xấp xỉ gắn kết	96
3.2.3. Ứng dụng cho bất đẳng thức biến phân	107
3.2.4. Thử nghiệm số và ứng dụng	109
KẾT LUẬN	117
DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ	118
TÀI LIỆU THAM KHẢO	119

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

\mathcal{H}	không gian Hilbert thực
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	tích vô hướng
$\ \cdot \ $	chuẩn sinh bởi tích vô hướng
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x
$x^k \rightarrow x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
J_λ^f	giải thức của song hàm f ứng với tham số $\lambda > 0$
U_λ^f	ánh xạ nghiệm của song hàm f ứng với tham số $\lambda > 0$
$\operatorname{argmin}\{\varphi(x) : x \in C\}$	nghiệm của bài toán cực tiểu của hàm φ trên C
$\partial\varphi(x)$	dưới vi phân của hàm φ tại x
$\operatorname{prox}_\varphi$	toán tử gần kề của hàm φ
$N_C(x)$	nón pháp tuyến của C tại x
ι_C	hàm chỉ của tập C
P_C	phép chiếu metric trên tập C
$\operatorname{Sol}(f, C)$	tập nghiệm của bài toán cân bằng
$\operatorname{Sol}(F, C)$	tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân
\square	kết thúc chứng minh

DANH MỤC CÁC THUẬT NGỮ ANH-VIỆT

Equilibrium problems	Bài toán cân bằng
Variational inequality problems	Bài toán bất đẳng thức biến phân
Proximal point method	Phương pháp điểm gần kề
Etragradient method	Phương pháp đạo hàm tăng cường
Viscosity	Xấp xỉ gắn kết

DANH MỤC CÁC CHỮ VIẾT TẮT

$EP(f, C)$	Bài toán cân bằng
$FP(T, C)$	Bài toán điểm bất động
$NCP(F, C)$	Bài toán bù phi tuyến
$SP(L, A, B)$	Bài toán điểm yên ngựa
$VIP(F, C)$	Bài toán bất đẳng thức biến phân
EGM	Phương pháp đạo hàm tăng cường
PPM	Phương pháp điểm gần kề
AISEM	Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính giải bài toán cân bằng
3-CSA	Thuật toán đạo hàm tăng cường hai bước phân rã giải bài toán cân bằng
EGA	Thuật toán đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng
EMIEgA	Thuật toán kiểu gần kề hai bước giải bài toán cân bằng
EPSM	Thuật toán đạo hàm tăng cường quán tính giải bài toán cân bằng giả đơn điệu
GPM	Thuật toán chiếu quán tính cho bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu mạnh
GRA	Thuật toán tỷ lệ vàng cho bất đẳng thức biến phân
IEM	Thuật toán đạo hàm tăng cường quán tính giải bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh
IGPM	Thuật toán chiếu dưới đạo hàm nối lỏng cho bài toán bất đẳng thức biến phân
ISEA	Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính giải bài toán cân bằng giả đơn điệu
ISEM	Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính mở rộng giải bài toán cân bằng

iTSM	Thuật toán chiếu phân rã quán tính kiểu Tseng giải bài toán cân bằng
MIEM	Thuật toán đạo hàm tăng cường quán tính cải biên với cỡ bước không đơn điệu giải bài toán cân bằng
MPA	Thuật toán chiếu cải biên giải bài toán cân bằng có ràng buộc
NAKM	Thuật toán kiểu Korpelevich giải bài toán cân bằng
NISEM	Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tăng giải bài toán cân bằng
NSAA	Thuật toán tự thích nghi giải bài toán cân bằng không có giả thiết Lipschitz
oPSM	Thuật toán phân rã một phép chiếu giải bài toán cân bằng
OSOM	Thuật toán tối ưu một bước giải bài toán cân bằng
PSA	Thuật toán chiếu dưới đạo hàm tỉ cự giải bài toán cân bằng
PSABE	Thuật toán chiếu dưới đạo hàm giải bài toán cân bằng hai cấp
PSPM	Thuật toán điểm gần kề phân rã giải bài toán cân bằng
roPSM	Thuật toán một phép chiếu phân rã hiệu chỉnh giải bài toán cân bằng
SAL	Thuật toán đạo hàm tăng cường phân rã giải bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh
SEMN	Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính với cỡ bước tăng giải bài toán cân bằng
SESM	Thuật toán phân rã kiểu dưới đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng
SGA	Thuật toán dưới đạo hàm xấp xỉ giải bài toán cân bằng
SSA	Thuật toán dưới đạo hàm phân rã giải bài toán cân bằng

TESM	Thuật toán phân rã đạo hàm tăng cường kiểu Tseng giải bài toán cân bằng
VPRGM	Thuật toán chiếu quán tính cho bài toán bất đẳng thức biến phân
VSEM	Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kiểu gắn kết với cỡ bước tăng giải bài toán cân bằng
PSNR	Tỉ số tín hiệu cực đại trên nhiễu

DANH MỤC HÌNH VẼ

2.1	So sánh hiệu suất giữa thuật toán iTSM và các thuật toán PSA, SGA, MPA và PSPM, với $x^0 = x^b$ trong Thử nghiệm 1	45
2.2	So sánh hiệu suất giữa thuật toán iTSM và các thuật toán SSA, SAL, EGA và 3-CSA, với $x^0 = x^a$ trong Thử nghiệm 2	46
2.3	So sánh hiệu suất thuật toán iTSM với các thuật toán EGA, SGA, MPA, SAL, PSA, 3-CSA, SSA và PSPM, với $x^0 = (10, 10, 10, 10, 10)^T$.	50
2.4	So sánh hiệu suất giữa thuật toán oPSM và các thuật toán MPA, PSA, PSPM và SGA, với $x^0 = x^d$ trong Thử nghiệm 3	67
2.5	So sánh hiệu suất của các thuật toán oPSM, SESM, iTSM, và TESM với $x^0 = x^h$	68
2.6	So sánh hiệu suất giữa thuật toán roPSM với các thuật toán NSAA, PSA, PSABE và SGA, với $x^0 = \frac{1}{185}(t^2 + 1) \cos t$	70
2.7	So sánh hiệu suất giữa thuật toán roPSM với các thuật toán SAL, OSOM và SSA, với $x^0 = \frac{\sin(-3t) + \cos(-10t)}{200}$	71
3.1	Ảnh gốc và ảnh mờ nhòe.	81
3.2	Sự biến thiên của PSNR của ảnh Cameraman	83
3.3	Ảnh Cameraman được khôi phục	83
3.4	Sự biến thiên của PSNR của ảnh Lena	84
3.5	Ảnh Lena được khôi phục	84
3.6	So sánh hiệu suất giữa các thuật toán NISEM và SEMNS với các thuật toán AISEM, EPSM, ISEM, NAKM và SEM, với $x^0 = x^i$	111
3.7	So sánh hiệu suất của hai thuật toán NISEM và ISEM với giá trị tham số α khác nhau	112
3.8	So sánh hiệu suất giữa thuật toán VSEM và các thuật toán EM-IEGA, MIEM, IEM, ISEA và SEM, với $x^0 = \frac{1}{255}t^4 e^{-t}$	115

DANH MỤC BẢNG

2.1	Các hằng số của hàm chi phí	42
2.2	Giá trị của x_n^{\min} , x_n^{\max}	43
2.3	Hiệu suất của các thuật toán PSA, SGA, MPA, PSPM, iTSM, SESM và TESM trong Thử nghiệm 1	45
2.4	Hiệu suất của các thuật toán SSA, SAL, EGA, 3-CSA, iTSM, SESM và TESM trong Thử nghiệm 2, Ví dụ 2.1	47
2.5	Hiệu suất của các thuật toán EGA, SGA, MPA, SAL, PSA, 3-CSA, SSA PSPM, iTSM, SESM và TESM trong Ví dụ 2.2 với các điểm khởi đầu khác nhau	51
2.6	Hiệu suất của các thuật toán MPA, PSA, PSPM, SGA và oPSM trong Thử nghiệm 3	66
2.7	Xấp xỉ nghiệm của các thuật toán NSAA, SAL, SSA và oPSM, với $x^0 = x^a$	67
2.8	Hiệu suất của các thuật toán NSAA, SAL, SSA và oPSM trong Thử nghiệm 4	68
2.9	Hiệu suất của các thuật toán oPSM, SESM, iTSM, và TESM trong Thử nghiệm 5	69
2.10	Hiệu suất của các thuật toán NSAA, PSA, PSABE, SGA và roPSM trong Thử nghiệm 6 của Ví dụ 2.4	70
2.11	Hiệu suất của các thuật toán SAL, OSOM, SSA và roPSM trong Thử nghiệm 7 của Ví dụ 2.4	71
3.1	So sánh bốn thuật toán để khôi phục lại ảnh Cameraman bị mờ.	82
3.2	So sánh bốn thuật toán để khôi phục lại ảnh Lena bị mờ.	82
3.3	Xấp xỉ nghiệm của các thuật toán AISEM, EPSM, ISEM, NAKM, SEM, NISEM và SENMS, với $x^0 = x^i$ trong Ví dụ 3.3	111
3.4	Hiệu suất của các thuật toán AISEM, EPSM, ISEM, NAKM, SEM, NISEM và SENMS trong Thử nghiệm 8 của Ví dụ 3.3	111

3.5	Hiệu suất hai thuật toán NISEM và ISEM với giá trị tham số α khác nhau	112
3.6	Hiệu suất của các thuật toán EMIEgA, MIEM, IEM, ISEA và SEM và VSEM trong Ví dụ 3.4	115

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Cân bằng (*equilibria*) được hiểu là trạng thái mà trong đó các quá trình hoặc lực lượng đối kháng đạt tới sự ổn định động, nghĩa là các tác động tương hỗ giữa chúng triệt tiêu ảnh hưởng ròn, dẫn đến hệ thống duy trì cấu hình hiện tại mà không phát sinh xu hướng biến đổi theo thời gian. Ví dụ, trong kinh tế học, cân bằng thị trường xảy ra khi lực đẩy từ phía cung và lực kéo từ phía cầu triệt tiêu lẫn nhau, khiến giá và lượng hàng hóa ổn định. Trong lĩnh vực giao thông vận tải, cân bằng có thể được quan sát khi các yếu tố làm tăng mật độ phương tiện (như giờ cao điểm) và các yếu tố làm giảm (như mở thêm làn đường hoặc phân luồng) được bù trừ, dẫn đến lưu lượng giao thông ổn định.

Các ví dụ thực tiễn cho thấy khái niệm cân bằng xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều lĩnh vực khác nhau và giữ vai trò quan trọng trong việc duy trì sự ổn định cũng như hiệu quả vận hành của các hệ thống. Từ góc độ toán học, mô hình cân bằng có thể được xem là một sự mở rộng của mô hình tối ưu hóa truyền thống sang bối cảnh có nhiều chủ thể cùng tham gia, trong đó mỗi chủ thể theo đuổi những mục tiêu riêng và có thể tồn tại sự xung đột lợi ích. Trong những trường hợp như vậy, việc tìm một phương án tối ưu chung cho tất cả các chủ thể thường không khả thi; thay vào đó, mô hình cân bằng cho phép mô tả và phân tích các tương tác này nhằm hướng tới một trạng thái thỏa hiệp hợp lý giữa các bên.

Trong khoảng 50 năm trở lại đây, một dạng tổng quát của bài toán tối ưu là bài toán cân bằng đã được quan tâm nghiên cứu nhiều bởi các nhà toán học trong và ngoài nước. Khác với bài toán tối ưu hóa, vốn gắn với việc cực tiểu hóa một hàm mục tiêu duy nhất, bài toán cân bằng được đặc trưng bởi việc giải một song hàm, phản ánh bản chất tương tác của hệ thống. Chính sự khác biệt về cấu trúc này làm cho bài toán cân bằng trở nên phong phú và có nhiều ý nghĩa trong cả lý thuyết lẫn ứng dụng. Bài toán này là sự khái quát hóa nhiều bài toán trong tối ưu và giải tích phi tuyến như *bài toán điểm bất động*, *bài toán tối ưu*, *bài toán bất đẳng thức biến phân*, *trò chơi không hợp tác*, *tối ưu đa mục tiêu*, *bài toán điểm yên ngựa*, *bài toán cân bằng mạng giao thông*, v.v...

Thuật ngữ “**bài toán cân bằng**” (*EP - Equilibrium problems*), ký hiệu $EP(f, C)$, được biết đến trong các công trình của L.D. Muu và W. Oettli [83] (1992), E. Blum và W. Oettli [17] (1994), và được phát biểu như dưới đây.

Bài toán 1 (*EP - Equilibrium problems*). Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} và $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là một song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$ (song hàm f còn được gọi là song hàm cân bằng).

Bài toán EP(f, C) được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (1)$$

Với một số trường hợp đặc biệt của song hàm f , bài toán cân bằng có thể quy về các bài toán trong tối ưu. Chẳng hạn, khi chọn $f(x, y) := g(y) - g(x)$, trong đó $g : C \rightarrow \mathbb{R}$, bài toán cân bằng EP(f, C) trở thành **bài toán tối ưu**

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } g(x^*) \leq g(y) \quad \forall y \in C.$$

Trong trường hợp $f(x, y) := \langle Fx, y - x \rangle$, với $F : C \rightarrow \mathcal{H}$ là một ánh xạ, bài toán cân bằng trở thành **bài toán bất đẳng thức biến phân** (*VIP - Variational inequality problems*), ký hiệu VIP(F, C), được phát biểu như sau:

Bài toán 2 (VIP - Variational inequality problems).

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle Fx^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (2)$$

trong đó C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} và $F : C \rightarrow \mathcal{H}$ là ánh xạ đã cho.

Trên thực tế, song hàm cân bằng đã được xét đến lần đầu tiên bởi Nikaido và Isoda [87] (1955) khi hai ông đưa ra hàm hỗ trợ để thiết lập sự tồn tại điểm cân bằng Nash của các trò chơi không hợp tác. Trong bài báo tương tự [30] (1972), K. Fan gọi bài toán (1) là bất đẳng thức minimax và thiết lập sự tồn tại nghiệm với C lồi, compact và song hàm f tựa lồi trên C . Cũng trong năm 1972, H. Brézis và các cộng sự đã mở rộng kết quả của K. Fan với sự giảm nhẹ điều kiện về tính liên tục. Sau đó kết quả tồn tại cho bài toán cân bằng được Mosco [78] chứng minh vào năm 1976. Năm 1984, L.D. Muu [82] gọi bài toán (1) là bất đẳng thức biến phân và nghiên cứu một số tính chất ổn định. Năm 1992, L.D. Muu và W. Oettli [83] gọi bài toán (1) là bài toán cân bằng, và một thuật toán phạt được đề xuất để xấp xỉ nghiệm của (1) khi f có một số tính chất đơn điệu nhất định. Các tác giả E. Blum và W. Oettli [17] (1994) đã chứng minh một định lý hợp nhất các kết quả của K. Fan và Mosco. Cho đến nay đã có nhiều dạng mở rộng đơn trị lẫn đa trị của các kết quả nêu trên. Có thể xem trong cuốn chuyên khảo của X.-Z. Yuan [118] (1999), và gần đây của G. Kassay và V. Radulescu [56] (2018), L.Q. Anh và các cộng sự [3] (2025).

Một vấn đề được quan tâm trong khoảng 30 năm trở lại đây là xây dựng các phương pháp xấp xỉ nghiệm bài toán cân bằng. Vấn đề này đã được nghiên cứu đầu tiên vào năm 1992 bởi công trình của L.D. Muu và W. Oettli [83], sau đó là các kết quả của A.S. Antipin [12] (1995), A. Moudafi [79], A.N. Iusem và W. Sosa [53], P.L. Combettes và S.A. Hirstoaga [24], vv. **Phương pháp điểm gần kề** (*PPM - Proximal Point Method*) được nghiên cứu trong các bài báo [24, 53, 79, 103] xây dựng một dãy nghiệm bằng cách giải trên mỗi vòng lặp một

bài toán cân bằng hiệu chỉnh. Tại bước lặp k , giả sử đã biết x^k , xấp xỉ tiếp theo được xác định bởi

$$x^{k+1} = J_\lambda^f(x^k),$$

trong đó

$$J_\lambda^f(x) = \{z \in C : \lambda f(z, y) + \langle z - x, y - z \rangle \geq 0, \forall y \in C\}, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (3)$$

ở đây J_λ^f là *giải thức* của song hàm f ứng với tham số $\lambda > 0$. Với giả thiết f đơn điệu, lồi và nửa liên tục dưới theo biến thứ hai, hemi-liên tục trên theo biến thứ nhất, ánh xạ J_λ^f là *đơn trị* và *không giãn*. Tuy nhiên, nếu f chỉ *giả đơn điệu* (một lớp rộng hơn của *đơn điệu*), thì bài toán cân bằng hiệu chỉnh trong công thức (3) không còn *đơn điệu mạnh*, và hệ quả là ánh xạ J_λ^f nói chung không còn đơn trị. Điều này khiến phương pháp PPM không thể áp dụng trực tiếp. Hơn nữa, việc phải giải một bài toán cân bằng phụ ở mỗi vòng lặp làm tăng đáng kể khối lượng tính toán của thuật toán. G. Mastroeni [76] đã mở ra một hướng tiếp cận khác nhằm khắc phục nhược điểm của phương pháp PPM đó là sử dụng *phép chiếu tổng quát*. Tại bước lặp thứ k , giả sử biết x^k , ta tính xấp xỉ tiếp theo $x^{k+1} = U_\lambda^f(x^k)$, trong đó, U_λ^f là *ánh xạ nghiệm* của song hàm f với tham số $\lambda > 0$, được cho bởi

$$U_\lambda^f(x) = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right\}. \quad (4)$$

Với giả thiết song hàm f lồi, nửa liên tục dưới theo biến thứ hai, bài toán tối ưu trong công thức (4) là *lồi mạnh*, và do đó, U_λ^f đơn trị. Hơn nữa, việc tính U_λ^f đơn giản hơn rất nhiều so với tính J_λ^f . Nếu song hàm f đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo Mastroeni, dãy lặp sinh bởi thuật toán sử dụng phép chiếu tổng quát hội tụ mạnh tới nghiệm của bài toán cân bằng. Theo hướng tiếp cận này, để giảm nhẹ giả thiết đặt lên song hàm f , tác giả T.D. Quoc và các cộng sự [93] (2008) đã đề xuất **phương pháp đạo hàm tăng cường** (*EGM - Extragradient Method*) như sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y^k = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(x^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 \right\}, \\ x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 \right\}. \end{cases} \quad (5)$$

Với giả thiết song hàm f *giả đơn điệu* và thỏa mãn *điều kiện kiểu Lipschitz theo nghĩa Mastroeni* với các hằng số Lipschitz c_1, c_2 , $0 < \lambda < \min \left\{ \frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2} \right\}$, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán (5) *hội tụ yếu* tới một nghiệm của bài toán EP(f, C). Phương pháp EGM được tổng quát hóa từ phương pháp tương ứng cho bài toán điểm yên ngựa [62]. Sau đó, phương pháp đạo hàm tăng cường (5) đã được phát triển

và mở rộng bởi nhiều tác giả trong và ngoài nước, có thể xem trong các bài báo [26, 27, 38, 39, 66, 92, 101, 112, 114] và gần đây nhất trong cuốn chuyên khảo của G. Bigi và các cộng sự [16] (2018) và các tài liệu tham chiếu trong đó. Một hạn chế đáng chú ý của phương pháp EGM nằm ở chỗ độ dài bước cần phải được lựa chọn dựa trên các hằng số kiểu Lipschitz của song hàm. Trong thực tiễn, các hằng số này thường khó xác định, hoặc thậm chí không thể ước lượng chính xác, dẫn đến việc làm giảm tính khả thi và khả năng áp dụng rộng rãi của phương pháp.

Gần đây, nhằm cải thiện tốc độ hội tụ của các phương pháp lặp, *kỹ thuật quán tính* đã được đưa vào sử dụng. Kỹ thuật này được khởi xướng bởi F. Alvarez và H. Attouch [2], dựa trên mô hình động lực bậc hai mô phỏng chuyển động của “*một quả cầu nặng chịu tác dụng của ma sát*”. Từ đó, kỹ thuật quán tính đã được áp dụng rộng rãi để tăng tốc độ hội tụ của nhiều thuật toán lặp khác nhau [2, 65]. Một trong những kết quả đáng chú ý nhất là **phương pháp lặp Mann quán tính** do P.E. Maingé [68] đề xuất cho bài toán tìm điểm bất động của các ánh xạ tựa không giãn. Tiếp nối hướng tiếp cận này, một số tác giả như D.V. Hieu [40], H.u. Rehman và cộng sự [94, 95], N.T. Vinh và L.D. Muu [112] đã kết hợp kỹ thuật quán tính với phương pháp EGM và đề xuất các **thuật toán đạo hàm tăng cường quán tính** cho bài toán cân bằng như dưới đây:

$$\begin{cases} x^0, x^1 \in C, \\ w^k = x^k + \alpha_k (x^k - x^{k-1}), \\ y^k = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}, \\ x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}. \end{cases} \quad (6)$$

Tuy nhiên, các thuật toán này thường yêu cầu cỡ bước phải *phụ thuộc vào hằng số Lipschitz* hoặc *giảm dần về 0* theo thời gian lặp, điều này có thể làm giảm đáng kể hiệu quả tính toán trong thực tế nếu giá trị cỡ bước trở nên quá nhỏ. Ngoài ra, để đạt được sự hội tụ mạnh, người ta cần một số kỹ thuật bổ sung, chẳng hạn như *kỹ thuật hiệu chỉnh*, *kỹ thuật xấp xỉ gắn kết (viscosity)*, *kỹ thuật gắn kết-lai ghép*, *kỹ thuật thu hẹp* (xem [44, 101, 114] và các tài liệu tham chiếu tương ứng). Một hướng tiếp cận khác là sử dụng *dưới vi phân*, *dưới vi phân xấp xỉ* của song hàm f . Theo hướng này, lớp các **thuật toán dưới đạo hàm** đã được đề xuất bởi các tác giả như H.Iiduka [51], P.S.M. Santos [96], P.N. Anh [10], D.V. Hieu [106], vv...

Đặc điểm chung của các *phương pháp giải xấp xỉ* nghiệm bài toán cân bằng là chúng sinh ra một dãy lặp hội tụ mạnh hoặc yếu tới nghiệm của bài toán. Nói chung, tại mỗi bước lặp của thuật toán, ta cần giải các bài toán phụ. Chi phí tính toán để giải các bài toán phụ này là một trong những yếu tố chính ảnh hưởng đến tính hiệu quả và tốc độ hội tụ của thuật toán. Một trong những ý tưởng để giảm chi phí tính toán cho các bài toán phụ là *phân rã* song hàm f ban đầu thành tổng của hai hoặc nhiều song hàm thành phần. Khi đó, thay vì xử lý

song hàm f , ta chỉ cần làm việc với từng song hàm thành phần. Ý tưởng này đặc biệt hữu hiệu khi song hàm f có dạng phức tạp, trong khi các song hàm thành phần có các dạng đơn giản hơn hoặc có dạng đặc biệt. **Phương pháp phân rã** đã được áp dụng rộng rãi cho các bài toán tối ưu và bất đẳng thức biến phân [14, 50] và thu được các kết quả rất đáng khích lệ. Trong trường hợp bài toán cân bằng, các kết quả thu được của phương pháp này đã có những tín hiệu khởi sắc. Năm 2009, để giải bài toán cân bằng $EP(f, C)$ với $f = f_1 + f_2$, Moudafi [80] đã đề xuất **thuật toán điểm gần kề phân rã giải bài toán cân bằng** sau:

Thuật toán 1 (Thuật toán điểm gần kề phân rã)

Khởi tạo: Chọn dãy tham số $\{r_k\} \subset (0, \infty)$ và chọn tùy ý $x^0 \in C$.

Bước lặp:

Bước 1: Cho x^k , tính y^k và z^k bởi

$$\begin{aligned} r_k f_1(y^k, y) + \langle y^k - x^k, y - y^k \rangle &\geq 0 \quad \forall y \in C, \\ r_k f_2(z^k, y) + \langle z^k - x^k, y - z^k \rangle &\geq 0 \quad \forall y \in C. \end{aligned}$$

Bước 2: Tính x^{k+1} bởi

$$x^{k+1} = \frac{y^k + z^k}{2}.$$

Sự *hội tụ yếu* của dãy ergodic $\left\{ \bar{x}^k = \frac{\sum_{i=1}^k r_i x^i}{\sum_{i=1}^k r_i} \right\}$ sinh bởi Thuật toán 1 được đảm

bảo với giả thiết song hàm f *đơn điệu* và *lồi*, *nửa liên tục* theo *biến thứ hai*. Dựa trên mối liên hệ giữa bài toán cân bằng đơn điệu và bài toán bao hàm đơn điệu trong không gian Hilbert, Briceño-Arias [19] (xem thêm [18] cho một cách tiếp cận khác) đã kết hợp *phương pháp phân rã* và *kỹ thuật Douglas-Rachford* [63, 102] để thiết kế **thuật toán phân rã kiểu Douglas-Rachford**, *hội tụ yếu* (*không ergodic*) cho bài toán (1) như sau:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathcal{H}, \\ y^k = J_{f_2}(x^k) + b^k, \\ z^k = J_{f_1}(2y^k - x^k) + a^k, \\ x^{k+1} = x^k + \lambda_k(z^k - y^k), \end{cases} \quad (7)$$

trong đó $\{a^k\}$ và $\{b^k\}$ là các sai số phát sinh khi tính các toán tử giải Moreau J_{f_1} và J_{f_2} . Mặc dù phương pháp này có ưu điểm là không yêu cầu tính với song hàm tổng, nhưng trên thực tế việc xác định chính xác các toán tử J_{f_1} và J_{f_2} thường khá phức tạp, nên khả năng áp dụng thuật toán này còn bị hạn chế. Để vượt qua những hạn chế của thuật toán nêu trên, một số tác giả (xem [5, 33]) đã kết hợp *phương pháp phân rã* với *phương pháp đạo hàm tăng cường*, từ đó

xây dựng các **thuật toán kiểu đạo hàm tăng cường phân rã** nhằm giải các bài toán cân bằng giả đơn điệu và giả đơn điệu mạnh. Với các thuật toán này, thay vì phải giải một bài toán cân bằng hiệu chỉnh tại mỗi vòng lặp (như trong phương pháp điểm gần kề), ta chỉ cần giải các bài toán tối ưu lồi mạnh của các song hàm thành phần, vốn đơn giản hơn đáng kể về mặt tính toán. Tuy nhiên, tính hội tụ của các phương pháp trong [5, 33] được thiết lập dưới một giả thiết khá mạnh, đó là điều kiện *liên tục Hölder* của song hàm. Điều này phần nào hạn chế phạm vi áp dụng của thuật toán trong thực tế. Theo hướng tiếp cận sử dụng phương pháp dưới đạo hàm, nhóm tác giả P.M. Duc và L.X. Thanh [29] đã đề xuất **phương pháp dưới đạo hàm phân rã** sau đây:

Thuật toán 2 (Thuật toán dưới đạo hàm phân rã)

Khởi tạo: Chọn một dãy dương $\{\beta_k\}$ thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty.$$

Chọn $x^0 \in C$, và đặt $k := 0$.

Bước lặp: Cho x^k , lấy $g_1^k \in \partial_2 f_1(x^k, x^k)$, $g_2^k \in \partial_2 f_2(x^k, x^k)$ ($k \geq 0$). Tính

$$\begin{aligned} \eta_k &= \max\{\beta_k, \|g_1^k\|, \|g_2^k\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}, \\ y^k &= \operatorname{argmin} \left\{ \lambda_k f_1(x^k, y) + \frac{1}{2} \|y - x^k\|^2 : y \in C \right\}, \\ x^{k+1} &= \operatorname{argmin} \left\{ \lambda_k f_2(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - y^k\|^2 : y \in C \right\}. \end{aligned}$$

Lưu ý rằng, thuật toán dưới đạo hàm phân rã đạt được *hội tụ yếu* khi song hàm f thỏa điều kiện *đơn điệu* và *para-đơn điệu*. Tuy nhiên cũng phải lưu ý rằng việc giải các bài toán quy hoạch lồi mạnh có thể cũng phải trả chi phí đắt nếu các hàm có cấu trúc phức tạp. Chú ý đến điều này, trong [42] các tác giả đã đề xuất **phương pháp phân rã kiểu chiếu song song** giải bài toán (1). Tuy nhiên trong bài báo [42], các tác giả vẫn chưa thiết lập được dạng tuần tự của phương pháp và để lại dưới dạng bài toán mở. Chúng tôi thấy rằng, cho đến nay các phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng cũng chưa có thuật toán nào kết hợp yếu tố quán tính nhằm tăng tốc thuật toán. Từ những hạn chế của các phương pháp hiện có, cụ thể: phương pháp PPM gặp khó khăn trong việc giải bài toán phụ; phương pháp EGM đòi hỏi hằng số Lipschitz khó ước lượng; các phương pháp quán tính thường yêu cầu cỡ bước giảm dần về 0; và các phương pháp phân rã cần giả thiết Hölder quá chặt, đã nảy sinh vấn đề sau:

Vấn đề thứ nhất là đề xuất, nghiên cứu và cải tiến các phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng, với mục tiêu không chỉ đạt được sự hội tụ mạnh mà

còn nâng cao hiệu quả tính toán. Đặc biệt, việc kết hợp yếu tố quán tính vào phương pháp phân rã được xem như một hướng tiếp cận mới, cho phép vừa khai thác hiệu quả cấu trúc đặc biệt của song hàm thành phần, vừa gia tăng hiệu quả tính toán thông qua việc tận dụng thông tin từ các bước lặp trước đó, đồng thời có thể kết hợp với các kỹ thuật hiệu chỉnh, xấp xỉ gắn kết và một phép chiếu.

Ngoài ra, cỡ bước của các thuật toán lặp cũng là một trong những yếu tố ảnh hưởng đến tốc độ và hiệu quả của thuật toán. Gần đây, các tác giả trong các bài báo [28, 38, 39] đã đề xuất các thuật toán xấp xỉ nghiệm bài toán cân bằng với song hàm f giả đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz. Điều đáng chú ý ở những thuật toán này là sự phụ thuộc vào các hằng số Lipschitz của cỡ bước, tuy nhiên, việc tìm các hằng số Lipschitz c_1, c_2 không phải lúc nào cũng dễ thực hiện, do đó hạn chế phạm vi ứng dụng của thuật toán. Để không phải sử dụng hằng số Lipschitz, Yang và Liu [117] đã đề xuất **thuật toán kiểu dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tự thích nghi** như sau:

Thuật toán 3 (Thuật toán kiểu dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tự thích nghi)

Bước 0. Chọn $\lambda_0 > 0, x^0 \in \mathcal{H}, \mu \in (0, 1)$.

Bước 1. Từ xấp xỉ hiện tại x^k , tính

$$y^k = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda_k f(x^k, y) + \frac{1}{2} \|x^k - y\|^2, y \in C \right\} = \operatorname{prox}_{\lambda_k f(x^k, \cdot)}(x^k).$$

Bước 2. Chọn $w^k \in \partial(f(x^k, \cdot))(y^k)$ sao cho $x^k - \lambda_k w^k - y^k \in N_C(y^k)$, tính

$$z^k = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|x^k - y\|^2, y \in T_k \right\},$$

trong đó, $T_k = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle x^k - \lambda_k w^k - y^k, v - y^k \rangle \leq 0\}$.

Bước 3. Tính $t^k = \alpha_k x^0 + (1 - \alpha_k) z^k, x^{k+1} = \beta_k z^k + (1 - \beta_k) S t^k$, với ánh xạ $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ và

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\mu(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2(f(x^k, z^k) - f(x^k, y^k) - f(y^k, z^k))}, \lambda_k \right\}, & \text{nếu } f(x^k, z^k) - f(x^k, y^k) - f(y^k, z^k) > 0, \\ \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Cập nhật $k := k + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Có thể thấy rằng, dãy cỡ bước $\{\lambda_k\}$ được xác định như trên đơn điệu giảm. Cỡ bước nhỏ thì khối lượng tính toán lớn, nên việc tính toán có thể tốn kém và mất nhiều thời gian. Hơn nữa, phương pháp chiếu kiểu tìm kiếm theo tia (xem [26, 113]) thường có cỡ bước giảm dần về 0, điều này khiến thuật toán hội tụ khá chậm với số lần lặp lớn. Những nhận xét này dẫn đến câu hỏi liệu có thể thiết kế thuật toán hiệu quả với cỡ bước tăng hay không. Đến đây chúng tôi đặt

ra một vấn đề mới cần giải quyết như sau:

Vấn đề thứ hai hướng tới việc xây dựng các phương pháp đạo hàm tăng cường với chiến lược điều chỉnh cỡ bước tự thích nghi, trong đó cỡ bước có thể được gia tăng một cách có kiểm soát sau một số lần lặp nhằm cải thiện hiệu quả tính toán và giúp thuật toán thoát khỏi các vùng hội tụ chậm. Việc gia tăng cỡ bước này không có nghĩa tăng vô hạn gây phân kỳ, mà được thiết kế dựa trên các điều kiện thích hợp để vẫn đảm bảo tính ổn định và hội tụ của phương pháp.

Lĩnh vực nghiên cứu của đề tài là tối ưu tính toán và ứng dụng. Như chúng ta đều biết, lý thuyết tối ưu được ứng dụng rộng rãi trong rất nhiều bài toán thực tế của kinh tế và kỹ thuật như xử lý ảnh, khôi phục tín hiệu, cân bằng Nash, kỹ thuật điện tử, vv... Một ví dụ quen thuộc sử dụng công cụ tối ưu là bài toán LASSO, bài toán này được sử dụng rộng rãi trong thống kê và khôi phục hình ảnh, tín hiệu thưa và có thể giải bằng các thuật toán chiếu cho bất đẳng thức biến phân thu được từ bài toán tối ưu có ràng buộc sau:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Bx - y\|^2, \quad (8)$$

với điều kiện $\|x\|_1 \leq t$,

với $t > 0$ nào đó, $\|\cdot\|_1$ là chuẩn 1, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ là các vectơ và $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là ma trận tuyến tính.

Lý thuyết bài toán bất đẳng thức biến phân đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực như quy hoạch toán học, nghiên cứu mạng giao thông, lý thuyết trò chơi, học máy, vv... và đã trở thành một lĩnh vực nghiên cứu quan trọng trong vòng 60 năm trở lại đây (xem Ansari [11], Kinderlehrer và Stampacchia [60], Konnov [61]). Năm 1966, Hartman và Stampacchia [34] đã công bố những nghiên cứu đầu tiên của mình về bài toán bất đẳng thức biến phân, liên quan đến việc giải các bài toán biến phân, bài toán điều khiển tối ưu và các bài toán biên trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng.

Vấn đề quan tâm trước hết là sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Khi C compact và F liên tục thì sự tồn tại nghiệm của bài toán VIP(F, C) là hệ quả của định lý điểm bất động Schauder. Nếu C compact và F là giả đơn điệu và hemi-liên tục thì sự tồn tại nghiệm của VIP(F, C) được thiết lập bằng kỹ thuật KKM.

Một trong những vấn đề thú vị và quan trọng nhất trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân là nghiên cứu các thuật toán lặp hữu hiệu để tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán. Nhiều thuật toán lặp đã được đề xuất để giải bất đẳng thức biến phân trong cả không gian hữu hạn chiều và vô hạn chiều, chẳng hạn xem trong [54, 59, 61, 62, 71, 72, 73, 75] và các tài liệu tham khảo liên quan.

Phương pháp chiếu được biết đến như là một trong những phương pháp đơn giản và hiệu quả nhất để giải bài toán bất đẳng thức biến phân. Ý tưởng chính của phương pháp này xuất phát từ mối liên hệ sau: x^* là nghiệm của bài toán VI(F, C) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ $\Phi(x) := P_C(x - \lambda Fx)$ với $\lambda > 0$. Do đó, ta có thể sử dụng phương pháp lặp để giải bài toán (2), với

dãy lặp được xác định theo công thức sau:

$$x^{k+1} = \Phi(x^k). \quad (9)$$

Dãy lặp (9) sẽ hội tụ tới điểm bất động của Φ nếu nó là ánh xạ co trên C . Để đảm bảo tính co của Φ , đòi hỏi tính *đơn điệu mạnh* (hoặc *đơn điệu mạnh ngược*) và *liên tục Lipschitz* của ánh xạ F .

Trong trường hợp F không liên tục Lipschitz, thuật toán (9) đã được cải tiến trong [96] như sau:

- Chọn $x^0 \in C$, $\{\alpha_k\} \subset (0, \infty)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$.
- Tại bước lặp k , có x^k . Kiểm tra điều kiện $Fx^k = 0$. Nếu điều kiện này thỏa mãn, ta dừng thuật toán. Trong trường hợp ngược lại, tính x^{k+1} theo công thức sau đây:

$$\begin{cases} \lambda_k = \frac{\alpha_k}{\max\{1, \|Fx^k\|\}} \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda_k Fx^k) \end{cases}. \quad (10)$$

Điểm khác biệt lớn nhất ở đây là thuật toán (10) sử dụng thông tin (kết quả) của vòng lặp trước để xác định độ dài bước cho vòng lặp tiếp theo. Ta gọi các thuật toán kiểu như vậy là với độ dài bước *tự thích nghi*. Hiển nhiên, nếu thuật toán dừng ở bước k , x^k chính là nghiệm cần tìm. Trong trường hợp ngược lại, thuật toán trên sinh ra một dãy vô hạn $\{x^k\}$ hội tụ tới nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(F, C).

Trong trường hợp F *đơn điệu* và *liên tục Lipschitz*, phương pháp sử dụng một lần chiếu có thể không hội tụ tới nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Trong một kết quả gần đây, Malitsky [73] đã kết hợp *phương pháp sử dụng một lần chiếu* với *phép phản xạ* để thu được **phương pháp chiếu phản xạ**. Để giảm nhẹ giả thiết về tính đơn điệu mạnh, Korpelevich [62] đề xuất **phương pháp đạo hàm tăng cường**, trong đó tại mỗi bước lặp thuật toán đòi hỏi thêm một phép chiếu lên tập ràng buộc, tức là

$$\begin{cases} y^k = P_C(x^k - \lambda Fx^k) \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda Fy^k) \end{cases}. \quad (11)$$

Thuật toán (11) hội tụ với điều kiện ánh xạ F giả đơn điệu và L -liên tục Lipschitz trên C và $\lambda \in (0, \frac{1}{L})$. Tuy nhiên, trong thuật toán (11), tại mỗi bước lặp, ta phải tính giá trị của ánh xạ F hai lần. Điều này có thể ảnh hưởng tới hiệu quả tính toán của thuật toán nếu ánh xạ F có dạng phức tạp. Để khắc phục điều này, L. Popov đã đề xuất thuật toán trong [91], tại mỗi bước lặp, giá trị của ánh xạ F chỉ phải tính một lần. Một phiên bản cải tiến khác của phương pháp chiếu Kopelevich có thể kể đến đó là **phương pháp chiếu dưới đạo hàm tăng cường** được giới thiệu bởi Y. Censor và cộng sự [23].

Nhìn chung, cho đến nay các kết quả đã công bố còn nhiều hạn chế như khối lượng tính toán lớn, chiếu hai lần trên tập ràng buộc, tính giá trị của toán tử hai lần trên mỗi phép lặp đã dẫn đến khối lượng tính toán và thời gian tính toán rất lớn, ảnh hưởng nghiêm trọng đến tính hiệu quả của thuật toán. Do vậy, một vấn đề cần được nghiên cứu hiện nay là nếu sử dụng phương pháp chiếu để giải bài toán bất đẳng thức biến phân thì cần thiết kể sao cho thuật toán mới chỉ cần chiếu một lần lên tập ràng buộc, tính giá trị của toán tử một lần trong mỗi phép lặp và cỡ bước được chọn theo cách tự thích nghi.

Ở Việt Nam, bài toán bất đẳng thức biến phân đã được nghiên cứu mạnh trong vài năm gần đây. Các chuyên gia trong lĩnh vực này như Phạm Kỳ Anh [4, 7, 8], Phạm Ngọc Anh [9, 10, 92, 110], Nguyễn Bường [20], Bùi Văn Định [26], Trịnh Ngọc Hải [5, 6, 33, 109], Đặng Văn Hiếu [41, 45, 106, 107], Phạm Duy Khánh [57, 58], Lê Dũng Mưu [4, 41], Dương Việt Thông [45, 106, 107], Nguyễn Thế Vinh [7, 8], Phan Tự Vượng [58], vv..., đã có nhiều đóng góp quan trọng với một số công bố gần đây trên các tạp chí quốc tế uy tín. Tuy nhiên, các kết quả nghiên cứu trong nước về vấn đề này chưa nhiều và các kết quả thu được còn một số hạn chế như tính nhiều phép chiếu trên mỗi bước lặp, cỡ bước phụ thuộc vào hằng số Lipschitz, các điều kiện đặt lên toán tử còn khá chặt, vv...

Chú ý rằng, trong nhiều ứng dụng thực tế, tập chấp nhận được thường có dạng tập mức dưới của một hàm lồi, tức là

$$C = \{x \in \mathcal{H} : c(x) \leq 0\},$$

với c là một hàm lồi, không nhất thiết khả vi. Chẳng hạn, trong bài toán LASSO, hàm $c(x) = \|x\|_1 - \tau$ với $\tau > 0$ là một ví dụ điển hình thỏa mãn cấu trúc trên. Gần đây, một số công trình như [21, 36, 37] đã đề xuất các thuật toán chiếu nổi lờng để giải bài toán bất đẳng thức biến phân (2), dựa trên phương pháp đạo hàm tăng cường [23] và phương pháp chiếu co [35]. Tuy nhiên, các kết quả hội tụ của những phương pháp này đều yêu cầu hàm c phải lồi, khả vi liên tục và có đạo hàm thỏa mãn điều kiện Lipschitz - một giả thiết khá chặt, làm hạn chế khả năng áp dụng trong các mô hình thực tế.

Trên cơ sở cùng hướng tới mục tiêu tăng hiệu quả tính toán thông qua việc giảm chi phí mỗi bước lặp và đồng thời cải thiện tốc độ hội tụ, các vấn đề thứ nhất và thứ hai lần lượt tập trung vào việc khai thác cấu trúc bài toán cũng như chiến lược điều chỉnh động các tham số thuật toán. Tiếp nối mạch nghiên cứu này, **vấn đề thứ ba tập trung vào việc nghiên cứu và đề xuất thuật toán chiếu dưới đạo hàm dạng nổi lờng nhằm giải bài toán bất đẳng thức biến phân**, với mục tiêu tiếp tục giảm gánh nặng tính toán tại mỗi bước lặp nhưng vẫn đảm bảo tính ổn định và hội tụ của thuật toán. Các thuật toán được đề xuất không chỉ có ý nghĩa lý thuyết mà còn được *ứng dụng vào bài toán khôi phục ảnh*, qua đó minh họa rõ ràng hiệu quả tính toán và tính khả thi của phương pháp trong các bài toán thực tiễn có quy mô lớn.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu của luận án là nghiên cứu và đề xuất một số phương pháp hữu hiệu giải bài toán cân bằng và bất đẳng thức biến phân. Cụ thể như sau:

- Đề xuất và xây dựng các thuật toán chiếu phân rã mới giải bài toán cân bằng, trên cơ sở kết hợp kỹ thuật kiểu Tseng với các kỹ thuật hiệu chỉnh, quán tính và xấp xỉ gắn kết, cho phép xử lý bài toán cân bằng giả đơn điệu trong không gian Hilbert dưới các điều kiện yếu hơn, không đòi hỏi hằng số Lipschitz, chỉ sử dụng một phép chiếu đồng thời đảm bảo hội tụ mạnh và cải thiện tốc độ hội tụ của thuật toán.
- Xây dựng thuật toán dưới đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng với cơ chế cỡ bước tự thích nghi, trong đó cỡ bước có thể được gia tăng có kiểm soát nhằm thoát khỏi vùng hội tụ chậm, đồng thời vẫn được điều chỉnh để đảm bảo tính ổn định và hội tụ của thuật toán.
- Phát triển các thuật toán chiếu nối lỏng dựa trên dưới đạo hàm nhằm giải bài toán bất đẳng thức biến phân với tập ràng buộc được biểu diễn dưới dạng tập mức dưới của một hàm lồi, cho phép xử lý hiệu quả các ràng buộc lồi không khả vi. Các thuật toán đề xuất được ứng dụng vào bài toán khôi phục ảnh, qua đó tối ưu hóa hiệu quả tính toán trong các mô hình thực tiễn như LASSO.

Tất cả các thuật toán được đề xuất trong luận án đều được chứng minh là hội tụ yếu hoặc mạnh. Chúng tôi cũng thực hiện thử nghiệm số để đánh giá hiệu quả của các thuật toán mới, so sánh chúng với những thuật toán đã có, đồng thời áp dụng chúng vào một số mô hình rút ra từ các bài toán thực tế.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu: Các phương pháp tối ưu hóa; các thuật toán cải tiến dựa trên sự kết hợp các phương pháp kinh điển để giải bài toán cân bằng và bất đẳng thức biến phân.

Phạm vi nghiên cứu: Bài toán cân bằng $EP(f, C)$ và bài toán bất đẳng thức biến phân $VIP(F, C)$ trên không gian Hilbert.

4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu là sử dụng các kết quả cơ bản của giải tích lồi, các thuật toán tối ưu, thuật toán phân rã, thuật toán chiếu kết hợp với kỹ thuật hiệu chỉnh, quán tính và xấp xỉ gắn kết để xây dựng các thuật toán mới hữu hiệu giải bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân.

5. Cấu trúc và kết quả của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục các công trình đã công bố của tác giả có liên quan đến luận án và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 3 chương. Các kết quả chính được tập trung trong các Chương 2 và Chương 3.

Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị và kết quả bổ trợ được sử dụng trong luận án. Cụ thể, chương này nhắc lại một số công cụ của giải tích lồi và lý thuyết toán tử trong không gian Hilbert, sau đó trình bày về bài toán

cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và các bài toán liên quan, và cuối cùng trình bày về một số mô hình toán học liên quan đến bài toán cân bằng.

Chương 2 đề xuất một số phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng. Chúng tôi đề xuất các thuật toán chiếu phân rã kiểu Tseng và thuật toán phân rã một phép chiếu để xấp xỉ nghiệm của bài toán cân bằng $EP(f, C)$. Đối với mỗi thuật toán đề xuất, chúng tôi đều đưa ra một số ví dụ thử nghiệm số để minh họa hiệu quả thực nghiệm của thuật toán, đồng thời, tiến hành so sánh hiệu suất giữa các thuật toán đề xuất với một số thuật toán đã có.

Chương 3, ở phần đầu, chúng tôi giới thiệu phương pháp chiếu dưới đạo hàm cho bất đẳng thức biến phân và trình bày ứng dụng trong khử mờ ảnh. Trong phần tiếp theo, chúng tôi đưa ra thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kết hợp sử dụng kỹ thuật quán tính, kỹ thuật xấp xỉ gắn kết (*viscosity*) với cỡ bước tăng giải bài toán cân bằng. Chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ số để minh họa cho hiệu quả của các thuật toán đề xuất.

Trong luận án này, các thí nghiệm số được thực hiện trên phần mềm MATLAB R2022b chạy trên máy tính để bàn với bộ xử lý Intel(R) Core(TM) i5-1035G1 CPU @ 1.00GHz 1.19GHz, RAM 4.00 GB.

Các kết quả của luận án này đã được công bố trong 4 bài báo trong danh mục công trình khoa học và cũng được báo cáo tại:

1. Xê-mi-na của Bộ môn Toán học Tính toán và Toán ứng dụng, Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, ĐHQGHN.
2. Hội nghị Khoa học “Một số chủ đề thời sự trong toán học và ứng dụng”, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN, 31/10/2021.
3. Hội thảo “Những hướng mới trong tối ưu tính toán và ứng dụng”, VIASM, 26-27/12/2021.
4. Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 10, Đà Nẵng, 8-12/8/2023.
5. Gặp gỡ Toán học 2023 - Hội thảo Khoa học các nhà nghiên cứu trẻ, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Vĩnh Phúc, 14-15/10/2023.
6. Hội thảo “Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 22”, Ba Vì, 25-27/4/2024.
7. Hội nghị Khoa học Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên, Đại học Quốc Gia Hà Nội, 09/10/2024.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở cần thiết cho các chương tiếp theo. Chương này gồm ba phần. Phần đầu tiên trình bày lại một số công cụ của giải tích lồi và lý thuyết toán tử trong không gian Hilbert. Phần thứ hai trình bày về bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và các bài toán liên quan. Phần cuối cùng trình bày về một số mô hình toán học liên quan đến bài toán cân bằng. Nội dung của chương chủ yếu được tham khảo từ các tài liệu [13, 15, 53, 61, 67, 93].

1.1. Một số công cụ của giải tích lồi và lý thuyết toán tử trong không gian Hilbert

Một không gian vectơ thực \mathcal{H} được trang bị tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và đầy đủ đối với chuẩn

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

được gọi là *không gian Hilbert thực*. Từ nay về sau, ta luôn ký hiệu \mathcal{H} là không gian Hilbert thực. Ký hiệu $\omega_w(x^k)$ là tập tất cả các điểm tụ yếu của $\{x^k\}$, điều đó có nghĩa

$$\omega_w(x^k) := \{x \in \mathcal{H} : x^{k_j} \rightharpoonup x \text{ với một dãy con } \{k_j\} \text{ của } \{k\}\}.$$

1.1.1. Toán tử chiếu và các tính chất hình học

Định nghĩa 1.1 ([13]). Cho $C \subset \mathcal{H}$ là tập lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó, ánh xạ

$$P_C : \mathcal{H} \rightarrow C \\ x \mapsto \operatorname{argmin}\{\|y - x\| : y \in C\}$$

được gọi là *phép chiếu* từ \mathcal{H} lên C . Phần tử $P_C(x) \in C$ được gọi là hình chiếu của x lên C và $\|x - P_C(x)\|$ chính là khoảng cách từ x tới C .

Ánh xạ P_C đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng các thuật toán xấp xỉ nghiệm của bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân. Tính chất cơ bản của P_C được phát biểu trong Mệnh đề 1.1.

Mệnh đề 1.1 ([13], Mệnh đề 4.8). Cho $C \subseteq \mathcal{H}$ là tập lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó, ta có các khẳng định sau

(1) Với mọi $x \in \mathcal{H}$, $P_C(x)$ luôn tồn tại duy nhất, đồng thời điều sau là tương đương: $x^0 = P_C(x)$ khi và chỉ khi

$$\langle x - x^0, y - x^0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C;$$

(2) Ánh xạ P_C có tính chất không giãn vững (hoặc 1-đơn điệu mạnh ngược), điều đó có nghĩa,

$$\|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \leq \langle x - y, P_C(x) - P_C(y) \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H};$$

(3) P_C là ánh xạ không giãn, tức là

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{H};$$

(4) $\|P_C(x) - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|x - P_C(x)\|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}, y \in C.$

Trong trường hợp đặc biệt, tập C là nửa không gian, tức là

$$C := \{z \in \mathcal{H} : \langle a, z \rangle \leq \beta\},$$

với $a \in \mathcal{H}$, $a \neq 0$ và $\beta \in \mathbb{R}$, phép chiếu lên C được xác định bởi công thức dạng hiển sau

$$P_C(x) = \begin{cases} x - \frac{\langle a, x \rangle - \beta}{\|a\|^2} a & \text{nếu } \langle a, x \rangle - \beta > 0, \\ x & \text{nếu } \langle a, x \rangle - \beta \leq 0. \end{cases}$$

1.1.2. Dưới đạo hàm, nón pháp tuyến và bài toán tối ưu lồi

Định nghĩa 1.2 ([13]). Cho $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathcal{H}$. Khi đó,

- Hàm g được gọi là *hemi-liên tục* tại x^0 nếu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(tz + (1-t)x^0) = g(x^0) \quad \forall z \in \mathcal{H};$$

- Hàm g được gọi là *nửa liên tục dưới* (*l.s.c*) (tương ứng *nửa liên tục trên* (*u.s.c*)) tại x^0 nếu

$$\forall \{x^k\} \subset \mathcal{H}, x^k \rightarrow x^0 \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} g(x^k) \geq g(x^0);$$

$$\left(\text{tương ứng } \forall \{x^k\} \subset \mathcal{H}, x^k \rightarrow x^0 \Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} g(x^k) \leq g(x^0) \right);$$

- Hàm g được gọi là *nửa liên tục dưới yếu* (*w.l.s.c*) (tương ứng *nửa liên tục trên yếu* (*w.u.s.c*)) tại x^0 nếu

$$\forall \{x^k\} \subset \mathcal{H}, x^k \rightharpoonup x^0 \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} g(x^k) \geq g(x^0);$$

$$\left(\text{tương ứng } \forall \{x^k\} \subset \mathcal{H}, x^k \rightharpoonup x^0 \Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} g(x^k) \leq g(x^0) \right);$$

- Hàm g được gọi là *nửa liên tục dưới* (tương ứng *yếu*) trên C nếu nó *nửa liên tục dưới* (tương ứng *yếu*) tại mọi điểm thuộc C ;
- Hàm g được gọi là *nửa liên tục trên* (tương ứng *yếu*) nếu $-f$ *nửa liên tục dưới* (tương ứng *yếu*). Hàm f được gọi là *liên tục* nếu nó vừa liên tục trên vừa liên tục dưới.
- Hàm $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ được gọi là *chính thường* nếu $\text{dom}(g) \neq \emptyset$, trong đó

$$\text{dom}(g) = \{x \in \mathcal{H} : g(x) < \infty\}.$$

- Hàm chính thường $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ được gọi là *lồi* nếu

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y) \quad \forall x, y \in \text{dom}(g) \text{ và } \alpha \in [0, 1].$$

Định nghĩa 1.3 ([13], Định nghĩa 16.1). Cho $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, x^0 \in \mathcal{H}$. Nếu tập

$$\partial g(x^0) := \{w \in \mathcal{H} : \langle w, y - x^0 \rangle \leq g(y) - g(x^0) \quad \forall y \in \mathcal{H}\}$$

khác rỗng thì g được gọi là *khả dưới vi phân* tại x^0 , $\partial g(x^0)$ được gọi là *dưới vi phân*, mỗi vectơ w thuộc $\partial g(x^0)$ được gọi là *dưới đạo hàm* của g tại x^0 . Hàm g được gọi là *khả dưới vi phân* trên một tập nếu nó khả dưới vi phân tại mọi điểm thuộc tập đó.

Trong trường hợp $g : C \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, bằng việc mở rộng hàm số này ra toàn bộ không gian

$$\bar{g}(x) := \begin{cases} g(x) & \text{nếu } x \in C, \\ \infty & \text{nếu } x \notin C \end{cases}$$

ta có thể định nghĩa hàm g khả dưới vi phân trên C tương tự như trong Định nghĩa 1.3

Ví dụ 1.1. Chúng ta đã biết hàm số $g(x) = |x|$ không có đạo hàm tại 0. Tuy nhiên dễ dàng tính được dưới vi phân của g tại 0 là đoạn $[-1, 1]$. Tổng quát, ta có dưới vi phân của hàm $g(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, tại $x^0 \in \mathbb{R}^n$ được xác định như sau

$$\partial g(x^0) = \begin{cases} \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\| \leq 1\}, & \text{nếu } x^0 = 0, \\ \left\{ \frac{x^0}{\|x^0\|} \right\}, & \text{nếu } x^0 \neq 0. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.4 ([52]). Cho song hàm $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$. Dưới vi phân đường chéo $\partial_2 f : \mathcal{H} \rightrightarrows \mathcal{H}$ của song hàm f tại $x \in \mathcal{H}$ được xác định bởi

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x, x) &:= \{u \in \mathcal{H} : f(x, y) \geq \langle u, y - x \rangle + f(x, x) \quad \forall y \in \mathcal{H}\} \\ &= \{u \in \mathcal{H} : f(x, y) \geq \langle u, y - x \rangle \quad \forall y \in \mathcal{H}\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Định lý 1.1 ([13]). *Nếu $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ là hàm lồi chính thường và nửa liên tục dưới thì $\partial g(x) \neq \emptyset \forall x \in \text{int}(\text{dom}(g))$.*

Định nghĩa 1.5 ([13]). Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} và $x^0 \in C$. Tập

$$N_C(x^0) := \{w \in \mathcal{H} : \langle w, y - x^0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C\}$$

được gọi là *nón pháp tuyến (ngoài)* của C tại x^0 .

Hiển nhiên $N_C(x^0)$ là một nón lồi, đóng, khác rỗng.

Bổ đề 1.1 ([13], Mệnh đề 26.5). *Cho C là tập lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert \mathcal{H} và $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới, chính thường. Giả sử g liên tục tại một điểm nào đó của C hoặc tồn tại một điểm trong của C mà g là hữu hạn. Khi đó, x^* là nghiệm của bài toán tối ưu lồi $\min\{g(x) : x \in C\}$ khi và chỉ khi $0 \in \partial g(x^*) + N_C(x^*)$.*

Định nghĩa 1.6 ([1], Định nghĩa 1). Dãy $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ được gọi là *tựa-Fejér* đối với C nếu tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $x^* \in C$, ta có

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 + \sigma_k \quad \forall k \geq N, \quad (1.2)$$

trong đó $\{\sigma_k\}$ là một dãy số thực dương thỏa mãn $\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k < \infty$.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày lại một số bổ đề về dãy số, cần thiết cho việc chứng minh kết quả ở các chương tiếp theo.

Bổ đề 1.2 ([69], Bổ đề 2.2). *Cho hai dãy số $\{\phi_k\} \subset [0, \infty)$ và $\{\delta_k\} \subset [0, \infty)$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) $\{\alpha_k\} \subset [0, \theta]$, trong đó $\theta \in [0, 1)$;

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$;

(3) $\phi_{k+1} - \phi_k \leq \alpha_k(\phi_k - \phi_{k-1}) + \delta_k$.

Khi đó, $\{\phi_k\}$ là dãy hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1} - \phi_k]_+ < \infty$, với $[t]_+ := \max\{t, 0\}$ ($t \in \mathbb{R}$ bất kỳ).

Mệnh đề 1.2 ([1], Mệnh đề 1). *Nếu $\{x^k\}$ tựa-Fejér đối với C , ta có các khẳng định sau*

(1) Dãy $\{\|x^k - x^*\|\}$ hội tụ với $x^* \in C$ bất kỳ;

(2) Nếu mọi điểm tụ yếu của $\{x^k\}$ thuộc C thì dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới một phần tử của C .

Bổ đề 1.3 ([70], Bổ đề 3.1). Cho $\{\Gamma_n\}$ là một dãy số thực không giảm tại vô cùng, theo nghĩa tồn tại dãy con $\{\Gamma_{n_j}\}$ của dãy $\{\Gamma_n\}$ sao cho $\Gamma_{n_j} < \Gamma_{n_{j+1}}$ với mọi $j \geq 0$. Xét dãy số nguyên $\{\tau(n)\}_{n \geq n_0}$ được xác định bởi

$$\tau(n) = \max\{k \leq n : \Gamma_k < \Gamma_{k+1}\}. \quad (1.3)$$

Khi đó, $\{\tau(n)\}_{n \geq n_0}$ là một dãy không giảm thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = \infty$ và, với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$\max\{\Gamma_{\tau(n)}, \Gamma_n\} \leq \Gamma_{\tau(n)+1}. \quad (1.4)$$

Bổ đề 1.4. ([90]) Cho \mathcal{H} là không gian Hilbert, $\{x^k\}$ là một dãy trong \mathcal{H} . Giả sử tồn tại tập con lồi, đóng, khác rỗng $C \subset \mathcal{H}$ thỏa mãn:

- (i) Với mỗi $z \in C$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\|$ tồn tại;
- (ii) Bất kỳ điểm tụ yếu của dãy $\{x^k\}$ đều thuộc C .

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in C$ sao cho dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới \bar{x} .

Bổ đề 1.5. ([104]) Giả sử rằng $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ là hai dãy số thực không âm thỏa mãn bất đẳng thức $a_{k+1} \leq a_k + b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Nếu $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ thì dãy $\{a_k\}$ hội tụ.

Bổ đề 1.6. ([67], Bổ đề 3.1; [115], Bổ đề 2.5) Cho ba dãy số thực không âm $\{a_k\}, \{b_k\}$ và $\{c_k\}$ thỏa mãn

$$a_{k+1} \leq (1 - \delta_k)a_k + b_k + c_k \quad k \geq 1, \quad (1.5)$$

trong đó, $\{\delta_k\}$ là một dãy trong $(0, 1)$ và $\{b_k\}$ là một dãy số thực. Giả sử rằng $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$. Khi đó, ta có các khẳng định sau:

- (1) Nếu $b_k \leq \delta_k M$, với $M \geq 0$ và với mọi $k \geq 1$, khi đó, $\{a_k\}$ là một dãy bị chặn;
- (2) Nếu $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \infty$ và $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{\delta_k} \leq 0$, khi đó, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Bổ đề 1.7 ([7]). Cho các dãy số thực không âm $\{a_k\}, \{\theta_k\}, \{\delta_k\}$ và $\{t_k\}$ sao cho

$$a_{k+1} \leq (1 - t_k + \theta_k)a_k - \theta_k a_{k-1} + \delta_k \quad k \geq 1, \quad (1.6)$$

trong đó

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \infty$;

(2) $\{\theta_k\} \subset [0, \theta]$, với $\theta \in [0, 1)$;

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$.

Khi đó, dãy $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ hội tụ tới 0.

1.1.3. Toán tử đơn điệu, giả đơn điệu và các tính chất cơ bản

Trong tiểu mục này, chúng tôi trình bày lại một số tính chất đơn điệu và liên tục Lipschitz của ánh xạ F . Các tính chất này liên quan chặt chẽ đến các điều kiện đủ cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và sẽ được trình bày ở mục sau.

Định nghĩa 1.7 ([93]). Ánh xạ $F : C \rightarrow \mathcal{H}$ được gọi là

1. γ -*đơn điệu mạnh* trên C nếu tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho với mọi $x, y \in C$,

$$\langle Fx - Fy, x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2;$$

2. *đơn điệu* trên C nếu với mọi $x, y \in C$,

$$\langle Fx - Fy, x - y \rangle \geq 0;$$

3. γ -*giả đơn điệu mạnh* trên C nếu tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho với mọi $x, y \in C$,

$$\langle Fy, x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle Fx, x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2;$$

4. *giả đơn điệu* trên C nếu với mọi $x, y \in C$,

$$\langle Fy, x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle Fx, x - y \rangle \geq 0;$$

5. L -*liên tục Lipschitz* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, tồn tại $L \geq 0$ sao cho

$$\|Fx - Fy\| \leq L \|x - y\|.$$

Trong trường hợp $L = 1$, ánh xạ F được gọi là *không giãn* và nếu $L \in [0, 1)$, F được gọi là *ánh xạ co*.

Bổ đề 1.8. ([22], Định lý 5) *Giả sử F là toán tử thỏa mãn tính chất L -liên tục Lipschitz và η -đơn điệu mạnh và μ là hằng số sao cho $\mu \in (0, \frac{2\eta}{L^2})$. Lấy $T^\mu = P_C(I - \mu F)$ (hoặc $I - \mu F$), trong đó I là toán tử đơn vị trên \mathcal{H} . Khi đó, T^μ là ánh xạ co với hệ số $1 - \tau$, trong đó $\tau = \frac{1}{2}\mu(2\eta - \mu L^2)$.*

1.2. Bài toán cân bằng và bài toán bất đẳng thức biến phân

1.2.1. Bài toán bất đẳng thức biến phân

Cho ánh xạ $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, C là tập con, lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} . Bài toán bất đẳng thức biến phân, ký hiệu $\text{VIP}(F, C)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle Fx^*, y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (1.7)$$

Ký hiệu $\text{Sol}(F, C)$ là tập nghiệm của $\text{VIP}(F, C)$. Sử dụng khái niệm nón pháp tuyến, ta có thể phát biểu lại bài toán bất đẳng thức biến phân như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } -Fx^* \in N_C(x^*).$$

Định lý 1.2 ([53]). *Giả sử ánh xạ $F : C \rightarrow C$ giả đơn điệu mạnh trên C . Khi đó bài toán $\text{VIP}(F, C)$ có tối đa một nghiệm.*

Định lý 1.3 ([84, 93]). *Giả sử $C \subset \mathcal{H}$ là compact và $F : C \rightarrow C$ là ánh xạ liên tục. Khi đó, bài toán $\text{VIP}(F, C)$ có ít nhất một nghiệm.*

1.2.2. Bài toán cân bằng và các bài toán liên quan

Bài toán cân bằng, ký hiệu $\text{EP}(f, C)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (1.8)$$

trong đó C là tập con, lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} và $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$. Tập nghiệm của bài toán (1.8) được ký hiệu bởi $\text{Sol}(f, C)$, tức là

$$\text{Sol}(f, C) := \{x^* \in C : f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C\}. \quad (1.9)$$

Như đã đề cập ở phần Mở đầu, bài toán này bao hàm một loạt các bài toán quan trọng trong tối ưu. Điển hình là một số bài toán được đề cập tiếp sau đây.

Dễ thấy bài toán bất đẳng thức biến phân chính là trường hợp riêng của $\text{EP}(f, C)$ với $f(x, y) := \langle Fx, y - x \rangle$. Chú ý rằng bản thân bài toán bất đẳng thức biến phân cũng đã bao hàm một loạt các bài toán trong lý tối ưu và giải tích phi tuyến. Có thể kể đến các bài toán điển hình sau:

Bài toán tối ưu

Xét bài toán tối ưu tổng quát sau:

$$\min\{g(x) : x \in C\}, \quad (1.10)$$

trong đó $g : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi. Đặt $F(x) := \nabla g(x)$ với mọi x . Mối quan hệ giữa hai bài toán (1.7) và (1.10) được khẳng định bởi Định lý 1.4.

Định lý 1.4 ([61]). *Giả sử g là hàm lồi, khả vi. Khi đó, x^* là nghiệm của (1.7) khi và chỉ khi x^* là nghiệm của (1.10).*

Bài toán bù phi tuyến

Bài toán bù phi tuyến của F trên C , ký hiệu $\text{NCP}(F, C)$, được phát biểu như dưới đây:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } Fx^* \in C^* \text{ và } \langle Fx^*, x^* \rangle = 0, \quad (1.11)$$

trong đó $C \subset \mathcal{H}$ là một nón lồi, đóng và

$$C^* := \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C\}$$

là nón đối ngẫu của C . Mối liên hệ giữa bài toán $\text{VIP}(F, C)$ và bài toán $\text{NCP}(F, C)$ được phát biểu trong Định lý 1.5.

Định lý 1.5 ([61]). *Cho $C \subset \mathcal{H}$ là một nón lồi, đóng. Khi đó, x^* là nghiệm của $\text{NCP}(F, C)$ khi và chỉ khi nó là nghiệm của $\text{VIP}(F, C)$.*

Bài toán điểm bất động

Cho ánh xạ $T : C \rightarrow C$. Bài toán điểm bất động của ánh xạ T trên C , ký hiệu $\text{FP}(T, C)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } Tx^* = x^*. \quad (1.12)$$

Trong trường hợp, đặt ánh xạ F như sau:

$$Fx := x - Tx, \quad (1.13)$$

khi đó, bài toán điểm bất động có thể chuyển qua bài toán bất đẳng thức biến phân thông qua Định lý 1.6.

Định lý 1.6 ([61]). *Giả sử F là ánh xạ xác định bởi (1.13). Khi đó $x^* \in C$ là nghiệm của $\text{FP}(T, C)$ khi và chỉ khi nó là nghiệm của $\text{VIP}(F, C)$.*

Ở chiều ngược lại, ta có thể chuyển bài toán bất đẳng thức biến phân về bài toán tìm điểm bất động thông qua Định lý 1.7.

Định lý 1.7 ([61]). *Cho $C \subset \mathcal{H}$ là một tập lồi, đóng, $F : C \rightarrow \mathcal{H}$, $\lambda > 0$. Khi đó, x^* là nghiệm của (1.7) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ*

$$\begin{aligned} \Phi : C &\rightarrow C \\ x &\mapsto P_C(x - \lambda Fx). \end{aligned}$$

Từ Định lý 1.7 suy ra Φ đóng vai trò là ánh xạ nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân, theo nghĩa, bất cứ điểm bất động nào của Φ cũng sẽ là nghiệm của bài toán $\text{VIP}(F, C)$. Câu hỏi đặt ra là: liệu ta có thể xây dựng một

ánh xạ nghiệm tương tự cho bài toán cân bằng? Ta có nhận xét sau: Nếu đặt $f(x, y) := \langle Fx, y - x \rangle$, thì

$$\Phi(x) = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda f(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\}.$$

Thật vậy, giả sử $x^* := \operatorname{argmin} \left\{ \lambda f(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\}$. Áp dụng Bổ đề 1.1, ta có

$$0 = \lambda Fx + x^* - x + q,$$

trong đó $q \in N_C(x^*)$. Áp dụng định nghĩa của $N_C(x^*)$, ta có

$$\langle x - x^* - \lambda Fx, y - x^* \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

Điều này có nghĩa $x^* = P_C(x - \lambda Fx)$. Nhận xét trên chính là gợi ý để ta mở rộng Định lý 1.7 cho trường hợp bài toán cân bằng.

Định lý 1.8 ([76]). Cho $C \subset \mathcal{H}$ là tập lồi, đóng, có miền trong khác rỗng, $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng trên C thỏa mãn điều kiện: với mọi $x \in C$, hàm số $f(x, \cdot)$ lồi, khả dưới vi phân trên C . Giả sử $\lambda > 0$. Khi đó, x^* là nghiệm của bài toán EP(f, C) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ

$$U_\lambda : C \rightarrow C \\ x \mapsto \operatorname{argmin} \left\{ \lambda f(x, y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in C \right\}.$$

1.2.3. Sự tồn tại duy nhất nghiệm

Từ mối liên hệ giữa bài toán cân bằng EP(f, C) và bài toán bất đẳng thức biến phân VIP(F, C), thông qua việc chọn song hàm $f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle, \forall x, y \in C$, ta cũng có các khái niệm đơn điệu và liên tục kiểu Lipschitz của song hàm f tương ứng dưới đây.

Định nghĩa 1.8 ([93]). Song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là

1. γ -đơn điệu mạnh trên C nếu tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\gamma \|x - y\|^2;$$

2. đơn điệu trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0;$$

3. γ -giả đơn điệu mạnh trên C nếu tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho với mọi $x, y \in C$,

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq -\gamma \|x - y\|^2;$$

4. *giả đơn điệu* trên C nếu với mọi $x, y \in C$, ta có

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0;$$

5. *para-đơn điệu* nếu f đơn điệu và điều kiện sau được thỏa mãn

$$x \in \text{Sol}(f, C), y \in C, f(x, y) = f(y, x) = 0 \Rightarrow y \in \text{Sol}(f, C);$$

6. *thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo Mastroeni [76]*, nếu tồn tại hai hằng số $c_1, c_2 > 0$ sao cho với mọi $x, y, z \in C$, ta có

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1\|x - y\|^2 - c_2\|y - z\|^2.$$

Chú ý 1.1. Các điều kiện đơn điệu trong Định nghĩa 1.8 quan hệ với nhau theo sơ đồ sau: (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4); (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4). Các mũi tên theo chiều ngược lại nói chung không đúng. Điều đó được chứng minh qua các ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.2. Lấy $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$. Xét

$$C = \{x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq 1\}, \quad f(x, y) = \left\langle \frac{2x + y}{1 + \|x\|^2}, y - x \right\rangle.$$

Có thể chứng minh được rằng f giả đơn điệu mạnh trên C . Thật vậy, lấy $x, y \in C$ sao cho $f(x, y) = \left\langle \frac{2x + y}{1 + \|x\|^2}, y - x \right\rangle \geq 0$. Điều này suy ra rằng $\langle 2x + y, y - x \rangle \geq 0$. Tức là,

$$\begin{aligned} f(y, x) &= \left\langle \frac{2y + x}{1 + \|y\|^2}, x - y \right\rangle \\ &\leq \frac{1}{1 + \|y\|^2} (\langle 2y + x, x - y \rangle - \langle 2x + y, x - y \rangle) \\ &\leq -\frac{1}{2}\|x - y\|^2 \\ &= -\gamma\|x - y\|^2, \end{aligned}$$

với $\gamma := \frac{1}{2} > 0$.

Tuy nhiên, f không đơn điệu mạnh, thậm chí cũng không đơn điệu trên C . Để chứng minh, xét $x = \frac{\sqrt{3t}}{2}$, $y = \sqrt{2t}$ và ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, x) &= \left\langle \frac{2y + x}{1 + \|y\|^2} - \frac{2x + y}{1 + \|x\|^2}, x - y \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{4}(4\sqrt{2t} + \sqrt{3t}) - \frac{8}{11}(\sqrt{3t} + \sqrt{2t}), \frac{\sqrt{3t}}{2} - \sqrt{2t} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(4\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \frac{8}{11}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \right] \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.3. Cho tập $C_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\}$, $C_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ và song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = (2 + x^2)(x - y).$$

Khi đó, f đơn điệu mạnh trên C_1 và đơn điệu trên C_2 . Nhưng f không đơn điệu mạnh trên C_2 . Thật vậy, với $x, y \in C_1$ tùy ý, ta có

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, x) &= (2 + x^2)(x - y) + (2 + y^2)(y - x) \\ &= (x + y)(x - y)^2 \\ &\leq -4(x - y)^2. \end{aligned}$$

Như vậy, f đơn điệu mạnh trên C_1 với hằng số $\gamma = 4$. Tương tự trên, với $x, y \in C_2$ và $x \neq y$ ta cũng có

$$f(x, y) + f(y, x) = (x + y)(x - y)^2 < 0,$$

do đó, f đơn điệu trên C_2 . Giả sử f đơn điệu mạnh trên C_2 với hệ số $\beta > 0$. Khi đó, ta có điều sau

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\beta(x - y)^2 \quad \forall x, y \in C_2.$$

Suy ra,

$$x + y \leq -\beta \quad \forall x, y \in C_2.$$

Chọn $x = 0$ và $y = -\frac{\beta}{2}$ cùng thuộc C_2 , thay vào bất đẳng thức trên ta thu được $-\frac{\beta}{2} \leq -\beta$, vô lý. Dẫn đến, f không đơn điệu mạnh trên C_2 .

Ví dụ 1.4. Xét song hàm $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x, y) = x^2(y - x).$$

Khi đó, f giả đơn điệu trên $C := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nhưng f không đơn điệu trên C . Thật vậy, giả sử $f(x, y) = x^2(y - x) \geq 0, \forall x, y \in C$. Vì $xy \neq 0$, nên suy ra $y \geq x$ và do đó $f(y, x) = y^2(x - y) \leq 0$. Vậy f giả đơn điệu trên C . Mặt khác với mọi $x, y \in (-\infty, 0)$ và $x \neq y$, ta có

$$f(x, y) + f(y, x) = x^2(y - x) + y^2(x - y) = -(x + y)(x - y)^2 > 0,$$

suy ra f không đơn điệu trên C .

Ví dụ 1.5. Xét bài toán cân bằng với $C = [0, 1]$ và $f(x, y) = x^2(-x + y)$. Nhận thấy rằng $x^* = 0$ là nghiệm duy nhất của bài toán EP(f, C), $f(y, x^*) = -y^2.y \leq 0$ với mọi $y \in C$, và $f(x, x^*) = f(x^*, x) = 0$ suy ra $x = 0$, tức là, $x \in \text{Sol}(f, C)$. Mặt khác, ta có $f(x, y) + f(y, x) = -(x - y)^2(x + y)$. Do đó, f là para-đơn điệu nhưng không đơn điệu trên C .

Ví dụ 1.6. Cho $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử tuyến tính compact tự liên hợp trong không gian Hilbert \mathcal{H} và $\langle Fx, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$. Khi đó, theo Liu và Nashed [64], tồn tại hằng số dương $\beta > 0$, sao cho $\langle Fx, x \rangle \geq \beta \|Fx\|^2$ với mọi $x \in \mathcal{H}$. Định nghĩa song hàm $f(x, y) := \langle Fx, y - x \rangle$, $C = \mathcal{H}$. Ta có

$$f(x, y) + f(y, x) = -\langle Fx - Fy, x - y \rangle \leq -\beta \|Fx - Fy\|^2 \leq 0,$$

do đó song hàm f đơn điệu.

Tập nghiệm $\text{Sol}(f, C)$ của bài toán cân bằng $f(x, y) \geq 0$, $\forall y \in \mathcal{H}$ bao gồm tất cả x , sao cho $\langle Fx, y - x \rangle \geq 0$, $\forall y \in \mathcal{H}$. Riêng với $y = 0$, ta có $-\langle Fx, x \rangle \geq 0$, điều này có nghĩa rằng $Fx = 0$, hoặc $x \in \text{Ker}F$. Do đó, $\text{Sol}(f, C) = \text{Ker}F$. Song hàm f là para-đơn điệu. Thật vậy, giả sử $x \in \text{Sol}(f, C)$ và $0 = f(y, x) = \langle Fy, x - y \rangle = -\langle Fy, y \rangle$. Điều này suy ra rằng $y \in \text{Sol}(F, C)$ và tính para-đơn điệu được thiết lập.

Định lý 1.9 ([15]). Cho C là một tập con lồi, compact, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} và song hàm cân bằng $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ có các tính chất

(i) $f(., y)$ nửa liên tục trên với mọi $y \in C$.

(ii) $f(x, .)$ lồi với mọi $x \in C$.

Khi đó, bài toán $\text{EP}(f, C)$ có nghiệm.

Định lý 1.10 ([15]). Cho C là một tập lồi đóng và song hàm cân bằng f như ở mệnh đề trên. Giả sử điều kiện bức (C_1) sau đây được thỏa mãn: Tồn tại tập compact B sao cho

$$C \cap B \neq \emptyset \quad \forall x \in C \setminus B, \quad \exists y \in C : f(x, y) < 0.$$

Khi đó, bài toán $\text{EP}(f, C)$ có nghiệm.

Định lý 1.11 ([84]). Cho C là tập lồi, đóng, khác rỗng và $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng.

(i) Nếu f đơn điệu chặt trên C , thì bài toán cân bằng $\text{EP}(f, C)$ có nhiều nhất một nghiệm.

(ii) Nếu $f(., y)$ nửa liên tục trên với mọi $y \in C$, $f(x, .)$ lồi, nửa liên tục dưới với mọi $x \in C$ và f đơn điệu mạnh trên C , thì bài toán $\text{EP}(f, C)$ có duy nhất một nghiệm.

Mệnh đề 1.3. ([33], Mệnh đề 2) Cho C là tập lồi, đóng, khác rỗng và $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng. Giả sử f giả đơn điệu trên C , nửa liên tục trên yếu theo biến thứ nhất, lồi và nửa liên tục dưới theo biến thứ hai. Khi đó

$$(1) \text{Sol}(f, C) = \{y \in C : f(x, y) \leq 0 \quad \forall x \in C\}.$$

(2) $\text{Sol}(f, C)$ lồi, đóng.

1.3. Một số mô hình toán học liên quan đến bài toán cân bằng

1.3.1. Bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác

Đầu những năm 1950, Nash đưa ra khái niệm “điểm cân bằng Nash” trong trò chơi không hợp tác [85]. Cân bằng Nash đạt được khi không một người chơi nào có thể tăng được lợi ích bằng cách thay đổi chiến lược của mình trong khi các đối thủ khác vẫn giữ nguyên chiến lược của họ. Một cách tổng quát, giả sử có n người tham gia một trò chơi không hợp tác. Người chơi thứ i có tập chiến lược là C_i và có hàm lợi ích là $f_i : C \rightarrow \mathbb{R}$ với $C = C_1 \times \dots \times C_n$. Mục tiêu của mỗi người chơi là tìm kiếm một chiến lược cho riêng mình để tối đa hóa lợi ích f_i . Điểm $x^* \in C$ được gọi là *điểm cân bằng Nash* nếu với mọi $y = (y_1, \dots, y_n) \in C$,

$$f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, y_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Bằng cách đặt

$$f(x, y) := \sum_{i=1}^n [f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)] \quad \forall x, y \in C, \quad (1.14)$$

bài toán tìm điểm cân bằng Nash có thể đưa về bài toán cân bằng EP(f, C).

Định lý 1.12 ([87]). *Giả sử f là song hàm Nikaido–Isoda được định nghĩa bởi (1.14). Điểm $x^* \in C$ là điểm cân bằng Nash khi và chỉ khi nó là nghiệm của bài toán cân bằng EP(f, C).*

1.3.2. Bài toán điểm yên ngựa

Cho $A \subseteq \mathcal{H}, B \subseteq \mathcal{H}$ và $L : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. Bài toán điểm yên ngựa, ký hiệu SP(L, A, B), là bài toán tìm $(x^*, y^*) \in A \times B$ sao cho

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad \forall (x, y) \in A \times B.$$

Một điểm $(x^*, y^*) \in A \times B$ thỏa mãn bất đẳng thức trên gọi là điểm yên ngựa của L trên $A \times B$. Ta chỉ ra rằng bài toán điểm yên ngựa có thể mô tả dưới dạng bài toán cân bằng. Thật vậy, với mỗi $u = (x, y)^T, v = (x', y')^T$, ta đặt

$$C := A \times B, f(u, v) := L(x', y) - L(x, y').$$

Khi đó, nếu u^* là nghiệm của bài toán cân bằng EP(f, C), tức là

$$u^* \in A \times B, f(u^*, v) \geq 0 \quad \forall v \in C,$$

thì ta có đánh giá sau

$$L(x', y^*) \geq L(x^*, y') \quad \forall x' \in A, y' \in B.$$

Vậy (x^*, y^*) là điểm yên ngựa. Điều ngược lại, nếu (x^*, y^*) là điểm yên ngựa của L trên $A \times B$, thì $u^* = (x^*, y^*)$ là lời giải của bài toán cân bằng được suy ra từ định nghĩa.

Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản của giải tích lồi phục vụ cho các chương tiếp theo. Những điểm khái quát về bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân đã được giới thiệu. Có thể thấy, một số bài toán trong tối ưu, giải tích phi tuyến và mô hình kinh tế trong lý thuyết trò chơi đều có thể được phát biểu dưới dạng bài toán cân bằng.

Chương 2

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Các phương pháp chiếu phân rã kiểu Tseng đã được nghiên cứu rộng rãi cho bài toán cân bằng và bất đẳng thức biến phân. Tuy nhiên, nhiều thuật toán hiện có yêu cầu sử dụng nhiều phép chiếu hoặc giải các bài toán con phức tạp tại mỗi vòng lặp, làm tăng chi phí tính toán. Do đó, việc xây dựng các thuật toán phân rã với cấu trúc đơn giản hơn, số phép chiếu ít hơn nhưng vẫn đảm bảo tính hội tụ là một vấn đề có ý nghĩa cả về lý thuyết và thực tiễn.

Trên cơ sở đó, trong chương này chúng tôi đề xuất hai phương pháp phân rã giải bài toán cân bằng với song hàm được biểu diễn dưới dạng tổng của hai song hàm trong không gian Hilbert, bao gồm phương pháp chiếu phân rã kiểu Tseng và phương pháp phân rã một phép chiếu. Nội dung của chương được xây dựng trên cơ sở các kết quả đã công bố trong các bài báo [2] và [3] thuộc Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

2.1. Phương pháp chiếu phân rã kiểu Tseng

2.1.1. Mô hình bài toán và các giả thiết

Ta xét bài toán EP(f, C) với $f := f_1 + f_2$, trong đó $f, f_i : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ là các song hàm cân bằng. Để nghiên cứu các thuật toán lặp cho bài toán EP(f, C) trong không gian vô hạn chiều, các điều kiện sau đây sẽ được sử dụng trong các phần tiếp theo:

- (A1) f đơn điệu trên C ;
- (A1') f giả đơn điệu trên C ;
- (A1'') f giả đơn điệu mạnh trên C ;
- (A2) $f(\cdot, y)$ nửa liên tục trên yếu.
- (A3) $f_i(x, \cdot)$ lồi và nửa liên tục dưới ($i = 1, 2$);
- (A4) f thỏa mãn điều kiện para-đơn điệu;
- (A5) Dưới vi phân đường chéo $\partial_2 f_i$ bị chặn trên tập bị chặn ($i = 1, 2$);

(A6) $\text{Sol}(f, C) \neq \emptyset$.

Chú ý rằng giả thiết **(A1)** về tính đơn điệu và giả thiết **(A2)** về nửa liên tục trên yếu của $f(\cdot, y)$ là các điều kiện tiêu chuẩn thường được sử dụng trong lý thuyết bài toán cân bằng nhằm đảm bảo các tính chất đóng của ánh xạ nghiệm và đóng vai trò quan trọng trong việc suy ra hội tụ yếu của dãy lặp. Giả thiết para-đơn điệu **(A4)** đã được sử dụng trong [97] cho trường hợp không gian hữu hạn chiều nhằm đảm bảo rằng mọi điểm giới hạn của dãy lặp đều thuộc tập nghiệm. Điều kiện này tự động được thỏa mãn trong một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn khi bài toán cân bằng suy biến thành bài toán tối ưu lồi, hoặc khi song hàm f là đơn điệu mạnh. Mặt khác, trong các phương pháp kiểu dưới đạo hàm hoặc phân rã, để kiểm soát sai số và đảm bảo tính hội tụ của dãy lặp, như đã chỉ ra trong [96, 97], người ta thường cần giả thiết rằng dãy các dưới vi phân $\{u^k\}$, với $u^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$, bị chặn trên mọi tập bị chặn của không gian. Đồng thời, trong [52] đã chỉ ra rằng với f liên tục và $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in \mathcal{H}$ thì giả thiết **(A5)** được thỏa mãn. Do đó, giả thiết **(A5)** được đưa ra như một điều kiện kỹ thuật phù hợp và tự nhiên trong bối cảnh nghiên cứu của luận án.

2.1.2. Xây dựng thuật toán và phân tích hội tụ

Trong mục này, chúng tôi trình bày ba thuật toán chiếu phân rã kiểu Tseng để giải bài toán cân bằng (1.8). Thuật toán đầu tiên chúng tôi đề xuất được mô tả như dưới đây.

Thuật toán 2.1 (Thuật toán chiếu phân rã quán tính kiểu Tseng [iTSM])

Khởi tạo: Chọn hai dãy số dương $\{\beta_k\}$ và $\{\epsilon_k\}$ sao cho

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty. \quad (2.1)$$

Chọn các điểm $x^0, x^1 \in C$ tùy ý và tham số $\theta \in [0, 1)$. Đặt $k = 1$.

Bước lặp: Với $k \geq 1$, từ x^{k-1} và x^k , chọn α_k sao cho $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$, trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\epsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \frac{\epsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } x^k = x^{k-1}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Tính $v^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1})$ và $w^k = P_C(v^k)$.

Chọn $u_1(w^k) \in \partial_2 f_1(w^k, w^k)$, $u_2(w^k) \in \partial_2 f_2(w^k, w^k)$, và đặt

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(w^k)\|, \|u_2(w^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}. \quad (2.3)$$

Thuật toán 2.1 (Thuật toán chiếu phân rã quán tính kiểu Tseng [iTSM])

Tính

$$y^k = P_C(w^k - 2\lambda_k u_1(w^k)), \quad (2.4)$$

$$x^{k+1} = y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k)). \quad (2.5)$$

Điều kiện dừng: Nếu $x^{k+1} = v^k$ và $y^k = w^k$, thì thuật toán dừng. Ngược lại, đặt $k := k + 1$ và quay lại **Bước lặp**.

Chú ý 2.1. (1) Rõ ràng, từ (2.2) ta có thể suy ra rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 < \infty. \quad (2.6)$$

(2) Thuật toán 2.1 được đề xuất có những đặc điểm khác biệt so với các thuật toán đã được nghiên cứu trước đây trong [5, 29, 32, 33, 42]. Cụ thể, trong hầu hết các phương pháp đó, mỗi bước lặp đòi hỏi phải giải hai bài toán tối ưu lồi mạnh mà không có thành phần quán tính. Ngay cả thuật toán trong [43], dù cũng sử dụng hai phép chiếu, nhưng được thiết kế theo cấu trúc song song; trong khi đó, Thuật toán 2.1 được xây dựng theo sơ đồ tính toán tuần tự kết hợp với yếu tố quán tính.

(3) Xét trường hợp đặc biệt khi $\alpha_k = 0$ và $f(x, y) = \langle A_1 x, y - x \rangle + \langle A_2 x, y - x \rangle$, với $A_1, A_2 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Khi đó, (2.4) và (2.5) trở thành

$$y^k = P_C(x^k - 2\lambda_k A_1 x^k), \\ x^{k+1} = y^k - \lambda_k(A_2 x^k - A_1 x^k).$$

Các công thức trên có dạng tương tự như phương pháp phân rã của Tseng [111]. Nếu $A_2 = 0$ thì

$$y^k = P_C(x^k - 2\lambda_k A_1 x^k), \\ x^{k+1} = y^k + \lambda_k A_1 x^k. \quad (2.7)$$

Dễ thấy rằng thuật toán của chúng tôi hoàn toàn khác với các phương pháp cho bất đẳng thức biến phân đã có (ví dụ, xem Malitsky [73], Solodov và Svaiter [100] và các tài liệu tham khảo trong đó). Nếu $C = \mathcal{H}$ thì (2.7) trở thành phương pháp kiểu giảm gradient cho bất đẳng thức biến phân

$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k A_1 x^k.$$

Bổ đề sau chứng minh rằng điều kiện dừng trong Thuật toán 2.1 là hợp lý.

Bổ đề 2.1. Nếu $x^{k+1} = v^k$ và $y^k = w^k$ thì $w^k \in \text{Sol}(f, C)$.

Chứng minh. Giả sử $x^{k+1} = v^k$ và $y^k = w^k$. Khi đó, từ (2.4), (2.5) và Mệnh đề 1.1(1), ta có

$$\begin{aligned} \langle w^k - 2\lambda_k u_1(w^k) - w^k, z - w^k \rangle &\leq 0 \quad \forall z \in C, \\ \langle w^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k)) - w^k, z - w^k \rangle &\leq 0 \quad \forall z \in C. \end{aligned}$$

Rút gọn hai bất đẳng thức trên, ta được

$$\langle u_1(w^k), z - w^k \rangle \geq 0 \quad \forall z \in C, \quad (2.8)$$

$$\langle u_2(w^k), z - w^k \rangle \geq 0 \quad \forall z \in C. \quad (2.9)$$

Do $u_i(w^k) \in \partial_2 f_i(w^k, w^k)$ ($i = 1, 2$) và Định nghĩa 1.4, từ (2.8) và (2.9) suy ra

$$f_1(w^k, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (2.10)$$

$$f_2(w^k, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.11)$$

Cộng vế với vế (2.10) và (2.11), ta được

$$f(w^k, y) = f_1(w^k, y) + f_2(w^k, y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Do đó, $w^k \in \text{Sol}(f, C)$. □

Bổ đề 2.2. Cho $\{x^k\}$ là dãy sinh bởi Thuật toán 2.1. Khi đó, ta có

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{k+1} - w^k\|^2 < \infty. \quad (2.12)$$

Chứng minh. Từ (2.4) và (2.5), kết hợp với tính chất không giãn của ánh xạ chiếu P_C , ta được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - w^k\| &= \|y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k)) - w^k\| \\ &\leq \|y^k - w^k\| + \lambda_k \|u_2(w^k) - u_1(w^k)\| \\ &\leq 2\lambda_k \|u_1(w^k)\| + \lambda_k \|u_2(w^k) - u_1(w^k)\| \\ &\leq 3\lambda_k \|u_1(w^k)\| + \lambda_k \|u_2(w^k)\| \\ &\leq 4\beta_k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

trong đó, bất đẳng thức cuối cùng suy ra do (2.3). Do đó, ta có

$$\|x^{k+1} - w^k\|^2 \leq 16\beta_k^2.$$

Từ điều kiện (2.1), suy ra

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{k+1} - w^k\|^2 < \infty.$$

Từ đó ta suy ra được điều cần chứng minh. □

Sự hội tụ yếu. Định lý sau đây khẳng định tính hội tụ yếu của dãy lặp sinh bởi Thuật toán 2.1.

Định lý 2.1. Cho $\{x^k\}$ là dãy sinh bởi Thuật toán 2.1. Giả sử rằng các giả thiết (A1'), (A2)–(A6) được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới một phần tử của tập nghiệm $\text{Sol}(f, C)$.

Chứng minh. Ta chia chứng minh thành 6 bước.

Bước 1. Với mỗi $z \in C$, ta chứng minh bất đẳng thức sau được thỏa mãn

$$\|x^{k+1} - z\|^2 \leq \|w^k - z\|^2 - \frac{1}{2}\|w^k - y^k\|^2 + 2\lambda_k f(w^k, z) + 12\beta_k^2. \quad (2.14)$$

Do $\partial_2 f_1(w^k, w^k) + \partial_2 f_2(w^k, w^k) \subset \partial_2 f(w^k, w^k)$, nên tồn tại $u(w^k) \in \partial_2 f(w^k, w^k)$ sao cho

$$u(w^k) = u_1(w^k) + u_2(w^k),$$

với $u_1(w^k) \in \partial_2 f_1(w^k, w^k)$ và $u_2(w^k) \in \partial_2 f_2(w^k, w^k)$. Theo Định nghĩa 1.4, suy ra

$$f(w^k, y) \geq \langle u(w^k), y - w^k \rangle \quad \forall y \in C.$$

Với mỗi $z \in C$, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &= \|y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k)) - z\|^2 \\ &= \|y^k - z\|^2 - 2\lambda_k \langle u_2(w^k) - u_1(w^k), y^k - z \rangle \\ &\quad + \lambda_k^2 \|u_2(w^k) - u_1(w^k)\|^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} \|y^k - z\|^2 &= \|P_C(w^k - 2\lambda_k u_1(w^k)) - z\|^2 \\ &\leq \|w^k - 2\lambda_k u_1(w^k) - z\|^2 - \|w^k - 2\lambda_k u_1(w^k) - y^k\|^2 \\ &= \|w^k - z\|^2 - \|w^k - y^k\|^2 - 2\lambda_k \langle 2u_1(w^k), y^k - z \rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Kết hợp (2.15) và (2.16), ta nhận được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \|w^k - y^k\|^2 - 2\lambda_k \langle u(w^k), w^k - z \rangle \\ &\quad + 2\lambda_k \langle u_2(w^k) + u_1(w^k), w^k - y^k \rangle + \lambda_k^2 \|u_2(w^k) - u_1(w^k)\|^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Tiếp theo, ta đánh giá hai số hạng cuối ở vế phải của (2.17) bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz và $\|u_1(w^k)\| \leq \eta_k$, $\|u_2(w^k)\| \leq \eta_k$ như sau

$$\begin{aligned} 2\lambda_k \langle u_2(w^k) + u_1(w^k), w^k - y^k \rangle &\leq 4 \frac{\beta_k}{\eta_k} \eta_k \|w^k - y^k\| \\ &= 4\beta_k \|w^k - y^k\| \leq 8\beta_k^2 + \frac{1}{2} \|w^k - y^k\|^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\lambda_k^2 \|u_2(w^k) - u_1(w^k)\|^2 \leq 2\lambda_k^2 (\|u_1(w^k)\|^2 + \|u_2(w^k)\|^2) \leq 4\beta_k^2. \quad (2.19)$$

Kết hợp (2.17), (2.18) và (2.19), ta thu được

$$\|x^{k+1} - z\|^2 \leq \|w^k - z\|^2 - \frac{1}{2}\|w^k - y^k\|^2 - 2\lambda_k \langle u(w^k), w^k - z \rangle + 12\beta_k^2 \quad (2.20)$$

$$\leq \|w^k - z\|^2 - \frac{1}{2}\|w^k - y^k\|^2 + 2\lambda_k f(w^k, z) + 12\beta_k^2. \quad (2.21)$$

Bước 2. Ta chứng minh rằng

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle u(w^k), w^k - z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in \text{Sol}(f, C).$$

Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại $z \in \text{Sol}(f, C)$ sao cho

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle u(w^k), w^k - z \rangle > 0.$$

Khi đó, tồn tại $\epsilon > 0$ và \bar{k} sao cho

$$\langle u(w^k), w^k - z \rangle > \epsilon \quad \forall k \geq \bar{k}. \quad (2.22)$$

Bằng đánh giá đơn giản, ta có được

$$\begin{aligned} \|w^k - z\|^2 &\leq \|v^k - z\|^2 \\ &= \|(1 + \alpha_k)(x^k - z) - \alpha_k(x^{k-1} - z)\|^2 \\ &= (1 + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - z\|^2 + \alpha_k(1 + \alpha_k)\|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ &\leq (1 + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - z\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Theo đó, từ (2.21), ta suy ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 - \|x^k - z\|^2 &\leq \alpha_k(\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2) - \frac{1}{2}\|y^k - w^k\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + 2\lambda_k f(w^k, z) + 12\beta_k^2 \\ &\leq \alpha_k(\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2) + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + 12\beta_k^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Do đó, ta có các đánh giá sau

$$\|x^{k+1} - z\|^2 - \|x^k - z\|^2 \leq \alpha_k(\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2) + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + 12\beta_k^2, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|y^k - w^k\|^2 &\leq \|x^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 + \alpha_k(\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2) \\ &\quad + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + 12\beta_k^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Áp dụng Bổ đề 1.2 cho (2.25) với các thông tin sau

$$\phi_k := \|x^k - z\|^2, \quad \delta_k := 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + 12\beta_k^2, \quad (2.27)$$

trong đó $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$ (sử dụng (2.1) và (2.6)), ta suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\|$ tồn tại. Điều này kéo theo dãy $\{x^k\}$ và do đó dãy $\{w^k\}$ cũng bị chặn. Sử dụng sự hội tụ của $\{\phi_k\}$ và hội tụ tới 0 của $\{\delta_k\}$ khi $k \rightarrow \infty$, qua giới hạn biểu thức (2.26), ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - w^k\| = 0. \quad (2.28)$$

Hơn nữa, từ (2.20) ta suy ra

$$\frac{\beta_k}{\eta_k} \langle u(w^k), w^k - z \rangle \leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 + 12\beta_k^2. \quad (2.29)$$

Kết hợp (2.23) và (2.29) ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 - \|x^k - z\|^2 &\leq \alpha_k (\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2) - \frac{\beta_k}{\eta_k} \langle u(w^k), w^k - z \rangle \\ &\quad + 2\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 + 12\beta_k^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Áp dụng Bổ đề 1.2 cho (2.30), ta suy ra dãy $\{\|x^k - z\|\}$ hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} [\theta_k]_+ < \infty$, trong đó

$$\theta_k = \phi_k - \phi_{k-1}, \quad [t]_+ = \max\{t, 0\}.$$

Mặt khác, từ (2.30) ta có

$$\frac{\beta_k}{\eta_k} \langle u(w^k), w^k - z \rangle \leq \phi_k - \phi_{k+1} + \theta[\theta_k]_+ + \delta_k \quad (2.31)$$

và suy ra rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\eta_k} \langle u(w^k), w^k - z \rangle \leq \phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta[\theta_k]_+ + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty. \quad (2.32)$$

Hơn nữa, sử dụng tính bị chặn của dãy $\{w^k\}$ và giả thiết **(A5)**, suy ra tồn tại $M > 0$ sao cho $\|u_1(w^k)\| \leq M$, $\|u_2(w^k)\| \leq M$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Vì vậy, ta có thể lấy $L \geq \max\{1, M\}$ sao cho với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(w^k)\|, \|u_2(w^k)\|\} \leq L. \quad (2.33)$$

Sử dụng (2.33) kết hợp với (2.22) và (2.32), ta nhận được $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k < \infty$, điều này trái với giả sử $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$. Do đó, ta thu được điều cần chứng minh.

Bước 3. Chứng minh dãy $\{x^k\}$ là tựa-Fejér đối với tập nghiệm.

Lấy $z \in \text{Sol}(f, C)$. Từ (2.31), ta có

$$\|x^{k+1} - z\|^2 \leq \|x^k - z\|^2 + \theta[\theta_k]_+ + \delta_k. \quad (2.34)$$

Theo Định nghĩa 1.6, suy ra điều cần chứng minh.

Bước 4. Ta chứng minh rằng

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f(w^k, z) = 0 \quad \forall z \in \text{Sol}(f, C).$$

Lấy $z \in \text{Sol}(f, C)$. Sử dụng định nghĩa của dưới vi phân và f giả đơn điệu trên C đối với $\text{Sol}(f, C)$, ta nhận được

$$0 \geq f(w^k, z) \geq \langle u(w^k), z - w^k \rangle \quad \forall z \in \text{Sol}(f, C).$$

Vì vậy, theo chứng minh của **Bước 2**, ta thu được

$$0 \leq -\limsup_{k \rightarrow \infty} f(w^k, z) = \liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(w^k, z)] \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle u(w^k), w^k - z \rangle \leq 0,$$

từ đó ta suy ra điều cần chứng minh.

Bước 5. Ta chứng minh rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0. \quad (2.35)$$

Đầu tiên, ta thu được ngay

$$\|v^k - x^k\| = \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| \rightarrow 0 \quad \text{khi } k \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Tiếp theo, dễ dàng nhận thấy rằng với mọi $z \in C$, ta có

$$\|x^{k+1} - v^k\|^2 = \|v^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 + 2\langle x^{k+1} - v^k, x^{k+1} - z \rangle. \quad (2.37)$$

Theo đó, từ (2.23) và (2.37), với $z \in \text{Sol}(f, C)$, ta thu được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - v^k\|^2 &\leq \|x^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 + \alpha_k (\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2) \\ &\quad + 2\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 + 2\langle x^{k+1} - v^k, x^{k+1} - z \rangle. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Mặt khác, vì $w^k = P_C(v^k)$ nên áp dụng Mệnh đề 1.1(1), ta suy ra rằng

$$\langle v^k - w^k, z - w^k \rangle \leq 0,$$

Khi đó, ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned} &\langle v^k - x^{k+1} + x^{k+1} - w^k, z - x^{k+1} + x^{k+1} - w^k \rangle \leq 0 \\ \iff &\langle x^{k+1} - v^k, x^{k+1} - z \rangle \leq \langle x^{k+1} - v^k, x^{k+1} - w^k \rangle + \langle x^{k+1} - z, x^{k+1} - w^k \rangle \\ &\quad - \|x^{k+1} - w^k\|^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Vì $\{x^k\}$ bị chặn, nên từ (2.36) suy ra dãy $\{v^k\}$ cũng bị chặn. Tiếp theo, ta có $\|x^{k+1} - w^k\| \rightarrow 0$, nên từ (2.39), ta có

$$\langle x^{k+1} - v^k, x^{k+1} - z \rangle \rightarrow 0 \quad \text{khi } k \rightarrow \infty,$$

kết hợp điều này với (2.38), ta thu được

$$\|x^{k+1} - v^k\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{khi } k \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

Kết hợp (2.13), (2.36) và (2.40), ta nhận được

$$\|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0 \quad \text{và} \quad \|w^k - x^k\| \rightarrow 0 \quad \text{khi } k \rightarrow \infty. \quad (2.41)$$

Bước 6. Chứng minh rằng $\omega_w(x^k) \subset \text{Sol}(f, C)$.

Lấy $\bar{z} \in \omega_w(x^k)$ và dãy con $\{x^{k_j}\}$ của dãy $\{x^k\}$ sao cho

$$x^{k_j} \rightarrow \bar{z}.$$

Theo **Bước 4**, tồn tại một dãy con $\{w^{k_j}\}$ của $\{w^k\}$ sao cho

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f(w^k, z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(w^{k_j}, z) = 0.$$

Theo (2.41), ta cũng có $w^{k_j} \rightarrow \bar{z}$. Kết hợp giả thiết **(A2)** cùng với **Bước 4**, ta suy ra

$$\begin{aligned} f(\bar{z}, z) &\geq \limsup_{j \rightarrow \infty} f(w^{k_j}, z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} f(w^{k_j}, z) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} f(w^k, z) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Từ giả thiết **(A1')**, ta có $f(z, \bar{z}) \leq 0$, vì vậy

$$f(\bar{z}, z) = 0.$$

Do đó, từ giả thiết **(A4)** suy ra $\bar{z} \in \text{Sol}(f, C)$, điều đó có nghĩa $\omega_w(x^k) \subset \text{Sol}(f, C)$. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới một phần tử của $\text{Sol}(f, C)$. \square

Tiếp theo, chúng tôi xét một dãy ergodic nhằm thiết lập kết quả hội tụ mà không cần giả thiết về tính para-đơn điệu. Cụ thể, dãy được xác định bởi công thức trung bình có trọng số như sau

$$z^k := \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i w^i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i}.$$

Với một số điều kiện nhất định, dãy $\{z^k\}$ được chứng minh là hội tụ đến một điểm thuộc tập nghiệm $\text{Sol}(f, C)$, như được phát biểu trong định lý sau.

Định lý 2.2. *Giả sử các giả thiết (A1), (A3), (A5) và (A6) được thỏa mãn. Khi đó, dãy ergodic $\{z^k\}$ hội tụ yếu tới một phần tử của $\text{Sol}(f, C)$.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.4, để chứng minh dãy $\{z^k\}$ hội tụ yếu tới một điểm trong $\text{Sol}(f, C)$, ta chỉ cần chứng minh rằng mọi điểm tụ yếu của $\{z^k\}$ đều thuộc $\text{Sol}(f, C)$, tức là

$$\omega_w(z^k) \subset \text{Sol}(f, C).$$

Trong phần chứng minh của Định lý 2.1 (**Bước 2**), ta đã chỉ ra dãy $\{w^k\}$ bị chặn. Nói cách khác, tồn tại hằng số $R > 0$ sao cho

$$\|w^k\| \leq R \quad \forall k.$$

Suy ra

$$\|z^k\| \leq \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i \|w^i\|}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \leq R \quad \forall k,$$

tức là dãy $\{z^k\}$ cũng bị chặn.

Xét $z \in C$ tùy ý. Sử dụng tính đơn điệu của f , ta có thể viết lại bất đẳng thức (2.21) dưới dạng

$$\begin{aligned} 2\lambda_k f(z, w^k) &\leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 - \frac{1}{2}\|w^k - y^k\| + 12\beta_k^2 \\ &\leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức tam giác và một vài đánh giá cơ bản, ta có

$$\begin{aligned} 2\lambda_k f(z, w^k) &\leq (\|x^k - z\| + \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|)^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2 \\ &\leq \Gamma_k - \Gamma_{k+1} + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 2\alpha_k \bar{M} \|x^k - x^{k-1}\| \\ &\quad + \alpha_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 + 12\beta_k^2, \end{aligned} \tag{2.42}$$

trong đó, $\Gamma_k = \|x^k - z\|^2$, $\bar{M} := \sup_{k \geq 0} \|x^k - z\|$. Cộng cả hai vế của bất đẳng thức

(2.42) từ $i = 1$ đến k ta được

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^k \lambda_i f(z, w^i) &\leq \sum_{i=1}^k (\Gamma_i - \Gamma_{i+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (2\alpha_i \bar{M} \|x^i - x^{i-1}\| + \alpha_i^2 \|x^i - x^{i-1}\|^2 + \|w^i - x^{i+1}\|^2 + 12\beta_i^2) \\ &= \Gamma_1 - \Gamma_{k+1} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \leq \Gamma_1 + \sum_{i=1}^k \gamma_i, \end{aligned}$$

trong đó, $\gamma_i = 2\alpha_i \overline{M} \|x^i - x^{i-1}\| + \alpha_i^2 \|x^i - x^{i-1}\|^2 + \|w^i - x^{i+1}\|^2 + 12\beta_i^2$. Từ định nghĩa của z^k và tính lồi của $f(z, \cdot)$, ta có

$$\begin{aligned} f(z, z^k) &= f\left(z, \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i w^i}{\sum_{i=1}^k \lambda_i}\right) \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i f(z, w^i)}{\sum_{i=1}^k \lambda_i} \leq \frac{\Gamma_1 + \sum_{i=1}^k \gamma_i}{2 \sum_{i=1}^k \lambda_i}. \end{aligned}$$

Gọi $\bar{x} \in \omega_w(z^k)$, tức là tồn tại dãy con $\{z^{k_j}\}$ sao cho $z^{k_j} \rightarrow \bar{x}$. Khi đó

$$f(z, z^{k_j}) \leq \frac{\Gamma_1 + \sum_{i=1}^{k_j} \gamma_i}{2 \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i}. \quad (2.43)$$

Ta đã biết từ **Bước 2**, Định lý 2.1 rằng $\lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k} \geq \frac{\beta_k}{L}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = \infty$ nên

$$\lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k} \geq \frac{\beta_k}{L}.$$

Do $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = \infty$, nên ta có $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$. Khi đó, sử dụng (2.6), (2.12) và lấy giới hạn khi $j \rightarrow \infty$, ta thu được $\frac{\sum_{i=1}^{k_j} \gamma_i}{\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_i} \rightarrow 0$. Từ đó suy ra

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} f(z, z^{k_j}) \leq 0. \quad (2.44)$$

Do $f(z, \cdot)$ là hàm lồi và nửa liên tục dưới, và $z^{k_j} \rightarrow \bar{x}$, nên theo định lý về giới hạn yếu, ta có

$$f(z, \bar{x}) \leq 0.$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi $z \in C$, nên ta kết luận $\bar{x} \in \text{Sol}(f, C)$. Do đó, mọi điểm tụ yếu của $\{z^k\}$ đều nằm trong $\text{Sol}(f, C)$, và theo Bổ đề 1.4, ta suy ra dãy $\{z^k\}$ hội tụ yếu đến một điểm $z^* \in \text{Sol}(f, C)$. \square

Sự hội tụ mạnh. Ta đã thấy rằng Định lý 2.1 chỉ khẳng định sự hội tụ yếu của dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1. Tuy nhiên, trong trường hợp tập nghiệm của bài toán cân bằng có phần trong khác rỗng, tức là $\text{intSol}(f, C) \neq \emptyset$, thì ta có thể khẳng định sự hội tụ mạnh của dãy này, như được phát biểu trong định lý sau đây.

Định lý 2.3. *Giả sử các giả thiết của Định lý 2.1 thỏa mãn và $\text{intSol}(f, C) \neq \emptyset$. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới một nghiệm của bài toán EP(f, C).*

Chứng minh. Từ bất đẳng thức (2.21), với mọi $z \in \text{Sol}(f, C)$, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \frac{1}{2}\|w^k - y^k\|^2 + 12\beta_k^2 \\
&\leq \|w^k - z\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2 \\
&\leq (\|x^k - z\| + \alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|)^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2 \\
&= \|x^k - z\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - z\|\|x^k - x^{k-1}\| \\
&\quad + \alpha_k^2\|x^k - x^{k-1}\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2 \\
&\leq \|x^k - z\|^2 + 2\alpha_k\overline{M}\|x^k - x^{k-1}\| \\
&\quad + \alpha_k^2\|x^k - x^{k-1}\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2, \quad (2.45)
\end{aligned}$$

với $\overline{M} := \sup_{k \geq 0} \|x^k - z\|$. Cố định $u \in \text{intSol}(f, C)$ và chọn $r > 0$ sao cho $\|v - u\| \leq r$ thì $v \in \text{Sol}(f, C)$. Khi đó, với mọi k sao cho $x^{k+1} \neq x^k$, ta có

$$\left\| x^{k+1} - \left(z - r \frac{x^{k+1} - x^k}{\|x^{k+1} - x^k\|} \right) \right\|^2 \leq \left\| x^k - \left(z - r \frac{x^{k+1} - x^k}{\|x^{k+1} - x^k\|} \right) \right\|^2 + \gamma_k, \quad (2.46)$$

trong đó $\gamma_k := 2\alpha_k\overline{M}\|x^k - x^{k-1}\| + \alpha_k^2\|x^k - x^{k-1}\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2$. Rút gọn bất đẳng thức (2.46), ta thu được

$$2r\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|x^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 + \gamma_k. \quad (2.47)$$

Lấy $M > N$ là các số nguyên dương tùy ý. Cộng (2.47) từ $k = N$ đến $M - 1$, ta được đánh giá sau

$$2r\|x^M - x^N\| \leq \|x^N - z\|^2 - \|x^M - z\|^2 + \sum_{i=N}^{M-1} \gamma_i. \quad (2.48)$$

Do dãy $\{\|x^k - z\|\}$ hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty$ (theo các điều kiện (2.1), (2.6) và (2.12)), nên từ bất đẳng thức (2.48) suy ra rằng $\{x^k\}$ là một dãy Cauchy. Từ đó, ta kết luận rằng $\{x^k\}$ hội tụ mạnh. Hơn nữa, trong chứng minh Định lý 2.1, ta đã chỉ ra rằng mọi điểm tụ yếu của $\{x^k\}$ đều là nghiệm của bài toán EP(f, C). Do vậy, giới hạn của $\{x^k\}$ cũng là nghiệm của EP(f, C). Định lý được chứng minh. \square

Khi song hàm f thỏa mãn tính chất giả đơn điệu mạnh, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán EP(f, C).

Định lý 2.4. *Giả sử rằng các giả thiết (A1''), (A3) và (A5)–(A6) thỏa mãn. Khi đó, hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của EP(f, C).*

Chứng minh. Từ giả thiết (A1''), dễ dàng suy ra rằng bài toán $EP(f, C)$ có nghiệm duy nhất. Mặt khác, theo bất đẳng thức (2.21) và tính γ -giả đơn điệu mạnh của f , với mọi $z \in C$, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 - 2\gamma\lambda_k\|w^k - z\|^2 + 12\beta_k^2 \\
&= (1 - 2\gamma\lambda_k)\|w^k - z\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2 \\
&= (1 - 2\gamma\lambda_k) \left[(1 + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - z\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 \right] \\
&\quad + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2 \\
&= (1 - 2\gamma\lambda_k + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k(1 - 2\gamma\alpha_k)\|x^{k-1} - z\|^2 \\
&\quad + 2\alpha_k(1 - 2\gamma\alpha_k)\|x^k - x^{k-1}\|^2 + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 12\beta_k^2.
\end{aligned}$$

Do $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ nên tồn tại \hat{k} sao cho $1 - 2\gamma\lambda_k > \frac{1}{2}$, $\forall k > \hat{k}$. Vì vậy, với $z = x^* \in \text{Sol}(f, C)$, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - 2\gamma\lambda_k + \alpha_k)\|x^k - x^*\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - x^*\|^2 \\
&\quad + \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + 12\beta_k^2.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Tương tự lập luận trong Định lý 2.2, ta cũng thu được

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty. \tag{2.50}$$

Áp dụng Bổ đề 1.7 với các dãy

$$a_k := \|x^k - x^*\|^2, \quad t_k := 2\gamma\lambda_k, \quad \theta_k := \alpha_k, \quad \delta_k := \|w^k - x^{k+1}\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + 12\beta_k^2,$$

từ bất đẳng thức (2.49) và điều kiện (2.50), ta suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\| = 0.$$

Điều này chứng minh rằng dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất x^* của bài toán $EP(f, C)$, và do đó, chứng minh được hoàn tất. \square

Tiếp theo, chúng tôi trình bày hai biến thể của Thuật toán 2.1. Do quá trình xây dựng và phân tích hội tụ của các thuật toán này tương tự với những kết quả đã được trình bày trước đó, nên chúng tôi sẽ không lặp lại chi tiết ở đây.

1. Dựa trên kết quả đã thiết lập ở phần trước, ta nhận thấy rằng nếu thay thế phép cập nhật

$$x^{k+1} = y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k))$$

bằng phép chiếu lên nửa không gian chứa C

$$x^{k+1} = P_{T_k}(y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k)))$$

thì tính hội tụ của dãy $\{x^k\}$ vẫn được đảm bảo. Điều này cho phép chúng tôi đề xuất một biến thể mới, được mô tả trong Thuật toán 2.2 dưới đây.

Thuật toán 2.2 (Thuật toán phân rã kiểu dưới đạo hàm tăng cường [SESM])

Khởi tạo: Chọn hai dãy số dương $\{\beta_k\}$ và $\{\epsilon_k\}$ thỏa mãn (2.1). Chọn tùy ý các điểm $x^0, x^1 \in C$, $\theta \in [0, 1)$ và đặt $k = 1$.

Bước lặp: Với mỗi $k \geq 1$, từ các điểm x^{k-1} và x^k ($k \geq 1$), chọn α_k sao cho $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$, trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\epsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \frac{\epsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } x^k = x^{k-1}, \end{cases}$$

và tính

$$w^k = P_C(x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1})).$$

Lấy $u_1(w^k) \in \partial_2 f_1(w^k, w^k)$, $u_2(w^k) \in \partial_2 f_2(w^k, w^k)$ và tính

$$\begin{aligned} \eta_k &= \max\{1, \|u_1(w^k)\|, \|u_2(w^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}, \\ y^k &= P_C(w^k - 2\lambda_k u_1(w^k)), \\ x^{k+1} &= P_{T_k}(y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k))), \end{aligned}$$

trong đó $T_k := \{z \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k u_1(w^k) - y^k, z - y^k \rangle \leq 0\}$.

Điều kiện dừng: Nếu $x^{k+1} = y^k = w^k$, thì thuật toán dừng. Ngược lại, đặt $k := k + 1$ và quay lại **Bước lặp**.

2. Nếu thay phép chiếu lên nửa không gian

$$x^{k+1} = P_{T_k}(y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k)))$$

bằng phép chiếu lên C

$$x^{k+1} = P_C(y^k - \lambda_k(u_2(w^k) - u_1(w^k))),$$

và thay cập nhật $w^k = P_C(x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}))$ bằng cập nhật như sau

$$w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}),$$

thì ta thu được Thuật toán 2.3.

Thuật toán 2.3 (Thuật toán phân rã đạo hàm tăng cường kiểu Tseng [TESM])

Khởi tạo: Chọn hai dãy số dương $\{\beta_k\}$ và $\{\epsilon_k\}$ thỏa mãn (2.1). Chọn tùy ý các điểm $x^0, x^1 \in C$, $\theta \in [0, 1)$ và đặt $k = 1$.

Thuật toán 2.3 (Thuật toán phân rã đạo hàm tăng cường kiểu Tseng [TESM])

Bước lặp: Từ x^{k-1} và x^k ($k \geq 1$), chọn α_k sao cho $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$, trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\epsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \frac{\epsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } x^k = x^{k-1}. \end{cases}$$

Tính $w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1})$. Lấy $u_1(x^k) \in \partial_2 f_1(x^k, x^k)$, $u_2(x^k) \in \partial_2 f_2(x^k, x^k)$ và tính

$$\begin{aligned} \eta_k &= \max\{1, \|u_1(x^k)\|, \|u_2(x^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}, \\ y^k &= P_C(w^k - 2\lambda_k u_1(x^k)), \\ x^{k+1} &= P_C(y^k - \lambda_k(u_2(x^k) - u_1(x^k))). \end{aligned}$$

Điều kiện dừng: Nếu $x^{k+1} = y^k = w^k$, thì thuật toán dừng. Ngược lại, đặt $k := k + 1$ và quay lại **Bước lặp**.

2.1.3. Thử nghiệm số và ứng dụng

Trong phần này, chúng tôi áp dụng các Thuật toán 2.1, 2.2 và 2.3 để xấp xỉ nghiệm bài toán cân bằng phát sinh từ *mô hình cân bằng Nash–Cournot trong thị trường điện*. Vấn đề này đã được nghiên cứu trong một số công trình trước đây (xem, chẳng hạn, [25, 92, 109]). Chúng tôi sử dụng hàm chi phí được đề xuất trong [109], là một hàm lồi nhưng không trơn. Do đó, bài toán này không thể chuyển trực tiếp về bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển, do đó tạo ra một bối cảnh tự nhiên để minh họa ưu thế của các thuật toán dựa trên phân rã song hàm và dưới vi phân. Đồng thời, chúng tôi đưa ra một ví dụ về bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp có cấu trúc đơn điệu mạnh và nghiệm duy nhất, về bản chất là một bài toán tương đối “thuận lợi”. Trong trường hợp này, nhiều thuật toán đã biết đều hội tụ nhanh. Do đó, ví dụ này chủ yếu đóng vai trò kiểm chứng tính ổn định và tính đúng đắn của các thuật toán đề xuất.

Ví dụ 2.1 (*Ứng dụng vào mô hình cân bằng Nash–Cournot của thị trường điện*).

Giả sử rằng nguồn cung điện năng cho một thành phố được cung cấp bởi N công ty sản xuất điện cùng với một hệ thống pin năng lượng mặt trời. Khi đó, tổng sản lượng điện trên thị trường được biểu diễn bởi

$$\xi = \sum_{n=1}^N x_n + a,$$

trong đó x_n là sản lượng phát điện của công ty thứ n , với $n = \overline{1, N}$, và a là sản lượng điện do hệ thống pin mặt trời cung cấp, được giả định là không đổi.

Giá thị trường của điện năng, ký hiệu là $\delta(x)$, phụ thuộc vào tổng sản lượng cung ứng và được giả định có dạng

$$\delta(x) = 378.4 - 2 \left(\sum_{n=1}^N x_n + a \right), \quad (2.51)$$

trong đó $x = (x_1, \dots, x_N)^\top$ là vectơ sản lượng của các công ty điện.

Chi phí sản xuất của công ty thứ n được mô hình hóa thông qua một hàm chi phí không trơn, cụ thể

$$\rho_n(x_n) := \max \{ \hat{\rho}_n(x_n), \bar{\rho}_n(x_n) \},$$

trong đó

$$\hat{\rho}_n(x_n) := \frac{\hat{\mu}_n}{2} x_n^2 + \hat{\alpha}_n x_n + \hat{\beta}_n, \quad \bar{\rho}_n(x_n) := \bar{\mu}_n x_n + \frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{\alpha}_n + 1} \bar{\beta}_n^{-1/\bar{\alpha}_n} x_n^{(\bar{\alpha}_n + 1)/\bar{\alpha}_n}.$$

Hàm chi phí $\rho_n(x_n)$ có tính chất lồi nhưng không trơn, phản ánh sự thay đổi trong cấu trúc chi phí khi sản lượng vượt ngưỡng nhất định - điều này có thể xảy ra do thay đổi công nghệ hoặc chi phí biên theo quy mô.

Với $N = 6$, các hằng số của hàm chi phí $\rho_n(x_n)$ được lấy theo Bảng 2.1.

j	$\hat{\mu}_n$	$\hat{\alpha}_n$	$\hat{\beta}_n$	$\bar{\mu}_n$	$\bar{\alpha}_n$	$\bar{\beta}_n$
1	0.0400	2.00	0.00	2.0000	1.0000	25.0000
2	0.0350	1.75	0.00	1.7500	1.0000	28.5714
3	0.1250	1.00	0.00	1.0000	1.0000	8.0000
4	0.0116	3.25	0.00	3.2500	1.0000	86.2069
5	0.0500	3.00	0.00	3.0000	1.0000	20.0000
6	0.0500	3.00	0.00	3.0000	1.0000	20.0000

Bảng 2.1: Các hằng số của hàm chi phí

Hàm lợi nhuận của công ty thứ n được mô hình hóa bởi

$$\nu_n(x) := \delta(x)x_n - \rho_n(x_n) = \left(378.4 - 2 \left[\sum_{k=1}^N x_k + a \right] \right) x_n - \rho_n(x_n). \quad (2.52)$$

Giả sử sản lượng của mỗi công ty bị ràng buộc trong một đoạn xác định, cụ thể $x_n \in [x_n^{\min}, x_n^{\max}]$, với các giá trị được cho trong Bảng 2.2.

Gọi $C := \prod_{n=1}^N [x_n^{\min}, x_n^{\max}] \subset \mathbb{R}^N$ là tập các chiến lược khả thi. Bài toán cân bằng Nash–Cournot được phát biểu như sau: tìm điểm $x^* \in C$ sao cho

$$\nu_n(x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, y_n, x_{n+1}^*, \dots, x_N^*) \leq \nu_n(x_1^*, \dots, x_N^*) \quad \forall y = (y_1, \dots, y_N) \in C, \quad \forall n = \overline{1, N}.$$

n	1	2	3	4	5	6
x_n^{\min}	0	0	0	0	0	0
x_n^{\max}	90	70	100	60	110	50

Bảng 2.2: Giá trị của x_n^{\min} , x_n^{\max}

Dựa theo phương pháp tiếp cận trong [92], bài toán cân bằng Nash–Cournot ở trên có thể được viết lại tương đương dưới dạng bài toán cân bằng sau

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (2.53)$$

trong đó $f(x, y) = \langle (A + \frac{3}{2}B)x + \frac{1}{2}By + s, y - x \rangle + \rho(y) - \rho(x)$, và

$$A := 2 \sum_{n=1}^N \bar{\sigma}^n (\sigma^n)^\top, \quad B := 2 \sum_{n=1}^N \sigma^n (\sigma^n)^\top,$$

$$s := (2a - 378.4) \sum_{n=1}^N \sigma^n, \quad \rho(x) := \sum_{n=1}^N \rho_n(x_n).$$

Khi đó, các vectơ cơ sở $\sigma^n := (\sigma_1^n, \dots, \sigma_N^n)$ và $\bar{\sigma}^n := (\bar{\sigma}_1^n, \dots, \bar{\sigma}_N^n)$ được xác định bởi biểu thức như dưới đây

$$\sigma_m^n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = m, \\ 0 & \text{nếu } n \neq m \end{cases}$$

và $\bar{\sigma}_m^n = 1 - \sigma_m^n$ với mọi $n, m = \overline{1, N}$.

Để thấy song hàm f đơn điệu, para-đơn điệu và thỏa mãn tất cả các giả thiết (A2)–(A6). Hàm ρ khả dưới vi phân và dưới vi phân của nó tại x được xác định bởi $\partial\rho(x) = (\partial\rho_1(x_1), \dots, \partial\rho_N(x_N))^\top$ trong đó, với mỗi $j = \overline{1, N}$

$$\partial\rho_j(x_j) = \begin{cases} \{\hat{\mu}_j x_j + \hat{\alpha}_j\}, & \text{nếu } \hat{\rho}_j(x_j) > \bar{\rho}_j(x_j), \\ \left[\hat{\mu}_j x_j + \hat{\alpha}_j, \bar{\mu}_j + \left(\frac{x_j}{\beta_j}\right)^{1/\bar{\alpha}_j} \right], & \text{nếu } \hat{\rho}_j(x_j) = \bar{\rho}_j(x_j), \\ \left\{ \bar{\mu}_j + \left(\frac{x_j}{\beta_j}\right)^{1/\bar{\alpha}_j} \right\}, & \text{nếu } \hat{\rho}_j(x_j) < \bar{\rho}_j(x_j). \end{cases}$$

Phân rã song hàm f thành hai song hàm thành phần f_1 và f_2 , với

$$f_1(x, y) = \langle (A + \frac{3}{2}B)x + \frac{1}{2}By + s, y - x \rangle \quad \text{và} \quad f_2(x, y) = \rho(y) - \rho(x).$$

Tiếp theo, chúng tôi tiến hành các thử nghiệm số nhằm minh họa hành vi hội tụ và đánh giá hiệu quả tính toán của ba thuật toán đề xuất (iTSM, SESM và TESM), thông qua việc so sánh với tám thuật toán hiện có, cụ thể là: SSA trong

[29, Thuật toán 1], 3-CSA trong [32, Thuật toán 3.1], PSA trong [42, Thuật toán 3.1], PSPM trong [80], SAL trong [5, Thuật toán 1], EGA trong [93, Thuật toán 1], MPA trong [97, Thuật toán 3.1] và SGA trong [96, Thuật toán 3.1]. Trong quá trình áp dụng EGA, chúng tôi sử dụng điều kiện kiểu Lipschitz của song hàm f với các hằng số $c_1 = c_2 = \frac{L}{2}$, trong đó $L = \|A + B\|$. Thiết lập mức phát điện từ hệ thống năng lượng mặt trời là $a = 110$ và tiến hành khảo sát hiệu quả của các thuật toán với ba điểm khởi đầu khác nhau sau:

$$x^a = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top, \quad x^b = (54, 42, 60, 36, 66, 30)^\top, \quad x^c = (90, 70, 100, 60, 110, 50)^\top.$$

Thử nghiệm 1: Trong tính toán này, chúng tôi chọn những tham số như sau:

- Trong thuật toán PSA, $\epsilon_k = 0$, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán SGA, $\xi_k = 0$, $\epsilon_k = 0$, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán MPA, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$, $D = C$.
- Trong thuật toán PSPM, $r_k = \frac{1}{(k+1)^{0.84}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong các thuật toán iTSM, SESM, và TESM, $x^1 = x^0$, $\theta = 0.75$, $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.1}}$,
 $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}}$, $\alpha_k = \bar{\alpha}_k \quad \forall k \geq 1$.

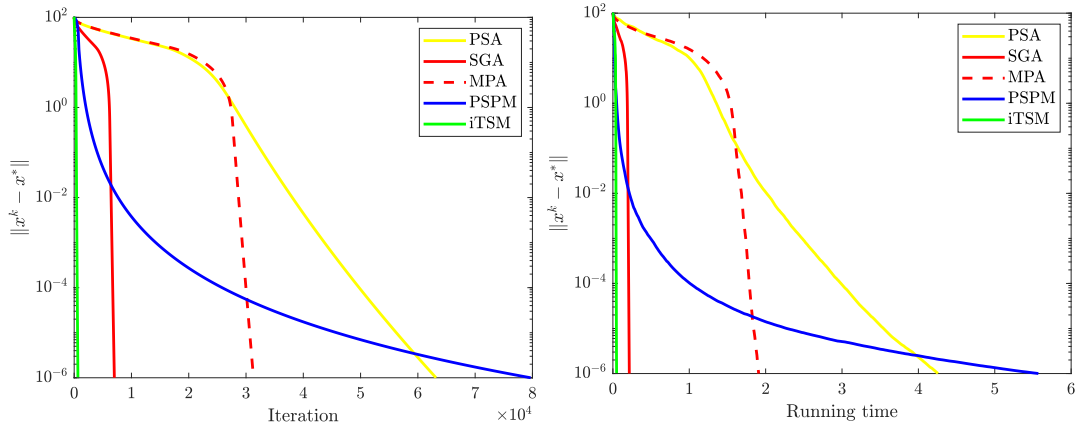
Chúng tôi sử dụng điều kiện $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-6}$ để dừng tất cả các thuật toán, trong đó

$$x^* = (11.3361, 11.4868, 11.3533, 10.8748, 10.7930, 10.7930)^\top$$

là nghiệm gần đúng của bài toán (2.53). Hiệu suất của bảy thuật toán được so sánh trong Bảng 2.3. Hình 2.1 minh họa kết quả của thử nghiệm này với $x^0 = x^b$. Bảng 2.3 và Hình 2.1 cho thấy rằng các thuật toán phân rã kiểu Tseng kết hợp với kỹ thuật quán tính do chúng tôi đề xuất tiêu tốn ít thời gian tính toán và số vòng lặp hơn so với các phương pháp khác như SGA, MPA và PSPM, đặc biệt khi điểm khởi tạo cách xa nghiệm của bài toán. Kết quả này có thể được lý giải bởi việc các thuật toán đề xuất chỉ thao tác trực tiếp với từng song hàm thành phần trong mỗi bước lặp, thay vì xử lý toàn bộ song hàm gốc như các thuật toán nêu trên. Ngoài ra, so với thuật toán chiếu phân rã PSA vốn triển khai theo cơ chế song song, phương pháp của chúng tôi - với cấu trúc tuần tự kết hợp yếu tố quán tính - vẫn đạt được hiệu quả cao hơn, cho thấy ưu thế rõ rệt về hiệu quả tính toán trong thực nghiệm.

	$x^0 = x^a$		$x^0 = x^b$		$x^0 = x^c$	
	Running time	Iter.	Running time	Iter.	Running time	Iter.
PSA	0.4274	12417	4.2556	63172	61.8338	167691
SGA	0.0134	542	0.2149	7013	0.8056	24257
MPA	0.0837	2210	1.9088	31303	13.8827	110342
PSPM	0.6335	18847	5.5718	79695	78.3686	210691
iTSM	0.0089	118	0.0488	653	0.0893	1748
SESM	0.0040	117	0.0358	652	0.0492	1747
TESM	0.0036	126	0.0690	652	0.0488	1747

Bảng 2.3: Hiệu suất của các thuật toán PSA, SGA, MPA, PSPM, iTSM, SESM và TESM trong Thử nghiệm 1



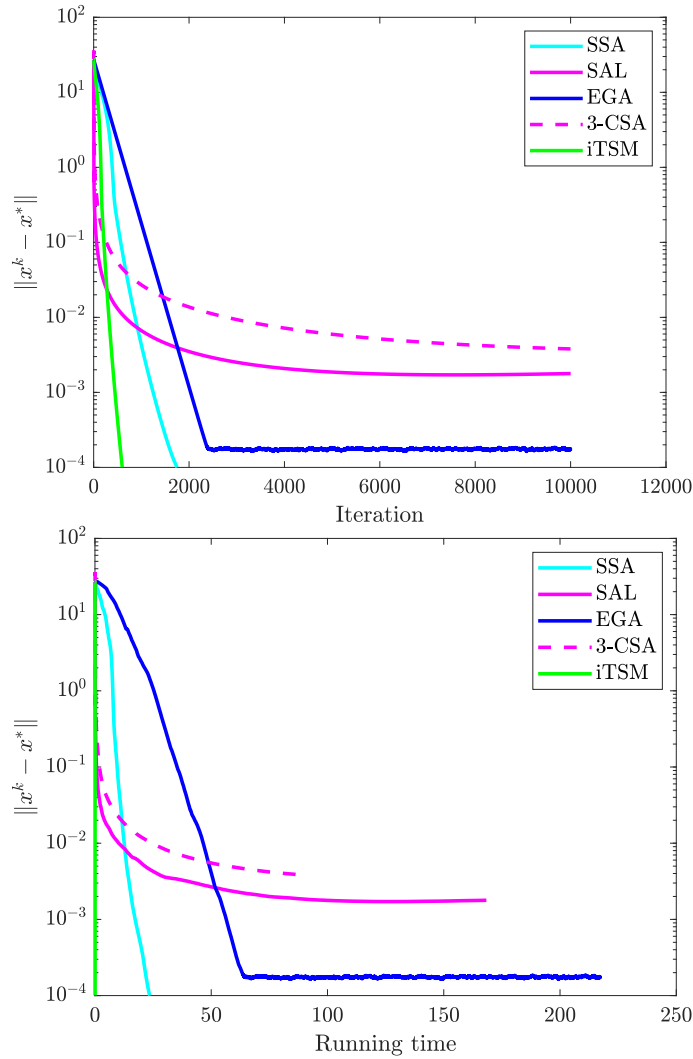
Hình 2.1: So sánh hiệu suất giữa thuật toán iTSM và các thuật toán PSA, SGA, MPA và PSPM, với $x^0 = x^b$ trong Thử nghiệm 1

Thử nghiệm 2: Ta chọn các tham số như sau:

- Trong thuật toán SSA, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán SAL, $\lambda_k = \frac{1}{k+5} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán EGA, $\rho = 0.1$, $G(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$.
- Trong thuật toán 3-CSA, $f_1(x, y) = \langle (A + \frac{3}{2}B)x, y - x \rangle$, $f_2(x, y) = \langle \frac{1}{2}By + s, y - x \rangle$, $f_3(x, y) = \rho(y) - \rho(x)$, $\lambda_k = \frac{1}{k+5} \quad \forall k \geq 1$.

- Trong các thuật toán iTSM, SESM, và TESM, $x^1 = x^0$, $\theta = 0.4$, $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.1}}$,
 $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}}$, $\alpha_k = \bar{\alpha}_k \quad \forall k \geq 1$.

Sử dụng ước lượng $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-4}$ hoặc số bước lặp không vượt quá 10^4 là điều kiện dừng của tất cả các thuật toán. Kết quả được tổng hợp trong Bảng 2.7 và Hình 2.2. Nhận thấy rằng, trong hầu hết các trường hợp, các thuật toán chiếu phân rã kiểu Tseng mà chúng tôi đề xuất tiêu tốn ít thời gian hơn so với các thuật toán SSA, SAL, EGA, 3-CSA. Lý do vì các Thuật toán 2.1, 2.2, 2.3 tại mỗi bước lặp, ta chỉ cần các phép chiếu, trong khi đó, các thuật toán còn lại, tại mỗi bước lặp, ta phải giải các bài toán quy hoạch lồi tổng quát hoặc bài toán quy hoạch toàn phương với song hàm gốc hoặc các song hàm thành phần, có chi phí tính toán đắt hơn.



Hình 2.2: So sánh hiệu suất giữa thuật toán iTSM và các thuật toán SSA, SAL, EGA và 3-CSA, với $x^0 = x^a$ trong Thử nghiệm 2

	$x^0 = x^a$			$x^0 = x^b$			$x^0 = x^c$		
	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error
Alg. SSA	23.5605	1750	9.9804e - 05	105.9169	10 ⁴	6.8689e - 04	143.4659	10 ⁴	52.3455
Alg. SAL	168.4003	10 ⁴	0.0018	121.3766	10 ⁴	0.0018	201.7582	10 ⁴	1.7 * 10 ⁻³
Alg. EGA	217.4295	10 ⁴	0.0018	209.7819	10 ⁴	1.7578e - 04	250.1974	10 ⁴	1.7500e - 04
Alg. 3-CSA	91.5485	10 ⁴	0.0038	90.4312	10 ⁴	0.0038	100.2481	10 ⁴	0.0037
Alg. iTSM	0.0608	599	9.9131e - 05	0.2364	3631	9.9540e - 05	0.8466	10 ⁴	9.9832e - 05
Alg. SESM	0.0239	599	9.9131e - 05	0.1457	3631	9.9540e - 05	0.7311	10 ⁴	9.9832e - 05
Alg. TESM	0.0298	612	9.9131e - 05	0.2237	3631	9.9540e - 05	0.6190	10 ⁴	9.9832e - 05

Bảng 2.4: Hiệu suất của các thuật toán SSA, SAL, EGA, 3-CSA, iTSM, SESM và TESM trong Thử nghiệm 2, Ví dụ 2.1

Ví dụ 2.2 (*Áp dụng cho bất đẳng thức biến phân hỗn hợp*).

Trong ví dụ này, ta so sánh thuật toán được đề xuất với các thuật toán đã được nêu trong Ví dụ 2.1. Xét bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp, đã được xét trong các tài liệu [88, 89], như sau:

$$\text{Tìm } x \in C \text{ sao cho } \langle Ax + P(x), y - x \rangle + \varphi(y) - \varphi(x) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

trong đó, tập chấp nhận được $C \subset \mathbb{R}^5$ được cho bởi

$$C := \{x \in \mathbb{R}^5 : -5 \leq x_i \leq 5 \quad \forall i = 1, \dots, 5\}, \quad \varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \|x\|^2,$$

$$G : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad G(x) = Ax + P(x),$$

với ma trận A được lấy như sau

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

và $P : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ là ánh xạ gần kề của $h(x) := \frac{\|x\|^4}{4}$, tức là,

$$P(x) := \operatorname{argmin} \left\{ \frac{\|y\|^4}{4} + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 : y \in \mathbb{R}^5 \right\}.$$

Chú ý rằng việc tính toán giá trị của P có thể tốn kém vì chúng ta phải giải các bài toán lồi mạnh.

- Trong ba thuật toán mà chúng tôi đề xuất, thuật toán SAL, PSA, và SSA, lấy $f_1(x, y) := \langle Ax + P(x), y - x \rangle$, $f_2(x, y) := \varphi(y) - \varphi(x)$ và $f := f_1 + f_2$.
- Trong thuật toán 3-CSA, lấy $f_1(x, y) := \langle Ax, y - x \rangle$, $f_2(x, y) := \langle P(x), y - x \rangle$, $f_3(x, y) := \varphi(y) - \varphi(x)$ và $f := f_1 + f_2 + f_3$.

Ta có thể chứng minh song hàm f giả đơn điệu mạnh. Thật vậy, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^5$, ta xét

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, x) &= \langle (Ax - Ay) + (P(x) - P(y)) + (x - y) + (y - x), y - x \rangle \\ &= \langle A(x - y) + P(x) - P(y), y - x \rangle = -\langle A(x - y), x - y \rangle - \langle P(x) - P(y), x - y \rangle. \end{aligned}$$

Vì A là ma trận đối xứng với các giá trị riêng dương, nên tồn tại $\mu > 0$ sao cho

$$\langle A(x - y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2.$$

Mặt khác, $h(x)$ là một hàm lồi mạnh, nên $P(x)$ là ánh xạ đơn điệu mạnh, do đó tồn tại hằng số $\eta > 0$ sao cho

$$\langle P(x) - P(y), x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta có đánh giá

$$f(x, y) + f(y, x) = -\langle A(x - y), x - y \rangle - \langle P(x) - P(y), x - y \rangle \leq -(\mu + \eta)\|x - y\|^2.$$

Vậy nếu $f(x, y) \geq 0$, thì

$$f(y, x) \leq -(\mu + \eta)\|x - y\|^2.$$

Điều đó có nghĩa song hàm f giả đơn điệu mạnh. Ta cũng dễ dàng chính mình được song hàm f para-đơn điệu. Thật vậy, giả sử $x \in \text{Sol}(f, C)$ và $f(y, x) = 0$, ta cần chứng minh $y \in \text{Sol}(f, C)$. Do $x \in \text{Sol}(f, C)$, ta có $f(x, y) \geq 0$, kết hợp tính giả đơn điệu mạnh, suy ra rằng

$$f(y, x) \leq -(\mu + \eta)\|x - y\|^2.$$

Kết hợp điều kiện $f(y, x) = 0$, ta được

$$0 \leq -(\mu + \eta)\|x - y\|^2 \Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow x = y.$$

Khi đó, ta có điều sau

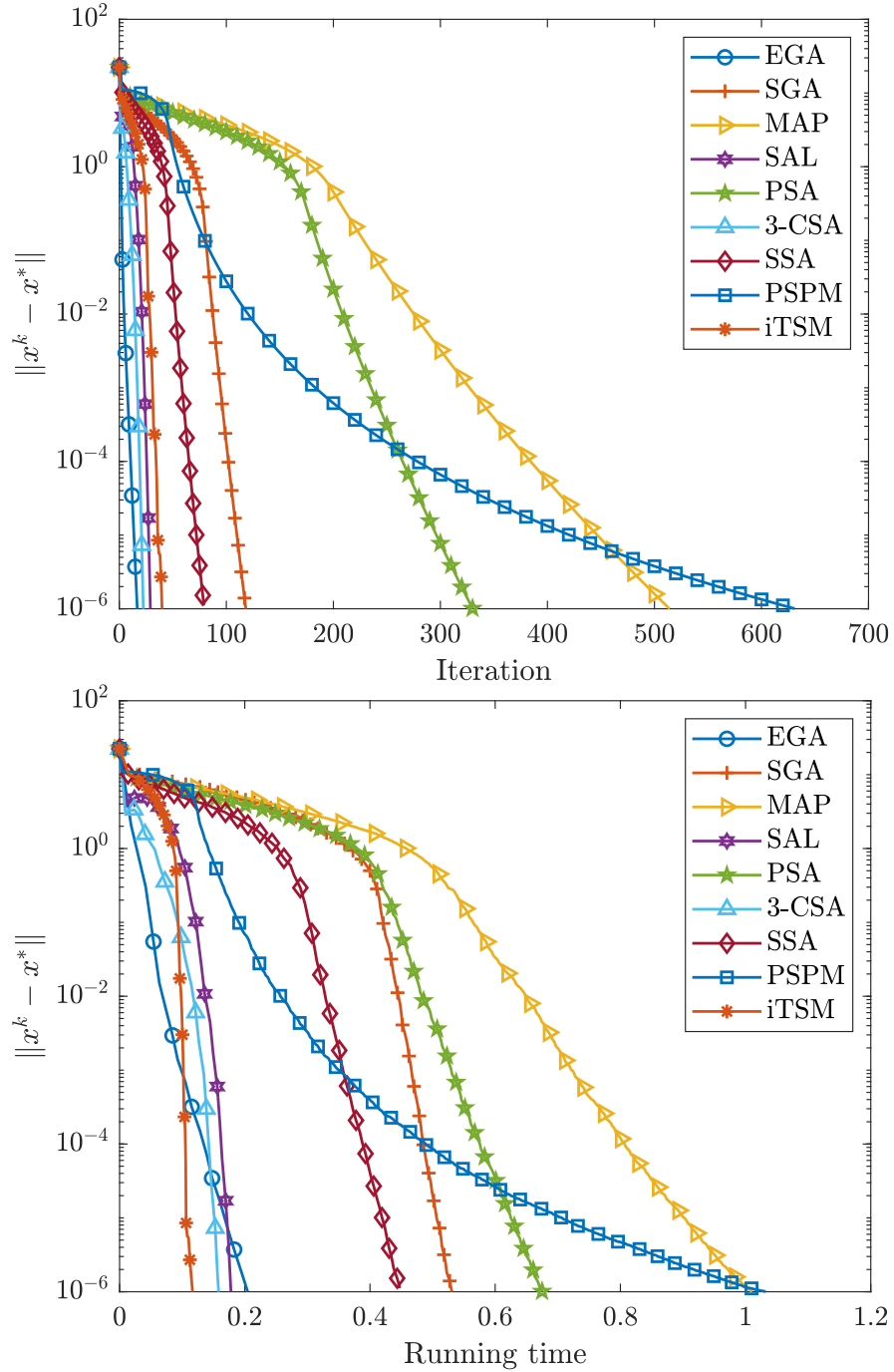
$$f(y, z) = f(x, z) \geq 0 \quad \forall z \in C.$$

Do đó, tính para-đơn điệu của song hàm f được thỏa mãn. Hơn nữa, ta cũng có thể chứng minh được song hàm f và các song hàm thành phần thỏa mãn các điều kiện của các Định lý 2.1, 2.2, 2.3. Mặt khác, ánh xạ P là không giãn và các hằng số Lipschitz của f (được định nghĩa trong [26]) là $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}(\|A\| + 1)$.

Áp dụng các thuật toán đã đề cập trong Ví dụ 2.1 nhằm xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp đang xét với các tham số được lựa chọn phù hợp như sau:

- Trong thuật toán EGA, $\rho = 0.2$, $G(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$.
- Trong thuật toán SGA, $\xi_k = 0$, $\epsilon_k = 0$, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{k^{0.6}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán MPA, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{k^{0.6}} \quad \forall k \geq 1$, $D = C$.
- Trong thuật toán SAL và 3-CSA, $\lambda_k = \frac{1}{k^{0.6}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán PSA, $\epsilon_k = 0$, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{k^{0.6}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán PSPM, $r_k = \frac{1}{(k + 1)^{0.84}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong các thuật toán iTSM, SESM, TESM, $x^1 = x^0$, $\theta = 0.2$, $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.1}}$,
 $\beta_k = \frac{1}{k^{0.6}}$, $\alpha_k = \bar{\alpha}_k \quad \forall k \geq 1$.

Tất cả các thuật toán đều sử dụng cùng một điểm xuất phát và cùng một tiêu chuẩn dừng: $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-6}$, trong đó $x^* = (0, 0, 0, 0, 0)^\top$ là nghiệm duy nhất của bài toán đang xét. Kết quả được trình bày trong Hình 2.3 và Bảng 2.5. Kết quả thực nghiệm cho thấy hiệu quả của việc sử dụng phương pháp phân rã và kết hợp kỹ thuật quán tính trong các thuật toán mà chúng tôi đề xuất.



Hình 2.3: So sánh hiệu suất thuật toán iTSM với các thuật toán EGA, SGA, MPA, SAL, PSA, 3-CSA, SSA và PSPM, với $x^0 = (10, 10, 10, 10, 10)^\top$

	$x^0 = (1, 2, 3, 4, 5)^T$		$x^0 = (5, 5, 5, 5, 5)^T$		$x^0 = (10, 10, 10, 10, 10)^T$		$x^0 = (-3, -5, 2, -4, 4)^T$		$x^0 = \text{randi}([110], 5, 1)$	
	Times	Iter.	Times	Iter.	Times	Iter.	Times	Iter.	Times	Iter.
Alg. EGA	0.1906	16	0.1743	17	0.2075	17	0.1942	19	0.2564	19
Alg. SGA	0.2473	50	0.4295	101	0.5581	119	0.3074	61	0.4651	102
Alg. MPA	0.6344	283	1.0454	484	1.0130	515	0.7272	329	0.9714	452
Alg. SAL	0.1908	30	0.1613	30	0.1823	30	0.1714	30	0.1733	30
Alg. PSA	0.3316	144	0.5978	299	0.6761	331	0.3665	163	0.5953	269
Alg. 3-CSA	0.1340	23	0.1242	23	0.1611	23	0.1571	25	0.1341	23
Alg. SSA	0.2245	37	0.4045	68	0.4532	79	0.2212	41	0.3423	65
Alg. PSPM	0.8672	423	1.2330	630	1.0336	631	0.8154	455	1.0855	624
Alg. iTSM	0.0891	26	0.1175	39	0.1168	40	0.0886	28	0.1238	34
Alg. SESM	0.0573	26	0.0855	39	0.0865	40	0.0567	28	0.0676	34
Alg. TESM	0.0501	26	0.1045	39	0.1115	46	0.0447	28	0.1071	39

Bảng 2.5: Hiệu suất của các thuật toán EGA, SGA, MPA, SAL, PSA, 3-CSA, SSA PSPM, iTSM, SESM và TESM trong Ví dụ 2.2 với các điểm khởi đầu khác nhau

2.2. Phương pháp phân rã một phép chiếu

2.2.1. Động lực xây dựng phương pháp phân rã một phép chiếu

Trong nhiều ứng dụng thực tế, khi tập chấp nhận được có cấu trúc phức tạp hoặc khi bài toán con liên quan đến song hàm có độ phức tạp cao, chi phí tính toán của các phương pháp phải thực hiện nhiều bước chiếu hoặc giải nhiều bài toán con tại mỗi vòng lặp thường trở thành nút thắt chính cần giải quyết. Xuất phát từ thực tế đó, phương pháp một phép chiếu được đề xuất với mục tiêu giảm đáng kể chi phí trên mỗi vòng lặp bằng cách xây dựng một công thức cập nhật chỉ sử dụng một phép chiếu duy nhất, trong đó kết hợp kỹ thuật quán tính và hiệu chỉnh, qua đó vẫn bảo đảm hội tụ dưới các giả thiết thích hợp, đồng thời tạo ra một khuôn khổ thuật toán gọn nhẹ, linh hoạt, phù hợp cho thực nghiệm tính toán.

2.2.2. Xây dựng thuật toán và phân tích hội tụ

Thuật toán phân rã một phép chiếu mà chúng tôi đề xuất được thiết kế như dưới đây.

Thuật toán 2.4 (Thuật toán phân rã một phép chiếu giải bài toán cân bằng [oPSM])

Khởi tạo: Chọn hai dãy số tham số $\{\epsilon_k\}$ và $\{\beta_k\}$ thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty. \quad (2.54)$$

Chọn tùy ý các điểm $x^1, y^0, y^1 \in C$, $\theta \in [0, 1)$ và đặt $k = 1$.

Bước lặp: Từ x^k, y^{k-1} và y^k ($k \geq 1$), chọn α_k sao cho $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$, trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\epsilon_k}{\|y^k - y^{k-1}\|}, \frac{\epsilon_k}{\|y^k - y^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } y^k \neq y^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } y^k = y^{k-1}, \end{cases} \quad (2.55)$$

và tính $w^k = y^k + \alpha_k(y^k - y^{k-1})$. Lấy $u_1(x^k) \in \partial_2 f_1(x^k, x^k)$, $u_2(x^k) \in \partial_2 f_2(x^k, x^k)$, thực hiện các cập nhật sau

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(x^k)\|, \|u_2(x^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k}, \quad (2.56)$$

$$x^{k+1} = P_C(w^k - \lambda_k u_1(x^k)), \quad (2.57)$$

$$y^{k+1} = x^{k+1} - \lambda_k u_2(x^k). \quad (2.58)$$

Điều kiện dừng: Nếu $\|x^k - x^{k+1}\| + \|y^{k+1} - w^k\| = 0$, thì dừng thuật toán. Ngược lại, đặt $k := k + 1$ và quay lại **Bước lặp**.

Chú ý 2.2. (1) Khác với các thuật toán phân rã được giới thiệu trong các công trình trước như [5, 29, 32, 33], vốn yêu cầu giải từ hai đến ba bài toán tối ưu lồi mạnh tại mỗi vòng lặp, hoặc sử dụng hai phép chiếu trong [42], Thuật toán 2.4 mà chúng tôi đề xuất chỉ cần một phép chiếu duy nhất lên tập chấp nhận được tại mỗi bước lặp. Điều này giúp giảm đáng kể chi phí tính toán và phù hợp hơn với các bài toán có cấu trúc phức tạp.

(2) Từ (2.55) suy ra rằng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|y^k - y^{k-1}\| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \|y^k - y^{k-1}\|^2 < \infty. \quad (2.59)$$

(3) Theo (2.58), ta có

$$\|y^{k+1} - x^{k+1}\| = \lambda_k \|u_2(x^k)\| \leq \beta_k \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty. \quad (2.60)$$

Do đó, ta cũng nhận được $\|y^k - x^k\| \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$. Nghĩa là khoảng cách giữa hai dãy lặp $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ sẽ dần về 0 theo số vòng lặp, đảm bảo tính hội tụ của thuật toán.

Trước khi phân tích sự hội tụ của Thuật toán 2.4, chúng tôi trình bày một bổ đề có vai trò then chốt cho các lập luận sau.

Bổ đề 2.3. Nếu $x^{k+1} = x^k$ và $y^{k+1} = w^k$ thì $x^k \in \text{Sol}(f, C)$.

Chứng minh. Trước tiên, do $\partial_2 f_1(x^k, x^k) + \partial_2 f_2(x^k, x^k) \subset \partial_2 f(x^k, x^k)$, tức là tồn tại $u(x^k) \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ sao cho $u(x^k) = u_1(x^k) + u_2(x^k)$, trong đó $u_1(x^k) \in \partial_2 f_1(x^k, x^k)$ và $u_2(x^k) \in \partial_2 f_2(x^k, x^k)$. Theo định nghĩa của dưới vi phân đường chéo, ta có điều sau

$$f(x^k, y) \geq \langle u(x^k), y - x^k \rangle \quad \forall y \in C. \quad (2.61)$$

Nếu $x^{k+1} = x^k$ và $y^{k+1} = w^k$ thì theo (2.57), (2.58) và Mệnh 1.1(1), ta có đánh giá sau

$$\langle x^k - \lambda_k u_1(x^k) - u_2(x^k) - x^k, y - x^k \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C, \quad (2.62)$$

hoặc tương đương,

$$\langle u(x^k), y - x^k \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.63)$$

Do đó, từ (2.61) và (2.63), ta nhận được

$$f(x^k, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (2.64)$$

Vì vậy, $x^k \in \text{Sol}(f, C)$. □

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một bổ đề quan trọng, đóng vai trò hỗ trợ chứng minh sự hội tụ của Thuật toán 2.4.

Bổ đề 2.4. *Giả sử rằng $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ là hai dãy sinh bởi Thuật toán 2.4. Khi đó, với mỗi $z \in C$, bất đẳng thức sau được thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 - 2\lambda_k \langle u(x^k), x^k - z \rangle \\ &\quad + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Chứng minh. Chọn $u(x^k) \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ sao cho

$$u(x^k) = u_1(x^k) + u_2(x^k), \quad (2.66)$$

trong đó $u_1(x^k) \in \partial_2 f_1(x^k, x^k)$ và $u_2(x^k) \in \partial_2 f_1(x^k, x^k)$. Với mỗi $z \in C$, theo định nghĩa của y^{k+1} , ta có

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - z\|^2 &= \|x^{k+1} - \lambda_k u_2(x^k) - z\|^2 \\ &= \|x^{k+1} - z\|^2 - 2\lambda_k \langle u_2(x^k), x^{k+1} - z \rangle + \lambda_k^2 \|u_2(x^k)\|^2. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Mặt khác, theo định nghĩa của x^{k+1} , ta có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - \lambda_k u_1(x^k) - z\|^2 - \|w^k - \lambda_k u_1(x^k) - x^{k+1}\|^2 \\ &= \|w^k - z\|^2 - \|w^k - x^{k+1}\|^2 - 2\lambda_k \langle u_1(x^k), x^{k+1} - z \rangle. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Kết hợp hai bất đẳng thức (2.67) và (2.68), ta thu được

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 - 2\lambda_k \langle u(x^k), x^{k+1} - z \rangle + \lambda_k^2 \|u_2(x^k)\|^2 \\ &= \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 - 2\lambda_k \langle u(x^k), x^k - z \rangle \\ &\quad - 2\lambda_k \langle u(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \lambda_k^2 \|u_2(x^k)\|^2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Áp dụng tính không giãn của ánh xạ chiếu P_C và từ các biểu thức (2.57), (2.58) và (2.60), ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &\leq \|w^k - \lambda_k u_1(x^k) - x^k\| \leq \|y^k - x^k\| + \alpha_k \|y^k - y^{k-1}\| + \lambda_k \|u_1(x^k)\| \\ &\leq \beta_{k-1} + \epsilon_k + \beta_k, \end{aligned} \quad (2.70)$$

do đó

$$\|x^{k+1} - x^k\|^2 \leq (\epsilon_k + \beta_k + \beta_{k-1})^2. \quad (2.71)$$

Tiếp theo, áp dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwarz và giả thiết $\|u_1(w^k)\| \leq \eta_k$, $\|u_2(w^k)\| \leq \eta_k$, ta có ước lượng số hạng thứ tư ở vế phải của (2.69) như sau

$$\begin{aligned} 2\lambda_k \langle u(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle &\leq 4\beta_k \|x^{k+1} - x^k\| \\ &\leq 2\|x^{k+1} - x^k\|^2 + 2\beta_k^2 \leq 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Kết hợp (2.61), (2.69) và (2.72), ta có

$$\|y^{k+1} - z\|^2 \leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 - 2\lambda_k \langle u(x^k), x^k - z \rangle + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2 \quad (2.73)$$

$$\leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 + 2\lambda_k f(x^k, z) + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \quad (2.74)$$

Suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. \square

Định lý dưới đây thiết lập tính hội tụ yếu của Thuật toán 2.4.

Định lý 2.5. *Giả sử rằng các điều kiện (A1'), (A2)–(A6) được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.4 hội tụ yếu đến một điểm thuộc tập nghiệm $\text{Sol}(f, C)$.*

Chứng minh. Chúng ta tiến hành chứng minh định lý thông qua ba bước như được trình bày sau đây.

Bước 1: Chứng minh rằng

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle u(x^k), x^k - z \rangle \leq 0 \quad \forall z \in \text{Sol}(f, C). \quad (2.75)$$

Giả sử ngược lại, tức là tồn tại $z \in \text{Sol}(f, C)$ sao cho

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle u(x^k), x^k - z \rangle > 0. \quad (2.76)$$

Khi đó, tồn tại một hằng số $\epsilon > 0$ và chỉ số \bar{k} sao cho

$$\langle u(x^k), x^k - z \rangle > \epsilon \quad \forall k \geq \bar{k}. \quad (2.77)$$

Áp dụng đánh giá của chuẩn, ta có

$$\begin{aligned} \|w^k - z\|^2 &= \|(1 + \alpha_k)(y^k - z) - \alpha_k(y^{k-1} - z)\|^2 \\ &= (1 + \alpha_k)\|y^k - z\|^2 - \alpha_k\|y^{k-1} - z\|^2 + \alpha_k(1 + \alpha_k)\|y^k - y^{k-1}\|^2 \\ &\leq (1 + \alpha_k)\|y^k - z\|^2 - \alpha_k\|y^{k-1} - z\|^2 + 2\alpha_k\|y^k - y^{k-1}\|^2. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Từ bất đẳng thức (2.74), suy ra

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - z\|^2 - \|y^k - z\|^2 &\leq \alpha_k(\|y^k - z\|^2 - \|y^{k-1} - z\|^2) - \|w^k - x^{k+1}\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_k\|y^k - y^{k-1}\|^2 + 2\lambda_k f(x^k, z) + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2 \\ &\leq \alpha_k(\|y^k - z\|^2 - \|y^{k-1} - z\|^2) \\ &\quad + 2\alpha_k\|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Từ đó, ta thu được

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - z\|^2 - \|y^k - z\|^2 &\leq \alpha_k(\|y^k - z\|^2 - \|y^{k-1} - z\|^2) + 2\alpha_k\|y^k - y^{k-1}\|^2 \\ &\quad + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2 \end{aligned} \quad (2.80)$$

và thêm vào đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|w^k - x^{k+1}\|^2 &\leq \|y^k - z\|^2 - \|y^{k+1} - z\|^2 + \alpha_k(\|y^k - z\|^2 - \|y^{k-1} - z\|^2) \\ &\quad + 2\alpha_k\|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Áp dụng Bổ đề 1.2 cho bất đẳng thức (2.80) với các dãy

$$\phi_k := \|y^k - z\|^2, \quad \delta_k := 2\alpha_k\|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2, \quad (2.82)$$

và lưu ý rằng $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$ (nhờ vào (2.54), (2.55) và (2.59)), ta kết luận rằng dãy $\{\|y^k - z\|\}$ hội tụ. Điều này kéo theo tính bị chặn của $\{y^k\}$, và do đó, dãy $\{w^k\}$ cũng bị chặn. Qua giới hạn biểu thức (2.81) và sử dụng sự hội tụ của dãy $\{\phi_k\}$, $\{\delta_k\}$ hội tụ về 0 khi k tiến tới ∞ , ta có điều sau

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - x^{k+1}\| = 0. \quad (2.83)$$

Hơn nữa, từ (2.73), ta có

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 - 2\lambda_k \langle u(x^k), x^k - z \rangle \\ &\quad + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Kết hợp (2.78) và (2.84), ta thu được

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - z\|^2 - \|y^k - z\|^2 &\leq \alpha_k(\|y^k - z\|^2 - \|y^{k-1} - z\|^2) - 2\frac{\beta_k}{\eta_k} \langle u(x^k), x^k - z \rangle \\ &\quad + 2\alpha_k\|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Một lần nữa, áp dụng Bổ đề 1.2 với

$$\phi_k := \|y^k - z\|^2, \quad \delta_k := 2\alpha_k\|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2, \quad (2.86)$$

suy ra dãy $\{\|y^k - z\|\}$ hội tụ và $\sum_{k=1}^{\infty} [\theta_k]_+ < \infty$, với $\theta_k = \phi_k - \phi_{k-1}$, $[t]_+ = \max\{t, 0\}$.

Do đó $\{y^k\}$ bị chặn, và $\{w^k\}$ cũng vậy. Ngoài ra, từ (2.85), ta có

$$2\frac{\beta_k}{\eta_k} \langle u(x^k), x^k - z \rangle \leq \phi_k - \phi_{k+1} + \theta[\theta_k]_+ + \delta_k, \quad (2.87)$$

và điều này suy ra rằng

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\eta_k} \langle u(x^k), x^k - z \rangle \leq \phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta[\theta_k]_+ + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty. \quad (2.88)$$

Hơn nữa, do $\{w^k\}$ bị chặn, nên theo **(A5)**, tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho $\|u_1(x^k)\| \leq M, \|u_2(x^k)\| \leq M$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Do đó, ta có thể lấy $L \geq \max\{1, M\}$ sao cho với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(x^k)\|, \|u_2(x^k)\|\} \leq L. \quad (2.89)$$

Kết hợp (2.77), (2.88) và (2.89), ta thu được $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k < \infty$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$. Vậy giả thiết phản chứng là sai, điều đó có nghĩa **Bước 1** được chứng minh.

Bước 2: Ta chứng minh

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, z) = 0 \quad \forall z \in \text{Sol}(f, C). \quad (2.90)$$

Xét một điểm $z \in \text{Sol}(f, C)$. Sử dụng định nghĩa dưới vi phân đường chéo và f là song hàm giả đơn điệu trên C , ta có

$$0 \geq f(x^k, z) \geq \langle u(x^k), z - x^k \rangle \quad \forall z \in \text{Sol}(f, C). \quad (2.91)$$

Do đó, sử dụng **Bước 1**, ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} 0 \leq -\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, z) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(x^k, z)] \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle u(x^k), x^k - z \rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Chuỗi bất đẳng thức trên cho thấy các giới hạn liên quan đều tiến về 0, từ đó khẳng định được kết quả mong muốn.

Bước 3: Chứng minh rằng $\omega_w(y^k) \subset \text{Sol}(f, C)$.

Lấy $\bar{z} \in \omega_w(y^k)$ và dãy con $\{y^{k_j}\}$ của dãy $\{y^k\}$ sao cho

$$y^{k_j} \rightharpoonup \bar{z}.$$

Từ đánh giá trong (2.60), ta cũng suy ra rằng $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{z}$. Theo kết quả trong **Bước 2**, tồn tại dãy con $\{x^{k_j}\}$ của dãy $\{x^k\}$ sao cho $\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(x^{k_j}, z) = 0$.

Kết hợp giả thiết **(A2)** với **Bước 2**, ta có

$$\begin{aligned} f(\bar{z}, z) &\geq \limsup_{j \rightarrow \infty} f(x^{k_j}, z) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} f(x^{k_j}, z) \\ &= \limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, z) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Từ giả thiết **(A1')**, ta có $f(\bar{z}, z) \leq 0$, vì vậy

$$f(\bar{z}, z) = 0. \quad (2.94)$$

Theo đó, từ **(A4)** suy ra rằng $\bar{z} \in \text{Sol}(f, C)$, điều này có nghĩa $\omega_w(x^k) \subset \text{Sol}(f, C)$. Khi đó, theo Mệnh đề 1.2, dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới một phần tử của $\text{Sol}(f, C)$. \square

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra thuật toán chiếu phân rã hiệu chỉnh giải bài toán (1.8). Cấu trúc của thuật toán được xây dựng như sau: Chọn các dãy số dương $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ và $\{\epsilon_k\}$ thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty, \quad (2.95)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_k}{\beta_k} = 0. \quad (2.96)$$

Ta tiến hành các bước lặp như sau:

Thuật toán 2.5 (Thuật toán một phép chiếu phân rã hiệu chỉnh giải bài toán cân bằng [roPSM])

Khởi tạo: Chọn tùy ý các điểm $x^1, y^0, y^1 \in C$, $\theta \in [0, 1)$ và đặt $k = 1$.

Bước lặp: Từ x^k, y^{k-1} và y^k ($k \geq 1$), chọn α_k sao cho $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$, trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\epsilon_k}{\|y^k - y^{k-1}\|}, \frac{\epsilon_k}{\|y^k - y^{k-1}\|^2} \right\} & \text{nếu } y^k \neq y^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } y^k = y^{k-1}. \end{cases} \quad (2.97)$$

Tính $w^k = (1 - \gamma_k)y^k + \alpha_k(y^k - y^{k-1})$. Lấy $u_1(x^k) \in \partial_2 f_1(x^k, x^k)$, $u_2(x^k) \in \partial_2 f_2(x^k, x^k)$ và tính

$$\eta_k = \max\{1, \|u_1(x^k)\|, \|u_2(x^k)\|\}, \quad \lambda_k = \frac{\beta_k}{\eta_k} \quad (2.98)$$

và cập nhật

$$x^{k+1} = P_C(w^k - \lambda_k u_1(x^k)), \quad (2.99)$$

$$y^{k+1} = x^{k+1} - \lambda_k u_2(x^k). \quad (2.100)$$

Điều kiện dừng: Nếu $\|x^k - x^{k+1}\| + \|y^{k+1} - w^k\| = 0$, thì dừng thuật toán. Ngược lại, đặt $k := k + 1$ và quay lại **Bước lặp**.

Trước tiên, chúng tôi chứng minh tính bị chặn của các dãy được sinh bởi Thuật toán 2.5.

Bổ đề 2.5. *Giả sử các điều kiện (A1'), (A3) và (A6) được thỏa mãn. Khi đó, hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.5 đều bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử $z \in \text{Sol}(f, C)$ và đặt $\xi_k = -f(x^k, z)$. Từ chứng minh của Bổ

đề 2.4, ta có

$$\begin{aligned}
\|y^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 + 2\lambda_k f(x^k, z) + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2 \\
&\leq \|w^k - z\|^2 - 2\lambda_k \xi_k + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2 \\
&= \|(1 - \gamma_k)y^k - z + \alpha_k(y^k - x^{k-1})\|^2 - 2\lambda_k \xi_k + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2 \\
&\leq \|(1 - \gamma_k)y^k - z\|^2 + 2\alpha_k \|(1 - \gamma_k)y^k - z\| \|y^k - y^{k-1}\| \\
&\quad - 2\lambda_k \xi_k + \alpha_k^2 \|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2 \\
&= \|y^k - z\|^2 + 2\alpha_k \|(1 - \gamma_k)y^k - z\| \|y^k - y^{k-1}\| - 2\lambda_k \xi_k - 2\gamma_k \langle y^k, y^k - z \rangle \\
&\quad + \gamma_k^2 \|y^k\|^2 + \alpha_k^2 \|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \tag{2.101}
\end{aligned}$$

Từ đó, ta có bất đẳng thức

$$\|y^{k+1} - z\|^2 - \|y^k - z\|^2 + 2\frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} \leq -2\gamma_k \langle y^k, y^k - z \rangle + \psi_k, \tag{2.102}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\psi_k &= 2\alpha_k \|(1 - \gamma_k)y^k - z\| \|y^k - y^{k-1}\| + \gamma_k^2 \|y^k\|^2 \\
&\quad + \alpha_k^2 \|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \tag{2.103}
\end{aligned}$$

Do điều kiện **(A1')** đảm bảo rằng $\xi_k \geq 0$, ta suy ra

$$\Gamma_{k+1} - \Gamma_k \leq -2\gamma_k \langle y^k, y^k - z \rangle, \tag{2.104}$$

với dãy $\{\Gamma_k\}_{k \geq 0}$ được định nghĩa bởi

$$\Gamma_k = \|y^k - z\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j. \tag{2.105}$$

Để chứng minh $\{x^k\}$ bị chặn, ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Giả sử tồn tại k_0 sao cho dãy $\{\Gamma_k\}_{k \geq k_0}$ là không tăng. Khi đó, với mọi $k \geq k_0$, ta có

$$\Gamma_k = \|y^k - z\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j \leq \Gamma_{k_0}. \tag{2.106}$$

Do $\sum \psi_k < \infty$, suy ra

$$\|y^k - z\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k + \Gamma_{k_0} < \infty. \tag{2.107}$$

Tức là, dãy $\{y^k\}$ bị chặn. Suy ra từ (2.60), dãy $\{x^k\}$ cũng bị chặn.

Trường hợp 2: Giả sử tồn tại một dãy con $\{\Gamma_{k_j}\}_{j \geq 0}$ sao cho $\Gamma_{k_j} < \Gamma_{k_{j+1}}$ với mọi $j \geq 0$. Khi đó, xét dãy chỉ số $\{\tau(k)\}$ như trong Bổ đề 1.3, ta có

$$\Gamma_{\tau(k)+1} - \Gamma_{\tau(k)} > 0, \quad (2.108)$$

và đánh giá sau đúng

$$\Gamma_k \leq \Gamma_{\tau(k)+1}. \quad (2.109)$$

Do đó, từ (2.104) và (2.108), ta suy ra

$$\langle y^{\tau(k)}, y^{\tau(k)} - z \rangle \leq 0, \quad (2.110)$$

tức là,

$$\|y^{\tau(k)}\|^2 + \|y^{\tau(k)} - z\|^2 - \|z\|^2 \leq 0. \quad (2.111)$$

Suy ra, $\{y^{\tau(k)}\}$ bị chặn, nên theo (2.60), dãy $\{x^{\tau(k)}\}$ cũng bị chặn. Từ (2.70), ta có $\{x^{\tau(k)+1}\}$ bị chặn, do đó $\{y^{\tau(k)+1}\}$ cũng bị chặn nhờ (2.60). Hơn nữa,

$$\Gamma_{\tau(k)+1} = \|y^{\tau(k)+1} - z\|^2 - \sum_{j=1}^{\tau(k)} \psi_j \leq \|y^{\tau(k)+1} - z\|^2.$$

Từ (2.109), ta suy ra rằng $\{\Gamma_k\}$ bị chặn trên. Do đó, lặp lại lập luận như ở **Trường hợp 1**, ta suy ra dãy $\{y^k\}$ bị chặn. \square

Bây giờ, chúng ta đưa ra kết quả hội tụ mạnh sau đây.

Định lý 2.6. Cho dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 2.5 và các điều kiện **(A1')**, **(A2)**–**(A6)** được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $z = P_{\text{Sol}(f,C)}(0)$.

Chứng minh. Gọi $z = P_{\text{Sol}(f,C)}(0)$ và đặt $\xi_k = -f(x^k, z)$. Từ bất đẳng thức (2.102), ta có

$$\|y^{k+1} - z\|^2 - \|y^k - z\|^2 + 2\frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} \leq -2\gamma_k \langle y^k, y^k - z \rangle + \psi_k, \quad (2.112)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} \psi_k &= 2\alpha_k \|(1 - \gamma_k)y^k - z\| \|y^k - y^{k-1}\| + \gamma_k^2 \|y^k\|^2 \\ &\quad + \alpha_k^2 \|y^k - y^{k-1}\|^2 + 4\epsilon_k^2 + 6\beta_k^2 + 4\beta_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Do đó, ta thu được

$$\Gamma_{k+1} - \Gamma_k + \frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} \leq -2\gamma_k \langle y^k, y^k - z \rangle, \quad (2.114)$$

trong đó, dãy $\{\Gamma_k\}_{k \geq 0}$ được xác định bởi

$$\Gamma_k = \|y^k - z\|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta_j \xi_j}{\eta_j} - \sum_{j=1}^{k-1} \psi_j. \quad (2.115)$$

Chúng ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Giả sử tồn tại chỉ số k_0 sao cho dãy $\{\Gamma_k\}_{k \geq k_0}$ là không tăng. Trong trường hợp này, ta có $\Gamma_{k+1} \leq \Gamma_k \quad \forall k \geq k_0$, do đó

$$\|y^{k+1} - z\|^2 - \|y^k - z\|^2 + \frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} \leq \psi_k. \quad (2.116)$$

Do $\sum \psi_k < \infty$, ta suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z\| \text{ tồn tại} \quad (2.117)$$

và tổng sau khả tổng

$$\sum \frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} < \infty. \quad (2.118)$$

Từ định nghĩa của $\{\eta_k\}$ và tính bị chặn của dãy $\{x^k\}$, dễ thấy rằng dãy $\{\eta_k\}$ là bị chặn. Do đó, tồn tại hằng số dương δ sao cho

$$1 \leq \eta_k \leq \delta \quad \forall k \geq 1 \quad (2.119)$$

và từ đó, suy ra ngay $\sum \beta_k \xi_k < \infty$. Hệ quả là

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \xi_k \leq 0.$$

Vì song hàm f giả đơn điệu trên C , nên ta có

$$0 \leq -\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, z) = \liminf_{k \rightarrow \infty} [-f(x^k, z)] \leq 0, \quad (2.120)$$

tức là,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f(x^k, z) = 0 \quad \forall z \in \text{Sol}(f, C). \quad (2.121)$$

Kết hợp điều này với **Bước 3** trong Định lý 2.5, ta suy ra mọi giới hạn yếu của dãy $\{x^k\}$ đều thuộc $\text{Sol}(f, C)$. Để chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy $\{x^k\}$, ta sẽ chứng minh

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle y^k, z - y^k \rangle \geq 0. \quad (2.122)$$

Giả sử ngược lại rằng $l := \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle y^k, z - y^k \rangle < 0$. Khi đó, tồn tại k_0 đủ lớn sao cho với mọi $k \geq k_0$, ta có

$$\langle y^k, z - y^k \rangle \leq \frac{1}{2}l. \quad (2.123)$$

Khi kết hợp với bất đẳng thức (2.114), điều này dẫn đến

$$\Gamma_{k+1} - \Gamma_k + \frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} \leq \gamma_k l, \quad (2.124)$$

tức là,

$$-l\gamma_k + \frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} \leq \Gamma_k - \Gamma_{k+1}. \quad (2.125)$$

Lấy tổng hai vế từ k_0 đến k , ta thu được

$$|l| \sum_{j=k_0}^k \gamma_j \leq \Gamma_{k_0} - \Gamma_{k+1}. \quad (2.126)$$

Lấy giới hạn khi $k \rightarrow \infty$, ta thu được mâu thuẫn với giả thiết $\sum_k \gamma_k = \infty$ vì vế phải bị chặn trong khi vế trái có thể tiến ra vô cùng. Do đó, điều giả sử là sai và bất đẳng thức (2.122) được chứng minh. Mặt khác, ta có đẳng thức

$$\langle y^k, z - y^k \rangle = -\langle z, y^k - z \rangle - \|y^k - z\|^2. \quad (2.127)$$

Xét từ biểu thức (2.122) và (2.127), ta thu được

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle y^k, z - y^k \rangle = \limsup_{k \rightarrow \infty} (-\langle z, y^k - z \rangle - \|y^k - z\|^2) \\ &\leq -\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle z, y^k - z \rangle - \liminf_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z\|^2, \end{aligned} \quad (2.128)$$

suy ra

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z\|^2 \leq -\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle z, y^k - z \rangle. \quad (2.129)$$

Do dãy $\{y^k\}$ bị chặn, nên tồn tại một dãy con $\{y^{k_j}\}$ của dãy $\{y^k\}$ hội tụ yếu về một điểm $\bar{x} \in \mathcal{H}$, sao cho

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle z, y^k - z \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle z, y^{k_j} - z \rangle. \quad (2.130)$$

Do tập $\text{Sol}(f, C)$ là lồi, đóng khác rỗng nên tồn tại duy nhất hình chiếu $z = P_{\text{Sol}(f, C)}(0)$. Vì mọi giới hạn yếu của $\{y^k\}$ đều thuộc $\text{Sol}(f, C)$ (do $\bar{x} \in \text{Sol}(f, C)$) và $z = P_{\text{Sol}(f, C)}(0)$, nên

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle z, y^k - z \rangle = \langle z, \bar{x} - z \rangle \geq 0. \quad (2.131)$$

Từ đó và (2.129), ta suy ra

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z\|^2 = 0.$$

Do giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z\|$ tồn tại từ trước, ta kết luận

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z\| = 0. \quad (2.132)$$

Do đó, từ (2.60), ta suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\| = 0. \quad (2.133)$$

Nói cách khác, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới nghiệm $z = P_{\text{Sol}(f, C)}(0)$.

Trường hợp 2: Giả sử tồn tại một dãy con $\{\Gamma_{k_j}\}_{j \geq 0}$ của $\{\Gamma_k\}_{k \geq k_0}$ sao cho $\Gamma_{k_j} < \Gamma_{k_{j+1}}$ với mọi $j \geq 0$. Khi đó, ta xét dãy chỉ số $\{\tau(k)\}$ được định nghĩa như trong Bổ đề 1.3. Theo Bổ đề này, ta có

$$\Gamma_{\tau(k)+1} - \Gamma_{\tau(k)} > 0, \quad (2.134)$$

và đánh giá sau đúng

$$\Gamma_k \leq \Gamma_{\tau(k)+1}. \quad (2.135)$$

Do đó, xét từ bất đẳng thức (2.114) cùng với (2.134), ta suy ra

$$0 \leq \frac{\beta_{\tau(k)} \xi_{\tau(k)}}{\eta_{\tau(k)}} \leq -2\gamma_{\tau(k)} \langle y^{\tau(k)}, y^{\tau(k)} - z \rangle, \quad (2.136)$$

nên, ta có

$$\langle y^{\tau(k)}, y^{\tau(k)} - z \rangle \leq 0, \quad (2.137)$$

tức là $y^{\tau(k)} \in Q$, với Q được định nghĩa bởi

$$Q := \{y \in \mathcal{H} : \|y - z\|^2 + \|y\|^2 \leq \|z\|^2\} = \{y \in \mathcal{H} : \langle y, y - z \rangle \leq 0\}. \quad (2.138)$$

Để thấy rằng Q là tập lồi, đóng và bị chặn trong \mathcal{H} , nên cũng là tập đóng yếu và bị chặn. Vì vậy, ta có $\omega_w(y^{\tau(k)}) \neq \emptyset$ và $\omega_w(y^{\tau(k)}) \subset Q$. Hơn nữa, từ (2.136), ta thu được đánh giá sau

$$0 \leq \xi_{\tau(k)} \leq -2\eta_{\tau(k)} \frac{\gamma_{\tau(k)}}{\beta_{\tau(k)}} \langle y^{\tau(k)}, y^{\tau(k)} - z \rangle. \quad (2.139)$$

Do $\{x^{\tau(k)}\}, \{y^{\tau(k)}\}$ bị chặn, từ giả thiết **(A5)**, và (2.95), ta suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_{\tau(k)} = 0,$$

nên theo **Bước 3** của Định lý 2.5, ta có

$$\omega_w(y^{\tau(k)}) \subset \text{Sol}(f, C).$$

Do đó

$$\omega_w(y^{\tau(k)}) \subset \text{Sol}(f, C) \cap Q.$$

Ta sẽ chứng minh $\text{Sol}(f, C) \cap Q = \{z\}$. Trước hết, do $z = P_{\text{Sol}(f, C)}(0)$ nên rõ ràng $z \in Q$ và vì $\langle z, z - z \rangle = 0$, nên theo định nghĩa (2.138) ta có $z \in Q$, đồng thời $z \in \text{Sol}(f, C)$. Vậy $z \in \text{Sol}(f, C) \cap Q$. Giả sử tồn tại $y \in \text{Sol}(f, C) \cap Q$, ta sẽ chứng minh $y = z$. Do $y \in Q$ và $z = P_{\text{Sol}(f, C)}(0)$, nên ta có

$$\langle -z, y - z \rangle \leq 0.$$

Kết hợp với điều kiện $\langle y, y - z \rangle \leq 0$ (vì $y \in Q$), cộng hai bất đẳng thức này ta nhận được điều sau

$$-\|z - y\| \geq 0 \Rightarrow y = z.$$

Vậy $\text{Sol}(f, C) \cap Q = \{z\}$. Từ đó, kết hợp $\omega_w(y^{\tau(k)}) \subset \text{Sol}(f, C) \cap Q = \{z\}$ và $\omega_w(y^{\tau(k)}) \neq \emptyset$, suy ra dãy $y^{\tau(k)}$ hội tụ yếu tới z khi $k \rightarrow \infty$. Từ (2.127), ta có

$$\|y^{\tau(k)} - z\|^2 = \langle y^{\tau(k)}, y^{\tau(k)} - z \rangle + \langle z, z - y^{\tau(k)} \rangle. \quad (2.140)$$

Dựa vào (2.137) và (2.140) suy ra

$$\|y^{\tau(k)} - z\|^2 \leq \langle z, z - y^{\tau(k)} \rangle. \quad (2.141)$$

Lấy giới hạn trên, và vì $y^{\tau(k)} \rightharpoonup z$, ta được

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|y^{\tau(k)} - z\|^2 &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle y^{\tau(k)}, y^{\tau(k)} - z \rangle + \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle z, z - y^{\tau(k)} \rangle \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle z, z - y^{\tau(k)} \rangle = \max_{\hat{z} \in \omega_w(y^{\tau(k)})} \langle z, z - \hat{z} \rangle \leq 0, \end{aligned} \quad (2.142)$$

do đó,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|y^{\tau(k)} - z\|^2 = 0. \quad (2.143)$$

Từ đó, ta suy ra rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^{\tau(k)} - z\|^2 = 0. \quad (2.144)$$

Theo Bổ đề 1.3, ta có

$$\Gamma_k \leq \Gamma_{\tau(k)+1},$$

tức là,

$$\|y^k - z\|^2 + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j \xi_j}{\eta_j} - \sum_{j=0}^{k-1} \psi_j \leq \|y^{\tau(k)+1} - z\|^2 + \sum_{j=0}^{\tau(k)} \frac{\beta_j \xi_j}{\eta_j} - \sum_{j=0}^{\tau(k)} \psi_j. \quad (2.145)$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
\|y^k - z\|^2 &\leq \|y^{\tau(k)+1} - z\|^2 + \sum_{j=0}^{\tau(k)} \frac{\beta_j \xi_j}{\eta_j} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j \xi_j}{\eta_j} + \left(\sum_{j=0}^{k-1} \psi_j - \sum_{j=0}^{\tau(k)} \psi_j \right) \\
&\leq \|y^{\tau(k)+1} - z\|^2 + \sum_{j=0}^{\tau(k)} \frac{\beta_j \xi_j}{\eta_j} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j \xi_j}{\eta_j} + \left(\sum_{j=0}^{k-1} \psi_j - \sum_{j=0}^{\tau(k)} \psi_j \right) \\
&\quad + \sum_{j=\tau(k)}^k \frac{\beta_j \xi_j}{\eta_j} + \psi_k \\
&= \|y^{\tau(k)+1} - z\|^2 + \frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} + \sum_{j=\tau(k)}^k \psi_k.
\end{aligned} \tag{2.146}$$

Ta cũng suy ra một số khẳng định sau:

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=\tau(k)}^k \psi_j = 0$, do $\tau(k) \rightarrow \infty$ và $\sum_k \psi_k < \infty$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} = 0$, thật vậy, ta có

$$0 \leq \frac{\beta_k \xi_k}{\eta_k} = \frac{\beta_k}{\eta_k} (-f(x^k, z)) \leq \frac{\beta_k}{\eta_k} \langle u(x^k), x^k - z \rangle. \tag{2.147}$$

Do dãy $\{x^k\}$ bị chặn, kết hợp giả thiết **(A5)** ta suy ra dãy $\{u(x^k)\}$ cũng bị chặn. Từ hệ thức (2.147) và $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\beta_k}{\eta_k} = 0$ suy ra điều phải chứng minh.

- (iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^{\tau(k)+1} - z\| = 0$, thật vậy, từ (2.70) và $\beta_k \rightarrow 0$, $\epsilon_k \rightarrow 0$, ta có

$$\|x^{\tau(k)+1} - x^{\tau(k)}\| \leq \beta_{\tau(k)-1} + \epsilon_{\tau(k)} + \beta_{\tau(k)} \rightarrow 0. \tag{2.148}$$

Kết hợp điều trên với (2.60) và (2.144), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
\|x^{\tau(k)+1} - z\| &\leq \|x^{\tau(k)+1} - x^{\tau(k)}\| + \|x^{\tau(k)} - z\| \\
&\leq \|x^{\tau(k)+1} - x^{\tau(k)}\| + \|x^{\tau(k)} - y^{\tau(k)}\| + \|y^{\tau(k)} - z\| \rightarrow 0.
\end{aligned} \tag{2.149}$$

Do đó, ta có

$$\|y^{\tau(k)+1} - z\| \leq \|y^{\tau(k)+1} - x^{\tau(k)+1}\| + \|x^{\tau(k)+1} - z\| \rightarrow 0. \tag{2.150}$$

Khi đó, từ (2.146), ta có kết luận rằng $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z\| = 0$, và $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\| = 0$.

Chứng minh được hoàn thành. \square

2.2.3. Thử nghiệm số và so sánh

Trong phần này, chúng tôi sẽ áp dụng Thuật toán 2.4 để giải một bài toán cân bằng được xét trong Ví dụ 2.1. Ngoài ra, chúng tôi cũng áp dụng Thuật toán 2.5 cho một ví dụ trong không gian vô hạn chiều.

Ví dụ 2.3 (*Ứng dụng vào mô hình cân bằng Nash–Cournot của thị trường điện*).

Ta xét lại Ví dụ 2.1 ở mục trước. Chúng tôi tiến hành thử nghiệm hiệu suất của Thuật toán 2.4 (oPSM) và thực hiện đối chiếu với bảy thuật toán khác, cụ thể là: NSAA trong [6, Thuật toán 1], SSA trong [29, Thuật toán 1], PSA trong [42, Thuật toán 3.1], PSPM trong [80], SAL trong [5, Thuật toán 1], MPA trong [97, Thuật toán 3.1] và SGA trong [96, Thuật toán 3.1]. Chúng tôi chọn $a = 110$. Trong các kết quả tính toán số, chúng tôi chọn ngẫu nhiên dưới đạo hàm của song hàm f và các song hàm thành phần f_1 và f_2 .

Thử nghiệm 3: Trong lần thử nghiệm này, chúng tôi khảo sát hiệu năng của các thuật toán khi lựa chọn ba điểm khởi đầu khác nhau như sau:

$$x^a = (54, 42, 60, 36, 66, 30)^\top, \quad x^d = (72, 56, 80, 48, 88, 40)^\top, \quad x^c = (90, 70, 100, 60, 110, 50)^\top.$$

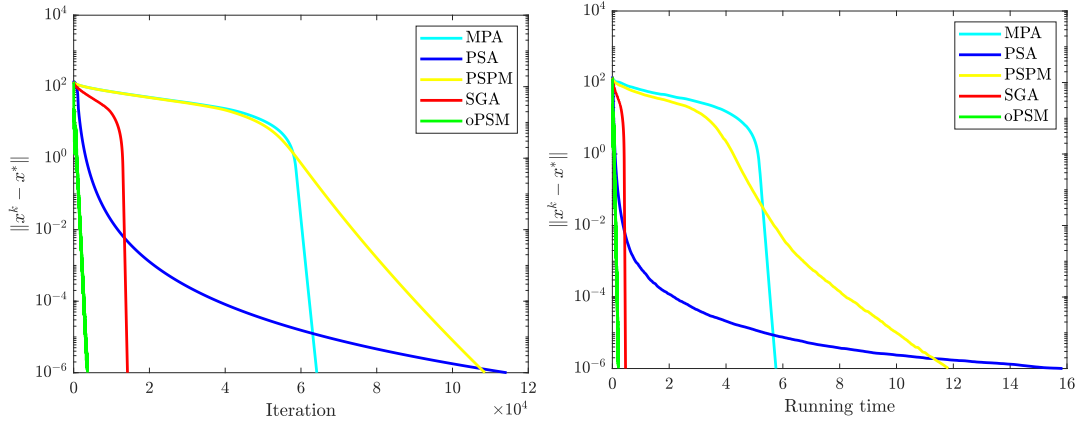
Các tham số trong các thuật toán được lựa chọn như sau:

- Trong thuật toán MPA: $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}}$, $\forall k \geq 1$, với $D = C$.
- Trong thuật toán PSA: $\epsilon_k = 0$, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}}$, $\forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán PSPM: $r_k = \frac{1}{(k+1)^{0.84}}$, $\forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán SGA: $\xi_k = 0$, $\epsilon_k = 0$, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}}$, $\forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán oPSM: $y^1 = y^0 = x^1 = x^0$, $\theta = 0.99$, $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.1}}$, $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$,
 $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}}$, $\forall k \geq 1$.

Tiêu chí dừng được áp dụng cho tất cả các thuật toán là $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-6}$. Kết quả so sánh hiệu suất của năm thuật toán được trình bày trong Bảng 2.6. Hình 2.4 minh họa trực quan kết quả khi lựa chọn điểm khởi đầu $x^0 = x^d$.

	$x^0 = x^a$		$x^0 = x^d$		$x^0 = x^c$	
	Running time	Iter.	Running time	Iter.	Running time	Iter.
MPA	2.0087	31302	5.7577	64179	12.4285	110341
PSA	5.8804	79695	15.8729	114287	30.2254	147201
PSPM	4.2868	63171	11.8202	108542	54.0647	167690
SGA	0.2053	7012	0.4639	14206	0.9531	24256
oPSM	0.1283	3646	0.2125	3658	0.2196	3685

Bảng 2.6: Hiệu suất của các thuật toán MPA, PSA, PSPM, SGA và oPSM trong Thử nghiệm 3



Hình 2.4: So sánh hiệu suất giữa thuật toán oPSM và các thuật toán MPA, PSA, PSPM và SGA, với $x^0 = x^d$ trong Thử nghiệm 3

Thử nghiệm 4: Với lần thử này, ta xét các điểm khởi tạo sau:

$$x^a = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top, \quad x^e = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^\top, \quad x^f = (45, 35, 50, 30, 55, 25)^\top.$$

Các tham số được chọn như sau:

- Trong thuật toán NSAA, $\lambda_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán SAL, $\lambda_k = \frac{1}{k+5} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán SSA, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán oPSM, $y^1 = y^0 = x^1 = x^0$, $\theta = 0.99$, $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.1}}$, $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$,
 $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.

Sử dụng ước lượng $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-4}$ hoặc khi thời gian tính toán vượt quá 50s là điều kiện dừng của tất cả các thuật toán. Kết quả được đưa ra ở Bảng 2.7 và Bảng 2.8.

Thuật toán	Xấp xỉ nghiệm x^*						$\ x^k - x^*\ $
NSAA	11.3361	11.4868	11.3532	10.8748	10.7930	10.7930	9.9999e-05
SAL	11.3375	11.4881	11.3546	10.8761	10.7945	10.7943	0.0033
SSA	11.3361	11.4868	11.3533	10.8748	10.7931	10.7931	9.9796e-05
oPSM	11.3361	11.4868	11.3532	10.8748	10.7930	10.7930	9.7038e-05

Bảng 2.7: Xấp xỉ nghiệm của các thuật toán NSAA, SAL, SSA và oPSM, với $x^0 = x^a$

	$x^0 = x^a$			$x^0 = x^e$			$x^0 = x^f$		
	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error
NSAA	27.0440	136884	9.9999e-05	22.7085	137415	9.9996e-05	62.4650	160035	9.9996e-05
SAL	50.0189	2157	0.0033	50.0306	2235	0.0032	50.1891	1636	0.0042
SSA	37.0305	1750	9.9796e-05	31.2968	1599	9.9956e-05	50.0673	1722	22.9009
oPSM	0.1239	2441	9.7038e-05	0.1367	2276	8.1164e-05	0.1354	2627	9.9573e-05

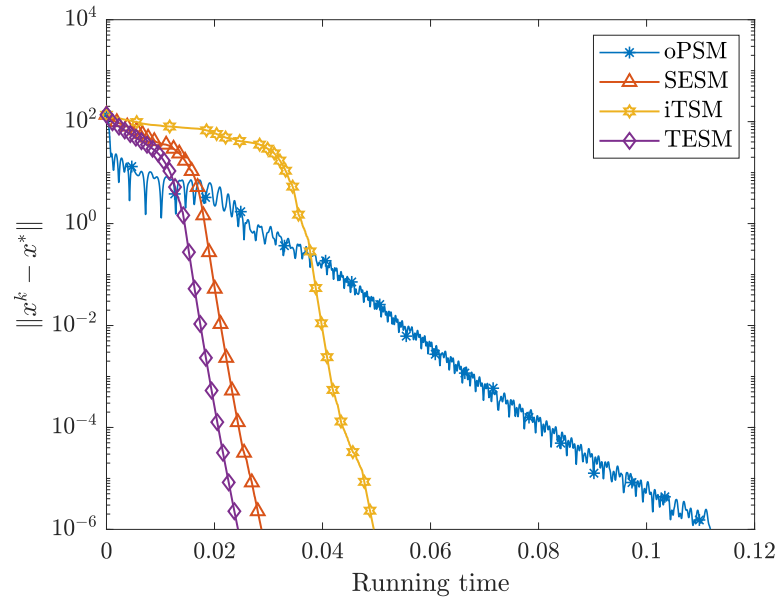
Bảng 2.8: Hiệu suất của các thuật toán NSAA, SAL, SSA và oPSM trong Thử nghiệm 4

Có thể thấy rằng thuật toán oPSM vượt trội hơn so với ba thuật toán còn lại (NSAA, SAL, SSA) về cả độ chính xác và hiệu suất tính toán. Kết quả này chủ yếu nhờ thuật toán oPSM chỉ cần một phép chiếu đồng thời kết hợp phương pháp phân rã và kỹ thuật quán tính, trong khi thuật toán NSAA không sử dụng hai kỹ thuật này, còn SAL và SSA tuy có sử dụng phương pháp phân rã nhưng phải giải hai bài toán quy hoạch lồi tại mỗi vòng lặp.

Thử nghiệm 5: Trong thử nghiệm số tiếp theo, ta so sánh các thuật toán oPSM, SESM, iTSM, và TESM. Ta xét các điểm khởi tạo sau:

$$x^e = (1, 1, 1, 1, 1)^\top, x^g = (36, 28, 40, 24, 44, 20)^\top, x^h = (72, 56, 80, 48, 88, 40)^\top.$$

Các tham số của các thuật toán được chọn tương ứng như đã nêu ở trên. Kết quả được thể hiện trong Bảng 2.9 và Hình 2.5.



Hình 2.5: So sánh hiệu suất của các thuật toán oPSM, SESM, iTSM, và TESM với $x^0 = x^h$

	$x^0 = x^e$			$x^0 = x^g$			$x^0 = x^h$		
	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error
oPSM	0.1242	3308	8.5873e-07	0.1136	3623	9.7205e-07	0.1118	3658	9.9397e-07
SESM	0.0077	139	9.9651e-07	0.0087	286	9.9838e-07	0.0287	1132	9.7982e-07
iTSM	0.0314	140	8.8377e-07	0.0371	287	9.3992e-07	0.0495	1133	9.5540e-07
TESM	0.0065	144	9.2216e-07	0.0084	286	9.9838e-07	0.0244	1132	9.7988e-07

Bảng 2.9: Hiệu suất của các thuật toán oPSM, SESM, iTSM, và TESM trong Thử nghiệm 5

Ví dụ 2.4 (*Ví dụ với không gian vô hạn chiều*).

Trong ví dụ này, chúng ta so sánh hiệu quả tính toán của Thuật toán 2.5 (roPSM) với một số thuật toán đã có, cụ thể NSAA trong [6, Thuật toán 1], SSA trong [29, Thuật toán 1], PSA trong [42, Thuật toán 3.1], OSOM trong [43, Thuật toán 1], SAL trong [5, Thuật toán 1], PSABE trong [109, Thuật toán 1], SGA trong [96, Thuật toán 3.1].

Xét không gian Hilbert các hàm bình phương khả tích trong đoạn $[0, 1]$, $\mathcal{H} := L^2([0, 1])$ với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(t)v(t)dt \quad \forall u, v \in \mathcal{H},$$

và chuẩn $\|\cdot\|$ tương ứng. Xét bài toán (1.8) với $C := \{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ và song hàm được chọn cụ thể như sau

$$f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}, f(u, v) := \langle u, v - u \rangle + \|v\|^4 - \|u\|^4 \quad \forall u, v \in C.$$

Đặt $f_1(u, v) = \langle u, v - u \rangle$ và $f_2(u, v) = \|v\|^4 - \|u\|^4$. Dễ dàng chứng minh được rằng các song hàm thỏa mãn các giả thiết của các thuật toán. Hơn nữa, phép chiếu lên C có công thức hiện như sau

$$P_C(u(t)) = \begin{cases} u(t), & \text{nếu } \|u(t)\| \leq 1, \\ \frac{u(t)}{\|u(t)\|}, & \text{nếu } \|u(t)\| > 1. \end{cases}$$

Thử nghiệm 6: Xét các điểm khởi tạo sau:

$$x^0 = \frac{1}{185}(t^2 + 1) \cos t, \quad x^0 = \frac{\sin(-3t) + \cos(-10t)}{200}, \quad x^0 = \frac{1}{220}(t + 1)e^{5t}.$$

Với các tham số được chọn như dưới đây:

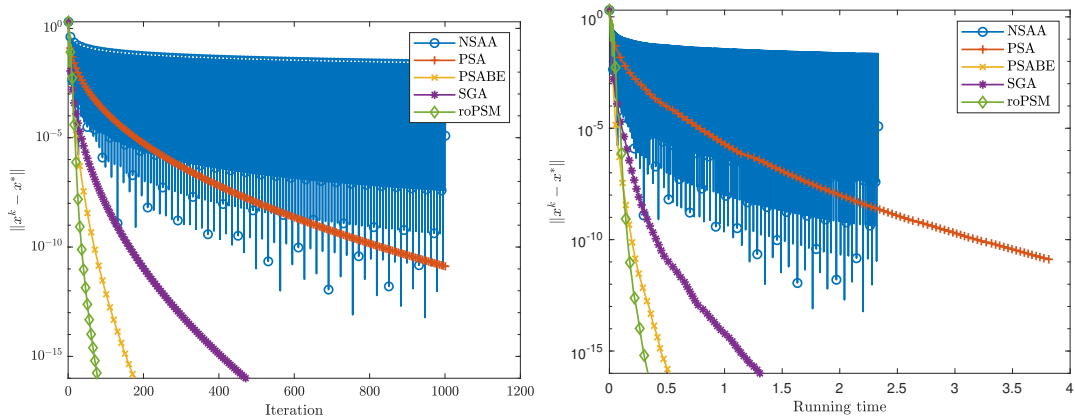
- Trong thuật toán NSAA, $\lambda_k = \frac{1}{k^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.

- Trong thuật toán PSA, $\epsilon_k = 0$, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{(k+5)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán PSABE, $g(u, v) = 0$, $\mu = 0.6$, $\lambda_k = \frac{1}{k^{0.55}}$, $\alpha_k = \frac{1}{k^{0.4}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán SGA, $\xi_k = 0$, $\epsilon_k = 0$, $\rho_k = 1$, $\beta_k = \frac{1}{k^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán roPSM, $y^1 = y^0 = x^1 = x^0$, $\theta = 0.15$, $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.1}}$, $\beta_k = \frac{1}{k^{0.55}}$,
 $\alpha_k = \bar{\alpha}_k$, $\gamma_k = \frac{1}{k^{0.56}} \quad \forall k \geq 1$.

Sử dụng điều kiện dừng là $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-16}$ (với $x^* = 0$ là nghiệm duy nhất của bài toán) hoặc số bước lặp không vượt quá 1000. Kết quả thử nghiệm số được trình bày trong Bảng 2.10 và Hình 2.6.

	$x^0 = \frac{1}{185}(t^2 + 1) \cos t$		$x^0 = \frac{\sin(-3t) + \cos(-10t)}{200}$		$x^0 = \frac{1}{220}(t + 1)e^{5t}$	
	Times	Iter.	Times	Iter.	Times	Iter.
NSAA	2.3340	1000	2.0511	1000	4.0733	1000
PSA	3.8144	1000	3.6121	1000	4.9719	1000
PSABE	0.5192	175	0.3424	171	0.5848	175
SGA	1.3082	471	1.0209	448	1.4448	491
roPSM	0.3369	78	0.2851	77	0.3326	78

Bảng 2.10: Hiệu suất của các thuật toán NSAA, PSA, PSABE, SGA và roPSM trong Thử nghiệm 6 của Ví dụ 2.4



Hình 2.6: So sánh hiệu suất giữa thuật toán roPSM với các thuật toán NSAA, PSA, PSABE và SGA, với $x^0 = \frac{1}{185}(t^2 + 1) \cos t$

Thử nghiệm 7: Trong thử nghiệm này, ta xét các điểm khởi tạo sau:

$$x^0 = \frac{(t^3 + 1)e^{5t}}{185}, \quad x^0 = \frac{\sin(-3t) + \cos(-10t)}{200}, \quad x^0 = \frac{3 + t - t^2}{200}.$$

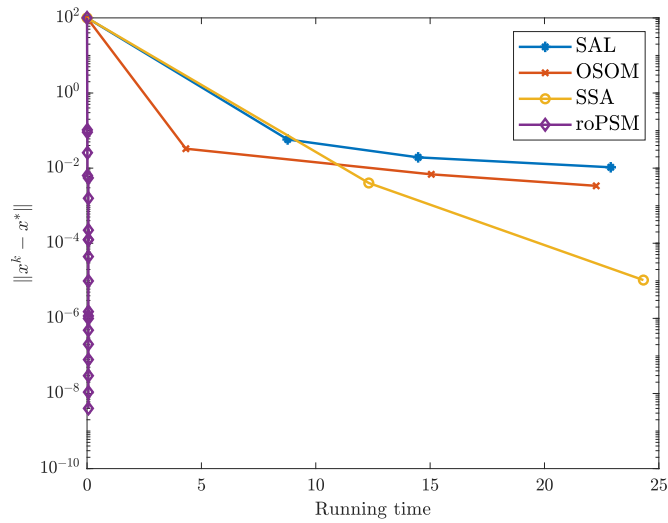
Các tham số được chọn như dưới đây:

- Trong thuật toán SAL, $\lambda_k = \frac{1}{k+1} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán OSOM, $\lambda_k = \frac{1}{(k+1)^{0.55}}, \alpha_k = \frac{1}{(k+1)^{0.44}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán SSA, $\beta_k = \frac{1}{(k+1)^{0.55}} \quad \forall k \geq 1$.
- Trong thuật toán roPSM, $x^1 = x^0, y^0 = \frac{2t^2 \sin(3t)e^{2t}}{100}, y^1 = \frac{t^4 - e^{-t}}{255}, \theta = 0.15,$
 $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.1}}, \beta_k = \frac{1}{(k+1)^{0.55}}, \alpha_k = \bar{\alpha}_k, \gamma_k = \frac{1}{k^{0.56}} \quad \forall k \geq 1$.

Sử dụng ước lượng $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-8}$ hoặc thời gian tính toán vượt quá 20s như là điều kiện dừng cho tất cả các thuật toán. Kết quả được trình bày trong Bảng 2.11 và minh họa trong Hình 2.7.

	$x^0 = \frac{(t^3+1)e^{5t}}{185}$			$x^0 = \frac{\sin(-3t)+\cos(-10t)}{200}$			$x^0 = \frac{3+t-t^2}{200}$		
	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error
SAL	21.1696	3	0.0989	22.8967	3	0.0105	22.7937	3	0.0269
OSOM	20.7950	4	0.0032	22.2626	5	0.0034	20.2039	3	0.0039
SSA	20.2176	2	1.0303e-05	24.3255	2	1.0466e-05	22.9194	2	3.2235e-05
roPSM	0.0084	20	4.0103e-09	0.0609	20	4.0103e-09	0.0493	20	4.0103e-09

Bảng 2.11: Hiệu suất của các thuật toán SAL, OSOM, SSA và roPSM trong Thử nghiệm 7 của Ví dụ 2.4



Hình 2.7: So sánh hiệu suất giữa thuật toán roPSM với các thuật toán SAL, OSOM và SSA, với $x^0 = \frac{\sin(-3t)+\cos(-10t)}{200}$

Nhận thấy rằng, nhờ các ưu điểm chỉ sử dụng một phép chiếu ở mỗi bước lặp, đồng thời kết hợp các kỹ thuật quán tính và phân rã, thuật toán roPSM cho thấy hiệu quả thực nghiệm vượt trội hơn so với các thuật toán SAL, OSOM và SSA, các thuật toán này yêu cầu giải một hoặc hai bài toán quy hoạch lồi tại mỗi bước lặp.

Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã đề xuất một số thuật toán chiếu phân rã để giải bài toán cân bằng. Các song hàm được phân rã thành tổng hai song hàm đơn giản hơn. Khi đó, thay vì giải các bài toán quy hoạch lồi tổng quát với các song hàm thành phần như đã được áp dụng trong các thuật toán phân rã đã có, thuật toán của chúng tôi chỉ sử dụng các phép chiếu, đồng thời chúng tôi kết hợp sử dụng các kỹ thuật quán tính và hiệu chỉnh nhằm tăng tốc độ hội tụ của thuật toán và thu được sự hội tụ mạnh của các thuật toán đề xuất. Chúng tôi đã tiến hành một vài thử nghiệm số và so sánh sơ bộ với một số thuật toán khác. Kết quả cho thấy, trong một số ví dụ cụ thể, thuật toán mới tỏ ra ưu việt hơn so với các thuật toán được đề xuất trước đó.

Chương 3

PHƯƠNG PHÁP DƯỚI ĐẠO HÀM, DƯỚI ĐẠO HÀM TĂNG CƯỜNG CHO BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÀ BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Trong chương này, chúng tôi đề xuất phương pháp chiếu dưới đạo hàm cho bất đẳng thức biến phân và trình bày ứng dụng trong khử mờ ảnh. Trong phần tiếp theo, chúng tôi đưa ra thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kết hợp sử dụng kỹ thuật quán tính, kỹ thuật gắn kết với cỡ bước tăng giải bài toán cân bằng. Chúng tôi cũng đưa ra các ví dụ số để minh họa cho thuật toán đề xuất. Nội dung của chương được xây dựng dựa trên các công trình [1] và [4] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

3.1. Phương pháp chiếu dưới đạo hàm cho bất đẳng thức biến phân

3.1.1. Xây dựng thuật toán chiếu dưới đạo hàm nổi lờng

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán bất đẳng thức biến phân được phát biểu trong (1.7), trong đó tập chấp nhận C được biểu diễn dưới dạng tập mức dưới của một hàm lờng

$$C = \{x \in \mathcal{H} : c(x) \leq 0\}, \quad (3.1)$$

với $c : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lờng, nửa liên tục dưới. Chúng tôi cần một số các giả thiết cơ bản cho bài toán VIP(F, C) như sau:

(B1) $\text{Sol}(F, C) \neq \emptyset$;

(B2) Ánh xạ F đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz với hằng số L ;

(B3) ∂c bị chặn trên tập bị chặn.

Thuật toán chiếu đạo hàm nổi lờng cho bất đẳng thức biến phân được thiết kế như dưới đây.

Thuật toán 3.1 (Thuật toán chiếu dưới đạo hàm nổi lỏng [IGPM])

Bước 0 (Khởi tạo): Chọn các điểm bắt đầu $x^0, x^1 \in C$, $\theta \in [0, 1)$ và hai dãy số thực dương $\{\beta_k\}$, $\{\epsilon_k\}$ thỏa mãn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \quad \epsilon_k = o(\beta_k), \quad (3.2)$$

trong đó $\epsilon_k = o(\beta_k)$ là vô cùng bé cấp cao hơn $\{\beta_k\}$. Đặt $k := 1$.

Bước 1: Với x^{k-1} và x^k ($k \geq 1$), chọn α_k sao cho

$$\alpha_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\epsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{nếu } x^k = x^{k-1}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Tính $w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1})$ và lấy $\xi^k \in \partial c(w^k)$. Xây dựng nửa không gian

$$C_k = \{x \in \mathcal{H} : c(w^k) + \langle \xi^k, x - w^k \rangle \leq 0\}, \quad (3.4)$$

và tính

$$x^{k+1} = P_{C_k}(w^k - \beta_k Fw^k). \quad (3.5)$$

Bước 2: Nếu $x^{k+1} = w^k$ thì dừng. Ngược lại, đặt $k := k + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Chú ý 3.1. Nhận thấy $C \subseteq C_k$ với mọi $k \geq 0$. Thật vậy, do $\xi^k \in \partial c(w^k)$, tức là

$$c(x) - c(w^k) \geq \langle \xi^k, x - w^k \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Nếu $x \in C$ thì ta có $c(w^k) + \langle \xi^k, x - w^k \rangle \leq 0$, điều đó có nghĩa $x \in C_k$. Do đó, khẳng định là đúng.

3.1.2. Phân tích sự hội tụ

Trước tiên, cần xác lập tính hợp lý của điều kiện dừng trong Thuật toán 3.1, điều này được khẳng định thông qua bổ đề sau.

Bổ đề 3.1. Nếu $w^k = x^{k+1}$ thì $w^k \in \text{Sol}(F, C)$.

Chứng minh. Nếu $w^k = x^{k+1}$ thì từ (3.5) và Mệnh đề 1.1(1), ta có

$$\langle w^k - \lambda_k Fw^k - w^k, y - w^k \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C_k,$$

hoặc tương đương,

$$\langle Fw^k, y - w^k \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C_k. \quad (3.6)$$

Theo đó, ta nhận được

$$\langle Fw^k, y - w^k \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (3.7)$$

Vì vậy $w^k \in \text{Sol}(F, C)$. \square

Một bổ đề đóng vai trò nền tảng trong việc thiết lập định lý hội tụ của Thuật toán 3.1, sẽ được trình bày dưới đây.

Bổ đề 3.2. *Giả sử các giả thiết (B1)–(B3) được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1 bị chặn.*

Chứng minh. Với mọi $z \in C$, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\| &= \|P_{C_k}(w^k - \beta_k Fw^k) - z\| \\ &\leq \|w^k - \beta_k Fw^k - z\| \\ &= \|(I - \beta_k F)w^k - (I - \beta_k F)z - \beta_k Fz\| \\ &\leq \|(I - \beta_k F)w^k - (I - \beta_k F)z\| + \beta_k \|Fz\|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Do $\beta_k \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$, nên tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho

$$0 < \beta_k < \frac{\eta}{L^2} \quad (3.9)$$

với mọi $k \geq k_0$. Mặt khác, theo giả thiết (B2) và áp dụng Bổ đề 1.8, ta có

$$\|(I - \beta_k F)x - (I - \beta_k F)y\| \leq (1 - \gamma_k)\|x - y\|,$$

trong đó $\gamma_k = \frac{1}{2}\beta_k(2\eta - \beta_k L^2)$. Khi đó, bất đẳng thức (3.8) tương đương

$$\|x^{k+1} - z\| \leq (1 - \gamma_k)\|w^k - z\| + \beta_k \|Fz\|. \quad (3.10)$$

Hơn nữa, ta lại có

$$\begin{aligned} \|w^k - z\| &= \|x^k - z + \alpha_k(x^k - x^{k-1})\| \\ &\leq \|x^k - z\| + \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Kết hợp (3.10) và (3.11), ta suy ra

$$\|x^{k+1} - z\| \leq (1 - \gamma_k)\|x^k - z\| + (1 - \gamma_k)\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| + \beta_k \|Fz\|. \quad (3.12)$$

Từ (3.3), ta thấy rằng

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{\gamma_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \gamma_k)\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| + \beta_k \|Fz\|}{\gamma_k}, \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{2(1 - \gamma_k)}{2\eta - \beta_k L^2} \frac{\alpha_k}{\beta_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{2}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \right] = \frac{\|Fz\|}{\eta}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

trong đó, $b_k = (1 - \gamma_k)\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| + \beta_k \|Fz\|$. Điều này suy ra dãy $\left\{\frac{b_k}{\gamma_k}\right\}$ bị chặn. Sử dụng Mệnh đề 1.6(1), ta cũng có kết luận dãy $\{\|x^k - z\|\}$ bị chặn. Điều này chứng tỏ dãy $\{x^k\}$ bị chặn và $\{w^k\}$ cũng vậy. \square

Trước khi trình bày định lý hội tụ chính, chúng tôi thiết lập một bất đẳng thức quan trọng, làm công cụ kỹ thuật then chốt trong phần chứng minh hội tụ về sau.

Bổ đề 3.3. *Giả sử các điều kiện (B1)–(B3) được thỏa mãn và $\{x^k\}$ là dãy sinh bởi Thuật toán 3.1. Khi đó, với mỗi $z \in C$, ta có*

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq (1 - \gamma_k)(\|x^k - z\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|\|x^k - z\| + \alpha_k^2\|x^k - x^{k-1}\|^2) \\ &\quad + \gamma_k \left[\frac{-4}{2\eta - \beta_k L^2} \langle Fz, w^k - z \rangle + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\| \right]. \end{aligned}$$

Chứng minh. Với mỗi $z \in C$, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &= \|P_{C_k}(w^k - \beta_k Fw^k) - z\|^2 \\ &\leq \|(I - \beta_k F)w^k - (I - \beta_k F)z - \beta_k Fz\|^2 \\ &= (1 - \gamma_k)\|w^k - z\|^2 - 2\beta_k \langle Fz, w^k - z - \beta_k Fw^k \rangle \\ &\leq (1 - \gamma_k)\|w^k - z\|^2 - 2\beta_k \langle Fz, w^k - z \rangle + 2\beta_k^2 \|Fz\| \|Fw^k\| \\ &= (1 - \gamma_k)\|w^k - z\|^2 \\ &\quad + \gamma_k \left[\frac{-4}{2\eta - \beta_k L^2} \langle Fz, w^k - z \rangle + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\| \right]. \end{aligned}$$

Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} \|w^k - z\| &= \|x^k - z + \alpha_k(x^k - x^{k-1})\| \\ &\leq \|x^k - z\| + \alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ta thu được đánh giá sau

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq (1 - \gamma_k)(\|x^k - z\| + \alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|)^2 \\ &\quad + \gamma_k \left[\frac{-4}{2\eta - \beta_k L^2} \langle Fz, w^k - z \rangle + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\| \right] \\ &= (1 - \gamma_k)(\|x^k - z\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|\|x^k - z\| + \alpha_k^2\|x^k - x^{k-1}\|^2) \\ &\quad + \gamma_k \left[\frac{-4}{2\eta - \beta_k L^2} \langle Fz, w^k - z \rangle + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\| \right]. \end{aligned}$$

Do đó, chứng minh được hoàn thành. \square

Dựa trên các kết quả chuẩn bị trong các bổ đề ở trên, sau đây chúng tôi đưa ra và chứng minh định lý hội tụ chính của Thuật toán 3.1.

Định lý 3.1. *Giả sử các điều kiện (B1)–(B3) được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.1 hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân (1.7).*

Chứng minh. Với mỗi $z \in C$, sử dụng tính không giãn của toán tử chiếu, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - z\|^2 &= \|P_{C_k}(w^k - \beta_k Fw^k) - P_{C_k}w^k + P_{C_k}(w^k) - P_{C_k}(z)\|^2 \\
&= \|P_{C_k}(w^k) - P_{C_k}(z)\|^2 + 2\beta_k \|w^k - z\| \|Fw^k\| + \beta_k^2 \|Fw^k\|^2 \\
&\leq \|w^k - z\|^2 - \|w^k - P_{C_k}(w^k)\|^2 + 2\beta_k \|w^k - z\| \|Fw^k\| + \beta_k^2 \|Fw^k\|^2 \\
&= \|w^k - z\|^2 - \|w^k - P_{C_k}(w^k)\|^2 + \beta_k K,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

trong đó $K \geq \sup_k \{2\|w^k - z\| \|Fw^k\| + \beta_k \|Fw^k\|^2\}$. Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned}
\|w^k - z\|^2 &= \|(1 + \alpha_k)(x^k - z) - \alpha_k(x^{k-1} - z)\|^2 \\
&= (1 + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - z\|^2 + \alpha_k(1 + \alpha_k)\|x^k - x^{k-1}\|^2 \\
&\leq (1 + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - z\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Kết hợp (3.15) và (3.16), ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - z\|^2 &\leq (1 + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - z\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 \\
&\quad - \|w^k - P_{C_k}(w^k)\|^2 + \beta_k K,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Đặt $\Gamma_k := \|x^k - z\|^2$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta thu được

$$\|w^k - P_{C_k}(w^k)\|^2 \leq \Gamma_k - \Gamma_{k+1} + \alpha_k(\Gamma_k - \Gamma_{k-1}) + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + \beta_k K. \tag{3.18}$$

Tiếp theo, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Giả sử tồn tại $k_0 \geq 0$ sao cho với mỗi $k \geq k_0$, $\Gamma_{k+1} \leq \Gamma_k$. Trong trường hợp này, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k$ tồn tại và $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Gamma_k - \Gamma_{k+1}) = 0$. Do $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 = 0$, nên từ (3.18) ta suy ra rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - P_{C_k}w^k\|^2 = 0. \tag{3.19}$$

Ta cần chứng minh rằng $\omega_w(x^k) \subset C$. Thật vậy, lấy $\bar{x} \in \omega_w(x^k)$ bất kỳ, do $\{x^k\}$ bị chặn, nên tồn tại dãy con $\{x^{k_i}\}$ hội tụ yếu tới $\bar{x} \in C_k$. Chú ý rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k\|x^k - x^{k-1}\| = 0. \tag{3.20}$$

Từ (3.20) suy ra rằng $\{w^{k_i}\}$ cũng hội tụ yếu tới \bar{x} . Tiếp theo, ta cần chứng minh $\bar{x} \in C$. Do $P_{C_{k_i}}(w^{k_i}) \in C_{k_i}$, nên từ định nghĩa của C_{k_i} , ta suy ra rằng

$$c(w^{k_i}) + \langle \xi^{k_i}, P_{C_{k_i}}(w^{k_i}) - w^{k_i} \rangle \leq 0,$$

trong đó, $\xi^{k_i} \in \partial c(w^{k_i})$. Sử dụng Bất đẳng thức Cauchy–Schwart, ta nhận được

$$c(w^{k_i}) \leq \|\xi^{k_i}\| \|P_{C_{k_i}}(w^{k_i}) - w^{k_i}\|. \tag{3.21}$$

Dựa vào tính bị chặn của dãy $\{\xi^{k_l}\}$ cùng với các biểu thức (3.19) và (3.21), ta suy ra

$$c(w^{k_l}) \leq \|\xi^{k_l}\| \|P_{C_{k_l}}(w^{k_l}) - w^{k_l}\| \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Kết hợp với tính nửa liên tục dưới yếu của hàm lồi $c(x)$ và tính hội tụ yếu $w^{k_l} \rightharpoonup \bar{x}$, nên từ biểu thức (3.22), ta thu được

$$c(\bar{x}) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} c(w^{k_l}) \leq 0,$$

điều này có nghĩa $\bar{x} \in C$. Mặt khác, áp dụng Bổ đề 3.3, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq (1 - \gamma_k)(\|x^k - z\|^2 + 2\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| \|x^k - z\| + \alpha_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2) \\ &\quad + \gamma_k \left[\frac{-4}{2\eta - \beta_k L^2} \langle Fz, w^k - z \rangle + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\| \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Bên cạnh đó, ta cũng có

$$\begin{aligned} \|x^k - z\|^2 + 2\alpha_k \|x^k - z\| \|x^k - x^{k-1}\| + \alpha_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ \leq \|x^k - z\|^2 + 2\alpha_k \|x^k - z\| \|x^k - x^{k-1}\| + \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ \leq \|x^k - z\|^2 + 3K_1 \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|, \end{aligned} \quad (3.24)$$

trong đó, $K_1 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{\|x^k - z\|, \|x^k - x^{k-1}\|\}$. Kết hợp các biểu thức (3.23) và (3.24), ta nhận được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq (1 - \gamma_k) \|x^k - z\|^2 + 3K_1(1 - \gamma_k) \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| \\ &\quad + \gamma_k \left[\frac{-4}{2\eta - \beta_k L^2} \langle Fz, w^k - z \rangle + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\| \right] \\ &\leq (1 - \gamma_k) \|x^k - z\|^2 + \gamma_k \left[3K_1(1 - \gamma_k) \frac{\alpha_k}{\gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right. \\ &\quad \left. + \frac{-4}{2\eta - \beta_k L^2} \langle Fz, w^k - z \rangle + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\| \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ta dễ dàng nhận thấy rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[(1 - \gamma_k) \frac{\alpha_k}{\gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\| \right] = 0. \quad (3.26)$$

Để có thể áp dụng Bổ đề 1.6, ta cần chứng minh thêm rằng

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Fz, w^k - z \rangle \geq 0.$$

Thật vậy, vì $z \in \text{Sol}(F, C)$, ta có

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Fz, w^k - z \rangle = \max_{\hat{z} \in \omega_w(\{w^k\})} \langle Fz, \hat{z} - z \rangle \geq 0, \quad (3.27)$$

trong đó $\omega_w(\{w^k\})$ là tập các giới hạn yếu của dãy $\{w^k\}$. Áp dụng Bổ đề 1.6 cho bất đẳng thức (3.31) với các thông số sau

$$\begin{aligned} a_k &:= \|x^k - z\|^2, \quad \delta_k := \gamma_k, \quad c_k := 0, \\ b_k &:= 3K_1(1 - \gamma_k) \frac{\alpha_k}{\gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{-4}{2\eta - \beta_k L^2} \langle Fz, w^k - z \rangle + \frac{4\beta_k}{2\eta - \beta_k L^2} \|Fz\| \|Fw^k\|, \end{aligned}$$

ta suy ra rằng dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới $z \in \text{Sol}(F, C)$.

Trường hợp 2: Giả sử rằng tồn tại dãy $\{\Gamma_{k_m}\} \subset \{\Gamma_k\}$ sao cho $\Gamma_{k_m} \leq \Gamma_{k_m+1}$ với mọi $m \in \mathbb{N}$. Trong trường hợp này, ta định nghĩa $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bởi

$$\tau(k) = \max\{n \leq k : \Gamma_n < \Gamma_{n+1}\}. \quad (3.28)$$

Khi đó, áp dụng Bổ đề 1.3, ta suy ra rằng $\tau(k) \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$ và $\Gamma_{\tau(k)} < \Gamma_{\tau(k)+1}$. Vì vậy, từ biểu thức (3.18), ta có

$$\begin{aligned} \|w^{\tau(k)} - P_{C_{\tau(k)}}(w^{\tau(k)})\|^2 &\leq \Gamma_{\tau(k)} - \Gamma_{\tau(k)+1} + \alpha_{\tau(k)}(\Gamma_{\tau(k)} - \Gamma_{\tau(k)-1}) \\ &\quad + 2\alpha_{\tau(k)} \|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\|^2 + \beta_{\tau(k)} K \\ &\leq \alpha_{\tau(k)} \|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\| \left(\sqrt{\Gamma_{\tau(k)}} + \sqrt{\Gamma_{\tau(k)-1}} \right) \\ &\quad + 2\alpha_{\tau(k)} \|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\|^2 + \beta_{\tau(k)} K \\ &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tương tự như lập luận trong **Trường hợp 1**, từ bất đẳng thức (3.29), ta suy ra các kết quả sau

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^{\tau(k)} - P_{C_{\tau(k)}}(w^{\tau(k)})\|^2 = 0, \quad (3.30)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Fz, w^{\tau(k)} - z \rangle = \max_{\hat{z} \in \omega_w(\{w^{\tau(k)}\})} \langle Fz, \hat{z} - z \rangle \geq 0 \quad (3.31)$$

và ta có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} \|x^{\tau(k)+1} - z\|^2 &\leq (1 - \gamma_{\tau(k)}) \|x^{\tau(k)} - z\|^2 + \gamma_{\tau(k)} \left[3K_1(1 - \gamma_{\tau(k)}) \frac{\alpha_{\tau(k)}}{\gamma_{\tau(k)}} \|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\| \right. \\ &\quad \left. + \frac{-4}{2\eta - \beta_{\tau(k)} L^2} \langle Fz, w^{\tau(k)} - z \rangle + \frac{4\beta_{\tau(k)}}{2\eta - \beta_{\tau(k)} L^2} \|Fz\| \|Fw^{\tau(k)}\| \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Vì $\Gamma_{\tau(k)} < \Gamma_{\tau(k)+1}$, nên từ biểu thức (3.32), ta suy ra

$$\begin{aligned} \|x^{\tau(k)} - z\|^2 &\leq 3K_1(1 - \gamma_{\tau(k)}) \frac{\alpha_{\tau(k)}}{\gamma_{\tau(k)}} \|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\| \\ &\quad + \frac{-4}{2\eta - \beta_{\tau(k)} L^2} \langle Fz, w^{\tau(k)} - z \rangle + \frac{4\beta_{\tau(k)}}{2\eta - \beta_{\tau(k)} L^2} \|Fz\| \|Fw^{\tau(k)}\|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Từ các hệ thức (3.26), (3.31) và (3.33), ta suy ra rằng

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - z\|^2 \leq 0,$$

và do đó

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - z\|^2 = 0.$$

Tiếp theo, từ bất đẳng thức (3.32), ta có

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)+1} - z\|^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - z\|^2,$$

nên suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)+1} - z\|^2 = 0.$$

Từ Bổ đề 1.3, ta nhận được

$$0 \leq \|x^k - z\| \leq \max\{\|x^{\tau(k)} - z\|, \|x^k - z\|\} \leq \|x^{\tau(k)+1} - z\| \rightarrow 0.$$

Vì vậy, $\{x^k\}$ hội tụ tới $z \in \text{Sol}(F, C)$. □

3.1.3. Thử nghiệm số và ứng dụng trong khử mờ ảnh

Trong phần này, chúng tôi đưa ra thử nghiệm số nhằm minh họa hiệu quả của thuật toán đề xuất thông qua bài toán khử mờ ảnh.

Ví dụ 3.1. Bài toán khôi phục ảnh có thể phát biểu như bài toán ngược sau: Tìm x , biết A , y và v , sao cho

$$y = Ax + v, \tag{3.34}$$

trong đó, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là toán tử tuyến tính (chẳng hạn, PSF), $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ là ảnh mờ nhòe, và $v \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ là nhiễu trong quá trình ghi ảnh hoặc truyền ảnh, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ là ảnh gốc chưa biết, cần khôi phục, giả sử rằng x cùng số chiều với y , tức là $n = m$. Trong hầu hết các trường hợp, bài toán này là đặt không chính, do đó việc dùng nghịch đảo của A (nếu tồn tại) có thể dẫn tới vô nghiệm hoặc nhiều nghiệm. Để khắc phục nhược điểm này, một giải pháp phổ biến là sử dụng phương pháp hiệu chỉnh, ở đó, thông tin của ảnh muốn khôi phục được cung cấp trước. Trong ví dụ này, bài toán (3.34) được thay bằng mô hình tối ưu hóa sau

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) := \frac{1}{2} \|Ax - y\|^2 + \frac{1}{2} \alpha \|x\|^2, \tag{3.35}$$

thỏa mãn điều kiện $\|x\|_1 \leq t$,

trong đó, α là tham số dương, và $\|\cdot\|_1$ là chuẩn ℓ_1 . Hàm mục tiêu f là lồi mạnh, khả vi và gradient được xác định bởi

$$\nabla f(x) = A^*(Ax - y) + \alpha x,$$

trong đó A^* là liên hợp của A . Nhận thấy rằng gradient ∇f là $(\|A\|^2 + \alpha)$ -liên tục Lipschitz và α -đơn điệu mạnh. Biết rằng x^* là nghiệm của bài toán (3.35) nếu và chỉ nếu x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân

$$\text{Tìm } x \in C \text{ sao cho } \langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

trong đó, $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leq t\}$. Chất lượng khôi phục ảnh được đặc trưng bởi tỉ số tín hiệu cực đại trên nhiễu như sau:

$$\text{PSNR}(x) = 20 \log_{10} \frac{x_{\max}}{\sqrt{\text{Var}(x, \bar{x})}},$$

trong đó

$$\text{Var}(x, \bar{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{n^2} [\bar{x}(j) - x(j)]^2}{n^2},$$

và \bar{x} là ảnh gốc và x_{\max} là giá trị pixel lớn nhất có thể của ảnh.



Hình 3.1: Ảnh gốc và ảnh mờ nhòe.

Chúng tôi áp dụng Thuật toán 3.1 (IGPM) và các thuật toán hội tụ mạnh trong tài liệu bao gồm Thuật toán VPRGM [46, Thuật toán 1], Thuật toán GPM [58, Thuật toán 3.1], và Thuật toán GRA [74] với các cỡ bước giảm để khôi phục

ảnh mờ nhòe Lena và Cameraman. Kích thước của ảnh là $m = n = 256$. Ảnh gốc và ảnh mờ nhòe được đưa ra trong Hình 3.1. Trong tất cả các thuật toán, chúng tôi sử dụng chung điểm khởi tạo $x^0 = x^1 = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ là vectơ trong \mathbb{R}^n mà tất cả các thành phần đều là 0) và giới hạn số bước lặp là 2500. Hơn nữa, đặt $A = RW$, trong đó R là ma trận mờ và W là biến đổi wavelet nghịch đảo. Nhân mờ được xác định bởi $h_{ij} = \frac{1}{1+i^2+j^2}$, với $i, j = \overline{-4, 4}$.

Với Thuật toán 3.1 (IGPM), lấy $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.1}}$, $\theta = 0.6$ và α_k được tính bởi (3.3). Chúng tôi lấy cùng cỡ bước $\lambda_k = \frac{1}{k^{0.3}}$, tham số hiệu chỉnh $\alpha = 2e-5$ cho tất cả các thuật toán. Bên cạnh đó, chọn $\theta_k = 1$ cho VPRGM của [46]. Kết quả so sánh của bốn thuật toán cho ảnh Cameraman và Lena được trình bày trong Bảng 3.1 và Bảng 3.2 tương ứng. Các hình ảnh khôi phục được thể hiện ở Hình 3.3, 3.5. Dáng điệu hội tụ của các thuật toán được đưa ra ở Hình 3.2, 3.4.

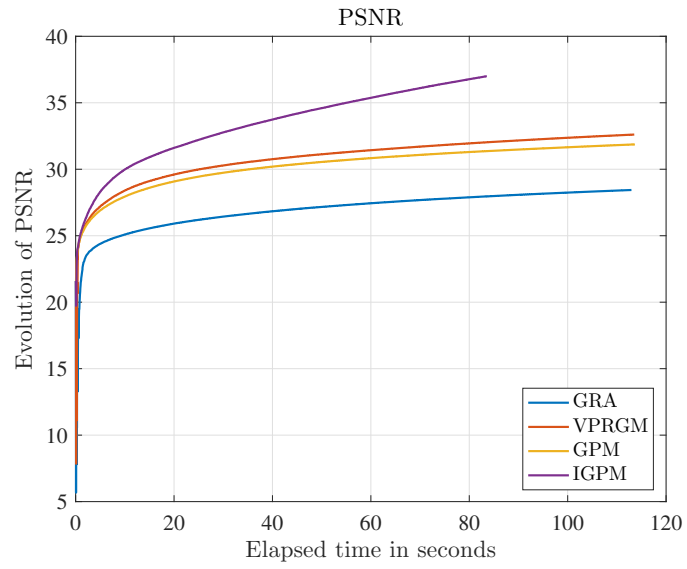
	Times	Iter.	PSNR
GRA	112.9531	2500	28.4390
VPRGM	113.5313	2500	31.8681
GPM	113.6406	2500	31.8692
IGPM	83.6	2500	37.0024

Bảng 3.1: So sánh bốn thuật toán để khôi phục lại ảnh Cameraman bị mờ.

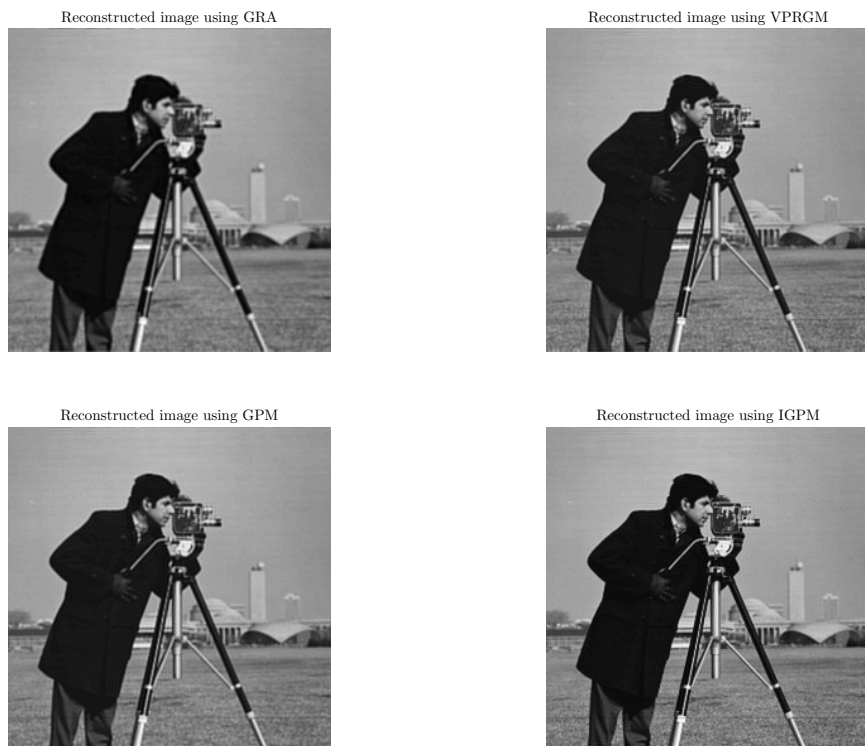
	Times	Iter.	PSNR
GRA	112.9531	2500	31.9244
VPRGM	117.6094	2500	35.2395
GPM	117.0469	2500	35.7691
IGPM	94.2031	2500	44.5633

Bảng 3.2: So sánh bốn thuật toán để khôi phục lại ảnh Lena bị mờ.

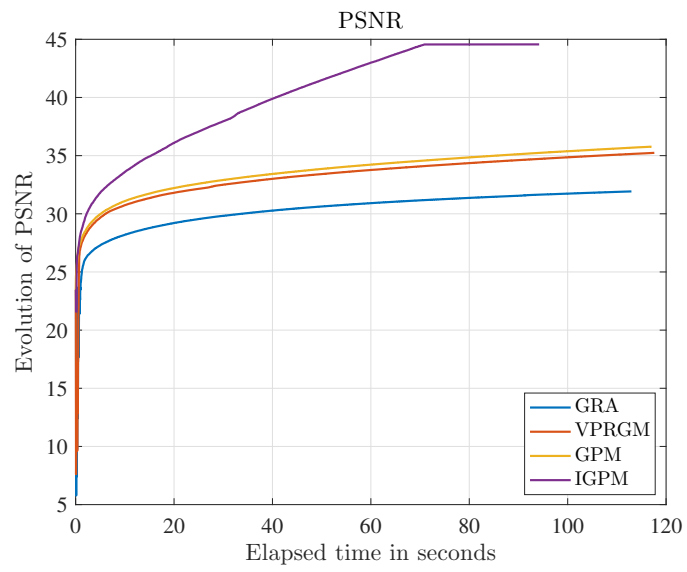
Hình 3.2, 3.4 cho thấy rằng IGPM có thời gian chạy ít hơn so với các thuật toán khác. Hơn nữa, phương pháp của chúng tôi đưa ra hình ảnh khôi phục rõ ràng hơn và giá trị PSNR được cải thiện.



Hình 3.2: Sự biến thiên của PSNR của ảnh Cameraman



Hình 3.3: Ảnh Cameraman được khôi phục



Hình 3.4: Sự biến thiên của PSNR của ảnh Lena



Hình 3.5: Ảnh Lena được khôi phục

3.2. Phương pháp dưới đạo hàm tăng cường giải bài toán cân bằng

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm điểm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (3.36)$$

trong đó $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm. Để nghiên cứu các thuật toán và kết quả thử nghiệm số của bài toán cân bằng (3.36), chúng tôi sử dụng các giả thiết sau

(C1) f giả đơn điệu trên C ;

(C2) Với mỗi $y \in C$, ánh xạ $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục trên yếu trên C ;

(C3) Với mỗi $x \in C$, ánh xạ $f(x, \cdot)$ là lồi và nửa liên tục dưới trên C ;

(C4) Tồn tại các hằng số dương c_1 và c_2 sao cho điều kiện kiểu Lipschitz sau được thỏa mãn

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|x - y\|^2 - c_2 \|y - z\|^2 \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}; \quad (3.37)$$

(C5) $\text{Sol}(f, C) \neq \emptyset$.

Gần đây, các tác giả trong [28, 38, 39] đã đề xuất nhiều phương pháp khác nhau nhằm xấp xỉ nghiệm của bài toán cân bằng với song hàm f giả đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (3.37). Cần lưu ý rằng cỡ bước của các phương pháp này thường phụ thuộc vào hai hằng số c_1 và c_2 . Tuy nhiên, trong các bài toán cân bằng tổng quát, việc xác định các hằng số c_1 và c_2 không dễ dàng, điều này có thể ảnh hưởng đến hiệu quả của các phương pháp được sử dụng. Để khắc phục nhược điểm này, Yang và Liu [117] đã đề xuất phương pháp sau:

Thuật toán 3.2 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tự thích nghi)

Bước 0: Chọn $\lambda_0 > 0, x^0 \in \mathcal{H}, \mu \in (0, 1)$. Đặt $k = 1$.

Bước 1: Với $k \geq 1$, từ x^k , tính

$$y^k = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda_k f(x^k, y) + \frac{1}{2} \|x^k - y\|^2, y \in C \right\} = \operatorname{prox}_{\lambda_k f(x^k, \cdot)}(x^k).$$

Bước 2: Chọn $w^k \in \partial(f(x^k, \cdot))(y^k)$ sao cho $x^k - \lambda_k w^k - y^k \in N_C(y^k)$, tính

$$z^k = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|x^k - y\|^2, y \in T_k \right\},$$

với $T_k = \{v \in \mathcal{H} \mid \langle x^k - \lambda_k w^k - y^k, v - y^k \rangle \leq 0\}$.

Thuật toán 3.2 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tự thích nghi)

Bước 3: Với ánh xạ $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, tính

$$t^k = \alpha_k x^0 + (1 - \alpha_k) z^k, x^{k+1} = \beta_k z^k + (1 - \beta_k) S t^k,$$

và

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\mu(\|x^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2(f(x^k, z^k) - f(x^k, y^k) - f(y^k, z^k))}, \lambda_k \right\}, & \text{nếu } f(x^k, z^k) - f(x^k, y^k) - f(y^k, z^k) > 0, \\ \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt $k := k + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Các tác giả trong [117] đã chứng minh rằng dãy cỡ bước $\{\lambda_k\}$ tạo bởi Thuật toán 3.2 là một dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới như sau:

$$\lambda_k \geq \min \left\{ \frac{\mu}{2 \max\{c_1, c_2\}}, \lambda_0 \right\} \quad \forall k.$$

Để tránh tính giảm của dãy cỡ bước $\{\lambda_k\}$, gần đây Ngamkhum và cộng sự [86] đã đề xuất một thuật toán với quy tắc chọn cỡ bước không đơn điệu giảm và thiết lập được tính hội tụ mạnh của thuật toán này dưới các điều kiện giả thiết thích hợp.

Thuật toán 3.3 (Thuật toán đạo hàm tăng cường quán tính với cỡ bước không đơn điệu giảm)

Khởi tạo: Chọn các tham số $\lambda_1 > 0$, $\tau \in [0, 1)$, $\mu \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, \frac{1}{2\mu})$, $\eta \in [\sigma, \frac{1}{\mu})$, $\{\gamma_k\} \subset [0, 1]$ sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 1$, $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$ với $0 < \inf \alpha_k \leq \sup \alpha_k < 1$, $\{\xi_k\} \subset [1, \infty)$, $\sum_{k=0}^{\infty} (\xi_k - 1) < \infty$, $\{\rho_k\} \subset [0, \infty)$, $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k < \infty$, và $\{\epsilon_k\} \subset [0, \infty)$, $\{\beta_k\} \subset (0, 1)$ sao cho $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 0$, và $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_k}{\beta_k} = 0$. Chọn các điểm $x^0, x^1 \in \mathcal{H}$ và đặt $k = 1$.

Bước 1: Chọn θ_k thỏa mãn $0 \leq \theta_k \leq \bar{\theta}_k$, trong đó

$$\bar{\theta}_k = \begin{cases} \min \left\{ \tau, \frac{\epsilon_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\}, & \text{nếu } x_k \neq x^{k-1} \\ \tau, & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

và tính

$$w^k = (1 - \beta_k) (x^k + \theta_k (x^k - x^{k-1})).$$

Thuật toán 3.3 (Thuật toán đạo hàm tăng cường quán tính với cỡ bước không đơn điệu giảm)

Bước 2: Giải hai bài toán lồi mạnh sau

$$\begin{aligned} y^k &= \operatorname{argmin} \left\{ \eta \lambda_k f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 : y \in C \right\} \\ z^k &= \operatorname{argmin} \left\{ \sigma \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 : y \in C \right\}. \end{aligned}$$

Bước 3: Tính

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\mu(\|w^k - y^k\|^2 + \|z^k - y^k\|^2)}{2(f(w^k, z^k) - f(w^k, y^k) - f(y^k, z^k))}, \xi_k \lambda_k + \rho_k \right\}, & \text{nếu } f(w^k, z^k) - f(w^k, y^k) - f(y^k, z^k) > 0, \\ \xi_k \lambda_k + \rho_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Bước 4: Với ánh xạ $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, tính

$$\begin{aligned} v^k &= \gamma_k w^k + (1 - \gamma_k) T w^k, \\ x^{k+1} &= \alpha_k v^k + (1 - \alpha_k) T z^k, \end{aligned}$$

Bước 5: Đặt $k := k + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Các kết quả khác liên quan đến cỡ bước này có thể tham khảo các tài liệu [31, 95, 98, 99, 108, 116] và các tài liệu tham khảo trong đó. Tuy nhiên, dãy $\{\lambda_k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.2 là một dãy đơn điệu giảm. Nếu cỡ bước quá nhỏ, khối lượng tính toán sẽ lớn và tiêu tốn nhiều thời gian. Hơn nữa, phương pháp chiếu kiểu tìm kiếm theo tia (line-search) như trong [26, 113] thường làm cho cỡ bước giảm về 0, dẫn đến tốc độ hội tụ của thuật toán chậm ở các bước lặp lớn.

Những lưu ý này dẫn đến câu hỏi sau: *Liệu có thể xây dựng các thuật toán sao cho dãy cỡ bước tăng dần sau một số bước hữu hạn nào đó không?* Được thúc đẩy bởi các nghiên cứu của Yang và Liu [116], Hoài và cộng sự [48, 49] cùng với các phương pháp đã được đề cập, chúng tôi đề xuất hai thuật toán dưới đạo hàm tăng cường xấp xỉ nghiệm bài toán (3.36). Ưu điểm chính của các phương pháp này là dãy cỡ bước thích nghi tăng dần sau một số hữu hạn bước lặp. Đặc điểm này giúp khắc phục những hạn chế của một số thuật toán đã được nêu trước đó.

3.2.1. Thuật toán với cỡ bước tăng

Dựa trên ý tưởng từ các thuật toán được trình bày trong [47, 48, 112, 116], chúng tôi xây dựng một thuật toán với cỡ bước tăng xấp xỉ nghiệm bài toán cân bằng với song hàm giả đơn điệu.

Thuật toán 3.4 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tăng [NISEM])

Khởi tạo: Chọn các tham số $\lambda_1 > 0$, $0 < \mu_1 < \mu_0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $\theta \in [0, 1)$. Chọn các dãy tham số $\{\epsilon_k\}, \{\xi_k\} \subset [0, \infty)$ thỏa mãn $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty$, $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k < \infty$. Chọn các điểm khởi tạo $x^0, x^1 \in C$ và đặt $k = 1$.

Bước 1: Từ các điểm x^{k-1} và x^k ($k \geq 1$), chọn α_k sao cho $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$, với

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\xi_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \\ y^k = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda_k f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}. \end{cases}$$

Nếu $y^k = w^k$ thì x^k là nghiệm và dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển **Bước 2**.

Bước 2: Lấy $\zeta^k \in \partial(f(w^k, \cdot))(y^k)$ sao cho $w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k \in N_C(y^k)$. Xét nửa không gian T_k có cấu trúc như sau

$$T_k = \{x \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k, x - y^k \rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \operatorname{argmin}_{y \in T_k} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}, \\ \eta_k &= f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1}), \quad \delta_k = \|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

Cập nhật cỡ bước λ_k theo công thức

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\delta_k}{\eta_k}, & \text{nếu } \eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k, \\ (1 + \epsilon_k) \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Đặt $k := k + 1$, và quay lại **Bước 1**.

Chú ý 3.2 (Bình luận về chiến lược cỡ bước tăng thích nghi). Chiến lược cỡ bước trong Thuật toán 3.4 thuộc lớp các phương pháp *adaptive non-monotone*, trong đó cỡ bước không bị ép phải giảm đơn điệu theo số vòng lặp, nhưng mọi sự gia tăng đều được kiểm soát chặt chẽ. Tỷ số

$$\frac{f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1})}{\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2} \quad (3.39)$$

xem như một ước lượng cục bộ, thay thế cho các hằng số kiểu Lipschitz toàn cục. Điều kiện

$$f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1}) \leq \frac{\mu_0}{\lambda_k} (\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2), \quad 0 < \mu_0 < 1, \quad (3.40)$$

đóng vai trò như một tiêu chuẩn an toàn, bảo đảm rằng cỡ bước hiện tại không vượt quá ngưỡng ổn định cục bộ xác định bởi (3.39). Khi điều kiện này được thỏa mãn, cỡ bước được phép tăng theo quy tắc $\lambda_{k+1} = \lambda_k(1 + \epsilon_k)$, nhằm khai thác các vùng mà cỡ bước nhỏ hơn nghịch đảo (có trọng số) của tỷ số (3.39). Ngược lại, khi điều kiện bị vi phạm, cỡ bước được điều chỉnh giảm ngay lập tức bởi công thức (3.38), đưa thuật toán trở lại vùng ổn định. Việc cho phép cỡ bước tăng có tác dụng cải thiện đáng kể hiệu năng thực nghiệm, đặc biệt là giảm số vòng lặp hoặc thời gian tính toán. Mặt khác, cỡ bước tăng không gây phân kỳ.

Thật vậy, chuỗi điều khiển $\{\epsilon_k\}$ thỏa $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k < \infty$, nên sự gia tăng của λ_k là hữu

hạn. Hơn nữa, mỗi khi cỡ bước trở nên quá lớn, tức là điều kiện (3.40) bị phá vỡ và cơ chế giảm cỡ bước được kích hoạt ngay. Do đó, thuật toán đạt được sự cân bằng giữa tính thích nghi, hiệu quả tính toán và tính ổn định của sự hội tụ toàn cục.

Bổ đề sau đảm bảo rằng nếu thuật toán kết thúc tại bước lặp thứ k , thì xấp xỉ thu được tại bước này chính là nghiệm của bài toán cân bằng (3.36).

Bổ đề 3.4. *Nếu $y^k = w^k$ thì $y^k \in \text{Sol}(f, C)$.*

Chứng minh. Ta có

$$y^k = \underset{y \in C}{\operatorname{argmin}} \left\{ \lambda_k f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}.$$

Do đó, áp dụng Bổ đề 1.1, ta có

$$0 \in \partial \left[\lambda_k f(w^k, \cdot) + \frac{1}{2} \|\cdot - w^k\|^2 \right] (y^k) + N_C(y^k),$$

có nghĩa, $0 \in \partial(\lambda_k f(w^k, \cdot))(y^k) + y^k - w^k + N_C(y^k)$. Vì vậy, tồn tại $\eta^k \in \partial(f(w^k, \cdot))(y^k)$ sao cho

$$w^k - \lambda_k \eta^k - y^k \in N_C(y^k).$$

Từ đó suy ra rằng

$$\langle w^k - \lambda_k \eta^k - y^k, y - y^k \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

Nếu $y^k = w^k$ thì

$$\langle \eta^k, y - y^k \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Theo giả thiết **(C3)**, ta có

$$f(y^k, y) - f(y^k, y^k) \geq \langle \eta^k, y - y^k \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

điều đó có nghĩa rằng $y^k \in \text{Sol}(f, C)$. □

Chú ý 3.3. Từ chứng minh của Bổ đề 3.4, ta suy ra rằng $C \subset T_k$.

Bổ đề sau đưa ra các tính chất của dãy cỡ bước được xác định trong Thuật toán 3.4.

Bổ đề 3.5. Giả sử $\{\lambda_k\}$ là dãy cỡ bước sinh bởi Thuật toán 3.4. Khi đó, ta có các hằng định sau

- (i) Với mọi $k \geq 2$, ta có $\lambda_k \geq \lambda_{\min} := \min \left\{ \frac{\mu_1}{\max\{c_1, c_2\}}, \lambda_1 \right\} > 0$;
- (ii) Dãy $\{\lambda_k\}$ hội tụ;
- (iii) Tồn tại số nguyên dương k_0 sao cho $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ với mọi $k \geq k_0$.

Chứng minh. (i) Thật vậy, do f thỏa mãn giả thiết (C4), nên ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2}{\eta_k} &\geq \mu_1 \frac{\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2}{c_1 \|w^k - y^k\|^2 + c_2 \|y^k - x^{k+1}\|^2} \\ &\geq \frac{\mu_1}{\max\{c_1, c_2\}} \quad \forall k \geq 2. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta suy ra rằng

$$\lambda_2 \geq \min \left\{ \frac{\mu_1}{\max\{c_1, c_2\}}, \lambda_1 \right\}.$$

Dùng quy nạp, ta suy ra dãy $\{\lambda_k\}$ bị chặn dưới bởi $\min \left\{ \frac{\mu_1}{\max\{c_1, c_2\}}, \lambda_1 \right\}$.

(ii) Lập luận tương tự như trong [47, 48], đặt $u_k = \ln \lambda_{k+1} - \ln \lambda_k \quad \forall k \geq 0$, ta có $u_k = u_k^+ - u_k^-$, với

$$u_k^+ = \max\{0, u_k\} \geq 0 \quad \text{và} \quad u_k^- = -\min\{0, u_k\} \geq 0 \quad \text{với mọi } k \geq 0.$$

Dựa vào biểu thức xác định λ_k trong Thuật toán 3.4, ta suy ra rằng

$$u_k = \ln \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \leq \ln(1 + \epsilon_k) \leq \epsilon_k \quad \forall k \geq 0,$$

điều đó có nghĩa $u_k^+ \leq \epsilon_k$. Do đó chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k$ hội tụ, ta suy ra $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^+ < \infty$. Ta

nhận thấy rằng $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^-$ là một chuỗi không âm và sử dụng hệ thức sau

$$\ln \lambda_{k+1} - \ln \lambda_0 = \sum_{i=0}^k u_i = \sum_{i=0}^k (u_i^+ - u_i^-) = \sum_{i=0}^k u_i^+ - \sum_{i=0}^k u_i^-, \quad (3.41)$$

ta thấy rằng nếu $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k u_i^- = \infty$ thì $\lim_{k \rightarrow \infty} (\ln \lambda_{k+1}) = -\infty$, tức là, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$. Điều này mâu thuẫn với (i) và do đó chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} u_k^-$ phải hội tụ. Cuối cùng, từ hệ thức (3.41), ta có kết luận cần chứng minh $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda^*$, với $\lambda_{\min} \leq \lambda^* < \infty$.

(iii) Ta cần chứng minh tồn tại hằng số k_0 sao cho

$$\eta_k \leq \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k \quad \forall k \geq k_0.$$

Khi đó theo công thức cập nhật cỡ bước, ta có $\lambda_{k+1} = (1 + \epsilon_k) \lambda_k \geq \lambda_k$. Giả sử ngược lại rằng tồn tại một dãy chỉ số con $\{k_l\}, k_l \rightarrow \infty$ sao cho

$$\eta_{k_l} > \frac{\mu_0}{\lambda_{k_l}} \delta_{k_l}.$$

Khi đó, theo quy tắc cập nhật cỡ bước trong trường hợp này, ta có

$$\lambda_{k_l+1} = \mu_1 \frac{\delta_{k_l}}{\eta_{k_l}}$$

Do đó

$$\frac{\mu_1 \delta_{k_l}}{\lambda_{k_l+1}} = \eta_{k_l} > \frac{\mu_0}{\lambda_{k_l}} \delta_{k_l},$$

tức là,

$$\frac{\lambda_{k_l+1}}{\lambda_{k_l}} < \frac{\mu_1}{\mu_0} \quad \forall k_l.$$

Mặt khác, từ kết quả (ii), ta biết rằng

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_{k_l} = \lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_{k_l+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lambda^*.$$

Kết hợp với bất đẳng thức trước, ta suy ra

$$\frac{\lambda^*}{\lambda^*} \leq \frac{\mu_1}{\mu_0} < 1.$$

Điều này mâu thuẫn. Do đó, giả sử ban đầu là sai và Bổ đề được chứng minh. \square

Bổ đề tiếp theo đóng vai trò then chốt trong việc thiết lập tính hội tụ của Thuật toán 3.4.

Bổ đề 3.6. *Giả sử các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.4 và $z \in \text{Sol}(f, C)$. Khi đó $\forall k \geq k_1$, bất đẳng thức sau được thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 \leq & \|w^k - z\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|w^k - y^k\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|x^{k+1} - y^k\|^2 \\ & + 2\lambda_k f(y^k, z). \end{aligned}$$

Chứng minh. Từ $x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{y \in T_k} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}$ và Bỏ đề 1.1, suy ra

$$0 = \lambda_k g^k + x^{k+1} - w^k + q^k,$$

trong đó $g^k \in \partial(f(y^k, \cdot))(x^{k+1})$ và $q^k \in N_{T_k}(x^{k+1})$. Từ định nghĩa

$$N_{T_k}(x^{k+1}) = \{q \in \mathcal{H} : \langle q, y - x^{k+1} \rangle \leq 0, \forall y \in T_k\}$$

và do $C \subset T_k$, ta có

$$\langle w^k - x^{k+1} - \lambda_k g^k, z - x^{k+1} \rangle \leq 0.$$

Suy ra

$$\langle w^k - x^{k+1}, z - x^{k+1} \rangle \leq \lambda_k \langle g^k, z - x^{k+1} \rangle \leq \lambda_k (f(y^k, z) - f(y^k, x^{k+1})).$$

Khi đó, ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &= \|w^k - z\|^2 + \|x^{k+1} - w^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - w^k, w^k - z \rangle \\ &= \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 + 2\langle x^{k+1} - w^k, x^{k+1} - z \rangle \\ &\leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 + 2\lambda_k (f(y^k, z) - f(y^k, x^{k+1})) \\ &= \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 + 2\lambda_k [f(w^k, y^k) - f(w^k, x^{k+1})] \\ &\quad + 2\lambda_k [f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1})] + 2\lambda_k f(y^k, z) \\ &= \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - w^k\|^2 + A_k + B_k + 2\lambda_k f(y^k, z), \end{aligned} \quad (3.42)$$

trong đó

$$\begin{aligned} A_k &= 2\lambda_k [f(w^k, y^k) - f(w^k, x^{k+1})], \\ B_k &= 2\lambda_k [f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1})]. \end{aligned}$$

Từ định nghĩa của tập T_k và $x^{k+1} \in T_k$, ta nhận được

$$\langle w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k, x^{k+1} - y^k \rangle \leq 0,$$

trong đó $\zeta^k \in \partial(f(w^k, \cdot))(y^k)$. Sử dụng định nghĩa dưới vi phân của hàm lồi, ta có đánh giá sau

$$f(w^k, y) - f(w^k, y^k) \geq \langle \zeta^k, y - y^k \rangle, \quad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} 2\lambda_k [f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k)] &\geq 2\lambda_k \langle \zeta^k, x^{k+1} - y^k \rangle \\ &\geq 2\langle w^k - y^k, x^{k+1} - y^k \rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A_k &\leq 2\langle y^k - w^k, x^{k+1} - y^k \rangle \\ &= \|x^{k+1} - w^k\|^2 - \|w^k - y^k\|^2 - \|x^{k+1} - y^k\|^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Do chuỗi dương $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k$ hội tụ và giả thiết $0 < \mu_0 < \sigma$, ta có thể chọn một số tự nhiên $k_1 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\epsilon_k < \frac{\sigma}{\mu_0} - 1 \quad \forall k \geq k_1.$$

Việc lựa chọn chỉ số k_1 như trên cho phép chứng minh tính đúng đắn của bất đẳng thức sau

$$B_k \leq 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2], \quad \forall k \geq k_1. \quad (3.45)$$

Thật vậy, nếu $\eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k$, thì từ (3.38), suy ra

$$\begin{aligned} B_k &= 2\lambda_k [f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1})] \\ &= 2\mu_1 \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2] \\ &< 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ngược lại, nếu $\eta_k \leq \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k$, thì ta có

$$\begin{aligned} B_k &= 2\lambda_k [f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1})] \\ &\leq 2\mu_0 [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2] \\ &< 2 \frac{\sigma}{1 + \epsilon_k} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2] \\ &= 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Từ các bất đẳng thức (3.46) và (3.47), ta kết luận rằng bất đẳng thức (3.45) là đúng. Kết hợp với (3.42), (3.44) và (3.45), với $\forall k \geq k_1$, ta suy ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|w^k - y^k\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|x^{k+1} - y^k\|^2 \\ &\quad + 2\lambda_k f(y^k, z). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Do $z \in \text{Sol}(f, C)$, thì theo tính giả đơn điệu của ánh xạ f ta có $f(y^k, z) \leq 0$. Khi đó, với $\forall k \geq k_1$, bất đẳng thức (3.48) dẫn đến

$$\|x^{k+1} - z\|^2 \leq \|w^k - z\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|w^k - y^k\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|x^{k+1} - y^k\|^2. \quad (3.49)$$

Ta có điều cần chứng minh. □

Sử dụng các bổ đề đã thiết lập ở trên, chúng ta có thể phát biểu và chứng minh kết quả hội tụ sau đối với Thuật toán 3.4.

Định lý 3.2. *Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} , và $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng thỏa mãn các điều kiện (C1)–(C5). Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.4 hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán cân bằng EP(f, C).*

Chứng minh. Giả sử $z \in \text{Sol}(f, C)$. Trước tiên, ta chứng minh tồn tại giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\|$. Thật vậy, xét giới hạn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) = 1 - 2\sigma > 0, \quad (3.50)$$

do đó tồn tại chỉ số $k_2 > k_1$ sao cho $\left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) > 0$ với mọi $k \geq k_2$. Khi đó, từ bất đẳng thức (3.49), ta suy ra

$$\|x^{k+1} - z\| \leq \|w^k - z\| \quad \forall k \geq k_2.$$

Hơn nữa, từ công thức cập nhật của w^k , ta có

$$\|x^{k+1} - z\| \leq \|x^k - z\| + \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| \quad \forall k \geq k_2.$$

Đặt $a_k := \|x^k - z\|$, $b_k = \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|$ và nhận thấy rằng $b_k \leq \xi_k$ với mọi $k \geq 0$, do đó $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$. Áp dụng Bổ đề 1.5 ta suy ra rằng giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\|$ tồn tại và do đó dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Mặt khác, từ một phép tính đơn giản, ta thu được

$$\begin{aligned} \|w^k - z\|^2 &= \|(1 + \alpha_k)(x^k - z) - \alpha_k(x^{k-1} - z)\|^2 \\ &= (1 + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - z\|^2 + \alpha_k(1 + \alpha_k)\|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ &\leq (1 + \alpha_k)\|x^k - z\|^2 - \alpha_k\|x^{k-1} - z\|^2 + 2\alpha_k\|x^k - x^{k-1}\|^2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Hơn nữa, từ bất đẳng thức (3.49) ta suy ra

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|w^k - y^k\|^2 + \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|x^{k+1} - y^k\|^2 \leq \|w^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 \\ &\leq \|x^k - z\|^2 - \|x^{k+1} - z\|^2 + \alpha_k [\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2] + 2\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|^2. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Do $\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \leq \alpha_k M_2 \|x^k - x^{k-1}\|$, trong đó $M_2 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x^k - x^{k-1}\|$ và kết hợp với $\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| \rightarrow 0$, ta có $\alpha_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$. Lấy giới hạn hai vế của bất đẳng thức (3.52) và lưu ý rằng dãy $\{\|x^k - z\|^2\}$ hội tụ, ta suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - y^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - y^k\| = 0. \quad (3.53)$$

Từ đó, ta kết luận rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - x^{k+1}\| = 0. \quad (3.54)$$

Theo Bổ đề 1.4, để hoàn tất chứng minh, ta cần chỉ ra rằng mọi điểm giới hạn yếu của dãy $\{x^k\}$ đều thuộc tập nghiệm $\text{Sol}(f, C)$. Giả sử \bar{x} là một điểm giới hạn yếu bất kỳ của dãy $\{x^k\}$. Vì $\{x^k\}$ bị chặn, nên tồn tại một dãy con $\{x^{k_i}\}$ sao cho $x^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$. Hơn nữa, do $0 \leq \|w^k - x^k\| = \alpha_k \|x^k - x^{k-1}\| = b_k$ và $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$, nên ta có $w^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$. Do đó suy ra $y^{k_i} \rightharpoonup \bar{x} \in C$. Từ công thức

$$x^{k+1} = \operatorname{argmin}_{y \in T_k} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}$$

và Bổ đề 1.1, tồn tại $u^k \in \partial(f(y^k, \cdot))(x^{k+1})$ và $q^k \in N_{T_k}(x^{k+1})$, sao cho

$$0 = \lambda_k u^k + x^{k+1} - w^k + q^k.$$

Từ định nghĩa của $N_{T_k}(x^{k+1})$, ta suy ra

$$\langle w^k - x^{k+1} - \lambda_k u^k, y - x^{k+1} \rangle \leq 0 \quad \forall y \in T_k.$$

Do $C \subset T_k$, nên ta có

$$\langle w^k - x^{k+1} - \lambda_k u^k, y - x^{k+1} \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C,$$

$$\langle w^k - x^{k+1}, y - x^{k+1} \rangle \leq \langle \lambda_k u^k, y - x^{k+1} \rangle \quad \forall y \in C.$$

Mặt khác, vì $u^k \in \partial(f(y^k, \cdot))(x^{k+1})$, nên ta có đánh giá sau

$$\langle u^k, y - x^{k+1} \rangle \leq f(y^k, y) - f(y^k, x^{k+1}) \quad \forall y \in C.$$

Do đó, ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{\langle w^k - x^{k+1}, y - x^{k+1} \rangle}{\lambda_k} \leq f(y^k, y) - f(y^k, x^{k+1}) \quad \forall y \in C. \quad (3.55)$$

Từ (3.45) và (3.43), ta suy ra

$$\begin{aligned} 2\lambda_k f(y^k, x^{k+1}) &\geq 2\lambda_k [f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k)] - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2] \\ &\geq 2\langle w^k - y^k, x^{k+1} - y^k \rangle - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Kết hợp (3.55) và (3.56), ta thu được

$$\begin{aligned} \langle w^k - x^{k+1}, y - x^{k+1} \rangle &\leq \lambda_k f(y^k, y) - \langle w^k - y^k, x^{k+1} - y^k \rangle \\ &\quad + 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2] \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Thay k bởi k_l trong bất đẳng thức (3.57), ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \langle w^{k_l} - x^{k_l+1}, y - x^{k_l+1} \rangle &\leq \lambda_{k_l} f(y^{k_l}, y) - \langle w^{k_l} - y^{k_l}, x^{k_l+1} - y^{k_l} \rangle \\ &\quad + \sigma \frac{\lambda_{k_l}}{\lambda_{k_l+1}} [\|w^{k_l} - y^{k_l}\|^2 + \|y^{k_l} - x^{k_l+1}\|^2] \quad \forall y \in C. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Lấy giới hạn khi $l \rightarrow \infty$ trong (3.58) và sử dụng tính nửa liên tục dưới yếu của hàm $f(\cdot, y)$ cùng với hệ quả từ (3.53), ta suy ra

$$f(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Điều này có nghĩa là $\bar{x} \in \text{Sol}(f, C)$. Vì \bar{x} là một điểm tụ yếu tùy ý của dãy $\{x^k\}$, ta kết luận rằng mọi điểm tụ yếu của dãy này đều thuộc tập nghiệm $\text{Sol}(f, C)$. Do đó, theo Bổ đề 1.4, dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán cân bằng (3.36). \square

3.2.2. Biền thể quán tính và xấp xỉ gắn kết

Phát triển từ ý tưởng trong Thuật toán 2.1 của [99], chúng tôi đề xuất một cách lựa chọn khác cho tham số θ trong Thuật toán 3.4 như sau:

Thuật toán 3.5 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính với cỡ bước tăng [SEMNS])

Khởi tạo: Chọn các tham số $\lambda_1 > 0$, $0 < \mu_1 < \mu_0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $\theta \in [0, \frac{1}{\sqrt{\tau}})$, $\tau \geq 1$, $\alpha \in (0, 1)$. Chọn các dãy tham số $\{\epsilon_k\}$ thỏa mãn $\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty$. Chọn các điểm khởi tạo $x^0, x^1 \in C$ và đặt $k = 1$.

Bước 1: Từ các điểm x^{k-1} và x^k ($k \geq 1$), tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \theta(x^k - x^{k-1}), \\ y^k = \underset{y \in C}{\operatorname{argmin}} \left\{ \lambda_k f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}. \end{cases}$$

Nếu $y^k = w^k$ thì x^k là nghiệm và dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển **Bước 2**.
Bước 2: Lấy $\zeta^k \in \partial(f(w^k, \cdot))(y^k)$ sao cho $w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k \in N_C(y^k)$. Xét nửa không gian T_k có cấu trúc như sau $T_k = \{x \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k, x - y^k \rangle \leq 0\}$. Tính

$$\begin{aligned} z^k &= \underset{y \in T_k}{\operatorname{argmin}} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}, \\ x^{k+1} &= (1 - \alpha)w^k + \alpha z^k, \\ \eta_k &= f(w^k, x^{k+1}) - f(w^k, y^k) - f(y^k, x^{k+1}), \quad \delta_k = \|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Thuật toán 3.5 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường quán tính với cỡ bước tăng [SEMNS])

Cập nhật cỡ bước λ_k theo công thức

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\delta_k}{\eta_k}, & \text{nếu } \eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k, \\ (1 + \epsilon_k) \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt $k := k + 1$, và quay lại **Bước 1**.

Sự hội tụ của Thuật toán 3.5 được khẳng định trong định lý sau.

Định lý 3.3. *Cho C là một tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} , và $f : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm cân bằng thỏa mãn các điều kiện (C1)–(C5). Nếu điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\alpha \in \left(0, \frac{\sqrt{\tau}\theta^2 - (\tau + 1)\theta + \sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}\theta^2 - (\tau + 1)\theta + \sqrt{\tau} + \sqrt{\tau}\theta(1 + \theta)} \right),$$

thì dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.5 hội tụ yếu đến một nghiệm của bài toán cân bằng EP(f, C).

Chứng minh. Lập luận tương tự như trong Bổ đề 3.6, với mọi $k \geq k_1$, ta thu được

$$\|z^k - z\|^2 \leq \|w^k - z\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|w^k - y^k\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|z^k - y^k\|^2. \quad (3.60)$$

Tiếp tục theo hướng chứng minh trong [99, Định lý 3.1]. Từ (3.50), tồn tại $k_2 > k_1$ sao cho

$$1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} > 0 \quad \forall k > k_2.$$

Từ biểu thức (3.59), ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &= \|(1 - \alpha)w^k + \alpha z^k - z\|^2 \\ &= \|(1 - \alpha)(w^k - z) + \alpha(z^k - z)\|^2 \\ &= (1 - \alpha) \|w^k - z\|^2 + \alpha \|z^k - z\|^2 - (1 - \alpha)\alpha \|z^k - w^k\|^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Kết hợp (3.60) và (3.61), ta thu được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \alpha \|w^k - y^k\|^2 \\ &\quad - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \alpha \|z^k - y^k\|^2 - (1 - \alpha)\alpha \|z^k - w^k\|^2. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Từ (3.59), ta có $z^k - w^k = \frac{1}{\alpha}(x^{k+1} - w^k)$, điều này kết hợp với (3.62) cho ta đánh giá sau

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - z\|^2 &\leq \|w^k - z\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \alpha \|w^k - y^k\|^2 \\
&\quad - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \alpha \|z^k - y^k\|^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|x^{k+1} - w^k\|^2 \\
&\leq \|w^k - z\|^2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \|x^{k+1} - w^k\|^2 \\
&= \|w^k - z\|^2 - \rho \|x^{k+1} - w^k\|^2 \quad \forall k \geq k_2,
\end{aligned} \tag{3.63}$$

trong đó $\rho := \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned}
\|w^k - z\|^2 &= \|x^k + \theta(x^k - x^{k-1}) - z\|^2 \\
&= \|(1+\theta)(x^k - z) - \theta(x^{k-1} - z)\|^2 \\
&= (1+\theta)\|x^k - z\|^2 - \theta\|x^{k-1} - z\|^2 + (1+\theta)\theta\|x^k - x^{k-1}\|^2.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - w^k\|^2 &= \|x^{k+1} - x^k - \theta(x^k - x^{k-1})\|^2 \\
&= \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \theta^2\|x^k - x^{k-1}\|^2 - 2\theta\langle x^{k+1} - x^k, x^k - x^{k-1} \rangle \\
&\geq \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \theta^2\|x^k - x^{k-1}\|^2 - 2\theta\|x^{k+1} - x^k\| \cdot \|x^k - x^{k-1}\| \\
&\geq (1 - \theta\sqrt{\tau})\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}}\right)\|x^k - x^{k-1}\|^2.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (3.63), (3.64) và (3.65), ta thu được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - z\|^2 &\leq (1+\theta)\|x^k - z\|^2 - \theta\|x^{k-1} - z\|^2 + (1+\theta)\theta\|x^k - x^{k-1}\|^2 \\
&\quad - \rho(1 - \theta\sqrt{\tau})\|x^{k+1} - x^k\|^2 - \rho\left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}}\right)\|x^k - x^{k-1}\|^2 \\
&= (1+\theta)\|x^k - z\|^2 - \theta\|x^{k-1} - z\|^2 - \rho(1 - \theta\sqrt{\tau})\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&\quad + \left[(1+\theta)\theta - \rho\left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}}\right)\right]\|x^k - x^{k-1}\|^2 \quad \forall k \geq k_2.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Từ đó, ta dẫn đến đánh giá sau

$$\begin{aligned}
&\|x^{k+1} - z\|^2 - \theta\|x^k - z\|^2 + \left[(1+\theta)\theta - \rho\left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}}\right)\right]\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&\leq \|x^k - z\|^2 - \theta\|x^{k-1} - z\|^2 + \left[(1+\theta)\theta - \rho\left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}}\right)\right]\|x^k - x^{k-1}\|^2 \\
&\quad - \left[\rho(1 - \theta\sqrt{\tau}) - (1+\theta)\theta + \rho\left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}}\right)\right]\|x^{k+1} - x^k\|^2 \quad \forall k \geq k_2.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Ký hiệu

$$\Gamma_k =: \|x^k - z\|^2 - \theta \|x^{k-1} - z\|^2 + \left[(1 + \theta)\theta - \rho \left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}} \right) \right] \|x^k - x^{k-1}\|^2$$

và đặt hằng số γ như sau

$$\gamma := \rho(1 - \theta\sqrt{\tau}) - (1 + \theta)\theta + \rho \left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}} \right) = \rho \left(\frac{\sqrt{\tau}\theta^2 - (\tau + 1)\theta + \sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} \right) - \theta(1 + \theta).$$

Do $\theta \in [0, \frac{1}{\sqrt{\tau}})$ và

$$\alpha \in \left(0, \frac{\sqrt{\tau}\theta^2 - (\tau + 1)\theta + \sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}\theta^2 - (\tau + 1)\theta + \sqrt{\tau} + \sqrt{\tau}\theta(1 + \theta)} \right),$$

nên dễ dàng nhận thấy rằng

$$\gamma = \rho \left(\frac{\sqrt{\tau}\theta^2 - (\tau + 1)\theta + \sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau}} \right) - \theta(1 + \theta) > 0. \quad (3.68)$$

Do đó, bất đẳng thức (3.67) trở thành

$$\Gamma_{k+1} - \Gamma_k \leq -\gamma \|x^{k+1} - x^k\|^2 \quad \forall k \geq k_2. \quad (3.69)$$

Bất đẳng thức này cho thấy dãy $\{\Gamma_k\}$ là giảm dần khi $k \geq k_2$. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \|x^k - z\|^2 - \theta \|x^{k-1} - z\|^2 + \underbrace{\left[(1 + \theta)\theta - \rho \left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}} \right) \right]}_{> 0} \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ &\geq \|x^k - z\|^2 - \theta \|x^{k-1} - z\|^2. \end{aligned}$$

Từ đó, với mọi $k \geq k_2$, ta suy ra rằng

$$\begin{aligned} \|x^k - z\|^2 &\leq \theta \|x^{k-1} - z\|^2 + \Gamma_k \\ &\leq \theta \|x^{k-1} - z\|^2 + \Gamma_{k_2} \\ &\leq \dots \leq \theta^{k-k_2} \|x^{k_2} - z\|^2 + \Gamma_{k_2} (\theta^{k-k_2-1} + \dots + 1) \\ &\leq \theta^{k-k_2} \|x^{k_2} - z\|^2 + \frac{\Gamma_{k_2}}{1 - \theta}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+1} &= \|x^{k+1} - z\|^2 - \theta \|x^k - z\|^2 + \left[(1 + \theta)\theta - \rho \left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{2}} \right) \right] \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ &\geq -\theta \|x^k - z\|^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Kết hợp (3.70) và (3.71), ta được

$$-\Gamma_{k+1} \leq \theta \|x^k - z\|^2 \leq \theta^{k-k_2+1} \|x^{k_2} - z\|^2 + \frac{\theta \Gamma_{k_2}}{1-\theta}.$$

Hơn nữa, từ (3.69), ta cũng có

$$\begin{aligned} \gamma \sum_{k=k_2}^n \|x^{k+1} - x^k\|^2 &\leq \Gamma_{k_2} - \Gamma_{k+1} \leq \theta^{n-k_2+1} \|x^{k_2} - z\|^2 + \frac{\Gamma_{k_2}}{1-\theta} \quad \forall n \geq k_2 \\ &\leq \|x^{k_2} - z\|^2 + \frac{\Gamma_{k_2}}{1-\theta} \quad \forall n \geq k_2. \end{aligned}$$

Ta suy ra rằng $\sum_{k=1}^{\infty} \|x^{k+1} - x^k\|^2 < \infty$. Do đó, ta có $\|x^{k+1} - x^k\| \rightarrow 0$. Hơn nữa

$$\|x^{k+1} - w^k\|^2 = \|x^{k+1} - x^k\|^2 + \theta^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 - 2\theta \langle x^{k+1} - x^k, x^k - x^{k-1} \rangle,$$

nên suy ra $\|x^{k+1} - w^k\| \rightarrow 0$ và

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - w^k\| &= \frac{1}{\alpha} \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - w^k\| = 0, \\ \|w^k - x^k\|^2 &= \theta^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Từ (3.66), ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq (1+\theta) \|x^k - z\|^2 - \theta \|x^{k-1} - z\|^2 \\ &\quad + \left[(1+\theta)\theta - \rho \left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}} \right) \right] \|x^k - x^{k-1}\|^2 \quad \forall k \geq k_2. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Áp dụng Bổ đề 1.2 cho (3.73) với

$$\phi_k := \|x^k - z\|^2, \quad \delta_k := \left[(1+\theta)\theta - \rho \left(\theta^2 - \frac{\theta}{\sqrt{\tau}} \right) \right] \|x^k - x^{k-1}\|^2, \quad \theta_k := \theta,$$

ta suy ra rằng giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - z\|^2$ tồn tại. Từ (3.64) cũng suy ra giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - z\|^2$ tồn tại. Kết hợp với (3.72), ta có

$$\begin{aligned} \|w^k - z\|^2 - \|z^k - z\|^2 &= (\|w^k - z\| + \|z^k - z\|) (\|w^k - z\| - \|z^k - z\|) \\ &\leq (\|w^k - z\| + \|z^k - z\|) \|w^k - z^k\| \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Từ (3.60), khi $k \rightarrow \infty$, ta có

$$\left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|y^k - w^k\|^2 + \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|z^k - y^k\|^2 \leq \|w^k - z\|^2 - \|z^k - z\|^2 \rightarrow 0,$$

tức là

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \|y^k - w^k\|^2 + \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} \right) \|z^k - y^k\|^2 \right] = 0.$$

Từ đó, ta nhận được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - w^k\| = 0 \text{ và } \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - y^k\| = 0.$$

Tương tự như (3.57), ta có

$$\begin{aligned} \langle w^k - z^k, y - z^k \rangle &\leq \lambda_k f(y^k, y) - \langle w^k - y^k, z^k - y^k \rangle \\ &\quad + 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} [\|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - z^k\|^2] \quad \forall y \in C. \end{aligned}$$

Phần còn lại của chứng minh được tiến hành tương tự như trong Định lý 3.2. Do đó, ta kết luận được Định lý 3.3. \square

Chú ý 3.4. Từ Thuật toán 3.5 và Định lý 3.3, ta nhận thấy rằng:

1. Trong một số trường hợp, việc lựa chọn $\theta = \theta(\tau)$ cùng với tham số τ phù hợp trong phương pháp của chúng tôi cho phép tăng giá trị của tham số α trong (3.59). Do đó, có thể nói rằng cách chọn α của chúng tôi linh hoạt hơn so với cách chọn trong Thuật toán 2.1 của [99]. Vui lòng xem phần so sánh kết quả số với các tham số khác nhau trong Ví dụ 3.3.
2. Tương tự như lập luận trong chứng minh Định lý 3.2 của [99], chúng ta có thể thiết lập tốc độ hội tụ tuyến tính cho Thuật toán 3.5 với giả thiết tính giả đơn điệu mạnh của song hàm f .

Tiếp theo, chúng tôi đề xuất một biến thể sử dụng kỹ thuật xấp xỉ gắn kết của Thuật toán 3.4 với mục tiêu thiết lập một kết quả hội tụ mạnh mới cho bài toán cân bằng (3.36).

Thuật toán 3.6 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kiểu gắn kết với cỡ bước tăng [VSEM])

Khởi tạo: Chọn một ánh xạ co $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (tức là, tồn tại hằng số $\alpha \in (0, 1)$) sao cho $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \alpha \|x - y\|$ với mọi $x, y \in \mathcal{H}$). Chọn các tham số $\lambda_1 > 0$, $0 < \mu_1 < \mu_0 < \sigma < 1/2$, $\theta \in [0, 1)$. Chọn các dãy tham số $\{\epsilon_k\}, \{\xi_k\}, \{\alpha_k\} \subset [0, \infty)$ thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\xi_k}{\alpha_k} = 0. \quad (3.75)$$

Chọn các điểm khởi tạo $x^0, x^1 \in C$ và đặt $k = 1$.

Thuật toán 3.6 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường kiểu gắn kết với cỡ bước tăng [VSEM])

Bước 1: Từ các điểm x^{k-1} và x^k ($k \geq 1$), chọn θ_k sao cho $0 \leq \theta_k \leq \bar{\theta}_k$, trong đó

$$\bar{\theta}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\xi_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}), \\ y^k = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left\{ \lambda_k f(w^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}. \end{cases}$$

Nếu $y^k = w^k$ thì x^k là nghiệm và dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển **Bước 2**.
Bước 2: Lấy $\zeta^k \in \partial(f(w^k, \cdot))(y^k)$ sao cho $w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k \in N_C(y^k)$. Xét nửa không gian có cấu trúc như sau

$$T_k = \{x \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k \zeta^k - y^k, x - y^k \rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$\begin{aligned} z^k &= \operatorname{argmin}_{y \in T_k} \left\{ \lambda_k f(y^k, y) + \frac{1}{2} \|y - w^k\|^2 \right\}, \\ x^{k+1} &= \alpha_k \varphi(w^k) + (1 - \alpha_k) z^k, \\ \eta_k &= f(w^k, z^k) - f(w^k, y^k) - f(y^k, z^k), \quad \delta_k = \|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - z^k\|^2. \end{aligned}$$

Cập nhật cỡ bước λ_k theo công thức

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\delta_k}{\eta_k}, & \text{nếu } \eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k, \\ (1 + \epsilon_k) \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt $k := k + 1$, và quay lại **Bước 1**.

Sự hội tụ mạnh của dãy lặp sinh bởi Thuật toán 3.6 được khẳng định trong định lý dưới đây.

Định lý 3.4. Với các giả thiết (C1)–(C5), dãy $\{x^k\}$ sinh bởi Thuật toán 3.6 hội tụ mạnh tới nghiệm $z = P_{\operatorname{Sol}(f, C)}(\varphi(z))$.

Chứng minh. Trước hết, theo Mệnh đề 2 trong [33], ta có tập nghiệm $\operatorname{Sol}(f, C)$ là một tập đóng và lồi. Bây giờ, ta sẽ chứng minh rằng dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Do $P_{\operatorname{Sol}(f, C)}(\varphi(z))$ là ánh xạ co nên tồn tại duy nhất điểm bất động $z = P_{\operatorname{Sol}(f, C)}(\varphi(z))$. Từ bất đẳng thức (3.49), ta suy ra

$$\|z^k - z\|^2 \leq \|w^k - z\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|w^k - y^k\|^2 - \left(1 - 2\sigma \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right) \|z^k - y^k\|^2.$$

Vì vậy, với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\|z^k - z\| \leq \|w^k - z\|. \quad (3.76)$$

Ta nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\| &\leq (1 - \alpha_k)\|z^k - z\| + \alpha_k\|\varphi(w^k) - z\| \\ &\leq (1 - \alpha_k)\|w^k - z\| + \alpha_k(\|\varphi(w^k) - \varphi(z)\| + \|\varphi(z) - z\|) \\ &\leq (1 - \alpha_k)\|w^k - z\| + \alpha_k(\alpha\|w^k - z\| + \|\varphi(z) - z\|) \\ &= (1 - (1 - \alpha)\alpha_k)\|w^k - z\| + \alpha_k\|\varphi(z) - z\|. \end{aligned}$$

Do đó, từ định nghĩa của w^k , ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\| &\leq (1 - (1 - \alpha)\alpha_k)\|w^k - z\| + \alpha_k\|\varphi(z) - z\| \\ &= (1 - (1 - \alpha)\alpha_k)\|x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}) - z\| + \alpha_k\|\varphi(z) - z\| \\ &\leq (1 - (1 - \alpha)\alpha_k)\|x^k - z\| + (1 - (1 - \alpha)\alpha_k)\theta_k\|x^k - x^{k-1}\| + \alpha_k\|\varphi(z) - z\| \\ &= (1 - (1 - \alpha)\alpha_k)\|x^k - z\| + (1 - \alpha)\alpha_k\left(\sigma_k + \frac{\|\varphi(z) - z\|}{1 - \alpha}\right), \end{aligned}$$

trong đó

$$\sigma_k = \left(\frac{1 - (1 - \alpha)\alpha_k}{1 - \alpha}\right) \frac{\theta_k}{\alpha_k} \|x^k - x^{k-1}\|.$$

Theo điều kiện của các tham số ξ_k và α_k , ta thấy rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - (1 - \alpha)\alpha_k}{1 - \alpha}\right) \frac{\theta_k}{\alpha_k} \|x^k - x^{k-1}\| = 0,$$

điều này suy ra rằng dãy $\{\sigma_k\}$ là bị chặn. Đặt

$$M = \max \left\{ \frac{\|\varphi(z) - z\|}{1 - \alpha}, \sup_{k \in \mathbb{N}} \sigma_k \right\}$$

và áp dụng Bổ đề 1.6(1) với các dữ liệu như sau: $a_k = \|x^k - z\|$, $\delta_k = (1 - \alpha)\alpha_k$, $b_k = (1 - \alpha)\alpha_k \left[\sigma_k + \frac{\|\varphi(z) - z\|}{1 - \alpha} \right]$, $c_k = 0$, ta suy ra rằng dãy $\{\|x^k - z\|\}$ là bị chặn, từ đó suy ra dãy $\{x^k\}$ là bị chặn và do đó dãy $\{w^k\}$ cũng bị chặn, từ (3.76) ta cũng có $\{z^k\}$ bị chặn. Áp dụng đẳng thức (3.51) và giả thiết $0 \leq \theta_k < 1$ (suy ra $\theta_k(1 + \theta_k) < 2\theta_k$), ta có

$$\|w^k - z\|^2 \leq \|x^k - z\|^2 + \theta_k(\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2) + 2\theta_k\|x^k - x^{k-1}\|^2.$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle \forall x, y \in \mathcal{H}$, ta cũng có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - z\|^2 &= \|(1 - \alpha_k)(z^k - z) + \alpha_k(\varphi(w^k) - z)\|^2 \\
&\leq (1 - \alpha_k)\|z^k - z\|^2 + 2\alpha_k\langle \varphi(w^k) - z, x^{k+1} - z \rangle \\
&\leq (1 - \alpha_k)\|w^k - z\|^2 + 2\alpha_k\langle \varphi(w^k) - z, x^{k+1} - z \rangle \\
&\quad - (1 - \alpha_k)\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|w^k - y^k\|^2 - (1 - \alpha_k)\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|z^k - y^k\|^2 \\
&\leq (1 - \alpha_k)\|x^k - z\|^2 + (1 - \alpha_k)\theta_k(\|x^k - z\|^2 - \|x^{k-1} - z\|^2) \\
&\quad + 2(1 - \alpha_k)\theta_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 + 2\alpha_k\langle \varphi(w^k) - z, x^{k+1} - z \rangle \\
&\quad - (1 - \alpha_k)\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|w^k - y^k\|^2 - (1 - \alpha_k)\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|z^k - y^k\|^2.
\end{aligned}$$

Đặt $a_k := \|x^k - z\|^2$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{aligned}
&(1 - \alpha_k)\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|w^k - y^k\|^2 + (1 - \alpha_k)\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|z^k - y^k\|^2 \\
&\leq a_k - a_{k+1} + 2\alpha_k\langle \varphi(w^k) - z, x^{k+1} - z \rangle + (1 - \alpha_k)\theta_k(a_k - a_{k-1}) \\
&\quad + 2(1 - \alpha_k)\theta_k\|x^k - x^{k-1}\|^2. \tag{3.77}
\end{aligned}$$

Bây giờ, ta xét hai trường hợp có thể xảy ra.

Trường hợp 1: Giả sử tồn tại một số nguyên $k_0 \geq 0$ sao cho với mỗi $k \geq k_0$, ta có $a_{k+1} \leq a_k$. Trong trường hợp này, giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ tồn tại và $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_k - a_{k+1}) = 0$.

Do $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k\|x^k - x^{k-1}\|^2 = 0$, nên từ bất đẳng thức (3.77), ta suy ra rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \alpha_k\right)\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|w^k - y^k\|^2 + \left(1 - \alpha_k\right)\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}\right)\|z^k - y^k\|^2 \right] = 0.$$

Do $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ và (3.50), ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - y^k\|^2 = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - y^k\|^2 = 0. \tag{3.78}$$

Vì ϕ co nên $\{\phi(w^k)\}$ bị chặn và do đó ta có dãy $\{\phi(w^k) - z^k\}$ bị chặn, từ đây ta suy ra

$$\|x^{k+1} - z^k\| = \alpha_k\|\varphi(w^k) - z^k\| \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty.$$

Vì vậy, sử dụng điều sau

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - y^k\| &\leq \|x^{k+1} - z^k\| + \|z^k - y^k\| \rightarrow 0, \\
\|x^k - y^k\| &\leq \|x^k - w^k\| + \|w^k - y^k\| = \theta_k\|x^k - x^{k-1}\| + \|w^k - y^k\| \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

ta suy ra $\|x^{k+1} - y^k\| \rightarrow 0$ và $\|x^k - y^k\| \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$. Gọi \bar{x} là một điểm tụ yếu bất kỳ của dãy $\{x^k\}$. Vì dãy $\{x^k\}$ bị chặn, nên tồn tại một dãy con $\{x^{k_i}\}$ của $\{x^k\}$ sao cho $x^{k_i} \rightharpoonup \bar{x} \in C$ và do đó, $y^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$. Từ (3.78), suy ra $x^{k_i+1} \rightharpoonup \bar{x}$. Dựa vào lập luận tương tự trong chứng minh của Định lý 3.2, ta kết luận rằng $\omega_w(x^k) \subset \text{Sol}(f, C)$. Do $z = P_{\text{Sol}(f, C)}(\varphi(z))$, nên theo tính chất đặc trưng của phép chiếu (xem Mệnh đề 1.1(1)), ta có

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle = \max_{\bar{x} \in \omega_w(x^k)} \langle \varphi(z) - z, \bar{x} - z \rangle \leq 0.$$

Mặt khác, ta cũng thấy rằng

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &= \langle x^{k+1} - z, x^{k+1} - z \rangle \\ &= \alpha_k \langle \varphi(w^k) - \varphi(z), x^{k+1} - z \rangle + \alpha_k \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle \\ &\quad + (1 - \alpha_k) \langle z^k - z, x^{k+1} - z \rangle \\ &\leq \alpha_k \alpha \|w^k - z\| \|x^{k+1} - z\| + \alpha_k \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle \\ &\quad + (1 - \alpha_k) \|z^k - z\| \|x^{k+1} - z\| \\ &\leq \alpha_k \alpha \|w^k - z\| \|x^{k+1} - z\| + \alpha_k \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle \\ &\quad + (1 - \alpha_k) \|w^k - z\| \|x^{k+1} - z\| \\ &\leq (1 - \alpha_k(1 - \alpha)) \|w^k - z\| \|x^{k+1} - z\| + \alpha_k \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k(1 - \alpha)) \left(\frac{\|w^k - z\|^2}{2} + \frac{\|x^{k+1} - z\|^2}{2} \right) + \alpha_k \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle, \end{aligned}$$

điều này suy ra rằng

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - z\|^2 &\leq \frac{1 - \alpha_k(1 - \alpha)}{1 + \alpha_k(1 - \alpha)} \|w^k - z\|^2 + \frac{2\alpha_k}{1 + \alpha_k(1 - \alpha)} \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle \\ &\leq \frac{1 - \alpha_k(1 - \alpha)}{1 + \alpha_k(1 - \alpha)} (\|x^k - z\| + \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|)^2 \\ &\quad + \frac{2\alpha_k}{1 + \alpha_k(1 - \alpha)} \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle \\ &= \left(1 - \frac{2\alpha_k(1 - \alpha)}{1 + \alpha_k(1 - \alpha)} \right) (\|x^k - z\|^2 + 2\theta_k \|x^k - x^{k-1}\| \|x^k - z\| \\ &\quad + \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2) + \frac{2\alpha_k}{1 + \alpha_k(1 - \alpha)} \langle \varphi(z) - z, x^{k+1} - z \rangle. \quad (3.79) \end{aligned}$$

Bên cạnh đó, ta cũng có

$$\begin{aligned} \|x^k - z\|^2 + 2\theta_k \|x^k - z\| \|x^k - x^{k-1}\| + \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ \leq \|x^k - z\|^2 + 2\theta_k \|x^k - z\| \|x^k - x^{k-1}\| + \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\ \leq \|x^k - z\|^2 + 3M_2\theta_k \|x^k - x^{k-1}\|, \quad (3.80) \end{aligned}$$

trong đó

$$M_2 = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{\|x^k - z\|, \|x^k - x^{k-1}\|\}.$$

Kết hợp (3.79) và (3.80), ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - z\|^2 &\leq (1 - \gamma_k)\|x^k - z\|^2 + 3M_2(1 - \gamma_k)\theta_k\|x^k - x^{k-1}\| \\
&\quad + \frac{2\alpha_k}{1 + \alpha_k(1 - \alpha)}\langle\varphi(z) - z, x^{k+1} - z\rangle. \\
&\leq (1 - \gamma_k)\|x^k - z\|^2 + \gamma_k \left[3M_2(1 - \gamma_k)\frac{\theta_k}{\gamma_k}\|x^k - x^{k-1}\| \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{1 - \alpha}\langle\varphi(z) - z, x^{k+1} - z\rangle \right], \tag{3.81}
\end{aligned}$$

trong đó

$$\gamma_k = \frac{2\alpha_k(1 - \alpha)}{1 + \alpha_k(1 - \alpha)}.$$

Dễ thấy rằng với k đủ lớn thì $\gamma_k \in (0, 1)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $0 < \gamma_k < 1$ với mọi $k \geq k_0$. Do $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma_k}{\alpha_k} = 2(1 - \alpha) > 0$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$, ta suy ra $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty$. Từ giả thiết (3.75), ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \gamma_k)\frac{\theta_k}{\gamma_k}\|x^k - x^{k-1}\| = 0. \tag{3.82}$$

Đặt các dãy như sau:

$$\begin{aligned}
a_k &:= \|x^k - z\|^2, \quad \delta_k := \gamma_k, \quad c_k := 0, \\
b_k &:= 3M_2(1 - \gamma_k)\frac{\theta_k}{\gamma_k}\|x^k - x^{k-1}\| + \frac{1}{1 - \alpha}\langle\varphi(z) - z, x^{k+1} - z\rangle.
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.75) và (3.82), áp dụng Bổ đề 1.3 cho (3.81) với các dữ liệu trên, ta suy ra dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới $z = P_{\text{Sol}(C, f)}(\varphi(z))$

Trường hợp 2: Giả sử rằng tồn tại một dãy con $\{a_{k_i}\} \subset \{a_k\}$ sao cho $a_{k_i} \leq a_{k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Trong trường hợp này, ta có thể định nghĩa một ánh xạ $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bởi

$$\tau(k) = \max\{i \leq k : a_i < a_{i+1}\}.$$

Khi đó, từ Bổ đề 1.3, ta có $\tau(k) \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$ và $a_{\tau(k)} < a_{\tau(k)+1}$. Vì vậy, từ bất đẳng thức (3.77), ta nhận được điều sau

$$\begin{aligned}
&\left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_{\tau(k)}}{\lambda_{\tau(k)+1}}\right)\|z^{\tau(k)} - y^{\tau(k)}\|^2 + \left(1 - 2\sigma\frac{\lambda_{\tau(k)}}{\lambda_{\tau(k)+1}}\right)\|x^{\tau(k)+1} - y^{\tau(k)}\|^2 \leq a_{\tau(k)} - a_{\tau(k)+1} \\
&\quad + 2\alpha_{\tau(k)}\langle\varphi(w^{\tau(k)}) - z, z^{\tau(k)} - z\rangle + (1 - \alpha_{\tau(k)})\theta_{\tau(k)}(a_{\tau(k)} - a_{\tau(k)-1}) \\
&\quad + 2(1 - \alpha_{\tau(k)})\theta_{\tau(k)}\|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\|^2 \\
&\leq 2\alpha_{\tau(k)}\langle\varphi(w^{\tau(k)}) - z, z^{\tau(k)} - z\rangle + (1 - \alpha_{\tau(k)})\theta_{\tau(k)}\|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\|(\sqrt{a_{\tau(k)}} + \sqrt{a_{\tau(k)-1}}) \\
&\quad + 2(1 - \alpha_{\tau(k)})\theta_{\tau(k)}\|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\|^2, \tag{3.83}
\end{aligned}$$

và ta cũng có đánh giá

$$a_{\tau(k)+1} \leq (1 - \gamma_{\tau(k)})a_{\tau(k)} + \gamma_{\tau(k)} \left[3M_2(1 - \gamma_{\tau(k)}) \frac{\theta_{\tau(k)}}{\gamma_{\tau(k)}} \|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\| + \frac{1}{1 - \alpha} \langle \varphi(z) - z, x^{\tau(k)+1} - z \rangle \right]. \quad (3.84)$$

Do $a_{\tau(k)} < a_{\tau(k)+1}$, nên từ (3.84) ta suy ra

$$\gamma_{\tau(k)} a_{\tau(k)} \leq \gamma_{\tau(k)} \left[3M_2(1 - \gamma_{\tau(k)}) \frac{\theta_{\tau(k)}}{\gamma_{\tau(k)}} \|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\| + \frac{1}{1 - \alpha} \langle \varphi(z) - z, x^{\tau(k)+1} - z \rangle \right],$$

và do đó

$$\|x^{\tau(k)} - z\|^2 = a_{\tau(k)} \leq 3M_2(1 - \gamma_{\tau(k)}) \frac{\theta_{\tau(k)}}{\gamma_{\tau(k)}} \|x^{\tau(k)} - x^{\tau(k)-1}\| + \frac{1}{1 - \alpha} \langle \varphi(z) - z, x^{\tau(k)+1} - z \rangle. \quad (3.85)$$

Kết hợp (3.82), (3.83) và (3.85), ta có

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - z\|^2 \leq 0,$$

và do đó

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - z\|^2 = 0.$$

Từ (3.84), ta có

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)+1} - z\|^2 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - z\|^2.$$

Do đó

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)+1} - z\|^2 = 0.$$

Vì vậy, theo Bổ đề 1.2, ta suy ra

$$0 \leq \|x^k - z\| \leq \max\{\|x^{\tau(k)} - z\|, \|x^k - z\|\} \leq \|x^{\tau(k)+1} - z\| \rightarrow 0.$$

Theo đó, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới $z = P_{\text{Sol}(f, C)}(\varphi(z))$ và ta thu được điều cần chứng minh. \square

3.2.3. Ứng dụng cho bất đẳng thức biến phân

Ở tiểu mục này, chúng tôi xét ứng dụng của thuật toán trên cho bài toán bất đẳng thức biến phân (1.7). Để đưa bài toán (1.7) về dạng bài toán cân bằng, với mỗi cặp $x, y \in \mathcal{H}$, ta định nghĩa song hàm cân bằng f như sau

$$f(x, y) := \langle Fx, y - x \rangle. \quad (3.86)$$

Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:

(D1) F giả đơn điệu C ;

(D2) F là ánh xạ F -hemi-liên tục ([77]), nghĩa là với mọi $y \in C$, hàm $x \mapsto \langle Fx, x-y \rangle$ là nửa liên tục dưới yếu trên C (hoặc tương đương, $x \mapsto \langle Fx, y-x \rangle$ là nửa liên tục trên yếu trên C);

(D3) F liên tục Lipschitz trên \mathcal{H} với hằng số Lipschitz L ;

(D4) $\text{Sol}(F, C) \neq \emptyset$.

Dễ thấy rằng mọi ánh xạ liên tục từ yếu đến mạnh đều là ánh xạ F -hemi-liên tục, tuy nhiên điều ngược lại không đúng, điều này được minh họa trong ví dụ ngay sau đây.

Ví dụ 3.2. ([55]) Xét không gian Hilbert $l^2 = \{x = (x^i)_{i \in \mathbf{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^2 < \infty\}$ và ánh xạ $F : l^2 \rightarrow l^2$ là ánh xạ đồng nhất. Cho dãy $\{x_n\} \subseteq l^2$ hội tụ yếu về \bar{x} . Do hàm $x \mapsto \|x\|^2$ liên tục và lồi nên nó nửa liên tục dưới yếu. Do đó, $\|\bar{x}\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^2$, dẫn đến

$$\langle \bar{x}, \bar{x} - y \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n - y \rangle,$$

với mọi $y \in l^2$, tức là, F là F -hemi-liên tục. Tuy nhiên, nếu ta lấy

$$x_n = e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

với số 1 ở vị trí thứ n , thì rõ ràng $e_n \rightarrow 0$, nhưng dãy $\{e_n\}$ không hội tụ mạnh (vì $|e_n - e_m| = \sqrt{2}$ với $m \neq n$). Do đó, F không liên tục từ yếu đến mạnh.

Chú ý 3.5. Theo hiểu biết hiện tại của chúng tôi, chưa có kết quả nào xác lập mối quan hệ giữa các ánh xạ liên tục yếu và các ánh xạ F -hemi-liên tục.

Như vậy, bài toán bất đẳng thức biến phân (1.7) có thể được viết lại dưới dạng bài toán cân bằng (3.86), và các điều kiện (C1)–(C5) được đảm bảo bởi (D1)–(D4). Khi đó, Thuật toán 3.4 sẽ trở thành một thuật toán đặc biệt được áp dụng cho bài toán VIP(F, C).

Thuật toán 3.7 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tăng cho bài toán bất đẳng thức biến phân)

Khởi tạo: Chọn các tham số $\lambda_0 > 0$, $0 < \mu_1 < \mu_0 < \sigma < 1/2$, $\theta \in [0, 1)$. Chọn các dãy tham số $\{\epsilon_k\}, \{\xi_k\} \subset [0, \infty)$ thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \epsilon_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k < \infty.$$

Chọn các điểm khởi tạo $x^0, x^1 \in C$ và đặt $k = 1$.

Thuật toán 3.7 (Thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với cỡ bước tăng cho bài toán bất đẳng thức biến phân)

Bước 1: Từ các điểm x^{k-1} và x^k ($k \geq 1$), chọn α_k sao cho $0 \leq \alpha_k \leq \bar{\alpha}_k$, trong đó

$$\bar{\alpha}_k = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\xi_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } x^k \neq x^{k-1}, \\ \theta & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Tính

$$\begin{cases} w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \\ y^k = P_C(w^k - \lambda_k F w^k). \end{cases}$$

Nếu $y^k = w^k$, thì x^k là nghiệm và dừng thuật toán. Ngược lại, chuyển **Bước 2**.

Bước 2: Xét nửa không gian T_k có cấu trúc như sau

$$T_k = \{x \in \mathcal{H} : \langle w^k - \lambda_k F w^k - y^k, x - y^k \rangle \leq 0\}.$$

Tính

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= P_{T_k}(w^k - F y^k), \\ \eta_k &= \langle F w^k - F y^k, x^{k+1} - y^k \rangle, \quad \delta_k = \|w^k - y^k\|^2 + \|y^k - x^{k+1}\|^2. \end{aligned}$$

Cập nhật cỡ bước λ_k theo công thức

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} \mu_1 \frac{\delta_k}{\eta_k}, & \text{nếu } \eta_k > \frac{\mu_0}{\lambda_k} \delta_k, \\ (1 + \epsilon_k) \lambda_k, & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Đặt $k := k + 1$, và quay lại **Bước 1**.

Kết quả sau đây là hệ quả trực tiếp của Định lý 3.2.

Hệ quả 3.1. Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} , và $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là một ánh xạ thỏa mãn các điều kiện **(D1)**–**(D4)**. Giả sử rằng $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ là hai dãy sinh bởi Thuật toán 3.7. Khi đó, cả hai dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ đều hội tụ yếu về cùng một điểm $x^* \in \text{Sol}(F, C)$.

3.2.4. Thử nghiệm số và ứng dụng

Trong mục này, chúng tôi áp dụng các Thuật toán 3.4 (NISEM), 3.5 (SEMNS) và 3.6 (VSEM) giải gần đúng bài toán cân bằng và tiến hành so sánh với các thuật toán đã có.

Ví dụ 3.3 (Ứng dụng vào mô hình cân bằng Nash–Cournot của thị trường điện).

Trong ví dụ này, chúng tôi tiếp tục xem xét lại bài toán đã được nêu trong Ví dụ 2.1 ở Chương 2. Mục tiêu là minh họa hiệu quả thực nghiệm của thuật toán NISEM và SEMNS, đồng thời tiến hành so sánh hiệu quả của chúng với năm thuật toán hiện có gồm: AISEM trong [98, Thuật toán 2.1], EPSM trong [95, Thuật toán 1], ISEM trong [99, Thuật toán 2.1], NAKM trong [108, Thuật toán 3.1], và SEM trong [117, Thuật toán 3.1].

Thử nghiệm 8: Trong thử nghiệm này, lấy $a = 110$ và xét ba điểm khởi đầu khác nhau như sau:

$$x^a = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top, \quad x^i = (2, 2, 2, 2, 2, 2)^\top, \quad x^j = (1, 0, 1, 0, 1, 0)^\top.$$

Tham số của các thuật toán được đề cập phía trên được chọn như sau:

- Trong thuật toán AISEM, $\mu = 0.5$, $\theta = 0.45(1 - \mu)$, $\lambda_1 = 17$, $x_1 = x_0 = x^0$.
- Trong thuật toán EPSM, $\theta = 0.05$, $\alpha_k = 0.2 \quad \forall k \geq 0$, $\varrho = 0.55$, $\varkappa_0 = \varkappa_1 = 0.01$, $u_{-1} = u_0 = v_0 = x^0$.
- Trong thuật toán ISEM, $\mu = 0.9$, $\alpha = 0.1$, $\tau = 0.88$, $\lambda_1 = 0.01$, $x_0 = x_1 = x^0$.
- Trong thuật toán NAKM, $\delta = 2.1$, $\alpha = \frac{\delta - \sqrt{2\delta}}{10\delta}$, $\theta = 0.9$, $\tau = \frac{0.99}{1+\delta}$, $\mu = 0.4$, $\lambda_1 = 0.7$, $x_1 = x_0 = x^0$.
- Trong thuật toán SEM, $\mu = 0.99$, $\lambda_0 = 0.7$, $\alpha_k = \frac{1}{10^4(k+5)} \quad \forall k \geq 1$, $x_0 = x^0$.
- Trong thuật toán NISEM, $\theta = 0.9$, $\mu_0 = 0.49$, $\mu_1 = 0.48$, $\alpha = 0.91$, $\lambda_1 = 0.01$, $\epsilon_k = \frac{1}{k^{1.01}} \quad \forall k \geq 1$, $x^1 = x^0$.
- Trong thuật toán SEMNS, $\theta = 0.5$, $\mu_0 = 0.48$, $\mu_1 = 0.47$, $\lambda_1 = 0.2$, $\xi_k = \epsilon_k = \frac{1}{k^{1.01}} \quad \forall k \geq 1$, $x^1 = x^0$.

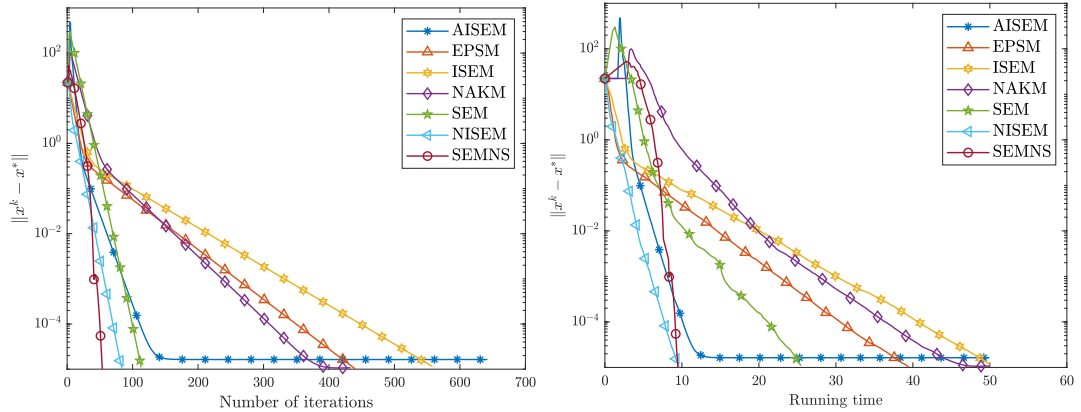
Sử dụng điều kiện dừng của tất cả các thuật toán đó là $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-5}$ hoặc thời gian tính toán không vượt quá 50s. Kết quả được liệt kê trong các Bảng 3.3, 3.4, và Hình 3.6 thể hiện đáng kể hiệu quả của các thuật toán với điểm khởi đầu $x^0 = x^i$.

Thuật toán	Xấp xỉ nghiệm x^*						$\ x^k - x^*\ $
AISEM	11.3361	11.4869	11.3533	10.8748	10.7930	10.7930	1.6434e-05
EPSM	11.3362	11.4869	11.3533	10.8749	10.7931	10.7931	1.6500e-04
ISEM	11.3360	11.4866	11.3532	10.8749	10.7932	10.7932	1.1539e-05
NAKM	11.3361	11.4868	11.3533	10.8748	10.7930	10.7930	1.0788e-05
SEM	11.3361	11.4868	11.3533	10.8748	10.7930	10.7930	9.1780e-06
NISEM	11.3361	11.4868	11.3533	10.8748	10.7930	10.7930	9.9631e-06
SENMS	11.3361	11.4868	11.3533	10.8748	10.7930	10.7930	8.6399e-06

Bảng 3.3: Xấp xỉ nghiệm của các thuật toán AISEM, EPSM, ISEM, NAKM, SEM, NISEM và SENMS, với $x^0 = x^i$ trong Ví dụ 3.3

	$x^0 = x^a$			$x^0 = x^b$			$x^0 = x^c$		
	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error
AISEM	50.1593	434	1.7823e-05	50.0231	641	1.6434e-05	19.2622	148	9.6747e-06
EPSM	50.0414	423	1.8360e-04	39.5654	439	1.6500e-04	49.1020	365	1.8249e-04
ISEM	48.6476	565	9.8638e-06	50.0476	557	1.1539e-05	50.2284	367	9.3285e-04
NAKM	50.0074	432	1.1672e-05	50.0277	558	1.0788e-05	49.4926	388	9.6446e-06
SEM	17.7749	111	9.1414e-06	25.7378	112	9.1780e-06	19.2080	111	8.7619e-06
NISEM	10.3225	84	9.8823e-06	9.6250	83	9.9631e-06	12.7461	85	9.6491e-06
NSEM	10.3658	55	8.5917e-06	9.5109	53	8.6399e-06	10.3028	55	8.7515e-06

Bảng 3.4: Hiệu suất của các thuật toán AISEM, EPSM, ISEM, NAKM, SEM, NISEM và SENMS trong Thử nghiệm 8 của Ví dụ 3.3

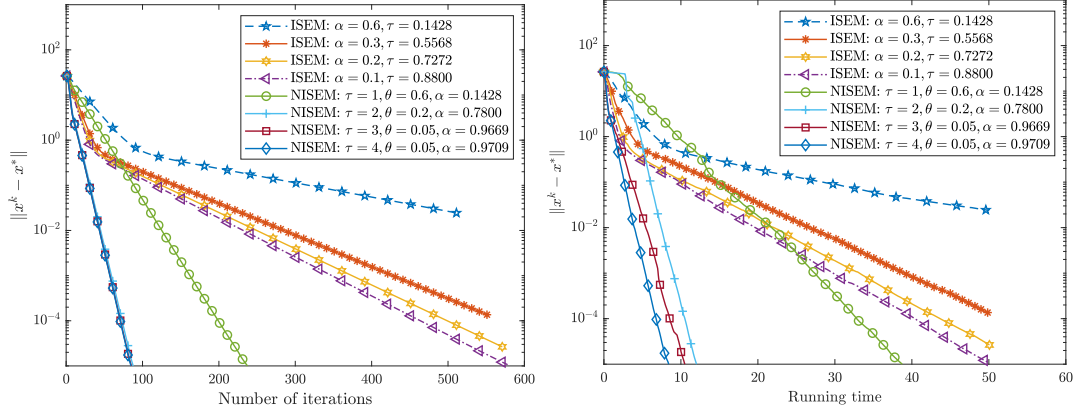


Hình 3.6: So sánh hiệu suất giữa các thuật toán NISEM và SEMNS với các thuật toán AISEM, EPSM, ISEM, NAKM và SEM, với $x^0 = x^i$

Các kết quả thực nghiệm cho thấy các thuật toán dưới đạo hàm tăng cường sử dụng kỹ thuật quán tính với chiến lược cỡ bước tăng (NISEM và SEMNS) nhìn chung đạt hiệu quả tốt hơn về thời gian tính toán so với một số thuật toán hiện có như thuật toán AISEM, EPSM, ISEM, NAKM và SEM. Một nguyên nhân đáng kể là các thuật toán này chỉ sử dụng chiến lược cỡ bước tự thích nghi

với dãy cỡ bước giảm dần hoặc không đơn điệu tăng.

Thử nghiệm 9: Trong thí nghiệm số tiếp theo, chúng tôi thay đổi giá trị của tham số α đối với Thuật toán 3.4 và Thuật toán 2.1 trong [99]. Kết quả được trình bày trong Bảng 3.5 và Hình 3.7. Có thể thấy rằng việc thay đổi giá trị của α ảnh hưởng đáng kể đến chi phí tính toán của Thuật toán 2.1 trong [99].



Hình 3.7: So sánh hiệu suất của hai thuật toán NISEM và ISEM với giá trị tham số α khác nhau

	$x^0 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$			$x^0 = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$		
	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error
ISEM: $\alpha = 0.6, \tau = 0.1428$	50.0424	516	0.0168	50.0542	514	0.0238
ISEM: $\alpha = 0.3, \tau = 0.5568$	50.0751	506	2.0252e-04	50.0035	552	1.3191e-04
ISEM: $\alpha = 0.2, \tau = 0.7272$	50.0828	594	1.2666e-05	50.0720	570	2.6494e-05
ISEM: $\alpha = 0.1, \tau = 0.8800$	48.2636	565	9.8638e-06	50.0574	557	1.0657e-05
NISEM: $\tau = 1, \theta = 0.6, \alpha = 0.1428$	31.2201	235	9.7433e-06	38.8243	237	9.7250e-06
NISEM: $\tau = 2, \theta = 0.2, \alpha = 0.7800$	10.6962	86	9.7387e-06	12.0562	87	9.6570e-06
NISEM: $\tau = 3, \theta = 0.05, \alpha = 0.9669$	12.2118	84	9.5251e-06	10.5570	85	9.3631e-06
NISEM: $\tau = 4, \theta = 0.05, \alpha = 0.9709$	9.6315	84	9.0968e-06	8.4241	84	9.8708e-06

Bảng 3.5: Hiệu suất hai thuật toán NISEM và ISEM với giá trị tham số α khác nhau

Ví dụ 3.4 (Ví dụ với không gian vô hạn chiều).

Trong ví dụ này, chúng tôi tiến hành khảo sát sự hội tụ của Thuật toán 3.6 (VSEM) và thực hiện so sánh với năm thuật toán khác, bao gồm: EMIEgA được trình bày trong [81, Thuật toán 2], MIEM trong [86, Thuật toán 1], IEM được đề xuất trong [31, Thuật toán 3.1], ISEA trong [105, Thuật toán 3.2] và SEM được đưa ra trong [117, Thuật toán 3.1].

Xét không gian Hilbert các hàm bình phương khả tích trong đoạn $[0, 1]$ $\mathcal{H} :=$

$L^2([0, 1])$ với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u(t)v(t)dt \quad \forall u, v \in \mathcal{H},$$

và chuẩn $\|\cdot\|$ tương ứng. Xét bài toán (3.36) với $C := \{u \in \mathcal{H} : \|u\| \leq 1\}$ và song hàm được chọn cụ thể như sau

$$f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \left\langle \left(\frac{3}{2} - \|x\|\right)x, y - x \right\rangle + \|y\|^4 - \|x\|^4, \quad \forall x, y \in C.$$

- (i) Trước tiên, ta chứng minh được song hàm f giả đơn điệu mạnh trên C . Thật vậy, với mọi $x, y \in C$ thỏa mãn

$$f(x, y) = \left\langle \left(\frac{3}{2} - \|x\|\right)x, y - x \right\rangle + \|y\|^4 - \|x\|^4 \geq 0.$$

Khi đó, ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned} f(y, x) &= \left\langle \left(\frac{3}{2} - \|y\|\right)y, x - y \right\rangle + \|x\|^4 - \|y\|^4 \\ &\leq \left\langle \left(\frac{3}{2} - \|y\|\right)y, x - y \right\rangle + \left\langle \left(\frac{3}{2} - \|x\|\right)x, y - x \right\rangle \\ &= -\frac{3}{2}\|x - y\|^2 + \langle -y\|y\| + \|x\|x, x - y \rangle \\ &= -\frac{3}{2}\|x - y\|^2 + \langle (x - y)\|y\| + (\|x\| - \|y\|)x, x - y \rangle \\ &\leq -\frac{3}{2}\|x - y\|^2 + (\|x - y\|\|y\| + \|\|x\| - \|y\|\| \|x\|)\|x - y\| \\ &\leq -\frac{1}{2}\|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy, song hàm f giả đơn điệu mạnh trên C với $\gamma = \frac{1}{2}$.

- (ii) Ta cũng có thể chứng minh song hàm f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (C4). Thật vậy, với mọi $x, y, z \in C$, ta có

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, z) &= f(x, z) + \left\langle \left(\frac{3}{2} - \|x\|\right)x - \left(\frac{3}{2} - \|y\|\right)y, y - z \right\rangle \\ &= f(x, z) + \frac{3}{2}\langle x - y, y - z \rangle - \langle \|x\|x - y\|y\|, y - z \rangle \\ &= f(x, z) + \frac{3}{4}[\|x - z\|^2 - \|x - y\|^2 - \|y - z\|^2] \\ &\quad - \langle \|x\|x - y\|y\|, y - z \rangle. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Mặt khác, ta lại có đánh giá sau

$$\begin{aligned} \langle \|x\|x - y\|y\|, y - z \rangle &= \langle \|x\|(x - y) + y(\|x\| - \|y\|), y - z \rangle \\ &\leq 2\|x - y\|\|y - z\| \\ &\leq \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Kết hợp hai đánh giá trên, ta thu được

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - \frac{7}{4}\|x - y\|^2 - \frac{7}{4}\|y - z\|^2.$$

Do đó, song hàm f thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (C4) với $c_1 = c_2 = \frac{7}{4}$.

Dễ dàng nhận thấy rằng các song hàm này thỏa mãn đầy đủ các điều kiện cần thiết để đảm bảo tính hội tụ của các thuật toán. Hơn nữa, phép chiếu trực giao lên tập C có công thức tường minh, cụ thể

$$P_C(x(t)) = \begin{cases} x(t), & \text{nếu } \|x(t)\| \leq 1, \\ \frac{x(t)}{\|x(t)\|}, & \text{nếu } \|x(t)\| > 1. \end{cases}$$

Ta xét các điểm khởi đầu khác nhau như sau:

$$x^0 = \frac{1}{100}e^{2t} \sin 3t, \quad x^0 = \frac{1}{255}t^4 e^{-t}, \quad x^0 = t^2.$$

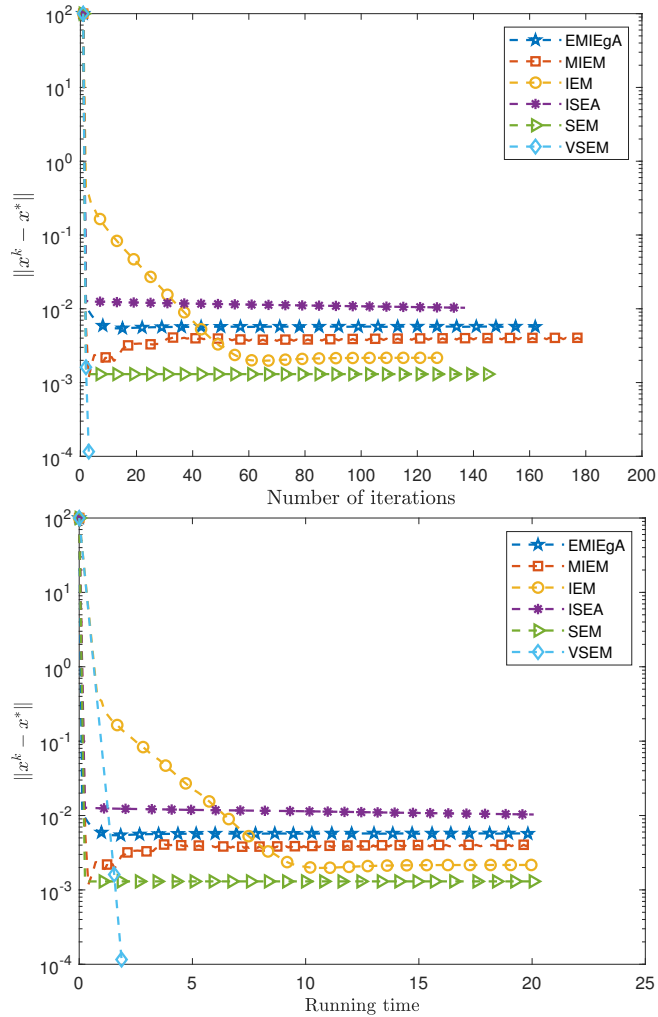
Các tham số được chọn tương ứng như sau:

- Trong thuật toán EMIEgA, $\varkappa = 0.1$, $\zeta_k = \frac{1}{10(k+2)}$, $\epsilon_k = \frac{\log k}{(k+1)^{1.05}} \forall k \geq 1$, $u_{-1} = u_0 = x^0$.
- Trong thuật toán MIEM, $\lambda_1 = \tau = \sigma = \eta = 0.6$, $\mu = 0.4$, $\gamma_k = 1 - \frac{1}{k+2}$, $\alpha_k = 0.01 + \frac{1}{k+1}$, $\epsilon_k = \frac{1}{(k+1)^2}$, $\xi_k = 1 + \frac{1}{(k+1)^{1.1}}$, $\rho_k = \frac{1}{(k+1)^{1.1}}$, $\beta_k = \frac{1}{k+1} \forall k \geq 1$, $x_0 = x_1 = x^0$.
- Trong thuật toán IEM, $\lambda_1 = 5000$, $\rho = 0.003$, $\mu = 0.9$, $\tau_k = \frac{1}{(k+1)^2} \forall k \geq 1$, $u_0 = u_1 = x^0$.
- Trong thuật toán ISEA, $\lambda_1 = 0.1$, $\mu = 0.9$, $\tau_k = \frac{\log k}{(k+1)^{1.05}}$, $\theta_k = 0.01$, $\beta_k = \frac{1}{100(k+5)} \forall k \geq 1$, $x_0 = x_1 = x^0$.
- Trong thuật toán SEM, $\lambda_0 = 0.5$, $\mu = 0.9$, $\beta_k = 0.01$, $\alpha_k = \frac{1}{100(k+5)} \forall k \geq 1$, $S = I$, $x_0 = x^0$.
- Trong thuật toán VSEM, $\varphi(x) = \frac{1}{8}x$, $\lambda_1 = 0.1$, $\mu_0 = 0.2$, $\mu_1 = 0.15$, $\epsilon_k = \frac{\log k}{(k+1)^{1.05}}$, $\xi_k = \frac{1}{k^{1.05}}$, $\alpha_k = \frac{1}{k^{0.1}} \forall k \geq 1$, $x^1 = x^0$.

Sử dụng tiêu chuẩn dừng là khi đạt được ước lượng $\|x^k - x^*\| \leq 10^{-3}$ hoặc khi thời gian tính toán vượt quá 20s đối với tất cả các thuật toán. Kết quả số của ba thuật toán được trình bày trong Bảng 3.6 và Hình 3.8.

	$x^0 = \frac{1}{100}e^{2t} \sin 3t$			$x^0 = \frac{1}{255}t^4e^{-t}$			$x^0 = t^2$		
	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error	Times	Iter.	Error
EMIEgA	20.0072	164	0.0057	20.0470	163	0.0057	20.0322	162	0.0057
MIEM	20.0255	190	0.0041	20.0565	180	0.0040	20.0448	185	0.0039
IEM	20.0417	131	0.0022	20.1158	127	0.0022	20.0506	129	0.0022
ISEA	20.0860	139	0.1531	20.0712	136	0.0103	20.0297	133	1.6774
SEM	20.0356	141	0.0013	20.0486	144	0.0013	20.0296	133	0.0013
VSEM	2.5160	3	$1.9719e - 04$	1.8715	2	$1.1580e - 04$	2.1409	5	$4.9019e - 04$

Bảng 3.6: Hiệu suất của các thuật toán EMIEgA, MIEM, IEM, ISEA và SEM và VSEM trong Ví dụ 3.4



Hình 3.8: So sánh hiệu suất giữa thuật toán VSEM và các thuật toán EMIEgA, MIEM, IEM, ISEA và SEM, với $x^0 = \frac{1}{255}t^4e^{-t}$

Ví dụ này cho thấy rằng, thuật toán dưới đạo hàm tăng cường sử dụng kỹ thuật gắn kết với cỡ bước tăng cho kết quả khả quan, thể hiện ở cả thời gian tính toán lẫn độ chính xác của nghiệm xấp xỉ thu được.

Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đề xuất thuật toán chiếu dưới đạo hàm cho bài toán bất đẳng thức biến phân với tập chấp nhận được cho dưới dạng là một tập mức dưới của một hàm lồi nhưng không nhất thiết khả vi. Một ứng dụng của thuật toán trong việc khử mờ ảnh cũng đã được trình bày. Ở phần cuối, chúng tôi trình bày các thuật toán dưới đạo hàm tăng cường với chiến lược cỡ bước tăng giải bài toán cân bằng. Hơn nữa, một ứng dụng của thuật toán cho bài toán bất đẳng thức biến phân cũng đã được trình bày. Chúng tôi đưa ra các ví dụ số để minh họa hiệu quả của các thuật toán được đề xuất và tiến hành so sánh hiệu suất của chúng với một số thuật toán đã có.

KẾT LUẬN

Luận án đề xuất một số phương pháp giải bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân và ứng dụng trong khử mờ ảnh và một số ví dụ thực tế.

Những kết quả chính đã đạt được trong luận án bao gồm:

1. Đề xuất một số **thuật toán phân rã kiểu Tseng** để giải các bài toán cân bằng mà song hàm có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai song hàm thành phần trong không gian Hilbert thực;
2. Đề xuất **thuật toán một phép chiếu phân rã** giải bài toán cân bằng giả đơn điệu cho bởi tổng của hai hàm song hàm thành phần trong không gian Hilbert thực;
3. Bằng cách kết hợp kỹ thuật quán tính và phương pháp dưới đạo hàm tăng cường với một chiến lược mới về lựa chọn cỡ bước, chúng tôi đề xuất một **phương pháp đạo hàm tăng cường mới** để giải các bài toán cân bằng giả đơn điệu trong không gian Hilbert thực;
4. Đề xuất **thuật toán chiếu dưới đạo hàm nói lỏng** cho bài toán bất đẳng thức biến phân với tập chấp nhận được là tập mức dưới của một hàm lồi không nhất thiết khả vi, và ứng dụng thuật toán trong việc khử mờ ảnh.

Một số hướng nghiên cứu tiếp theo:

1. Nghiên cứu phát triển các thuật toán tối ưu giải bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân trên không gian không có cấu trúc tuyến tính, như đa tạp Hadamard và đa tạp Riemann;
2. Nghiên cứu phát triển các thuật toán giải bài toán cân bằng ngẫu nhiên, bất đẳng thức biến phân ngẫu nhiên.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ

- [1] Vinh N.T., Thuong N.T. (2022), “A relaxed version of the gradient projection method for variational inequalities with applications”, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. Vol. 67 (1), pp. 73-89, DOI: 10.24193/subbmath.2022.1.06s.
- [2] Anh P.K., Thuong N.T., Vinh N.T. (2024), “Tseng-type splitting projection algorithms for equilibrium problems in Hilbert spaces”, Optimization, Vol. 74 (8), pp. 1969-1998, DOI: 10.1080/02331934.2024.2341943.
- [3] Thuong N.T., Vinh N.T. (2024), “Convergence of one-step projection methods for equilibrium problems given by a sum of two bifunctions”, Vietnam J. Math. Vol 54, pp. 523-547, DOI: 10.1007/s10013-024-00717-8.
- [4] Anh P.K., Thuong N.T., Vinh N.T. (2026), “Novel subgradient extragradient methods for equilibrium problems in Hilbert spaces”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. DOI: 10.1016/j.cnsns.2026.109777.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Alber, Y.I., Iusem, A.N., Solodov, M.V.: On the projected subgradient method for nonsmooth convex optimization in a Hilbert space. *Math. Program.* **81**(1 (A)), 23–35 (1998). DOI 10.1007/BF01584842
- [2] Alvarez, F., Attouch, H.: An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Anal.* **9**(1-2), 3–11 (2001). DOI 10.1023/A:1011253113155. URL hdl.handle.net/10533/172606
- [3] Anh, L.Q., Khanh, P.Q., Quan, N.H.: Equilibrium problems. Existence, stability, and approximation. *Forum Interdiscip. Math. Cham*: Springer (2025). DOI 10.1007/978-3-031-89003-1
- [4] Anh, P.K., Anh, T.V., Muu, L.D.: On bilevel split pseudomonotone variational inequality problems with applications. *Acta Math. Vietnam.* **42**(3), 413–429 (2017). DOI 10.1007/s40306-016-0178-8
- [5] Anh, P.K., Hai, T.N.: Splitting extragradient-like algorithms for strongly pseudomonotone equilibrium problems. *Numer. Algorithms* **76**(1), 67–91 (2017). DOI 10.1007/s11075-016-0244-2
- [6] Anh, P.K., Hai, T.N.: Novel self-adaptive algorithms for non-Lipschitz equilibrium problems with applications. *J. Glob. Optim.* **73**(3), 637–657 (2019). DOI 10.1007/s10898-018-0722-2

- [7] Anh, P.K., Vinh, N.T.: Self-adaptive gradient projection algorithms for variational inequalities involving non-Lipschitz continuous operators. *Numer. Algorithms* **81**(3), 983–1001 (2019). DOI 10.1007/s11075-018-0578-z
- [8] Anh, P.K., Vinh, N.T., Dung, V.T.: A new self-adaptive CQ algorithm with an application to the LASSO problem. *J. Fixed Point Theory Appl.* **20**(4), 19 (2018). DOI 10.1007/s11784-018-0620-8. Id/No 142
- [9] Anh, P.N.: New outer proximal methods for solving variational inequality problems. *J. Optim. Theory Appl.* **198**(2), 479–501 (2023). DOI 10.1007/s10957-023-02202-7
- [10] Anh, P.N., Muu, L.D.: A hybrid subgradient algorithm for nonexpansive mappings and equilibrium problems. *Optim. Lett.* **8**(2), 727–738 (2014). DOI 10.1007/s11590-013-0612-y
- [11] Ansari, Q.H., Lalitha, C.S., Mehta, M.: Generalized convexity, nonsmooth variational inequalities, and nonsmooth optimization. Boca Raton, FL: CRC Press (2014). DOI 10.1201/b15244
- [12] Antipin, A.S.: The convergence of proximal methods to fixed points of extremal mappings and estimates of their rate of convergence. *Comput. Math. Math. Phys.* **35**(5), 539–551 (1995)
- [13] Bauschke, H.H., Combettes, P.L.: Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. CMS Books Math./Ouvrages Math. SMC. Berlin: Springer (2011). DOI 10.1007/978-1-4419-9467-7
- [14] Bello Cruz, J.Y., Díaz Millán, R.: A direct splitting method for nonsmooth variational inequalities. *J. Optim. Theory Appl.* **161**(3), 728–737 (2014). DOI 10.1007/s10957-013-0478-2

- [15] Bianchi, M., Pini, R.: Coercivity conditions for equilibrium problems. *J. Optim. Theory Appl.* **124**(1), 79–92 (2005). DOI 10.1007/s10957-004-6466-9
- [16] Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M., Passacantando, M.: *Nonlinear programming techniques for equilibria*. EURO Adv. Tutor. Oper. Res. Cham: Springer (2019). DOI 10.1007/978-3-030-00205-3
- [17] Blum, E., Oettli, W.: From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Stud.* **63**(1-4), 123–145 (1994)
- [18] Briceño-Arias, L.M.: Outer approximation method for constrained composite fixed point problems involving Lipschitz pseudo contractive operators. *Numer. Funct. Anal. Optim.* **32**(11), 1099–1115 (2011). DOI 10.1080/01630563.2011.594199
- [19] Briceño-Arias, L.M.: A Douglas-Rachford splitting method for solving equilibrium problems. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods* **75**(16), 6053–6059 (2012). DOI 10.1016/j.na.2012.06.014
- [20] Buong, N., Hoai, P.T.T., Nguyen, N.D.: Iterative methods for a class of variational inequalities in Hilbert spaces. *J. Fixed Point Theory Appl.* **19**(4), 2383–2395 (2017). DOI 10.1007/s11784-017-0442-0
- [21] Cao, Y., Guo, K.: On the convergence of inertial two-subgradient extragradient method for variational inequality problems. *Optimization* **69**(6), 1237–1253 (2020). DOI 10.1080/02331934.2019.1686632
- [22] Cegielski, A., Zalas, R.: Methods for variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of quasi-nonexpansive operators. *Numer.*

- Funct. Anal. Optim. **34**(3), 255–283 (2013). DOI 10.1080/01630563.2012.716807
- [23] Censor, Y., Gibali, A., Reich, S.: Strong convergence of subgradient extragradient methods for the variational inequality problem in Hilbert space. *Optim. Methods Softw.* **26**(4-5), 827–845 (2011). DOI 10.1080/10556788.2010.551536
- [24] Combettes, P., Hirstoaga, S.: Equilibrium programming in hilbert spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* **6**, 117–136 (2005). DOI 10.1515/GMJ.2006.13
- [25] Contreras, J., Klusch, M., Krawczyk, J.: Numerical solutions to nash-cournot equilibria in coupled constraint electricity markets. *IEEE Tran. Power Sys.* **19**(1), 195 – 206 (2004). DOI 10.1109/TPWRS.2003.820692
- [26] Dinh, B.V., Muu, L.D.: A projection algorithm for solving pseudomonotone equilibrium problems and it’s application to a class of bilevel equilibria. *Optimization* **64**(3), 559–575 (2015). DOI 10.1080/02331934.2013.773329
- [27] Dong, N.T.P., Strodiot, J.J., Van, N.T.T., Hien, N.V.: A family of extragradient methods for solving equilibrium problems. *J. Ind. Manag. Optim.* **11**(2), 619–630 (2015). DOI 10.3934/jimo.2015.11.619
- [28] Duc, P.M., Muu, L.D., Quy, N.V.: Solution-existence and algorithms with their convergence rate for strongly pseudo-monotone equilibrium problems. *Pacific J. Optim.* **12**(4), 833–851 (2016)
- [29] Duc, P.M., Thanh, L.X.: A splitting subgradient algorithm for solving equilibrium problems involving the sum of two bifunctions and application to Cournot-Nash model. *RAIRO, Oper. Res.* **55**, s1395–s1410 (2021). DOI 10.1051/ro/2020030

- [30] Fan, K.: A minimax inequality and applications. *Inequalities III, Proc. 3rd Symp., Los Angeles 1969*, 103-113 (1972)
- [31] Hai, L.T.T., Thong, D.V., Vuong, P.T.: An inertial extragradient method for solving strongly pseudomonotone equilibrium problems in Hilbert spaces. *Comput. Appl. Math.* **43**(6), 18 (2024). DOI 10.1007/s40314-024-02840-1. Id/No 363
- [32] Hai, T.N., Thuong, N.T.: A new splitting algorithm for equilibrium problems and applications. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.* **67**(1), 129–144 (2022). DOI 10.24193/subbmath.2022.1.09
- [33] Hai, T.N., Vinh, N.T.: Two new splitting algorithms for equilibrium problems. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM* **111**(4), 1051–1069 (2017). DOI 10.1007/s13398-016-0347-6
- [34] Hartman, P., Stampacchia, G.: On some non-linear elliptic differential functional equations. *Acta Math.* **115**, 271–310 (1966). DOI 10.1007/BF02392210
- [35] He, B.: A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities. *Appl. Math. Optim.* **35**(1), 69–76 (1997). DOI 10.1007/BF02683320
- [36] He, S., Dong, Q.L., Tian, H.: Relaxed projection and contraction methods for solving Lipschitz continuous monotone variational inequalities. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM* **113**(3), 2773–2791 (2019). DOI 10.1007/s13398-019-00658-9
- [37] He, S., Wu, T., Gibali, A., Dong, Q.L.: Totally relaxed, self-adaptive algorithm for solving variational inequalities over the intersection of sub-level

- sets. *Optimization* **67**(9), 1487–1504 (2018). DOI 10.1080/02331934.2018.1476515
- [38] Hieu, D.V.: Convergence analysis of a new algorithm for strongly pseudomonotone equilibrium problems. *Numer. Algorithms* **77**(4), 983–1001 (2018). DOI 10.1007/s11075-017-0350-9
- [39] Hieu, D.V.: New extragradient method for a class of equilibrium problems in Hilbert spaces. *Appl. Anal.* **97**(5), 811–824 (2018). DOI 10.1080/00036811.2017.1292350
- [40] Hieu, D.V.: New inertial algorithm for a class of equilibrium problems. *Numer. Algorithms* **80**(4), 1413–1436 (2019). DOI 10.1007/s11075-018-0532-0
- [41] Hieu, D.V., Anh, P.K., Muu, L.D.: Modified hybrid projection methods for finding common solutions to variational inequality problems. *Comput. Optim. Appl.* **66**(1), 75–96 (2017). DOI 10.1007/s10589-016-9857-6
- [42] Hieu, D.V., Moudafi, A.: A barycentric projected-subgradient algorithm for equilibrium problems. *J. Nonlinear Var. Anal.* **1**(1), 43–59 (2017)
- [43] Hieu, D.V., Muu, L.D., Quy, P.K.: One-step optimization method for equilibrium problems. *Adv. Comput. Math.* **48**(3), 28 (2022). DOI 10.1007/s10444-022-09953-3. Id/No 29
- [44] Hieu, D.V., Quy, P.K., Duong, H.N.: Equilibrium programming and new iterative methods in Hilbert spaces. *Acta Appl. Math.* **176**, 29 (2021). DOI 10.1007/s10440-021-00451-0. Id/No 7
- [45] Hieu, D.V., Thong, D.V.: New extragradient-like algorithms for strongly pseudomonotone variational inequalities. *J. Glob. Optim.* **70**(2), 385–399 (2018). DOI 10.1007/s10898-017-0564-3

- [46] Hieu, D.V., Thong, D.V.: A new projection method for a class of variational inequalities. *Appl. Anal.* **98**(13), 2423–2439 (2019). DOI 10.1080/00036811.2018.1460816
- [47] Hoai, P.T.: A new proximal gradient method for solving mixed variational inequality problems with a novel explicit stepsize and applications. *Math. Comput. Simul.* **229**, 594–610 (2025). DOI 10.1016/j.matcom.2024.10.008
- [48] Hoai, P.T., Thuong, N.T., Vinh, N.T.: Golden ratio algorithms for solving equilibrium problems in Hilbert spaces. *J. Nonlinear Var. Anal.* **5**(4), 493–518 (2021)
- [49] Hoai, P.T., Vinh, N.T., Chung, N.P.H.: A novel stepsize for gradient descent method. *Oper. Res. Lett.* **53**, 8 (2024). DOI 10.1016/j.orl.2024.107072. Id/No 107072
- [50] Huang, J., Zhang, S., Li, H., Metaxas, D.: Composite splitting algorithms for convex optimization. *Comput Vis Image Underst.* **115**(12), 1610–1622 (2011). DOI 10.1016/j.cviu.2011.06.011
- [51] Iiduka, H., Yamada, I.: A subgradient-type method for the equilibrium problem over the fixed point set and its applications. *Optimization* **58**(2), 251–261 (2009). DOI 10.1080/02331930701762829
- [52] Iusem, A.N.: On the maximal monotonicity of diagonal subdifferential operators. *J. Convex Anal.* **18**(2), 489–503 (2011). URL www.heldermann.de/JCA/JCA18/JCA182/jca18031.htm
- [53] Iusem, A.N., Sosa, W.: New existence results for equilibrium problems. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods* **52**(2), 621–635 (2003). DOI 10.1016/S0362-546X(02)00154-2

- [54] Iusem, A.N., Svaiter, B.F.: A variant of Korpelevich's method for variational inequalities with a new search strategy. *Optimization* **42**(4), 309–321 (1997). DOI 10.1080/02331939708844365
- [55] Kassay, G., Miholca, M.: Existence results for variational inequalities with surjectivity consequences related to generalized monotone operators. *J. Optim. Theory Appl.* **159**(3), 721–740 (2013). DOI 10.1007/s10957-013-0383-8
- [56] Kassay, G., Rădulescu, V.D.: *Equilibrium problems and applications. Math. Sci. Eng.* Amsterdam: Elsevier/Academic Press (2019). DOI 10.1016/C2015-0-06685-0
- [57] Khanh, P.D.: A modified extragradient method for infinite-dimensional variational inequalities. *Acta Math. Vietnam.* **41**(2), 251–263 (2016). DOI 10.1007/s40306-015-0150-z
- [58] Khanh, P.D., Vuong, P.T.: Modified projection method for strongly pseudomonotone variational inequalities. *J. Glob. Optim.* **58**(2), 341–350 (2014). DOI 10.1007/s10898-013-0042-5
- [59] Khobotov, E.N.: Modification of the extra-gradient method for solving variational inequalities and certain optimization problems. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* **27**(5), 120–127 (1987). DOI 10.1016/0041-5553(87)90058-9
- [60] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G.: *An introduction to variational inequalities and their applications* (1980). URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118674007>

- [61] Konnov, I.: Equilibrium models and variational inequalities (2007). URL <http://site.ebrary.com/id/10167101>
- [62] Korpelevich, G.M.: The extragradient method for finding saddle points and other problems (1976). URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118602977>
- [63] Lions, P.L., Mercier, B.: Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators. *SIAM J. Numer. Anal.* **16**, 964–979 (1979). DOI 10.1137/0716071
- [64] Liu, F., Nashed, M.Z.: Regularization of nonlinear ill-posed variational inequalities and convergence rates. *Set-Valued Anal.* **6**(4), 313–344 (1998). DOI 10.1023/A:1008643727926
- [65] Long, L.V., Thong, D.V., Dung, V.T.: New algorithms for the split variational inclusion problems and application to split feasibility problems. *Optimization* **68**(12), 2335–2363 (2019). DOI 10.1080/02331934.2019.1631821
- [66] Lyashko, S.I., Semenov, V.V.: A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: Optimization and its applications in control and data sciences. In honor of Boris T. Polyak's 80th birthday. Selected papers based on the presentations at the international conference, Moscow, Russia, May, 13–15, 2015, pp. 315–325. Cham: Springer (2016). DOI 10.1007/978-3-319-42056-1_10
- [67] Maingé, P.E.: Approximation methods for common fixed points of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **325**(1), 469–479 (2007). DOI 10.1016/j.jmaa.2005.12.066

- [68] Maingé, P.E.: Inertial iterative process for fixed points of certain quasi-nonexpansive mappings. *Set-Valued Anal.* **15**(1), 67–79 (2007). DOI 10.1007/s11228-006-0027-3
- [69] Maingé, P.E.: Convergence theorems for inertial KM-type algorithms. *J. Comput. Appl. Math.* **219**(1), 223–236 (2008). DOI 10.1016/j.cam.2007.07.021
- [70] Maingé, P.E.: Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Anal.* **16**(7-8), 899–912 (2008). DOI 10.1007/s11228-008-0102-z
- [71] Maingé, P.E.: Numerical approach to monotone variational inequalities by a one-step projected reflected gradient method with line-search procedure. *Comput. Math. Appl.* **72**(3), 720–728 (2016). DOI 10.1016/j.camwa.2016.05.028
- [72] Maingé, P.E., Gobinddass, M.L.: Convergence of one-step projected gradient methods for variational inequalities. *J. Optim. Theory Appl.* **171**(1), 146–168 (2016). DOI 10.1007/s10957-016-0972-4
- [73] Malitsky, Y.: Projected reflected gradient methods for monotone variational inequalities. *SIAM Journal on Optimization* **25**(1), 502–520 (2015). DOI 10.1137/14097238X
- [74] Malitsky, Y.: Golden ratio algorithms for variational inequalities. *Math. Program.* **184**(1-2 (A)), 383–410 (2020). DOI 10.1007/s10107-019-01416-w
- [75] Malitsky, Y.V., Semenov, V.V.: An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybern. Syst. Anal.* **50**(2), 271–277 (2014). DOI 10.1007/s10559-014-9614-8

- [76] Mastroeni, G.: On Auxiliary Principle for Equilibrium Problems, pp. 289–298. Springer US, Boston, MA (2003). DOI 10.1007/978-1-4613-0239-1_15. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1_15
- [77] Maugeri, A., Raciti, F.: On existence theorems for monotone and nonmonotone variational inequalities. *J. Convex Anal.* **16**(3-4), 899–911 (2009). URL www.heldermann.de/JCA/JCA16/JCA163/jca16055.htm
- [78] Mosco, U.: Implicit variational problems and quasi variational inequalities. *Nonlin. Oper. Calc. Var., Summer Sch. Bruxelles 1975, Lect. Notes Math.* **543**, 83-156 (1976). (1976). DOI 10.1007/bfb0079943
- [79] Moudafi, A.: Second-order differential proximal methods for equilibrium problems. *JIPAM, J. Inequal. Pure Appl. Math.* **4**(1), 7 (2003). URL <https://eudml.org/doc/130976>. Id/No 18
- [80] Moudafi, A.: On the convergence of splitting proximal methods for equilibrium problems in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **359**(2), 508–513 (2009). DOI 10.1016/j.jmaa.2009.06.005
- [81] Muangchoo, K.: Three novel two-step proximal-like methods for solving equilibrium and fixed point problems in real Hilbert spaces. *Comput. Appl. Math.* **41**(8), 26 (2022). DOI 10.1007/s40314-022-02088-7. Id/No 374
- [82] Muu, L.D.: Stability property of a class of variational inequalities. *Math. Operationsforsch. Stat., Ser. Optimization* **15**, 347–351 (1984). DOI 10.1080/02331938408842947

- [83] Muu, L.D., Oettli, W.: Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* **18**(12), 1159–1166 (1992). DOI 10.1016/0362-546X(92)90159-C
- [84] Muu, L.D., Quy, N.V.: On existence and solution methods for strongly pseudomonotone equilibrium problems. *Vietnam J. Math.* **43**(2), 229–238 (2015). DOI 10.1007/s10013-014-0115-x
- [85] Nash, J.: Non-cooperative games. *Ann. Math. (2)* **54**, 286–295 (1951). DOI 10.2307/1969529
- [86] Ngamkhum, T., Punpeng, K., Khonchaliew, M.: Modified inertial extragradient algorithm with non-monotonic step sizes for pseudomonotone equilibrium problems and quasi-nonexpansive mapping. *Carpathian J. Math.* **40**(2), 363–380 (2024). DOI 10.37193/CJM.2024.02.09
- [87] Nikaido, H., Isoda, K.: Note on noncooperative convex games. *Pac. J. Math.* **5**, 807–815 (1955). DOI 10.2140/pjm.1955.5.807
- [88] Noor, M.A.: Some algorithms for general monotone mixed variational inequalities. *Math. Comput. Modelling* **29**(7), 1–9 (1999). DOI 10.1016/S0895-7177(99)00058-8
- [89] Noor, M.A.: Iterative schemes for quasimonotone mixed variational inequalities. *Optimization* **50**(1-2), 29–44 (2001). DOI 10.1080/02331930108844552
- [90] Passty, G.B.: Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space. *J. Math. Anal. Appl.* **72**, 383–390 (1979). DOI 10.1016/0022-247X(79)90234-8

- [91] Popov, L.D.: A modification of Arrow-Hurwicz's method for the search of saddle points. *Mat. Zametki* **28**, 777–784 (1980)
- [92] Quoc, T.D., Anh, P.N., Muu, L.D.: Dual extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *J. Glob. Optim.* **52**(1), 139–159 (2012). DOI 10.1007/s10898-011-9693-2. URL zenodo.org/record/3413076
- [93] Quoc, T.D., Muu, L.D., Hien, N.V.: Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization* **57**(6), 749–776 (2008). DOI 10.1080/02331930601122876
- [94] Rehman, H.U., Kumam, P., Argyros, I.K., Deebani, W.: Inertial extragradient method for solving a family of strongly pseudomonotone equilibrium problems in real hilbert spaces with application in variational inequality problem. *Symmetry* **12**(4), 503 (2020). DOI 10.3390/sym12040503
- [95] Rehman, H.U., Kumam, P., Argyros, I.K., Kumam, W., Shutaywi, M.: The inertial iterative extragradient methods for solving pseudomonotone equilibrium programming in Hilbert spaces. *J. Inequal. Appl.* **2022**, 27 (2022). DOI 10.1186/s13660-022-02790-4. Id/No 58
- [96] Santos, P., Scheimberg, S.: An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems. *Comput. Appl. Math.* **30**(1), 91–107 (2011)
- [97] Santos, P.S.M., Scheimberg, S.: A modified projection algorithm for constrained equilibrium problems. *Optimization* **66**(12), 2051–2062 (2017). DOI 10.1080/02331934.2016.1182528
- [98] Shehu, Y., Dong, Q.L., Liu, L., Yao, J.C.: Alternated inertial subgradient extragradient method for equilibrium problems. *Top* **31**(1), 1–30 (2023). DOI 10.1007/s11750-021-00620-2

- [99] Shehu, Y., Iyiola, O.S., Thong, D.V., Van, N.T.C.: An inertial subgradient extragradient algorithm extended to pseudomonotone equilibrium problems. *Math. Methods Oper. Res.* **93**(2), 213–242 (2021). DOI 10.1007/s00186-020-00730-w
- [100] Solodov, M.V., Svaiter, B.F.: A new projection method for variational inequality problems. *SIAM J. Control Optim.* **37**(3), 765–776 (1999). DOI 10.1137/S0363012997317475
- [101] Strodiot, J.J., Vuong, P.T., Van, N.T.T.: A class of shrinking projection extragradient methods for solving non-monotone equilibrium problems in Hilbert spaces. *J. Glob. Optim.* **64**(1), 159–178 (2016). DOI 10.1007/s10898-015-0365-5
- [102] Svaiter, B.F.: On weak convergence of the douglas–rachford method. *SIAM J. Control Optim.* **49**(1), 280–287 (2011). DOI 10.1137/100788100
- [103] Takahashi, S., Takahashi, W.: Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and a nonexpansive mapping in a Hilbert space. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods* **69**(3), 1025–1033 (2008). DOI 10.1016/j.na.2008.02.042
- [104] Tan, K.K., Xu, H.K.: Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process. *J. Math. Anal. Appl.* **178**(2), 301–308 (1993). DOI 10.1006/jmaa.1993.1309
- [105] Thong, D.V., Cholamjiak, P., Rassias, M.T., Cho, Y.J.: Strong convergence of inertial subgradient extragradient algorithm for solving pseudomonotone equilibrium problems. *Optim. Lett.* **16**(2), 545–573 (2022). DOI 10.1007/s11590-021-01734-z

- [106] Thong, D.V., Hieu, D.V.: Modified subgradient extragradient algorithms for variational inequality problems and fixed point problems. *Optimization* **67**(1), 83–102 (2018). DOI 10.1080/02331934.2017.1377199
- [107] Thong, D.V., Hieu, D.V.: Weak and strong convergence theorems for variational inequality problems. *Numer. Algorithms* **78**(4), 1045–1060 (2018). DOI 10.1007/s11075-017-0412-z
- [108] Thong, D.V., Li, X.H., Reich, S., Dong, Q.L., Ngan, D.H.: A new approach to the Korpelevich method for solving pseudomonotone equilibrium problems. *Numer. Algorithms* **98**(2), 719–741 (2025). DOI 10.1007/s11075-024-01813-z
- [109] Thuy, L.Q., Hai, T.N.: A projected subgradient algorithm for bilevel equilibrium problems and applications. *J. Optim. Theory Appl.* **175**(2), 411–431 (2017). DOI 10.1007/s10957-017-1176-2
- [110] Trang, C.T.T., Tu, H.P., Anh, P.N.: New viscosity-projection methods for solving variational inequality problems with applications to image restoration problems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **152**, 16 (2026). DOI 10.1016/j.cnsns.2025.109179. Id/No 109179
- [111] Tseng, P.: A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control Optim.* **38**(2), 431–446 (2000). DOI 10.1137/S0363012998338806
- [112] Vinh, N.T., Muu, L.D.: Inertial extragradient algorithms for solving equilibrium problems. *Acta Math. Vietnam.* **44**(3), 639–663 (2019). DOI 10.1007/s40306-019-00338-1

- [113] Vuong, P.T., Strodiot, J.J., Hien, N.V.: Extragradient methods and line-search algorithms for solving Ky Fan inequalities and fixed point problems. *J. Optim. Theory Appl.* **155**(2), 605–627 (2012). DOI 10.1007/s10957-012-0085-7. URL orbilu.uni.lu/handle/10993/26847
- [114] Vuong, P.T., Strodiot, J.J., Hien, N.V.: On extragradient-viscosity methods for solving equilibrium and fixed point problems in a Hilbert space. *Optimization* **64**(2), 429–451 (2015). DOI 10.1080/02331934.2012.759327
- [115] Xu, H.K.: Iterative algorithms for nonlinear operators. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **66**(1), 240–256 (2002). DOI 10.1112/S0024610702003332
- [116] Yang, J., Liu, H.: A self-adaptive method for pseudomonotone equilibrium problems and variational inequalities. *Comput. Optim. Appl.* **75**(2), 423–440 (2020). DOI 10.1007/s10589-019-00156-z
- [117] Yang, J., Liu, H.: The subgradient extragradient method extended to pseudomonotone equilibrium problems and fixed point problems in Hilbert space. *Optim. Lett.* **14**(7), 1803–1816 (2020). DOI 10.1007/s11590-019-01474-1
- [118] Yuan, G.X.Z.: KKM theory and applications in nonlinear analysis, *Pure Appl. Math., Marcel Dekker*, vol. 218. New York, NY: Marcel Dekker (1999)