

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
— — — ★ — — —

Quản Thái Hà

LÝ THUYẾT VÀ ỨNG DỤNG CỦA CHẠP
LIÊN KẾT VỚI BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN HARTLEY

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2026

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
— — — ★ — — —

Quản Thái Hà

LÝ THUYẾT VÀ ỨNG DỤNG CỦA CHẬP
LIÊN KẾT VỚI BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN HARTLEY

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 9460112.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

- GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh
- PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn

Hà Nội - 2026

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan các kết quả được trình bày trong luận án là mới và đã được công bố trên các tạp chí toán học quốc tế. Nội dung của luận án đảm bảo tính trung thực, các kết quả đưa ra chưa từng được công bố trong bất kỳ các luận văn, luận án nào khác. Nguồn tài liệu tham khảo sử dụng trong luận án được trích dẫn đầy đủ và hợp lệ. Những kết quả viết chung đưa vào luận án đã được sự đồng ý của các đồng tác giả.

Nghiên cứu sinh

Quản Thái Hà

LỜI CẢM ƠN

L luận án này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh (Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội) và PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn (Trường Đại học Giáo dục - Đại học Quốc gia Hà Nội).

Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới những người thầy hướng dẫn kính mến của tôi, GS. TSKH. Phạm Kỳ Anh và PGS. TS. Nguyễn Minh Tuấn. Các thầy đã luôn dành cho tôi sự động viên, hỗ trợ và hướng dẫn tôi trong suốt chặng đường nghiên cứu sinh. Mỗi khi tôi gặp phải bất kỳ trở ngại nào, các thầy luôn sẵn lòng lắng nghe và đưa ra những lời khuyên quý báu. Các thầy không chỉ là những người thầy mẫu mực trong học thuật, giúp tôi định hướng và vượt qua những thách thức trong nghiên cứu, mà còn là những tấm gương, truyền cảm hứng cho tôi về sự tận tâm và những nỗ lực không ngừng nghỉ. Nghiên cứu này chắc chắn sẽ không thể hoàn thành nếu không có sự dìu dắt, hỗ trợ và niềm tin mà các thầy đã dành cho tôi.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Ban Chủ nhiệm khoa, các thầy/cô trong Khoa Toán - Cơ - Tin học, cũng như các thầy/cô trong Phòng Thí nghiệm Khoa học Dữ liệu, Bộ môn Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi và luôn nhiệt tình giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và công tác tại trường.

Tôi cũng bày tỏ lòng tri ân sâu sắc tới các thầy/cô trong Bộ môn Toán học tính toán và Toán ứng dụng, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội, những người đã trực tiếp giảng dạy và trang bị cho tôi nền tảng kiến thức trong chương trình học. Tôi luôn biết rằng mình có thể tìm đến các thầy/cô để nhận được những lời tư vấn, góp ý và những ý tưởng quý giá. Xin cảm ơn tất cả các thầy cô vì sự chia sẻ kiến thức và nguồn động viên to lớn.

Tôi xin chân thành cảm ơn các anh/chị/em trong nhóm nghiên cứu, các bạn trong nhóm Tối ưu hóa và em Lại Tiến Minh đã đồng hành, động viên và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Món quà tinh thần này tôi dành tặng bố mẹ, vợ và các con. Nguồn cảm hứng, tình yêu thương và sự ủng hộ vô bờ bến từ gia đình chính là động lực, giúp tôi hoàn thành chương trình nghiên cứu sinh tiến sĩ và biên soạn luận án này.

Quản Thái Hà

Mục lục

Mục lục	iii
Danh sách hình vẽ	vi
Danh sách bảng	vii
Bảng ký hiệu	viii
Danh mục các từ viết tắt	x
Lời mở đầu	1
1 Kiến thức chuẩn bị	11
1.1 Hàm và không gian hàm	11
1.1.1 Các ký hiệu	11
1.1.2 Một số hàm đặc biệt	12
1.1.2.1 Hàm Gauss	12
1.1.2.2 Hàm Hermite	13
1.1.2.3 Hàm Hartley	16
1.1.3 Các không gian hàm	17
1.2 Một số khái niệm trong không gian Hilbert thực	21
1.3 Biến đổi Fourier	23
1.3.1 Biến đổi Fourier trên các không gian hàm	24
1.3.1.1 Biến đổi Fourier trên không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	24
1.3.1.2 Biến đổi Fourier trên không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$	25
1.3.1.3 Biến đổi Fourier trên không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$	28
1.4 Bài toán đặt không chỉnh	31
1.5 Cơ sở lý thuyết toán tử đơn điệu	32
1.6 Phương pháp chỉnh lập song song giải hệ các phương trình đặt không chỉnh	35

1.7	Phương pháp chỉnh lập giải bài toán bao hàm thức biến phân	37
1.7.1	Phương pháp chỉnh lập tiến-lùi và chỉnh lập tiến-lùi-tiến giải gần đúng bài toán bao hàm thức biến phân	39
2	Biến đổi Hartley và tích chập liên kết với biến đổi Hartley	41
2.1	Biến đổi Hartley hữu hạn	42
2.1.1	Biến đổi Fourier-cosine và Fourier-sine hữu hạn	42
2.1.2	Biến đổi Hartley hữu hạn	43
2.1.3	Tích chập liên kết với biến đổi Hartley hữu hạn	44
2.2	Biến đổi Hartley	50
2.2.1	Tính chất của biến đổi Hartley	52
2.2.2	Đặc trưng toán tử của biến đổi Hartley	56
2.3	Tích chập liên kết với biến đổi Hartley	62
2.3.1	Tích chập Hartley	62
2.3.2	Tích chập Hartley liên kết với hàm Hermite	67
2.4	Bất đẳng thức tích chập dạng Young	73
2.5	Đại số Wiener trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$	75
3	Ứng dụng biến đổi Hartley và tích chập Hartley giải phương trình tích phân	79
3.1	Phương trình tích phân Fredholm	80
3.2	Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel	83
3.2.1	Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel dịch chuyển	84
3.2.2	Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel	86
3.3	Phương trình tích phân Fredholm loại I	87
3.3.1	Phương pháp chỉnh lập song song giải gần đúng hệ phương trình tích phân Fredholm loại I với nhân dạng Toeplitz + Hankel	94
3.3.2	Phương pháp chỉnh lập tiến-lùi và chỉnh lập tiến-lùi-tiến giải gần đúng phương trình tích phân Fredholm loại I với nhân dạng Toeplitz + Hankel	95
3.3.3	Ví dụ số	99
3.4	Phương trình tích chập	112
3.4.1	Phương trình tích chập liên kết với biến đổi Hartley	112
3.4.2	Phương trình tích chập với nhân dịch chuyển	117

3.4.2.1	Phương trình tích chập với nhân dịch chuyển	117
3.4.2.2	Phương trình tích chập với nhân dạng Toeplitz + Hankel dịch chuyển	120
3.4.3	Phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite	123
Kết luận		127
1	Đóng góp của luận án	128
2	Một số hướng nghiên cứu tiếp theo	129
Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án		131
Tài liệu tham khảo		132
Phụ lục		142
1	Biến đổi Fourier rời rạc	142
1.1	Biểu diễn dạng ma trận	143
1.2	Tích chập liên kết với biến đổi Fourier rời rạc	143
1.3	Tính đối xứng của biến đổi Fourier rời rạc	144
2	Biến đổi Hartley rời rạc	144
2.1	Mối liên hệ giữa biến đổi Fourier rời rạc và biến đổi Hartley rời rạc	145
2.2	Thuật toán biến đổi Hartley nhanh	145
2.3	Tích chập của biến đổi Hartley rời rạc	147
3	Biến đổi Fourier mở rộng	148
3.1	Thuật toán XFT tính xấp xỉ biến đổi Fourier	148
3.2	Thuật toán XFT tính xấp xỉ biến đổi Fourier-cosine và Fourier-sine	149
4	Chương trình sử dụng Matlab	150

Danh sách hình vẽ

1.1	Các hàm Gauss một biến.	12
1.2	Các hàm Gauss hai biến.	13
1.3	Các đa thức Hermite một biến.	14
1.4	Đa thức Hermite hai biến.	14
1.5	Các hàm Hermite chuẩn hóa một biến.	15
1.6	Hàm Hermite chuẩn hóa hai biến.	15
1.7	Hàm $\text{cas}(x)$ và các hàm thành phần $\cos(x)$ và $\sin(x)$ một biến.	16
1.8	Hàm $\text{cas}(xy)$ với $x, y \in \mathbb{R}$	16
1.9	Hình minh họa nón pháp tuyến ngoài $\mathcal{N}_C(x^*)$	22
3.1	Nghiệm của hệ FIE-I với nhân dạng TPH khi $\varphi_0 = 0$	102
3.2	Nghiệm của hệ FIE-I với nhân dạng TPH khi $\varphi_0 = \text{cas}(x) + \text{cas}(-x)$	102
3.3	Nghiệm của NLFIE sử dụng FBFSM khi $a_0 = 10$	105
3.4	Nghiệm của NLFIE sử dụng FBFSM khi $a_0 = 10^3$	106
3.5	Nghiệm của NLFIE sử dụng FBFSM và NLI.	108
3.6	Nghiệm gần đúng của NLFIE sử dụng FBSM và FHT khi $\varphi_0 = 10 \text{cas}(x)$	110
3.7	Nghiệm gần đúng của NLFIE sử dụng FBFSM và FHT khi $\varphi_0 = 10 \text{cas}(x)$	111
3.8	Nghiệm $\varphi(x)$ của phương trình tích chập liên kết với HT.	116
3.9	Nghiệm $\varphi(x)$ của phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển.	123
3.10	Nghiệm $\varphi(x)$ của phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite.	127

Danh sách bảng

3.1	FBFSM giải gần đúng NLFIE khi $a_0 = 10$	105
3.2	FBFSM giải gần đúng NLFIE khi $a_0 = 10^3$	106
3.3	So sánh FBFSM và NLI giải gần đúng NLFIE.	108
3.4	FBSM giải gần đúng NLFIE sử dụng FHT khi $\varphi_0 = 10 \cos(x)$	109
3.5	FBFSM giải gần đúng NLFIE sử dụng FHT khi $\varphi_0 = 10 \cos(x)$	111

Bảng ký hiệu

$C(\mathbb{R}^n)$ Không gian các hàm có giá trị phức và liên tục trên $\mathbb{R}^n$

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ Không gian các hàm có giá trị phức và khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}^n$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ Không gian các hàm có giá trị phức, khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}^n$ và có giá compact

$C_0(\mathbb{R}^n)$ Không gian các hàm có giá trị phức, liên tục trên $\mathbb{R}^n$ và triệt tiêu tại vô cùng

$D(\mathcal{A})$ Miền xác định của toán tử $\mathcal{A}$

$L^1(\mathbb{R}^n)$ Không gian các hàm khả tích tuyệt đối trên $\mathbb{R}^n$

$L^2(\mathbb{R}^n)$ Không gian các hàm bình phương khả tích Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$

$L^p(\mathbb{R}^n)$ Không gian các hàm khả tích Lebesgue cấp p trên $\mathbb{R}^n$

$P_{\mathcal{A}}$ Đa thức đặc trưng của toán tử $\mathcal{A}$

$R(\mathcal{A})$ Miền giá trị của toán tử $\mathcal{A}$

$\check{f}$ Biến đổi Fourier ngược của hàm f

$\text{Graph}(\mathcal{A})$ Đồ thị của toán tử $\mathcal{A}$

$\hat{f}$ Biến đổi Fourier của hàm f

$\hat{f}_1$ Biến đổi Hartley của hàm f với nhân $\text{cas}(x)$

$\hat{f}_2$ Biến đổi Hartley của hàm f với nhân $\text{cas}(-x)$

$\mathbb{C}$ Không gian các số phức

$\mathbb{N}$ Tập hợp các số nguyên dương

$\mathbb{N}_0$ Tập hợp các số nguyên không âm

$\mathbb{R}^n$ Không gian Euclide thực n chiều

$\mathbb{R}_+$ Tập các số thực dương

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ Vector hàng

$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ Vector cột

$\mathcal{A}^{-1}$ Toán tử nghịch đảo của toán tử $\mathcal{A}$

$\mathcal{F}(f)$ Biến đổi Fourier của hàm f

$\mathcal{F}^{-1}(f)$ Biến đổi Fourier ngược của hàm f

$\mathcal{H}(f)$ Biến đổi Hartley của hàm f (đại diện cho cả $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$)

$\mathcal{H}_1(f)$ Biến đổi Hartley của hàm f với nhân $\cos(x)$

$\mathcal{H}_2(f)$ Biến đổi Hartley của hàm f với nhân $\cos(-x)$

$\mathcal{I}$ Toán tử đồng nhất

$\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}$ Toán tử giải thức của toán tử $\mathcal{A}$

$\mathcal{N}_C$ Nón pháp tuyến của tập C

$\mathcal{H}$ Không gian Hilbert thực

$\mathcal{P}$ Không gian các hàm tăng cấp đa thức

$\mathcal{S}$ Không gian Schwartz (Không gian các hàm giảm nhanh)

$\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ Đại số Wiener liên kết với biến đổi Fourier trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{W}_{\mathcal{H}}$ Đại số Wiener liên kết với biến đổi Hartley trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$

$\sigma(\mathcal{A})$ Phổ của toán tử $\mathcal{A}$

$\text{Zero}(\mathcal{A})$ Tập không điểm của toán tử $\mathcal{A}$

$f^-(x)$ $f^-(x) = f(-x)$

Danh mục các từ viết tắt

BVIP Bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp (*Bilevel Variational Inequality Problem*)

DFT Biến đổi Fourier rời rạc (*Discrete Fourier Transform*)

DHT Biến đổi Hartley rời rạc (*Discrete Hartley Transform*)

DIFT Biến đổi Fourier ngược rời rạc (*Discrete Inverse Fourier Transform*)

DIHT Biến đổi Hartley ngược rời rạc (*Discrete Inverse Hartley Transform*)

FBFSM Phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi-tiến (*Iterative Regularization Forward-Backward-Forward Splitting Method*)

FBSM Phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (*Iterative Regularization Forward-Backward Splitting Method*)

FFT Biến đổi Fourier nhanh (*Fast Fourier Transform*)

FHT Biến đổi Hartley nhanh (*Fast Hartley Transform*)

FIE Phương trình tích phân Fredholm (*Fredholm Integral Equation*)

FIE-I Phương trình tích phân Fredholm loại I (*Fredholm Integral Equation of the First Kind*)

FIE-II Phương trình tích phân Fredholm loại II (*Fredholm Integral Equation of the Second Kind*)

FT Biến đổi Fourier (*Fourier Transform*)

FTT Biến đổi dạng Fourier (*Fourier-type Transform*)

HT Biến đổi Hartley (*Hartley Transform*)

IE Phương trình tích phân (*Integral Equation*)

IE-I Phương trình tích phân loại I (*Integral Equation of the First Kind*)

IE-II Phương trình tích phân loại II (*Integral Equation of the Second Kind*)

IFT Biến đổi Fourier ngược (*Inverse Fourier Transform*)

IHT Biến đổi Hartley ngược (*Inverse Hartley Transform*)

LTI Hệ tuyến tính bất biến theo thời gian (*Linear Time-Invariant*)

NLFIE Phương trình tích phân Fredholm phi tuyến (*Nonlinear Fredholm Integral Equation*)

NLI Lặp Landweber phi tuyến (*Nonlinear Landweber Iteration*)

RVInP Bài toán bao hàm thức biến phân đơn điệu phân rã hiệu chỉnh (*Regularized Splitting Monotone Variational Inclusion Problem*)

VInP Bài toán bao hàm thức biến phân (*Variational Inclusion Problem*)

VIP Bài toán bất đẳng thức biến phân (*Variational Inequality Problem*)

XFT Biến đổi Fourier mở rộng (*eXtended Fourier Transform*)

Mở đầu

1 Đặt vấn đề

Các phép biến đổi tích phân đã có lịch sử lâu đời, được ghi nhận xuất hiện từ thế kỷ XVIII. Trải qua hơn hai thế kỷ phát triển, các phép biến đổi tích phân trở thành một công cụ giải tích nền tảng và không thể thiếu trong nhiều lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Ta có thể kể đến vai trò của biến đổi Laplace trong điều khiển học, biến đổi Hankel trong vật lý sóng, biến đổi Mellin trong lý thuyết số, biến đổi Radon trong xử lý ảnh y học, biến đổi Fourier (FT) trong xử lý tín hiệu số. Mỗi phép biến đổi tích phân đều là một công cụ giải tích quan trọng, mang đến một góc nhìn riêng, giúp đơn giản hóa cấu trúc của các phương trình vi phân và tích phân, từ đó tạo điều kiện thuận lợi cho việc tìm kiếm nghiệm. Xem [28, 45, 93].

Bên cạnh đó, tích chập ra đời một cách tự nhiên cùng với các phép biến đổi tích phân, trong quá trình các nhà khoa học đi tìm lời giải cho các bài toán trong các lĩnh vực vật lý và toán học. Tích chập đã có nhiều ứng dụng khác nhau trong các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Tích chập đã được sử dụng để định nghĩa đạo hàm phân thứ (*fractional derivative*), ứng dụng cho việc tính toán một số lớp tích phân xác định, mô hình hóa các hiện tượng khuếch tán bất thường, và nhiều ứng dụng khác. Trên cơ sở sự phát triển của lý thuyết các không gian hàm kiểm thử và các không gian phân phối, tích chập trở thành công cụ không thể thiếu trong lý thuyết hệ tuyến tính bất biến theo thời gian (*Linear Time-Invariant - LTI*), khi đầu ra của một hệ LTI được mô tả bằng tích chập của tín hiệu đầu vào với đáp ứng xung của hệ thống. Kết quả này đã mở ra một công cụ mới, hiệu quả cho việc phân tích và thiết kế các bộ lọc, cũng như các hệ thống xử lý tín hiệu số. Ngày nay, với sự bùng nổ của công nghệ máy tính và các thuật toán xử lý tín hiệu, xử lý ảnh, tích chập trở thành một công cụ hiệu quả cho các tác vụ làm mờ, làm sắc nét, phát

hiện biên và trích xuất đặc trưng. Hơn nữa, sự phát triển bùng nổ của học sâu (*Deep Learning*), đặc biệt các mạng neural tích chập (*Convolutional Neural Networks* - CNNs), đã mở rộng khả năng ứng dụng của tích chập trong các lĩnh vực công nghệ hiện đại. Các mạng neural tích chập sử dụng các lớp tích chập làm khối xây dựng cơ bản để tự động học các đặc trưng phức tạp từ dữ liệu có cấu trúc lưới, như dữ liệu ảnh và video. Sự thành công của CNNs trong các bài toán thị giác máy tính (*Computer Vision*) đã thúc đẩy sự phát triển mạnh mẽ của các lĩnh vực trí tuệ nhân tạo (*Artificial Intelligence*). Xem [17, 23, 31, 39, 62].

Như vậy, qua nhiều thế kỷ phát triển, từ những ý tưởng ban đầu đến các ứng dụng tiên tiến trong kỷ nguyên số ngày nay, các phép biến đổi tích phân và tích chập đã cho thấy được vai trò quan trọng và tầm ảnh hưởng to lớn, nhận được sự quan tâm nghiên cứu và đóng góp sâu rộng từ nhiều nhà khoa học trong đa dạng các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật khác nhau.

Biến đổi Hartley

Biến đổi Hartley (HT) là một phép biến đổi tích phân quan trọng, được ứng dụng rộng rãi trong lĩnh vực xử lý tín hiệu vật lý thực. Phép biến đổi này có mối liên hệ mật thiết với FT, nhưng cũng mang những đặc tính riêng và độc đáo. Biến đổi Hartley được giới thiệu bởi R.V.L. Hartley vào năm 1942, khi ông đề xuất một phép biến đổi tích phân nhằm hướng tới mục tiêu tối ưu hóa hiệu suất xử lý tín hiệu thực [67]. Khác với FT truyền thống, vốn sử dụng hàm nhân mũ phức $e^{-i\omega t}$, Hartley đã sử dụng nhân tích phân là hàm $\text{cas}(\omega t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$ (viết tắt của “cosine-and-sine”). Sự thay đổi này đã loại bỏ việc tính toán phức tạp trên trường số phức, đưa đến một giải pháp tiếp cận hiệu quả hơn đối với các hệ thống vật lý thực nghiệm.

R.N. Bracewell là một trong những người tiên phong đặt nền móng cơ sở lý thuyết và phát triển ứng dụng cho HT [18, 19]. Ông đặc biệt tập trung vào phát triển biến đổi Hartley rời rạc (DHT), các thuật toán biến đổi Hartley nhanh (FHT), và đã chứng minh DHT có hiệu suất tính toán tối ưu hơn so với DFT trong xử lý dữ liệu thực. Cuốn sách “*The Hartley Transform*” của ông được coi là một tài liệu kinh điển, thiết lập nền tảng lý thuyết và ứng dụng cho HT.

Từ sự phát triển của các lĩnh vực công nghệ cao, đặc biệt là công nghệ nhúng, HT tiếp tục thu hút sự quan tâm nghiên cứu từ cộng đồng các nhà khoa học, với những nghiên cứu tập trung vào việc tối ưu hóa tính toán và mở rộng ứng dụng. Trong lĩnh vực tối ưu hóa thuật toán, H.V.

Sorensen và cộng sự đã nghiên cứu và so sánh hiệu suất tính toán của các thuật toán FHT và các thuật toán biến đổi Fourier nhanh (FFT) trong trường hợp dữ liệu thực [76]. P. Duhamel và M. Vetterli nghiên cứu về hiệu suất tính toán và phát triển các thuật toán tối ưu cho DHT [30]. R.N. Bracewell và cộng sự đã nghiên cứu phát triển HT trên không gian nhiều chiều và các thuật toán nhanh [20], ứng dụng HT cho xử lý ảnh và xử lý dữ liệu nhiều chiều. Về ứng dụng chuyên ngành, F. Vatansever nghiên cứu ứng dụng HT để phân tích tín hiệu trong các hệ thống điện [42, 43]. N.L. Mohan và L.A. Babu đã nghiên cứu ứng dụng HT hai chiều trong xử lý tín hiệu địa chấn [57]. Ngoài ra, HT còn được nghiên cứu ứng dụng trong các lĩnh vực công nghệ hiện đại. H. Zhang và J. Ma đã đề xuất phương pháp Hartley Spectral Pooling cho học sâu, tận dụng ưu thế tối ưu tính toán trên miền số thực để tăng hiệu suất tính toán [95]. Gần đây, Rani và cộng sự (2024) [71], Ma và cộng sự (2021) [56], Coutinho và cộng sự (2021) [26] cũng đã công bố một số công trình nghiên cứu về ứng dụng HT trong các lĩnh vực xử lý ảnh y tế, thu thập dữ liệu hiệu quả trong chụp ảnh đơn điểm và nén ảnh. Những nghiên cứu gần đây cho thấy HT và DHT vẫn là một chủ đề được nghiên cứu tích cực và tiếp tục phát triển mạnh.

Trong nước, N.X. Thảo, T. Tuấn, N.M. Khoa, N.M. Tuấn cũng đã công bố nhiều công trình nghiên cứu về các phép biến đổi tích phân suy rộng, ứng dụng cho giải các phương trình tích phân. Trong một số công trình nghiên cứu của họ, HT được định nghĩa mới, hoặc được đề cập đến như một trường hợp đặc biệt của một phép biến đổi tích phân dạng Fourier (FTT) khác, hoặc cũng có thể được sử dụng kết hợp với các FTT khác. Xem [12, 47, 86, 87].

Mặc dù FT vẫn là công cụ nền tảng trong lĩnh vực xử lý tín hiệu, HT đóng vai trò bổ trợ không thể thiếu cho FT và tiếp tục được mở rộng nghiên cứu. Đối với các tín hiệu đầu vào là hàm thực, HT cho ra các hệ số biến đổi hoàn toàn trên miền thực. Đặc tính này giúp tiết kiệm đáng kể tài nguyên bộ nhớ và giảm thiểu khối lượng phép tính số học so với FT, tạo lợi thế đặc biệt cho các ứng dụng xử lý thời gian thực hoặc các hệ thống nhúng có cấu trúc phần cứng hạn chế. Trong một số lĩnh vực kỹ thuật chuyên sâu như quang học, phân tích hình ảnh, và truyền thông không dây, khi tín hiệu vật lý thường là thực, HT cung cấp một công cụ phân tích tự nhiên và có tính tương thích cao với bản chất vật lý của tín hiệu. Hơn thế nữa, HT có tính chất tự ngược, tức là toán tử biến đổi xuôi và ngược có cấu trúc toán học đồng nhất, giúp đơn giản hóa việc thiết kế cấu trúc thuật toán. Ngoài ra, mối quan hệ chuyển đổi tương hỗ giữa HT và FT không chỉ thiết lập một cầu nối cơ sở lý thuyết giữa hai phép biến đổi, mà còn cho phép tích hợp các thuật toán FFT nhằm phát triển các thuật toán FHT hiệu quả cao [33, 70].

Biến đổi Hartley đã có lịch sử ra đời từ lâu, tuy nhiên, lý thuyết tích chập cho HT vẫn còn tương đối mới mẻ và hạn chế so với FT, và chưa được hệ thống một cách đầy đủ, chặt chẽ. Việc phát triển một hệ thống lý thuyết cho tích chập liên kết với HT, với các định nghĩa rõ ràng, các tính chất toán tử được thiết lập chặt chẽ (như đẳng thức nhân tử hóa, tính bị chặn, tính chất unita, bất đẳng thức Young, đẳng thức Parseval, và các đặc trưng toán tử khác) sẽ góp phần xây dựng một nền tảng lý thuyết chặt chẽ cho HT, cũng như tạo cơ sở vững chắc để tiếp tục nghiên cứu lý thuyết và phát triển các ứng dụng cho HT.

Phương trình tích phân

Phương trình tích phân (IE) là một lĩnh vực cốt lõi của toán học, được nghiên cứu sâu rộng trong cả lĩnh vực toán lý thuyết và toán ứng dụng. Phương trình tích phân phát sinh một cách tự nhiên trong quá trình nghiên cứu về bài toán giá trị ban đầu (IVP) và bài toán giá trị biên (BVP), liên quan đến việc mô hình hóa toán học các hiện tượng vật lý. Nghiệm của IE là chìa khóa để khám phá những đặc trưng định tính của các hiện tượng trong khoa học tự nhiên. Sự phát triển của lý thuyết phương trình tích phân đã xây dựng nên một nền tảng toán học vững chắc để mô hình hóa và phân tích nhiều hiện tượng trong vật lý và kỹ thuật. Xem [14, 50, 94].

Vào năm 1900, I. Fredholm đã đặt nền móng lý thuyết cho một lớp IE với các cận là hằng số, lớp phương trình này sau đó được biết đến rộng rãi là phương trình tích phân Fredholm (FIE). Lý thuyết FIE đóng vai trò quan trọng trong toán học hiện đại nhờ khả năng chuyển đổi các phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng về dạng IE, là công cụ hiệu quả để mô hình hóa các hiện tượng tự nhiên, xây dựng cơ sở nền tảng cho giải tích hàm, và nghiên cứu các bài toán đặt không chỉnh. Phương trình tích phân Toeplitz và Hankel là các trường hợp đặc biệt của FIE. Nghiên cứu về phương trình tích phân Toeplitz khởi nguồn từ các công trình của O. Toeplitz vào đầu thế kỷ 20 trong lĩnh vực lý thuyết hàm và đại số tuyến tính vô hạn chiều. Các phương trình có cấu trúc ma trận Toeplitz xuất hiện phổ biến trong lý thuyết chuỗi Fourier, lý thuyết dự báo và xử lý tín hiệu số. Bên cạnh đó, các nghiên cứu về phương trình tích phân Hankel lại gắn liền với toán tử Hankel, các phép biến đổi tích phân và bài toán moment. Xem [13, 46, 74, 90]. Mặc dù trong giai đoạn này đã xuất hiện một số công trình nghiên cứu về dạng phương trình tích phân kết hợp giữa cấu trúc Toeplitz và Hankel, song các kết quả đạt được còn mang tính rời rạc và chưa được hệ thống hóa thành một lớp phương trình độc lập [35, 48, 75].

Trong quá trình nghiên cứu các bài toán phức tạp trong vật lý và kỹ thuật (như lý thuyết tán xạ và động lực học chất lỏng), các nhà nghiên cứu đã nhận thấy một số bài toán có thể được đưa về dạng IE với nhân có cấu trúc Toeplitz + Hankel (TPH), là sự kết hợp của nhân Toeplitz và nhân Hankel. Sự phát triển mạnh mẽ của lý thuyết toán tử trong thế kỷ 20, đặc biệt là lý thuyết về toán tử Toeplitz và toán tử Hankel trên các không gian hàm, đã cung cấp các phương pháp giải tích để nghiên cứu về loại phương trình này. Sự hiểu biết sâu sắc hơn về cấu trúc và tính chất của IE có nhân dạng TPH đã mở ra tiềm năng khám phá ứng dụng mới trong các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật. Cấu trúc đặc biệt của ma trận TPH (khi IE được rời rạc hóa) cũng đã thúc đẩy việc phát triển các thuật toán số để giải các IE có nhân dạng TPH. Các thuật toán này thường sử dụng các thuật toán FFT để tối ưu hóa hiệu suất tính toán. Song song với việc nghiên cứu và phát triển ứng dụng, nghiên cứu lý thuyết cũng tiếp tục được phát triển, tập trung vào các khía cạnh trừu tượng hơn của IE có nhân dạng TPH, bao gồm tính giải được, lý thuyết phổ, các phương pháp giải tích, và mối liên hệ của chúng với các lĩnh vực toán học khác.

Phương trình tích phân có nhân dạng Toeplitz và Hankel đã được nghiên cứu và đóng góp từ nhiều nhà khoa học. I. Gohberg và S. Goldberg, các nhà toán học nổi tiếng với những công trình nghiên cứu về lý thuyết toán tử, đã nghiên cứu về toán tử Toeplitz và Hankel, và những công trình của họ trở thành cơ sở nền tảng cho việc nghiên cứu các IE có nhân dạng TPH. Cuốn sách “*Basic Operator Theory*” của các tác giả này được xem là một tài liệu tham khảo kinh điển về lĩnh vực này. Bên cạnh đó, A. Böttcher và B. Silbermann đã có những đóng góp quan trọng về phân tích toán tử, phân tích ma trận Toeplitz và Hankel, bao gồm lý thuyết phổ, tính khả nghịch của toán tử và các phương pháp số giải phương trình Toeplitz và Hankel. Các công trình của họ được tổng hợp lại trong cuốn sách “*Analysis of Toeplitz Operators*”, và được ghi nhận là một tài liệu chuyên khảo kinh điển. M.G. Krein là một trong những nhà toán học lớn nhất của thế kỷ 20, với những đóng góp quan trọng trong lý thuyết toán tử và giải tích hàm. Các công trình của ông có ảnh hưởng sâu rộng đến nhiều lĩnh vực, đặc biệt là về lý thuyết phương trình TPH, điển hình trong số đó là các công trình về lý thuyết thác triển toán tử và các bài toán moment liên quan đến ma trận Toeplitz dương, lý thuyết phương trình Wiener-Hopf liên quan đến dạng liên tục của phương trình Toeplitz [35], lý thuyết phổ và đại số Krein liên quan đến phân tích dạng tiệm cận của định thức Toeplitz. H. Widom cũng đã có những đóng góp đáng kể trong việc nghiên cứu lý thuyết về định thức Toeplitz và dạng tiệm cận của nó, liên quan mật thiết đến việc giải phương trình Toeplitz và TPH [91, 92]. N. Levinson đã phát triển một

thuật toán đệ quy để giải hiệu quả các hệ phương trình Toeplitz phát sinh từ bài toán lọc Wiener (1947) [53]. Thuật toán nổi tiếng này sau đó được đặt tên là thuật toán đệ quy Levinson (sau này được cải tiến và gọi là thuật toán Levinson-Durbin). K. Rost và G. Heinig cũng đã nghiên cứu và phát triển các thuật toán nhanh để giải các hệ phương trình tuyến tính với ma trận TPH [40]. G. Strang đã nghiên cứu mối liên hệ giữa ma trận TPH với những bài toán trong các lĩnh vực vật lý và kỹ thuật, đặc biệt là trong lĩnh vực xử lý tín hiệu và giải các phương trình đạo hàm riêng bằng phương pháp sai phân [78]. J.N. Tsitsiklis và B.C. Levy đã nghiên cứu các phương trình TPH và khảo sát tổng quan các phương pháp lý thuyết và phương pháp số để giải phương trình TPH cho trường hợp phương trình đặt chỉnh [82]. Gene H. Golub và Charles F. Van Loan, những nhà khoa học nổi tiếng với những đóng góp to lớn trong lĩnh vực tính toán khoa học, đã phát triển các thuật toán số để giải các hệ phương trình đại số tuyến tính có cấu trúc đặc biệt, bao gồm cấu trúc phát sinh từ việc rời rạc hóa các phương trình tích phân Toeplitz và Hankel.

Trong nước, các tác giả N.X. Thảo [79], N.M. Tuấn [11, 84, 85], T. Tuấn [88], N.M. Khoa [80], L.T. Minh [38] cũng đã công bố nhiều công trình liên quan đến IE có cấu trúc dạng Toeplitz và Hankel. Các công trình của họ chủ yếu tập trung vào việc sử dụng các công cụ giải tích để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các lớp phương trình TPH khác nhau. Các phương pháp họ đưa ra thường là xây dựng các tích chập liên kết với các FTT, đặc biệt là tích chập liên kết với HT, để giải các lớp phương trình này.

Nhiều bài toán trong cơ học, vật lý và kỹ thuật đã dẫn đến các IE có cấu trúc nhân dạng Toeplitz và Hankel. Việc nghiên cứu loại IE này trở thành động lực mạnh mẽ thúc đẩy sự phát triển của các tích chập suy rộng liên quan đến phép HT. Những kết quả về ứng dụng của tích chập Hartley suy rộng trong thời gian qua đã chứng minh đây là một công cụ hiệu quả để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các IE có cấu trúc TPH, điều mà các phương pháp giải tích khác thường gặp nhiều khó khăn.

Lý do chọn đề tài nghiên cứu

Trên cơ sở những nghiên cứu trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu là “**Lý thuyết và ứng dụng của chập liên kết với biến đổi tích phân Hartley**”, nhằm góp phần xây dựng một cách có hệ thống cơ sở lý thuyết cho HT, cũng như khai thác những ưu thế và tiềm năng ứng dụng của phép biến đổi tích phân này.

2 Mục tiêu nghiên cứu của luận án

Luận án nghiên cứu phát triển cơ sở lý thuyết cho HT, nhằm đóng góp vào việc xây dựng một hệ thống cơ sở lý thuyết đầy đủ và chặt chẽ cho HT, cũng như khám phá tiềm năng ứng dụng của chúng. Luận án cũng nghiên cứu các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án tập trung vào xây dựng các tích chập mới liên quan đến HT và HT hữu hạn, đồng thời thiết lập và chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa, bất đẳng thức Young. Trên cơ sở các phép tích chập liên quan đến HT, luận án nghiên cứu xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, nhằm mở rộng phạm vi nghiên cứu về không gian hàm $L^1(\mathbb{R}^n)$ và các tích chập trong $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Luận án cũng nghiên cứu các phương pháp để giải phương trình tích phân Fredholm (FIE) cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, trên cơ sở những lớp tích chập liên quan đến HT. Cụ thể, luận án nghiên cứu các phương pháp giải đúng phương trình tích phân Fredholm loại II (FIE-II), đồng thời, nghiên cứu áp dụng các phương pháp và thuật toán hiệu chỉnh để giải gần đúng phương trình tích phân Fredholm loại I (FIE-I), đây vốn là bài toán đặt không chỉnh khó giải và thường không có phương pháp giải tích để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng.

3 Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận án nghiên cứu về các HT và các tích chập liên quan đến HT, nhằm khai thác những ưu điểm, cũng như khám phá tiềm năng ứng dụng của chúng trong việc giải phương trình tích phân, đặc biệt là FIE có nhân dạng TPH. Luận án cũng nghiên cứu các phương pháp để giải đúng, giải gần đúng FIE với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến.

Luận án nghiên cứu hệ thống hóa cơ sở lý thuyết cho HT, khảo sát và phát triển các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$; xây dựng các tích chập liên quan đến HT và HT hữu hạn, đồng thời thiết lập và chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa, bất đẳng thức Young; nghiên cứu xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên cơ sở các tích chập liên quan đến HT.

Luận án nghiên cứu tiềm năng ứng dụng của HT và các tích chập liên quan đến HT, đặc biệt trong việc giải phương trình tích phân, trong đó tập trung vào FIE cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến. Cụ thể, luận án nghiên cứu các phương pháp để giải đúng một số lớp FIE-II, đặc biệt là trường hợp FIE-II với nhân dạng TPH, đồng thời, luận án cũng nghiên cứu áp dụng các phương pháp chỉnh lập để giải gần đúng FIE-I với phần tuyến tính TPH, trong đó tập trung vào các phương pháp chỉnh lập song song, phương pháp chỉnh lập tiến-lùi (FBSM) và phương pháp chỉnh lập tiến-lùi-tiến (FBFSM).

4 Phương pháp nghiên cứu

Trên cơ sở giải tích hàm, giải tích Fourier, luận án nghiên cứu hệ thống hóa và phát triển cơ sở lý thuyết cho các phép HT. Mục đích là để đóng góp vào việc xây dựng một hệ thống lý thuyết đầy đủ và chặt chẽ hơn cho HT.

- Lý thuyết toán tử: Nghiên cứu tính chất đẳng cấu và bảo toàn chuẩn (bảo toàn năng lượng). Tìm kiếm và phân tích các hàm cơ sở và hàm riêng.
- Mối quan hệ giữa miền ban đầu và miền biến đổi: Xác định mối quan hệ giữa các phép toán vi phân và tích phân trong miền ban đầu với các phép toán đại số và phép toán tích chập trong miền biến đổi. Thiết lập mối liên hệ giữa độ trơn của hàm trong miền ban đầu với tính suy giảm của hàm trong miền biến đổi.
- Các định lý nền tảng: Thiết lập các định lý tích chập, các nguyên lý bất định.

Trên cơ sở lý thuyết toán tử đơn điệu, giải tích đa trị, giải tích lồi, luận án nghiên cứu các phương pháp được sử dụng trong các bài toán tối ưu, nhằm áp dụng và phát triển các phương pháp và thuật toán để giải phương trình tích phân cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến.

- Nghiên cứu các phương pháp lặp (*iterative methods*), các phương pháp chiếu (*projection methods*), các phương pháp phân rã (*splitting methods*) và các phương pháp hiệu chỉnh (*regularization methods*) để giải phương trình tích phân.

Trên cơ sở những ứng dụng của FT và tích chập Fourier, luận án nghiên cứu khả năng ứng dụng của các HT, cũng như các tích chập liên quan đến HT. Nghiên cứu những ưu thế mà các HT mang lại, so với FT.

5 Kết quả của luận án

Luận án nghiên cứu về HT, các tích chập liên quan đến HT và ứng dụng của chúng. Luận án nghiên cứu hệ thống hóa và phát triển cơ sở lý thuyết cho HT và các tích chập liên quan đến HT, đồng thời nghiên cứu khả năng ứng dụng của chúng trong việc giải FIE cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến. Dưới đây là một số kết quả mà luận án đã đạt được.

Phát triển cơ sở lý thuyết cho HT

Luận án nghiên cứu các phép biến đổi HT và HT hữu hạn, hệ thống hóa và phát triển các tính chất toán tử, đặc trưng toán tử của các HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án đã đề xuất một số lớp tích chập mới liên kết với HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, bao gồm bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Hơn nữa, trên cơ sở các tích chập đã đề xuất, luận án xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Giải phương trình tích phân Fredholm loại II (FIE-II)

Luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH, bao gồm FIE-II với nhân dạng TPH và FIE-II với nhân dạng TPH dịch chuyển. Luận án cũng nghiên cứu một số lớp FIE-II trên miền vô hạn, như phương trình tích chập liên kết với HT, phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển, phương trình tích chập với nhân tích phân liên kết với hàm Hermite. Trên cơ sở các tích chập liên kết với các HT và HT hữu hạn đã xây dựng, luận án đã đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các lớp IE này.

Giải phương trình tích phân Fredholm loại I (FIE-I)

Luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm phương pháp chỉnh lập song song, FBSM và FBFSM. Đây vốn là những bài toán đặt không chỉnh khó giải và thường không có phương pháp giải tích để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng, nhưng lại rất phổ biến và có ý nghĩa trong thực tế.

Nội dung của luận án được viết dựa trên kết quả của 02 bài báo [CT1] và [CT2] trong danh mục các công trình khoa học đã công bố của tác giả liên quan đến luận án. Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar bộ môn Toán học tính toán và Toán ứng dụng, trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội.
- Seminar trung tâm nghiên cứu và phát triển toán học và ứng dụng (*Center for Research and Development in Mathematics and Application*), Đại học Aveiro, Bồ Đào Nha.

6 Cấu trúc của luận án

Luận án trình bày cơ sở lý thuyết và các kết quả mà luận án đã đạt được.

Chương 1 của luận án trình bày một số kết quả đã biết trong giải tích hàm, giải tích Fourier, giải tích đa trị, lý thuyết toán tử đơn điệu, giải tích lồi, là cơ sở lý thuyết cho các chương sau.

Chương 2 của luận án nghiên cứu cơ sở lý thuyết của các phép HT và HT hữu hạn, các tính chất toán tử và đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án đã đề xuất một số lớp tích chập liên quan đến HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Hơn nữa, trên cơ sở các tích chập đã xây dựng, luận án nghiên cứu xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Chương 3 của luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT hữu hạn, bao gồm FIE-II với nhân dạng TPH và FIE-II với nhân dạng TPH dịch chuyển. Luận án cũng nghiên cứu một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm các phương pháp chỉnh lập song song, FBSM và FBFSM. Hơn nữa, luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II trên miền vô hạn và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho các lớp phương trình này, nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT, bao gồm phương trình tích chập liên kết với HT, phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển, phương trình tích chập với nhân tích phân liên kết với hàm Hermite.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này của luận án trình bày một số khái niệm và kết quả đã biết của giải tích hàm, giải tích Fourier, giải tích đa trị, lý thuyết toán tử đơn điệu, giải tích lồi, lý thuyết bài toán đặt không chỉnh, là cơ sở lý thuyết cho các chương sau. Cụ thể, luận án trình bày cơ sở lý thuyết của giải tích Fourier, lý thuyết toán tử đơn điệu, bài toán đặt chỉnh, bài toán đặt không chỉnh, bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP), bài toán bao hàm thức biến phân (VInP). Hơn nữa, luận án trình bày một số phương pháp chỉnh lặp song song để giải gần đúng hệ phương trình toán tử chứa toán tử đơn điệu. Đồng thời, luận án cũng trình bày các phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (FBSM) và chỉnh lặp tiến-lùi-tiến (FBFSM) để giải gần đúng VInP liên kết với toán tử đơn điệu.

Nội dung của chương này được viết dựa trên các tài liệu [1, 2, 3, 5, 15, 34, 63, 66, 77].

1.1 Hàm và không gian hàm

1.1.1 Các ký hiệu

Ký hiệu $\mathbb{R}^n$ không gian Euclid thực hữu hạn chiều. Với $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu $\mathbf{xy} := \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ là tích vô hướng của $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$; ký hiệu $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ là chuẩn Euclid của $\mathbf{x}$. Khi đó, ta có thể viết $\cos \mathbf{xy} := \cos \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\sin \mathbf{xy} := \sin \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $e^{i\mathbf{xy}} := e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$.

Với $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu $-\mathbf{x} = [-x_1, -x_2, \dots, -x_n]$; và với f là hàm xác định trên $\mathbb{R}^n$, ký hiệu $f^-(\mathbf{x}) := f(-\mathbf{x})$.

Một bộ n số nguyên không âm và có thứ tự $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ($\alpha_k \in \mathbb{N}_0$, $k = 1, \dots, n$) được gọi là một n -bó, hoặc một đa chỉ số. Nếu hai n -bó α, β thỏa mãn $\alpha_k \leq \beta_k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$, ta nói n -bó α không cao hơn n -bó β , và ký hiệu là $\alpha \leq \beta$. Trong tập tất cả các n -bó có tồn tại thứ tự bộ phận, nhưng có thể không tồn tại thứ tự toàn phần.

Với mỗi n -bó $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ và $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu:

- $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ và được gọi là cấp của n -bó α .
- $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$.
- $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ và được gọi là một đơn thức.
- $D_{\mathbf{x}}^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ là toán tử đạo hàm riêng theo biến $\mathbf{x}$.

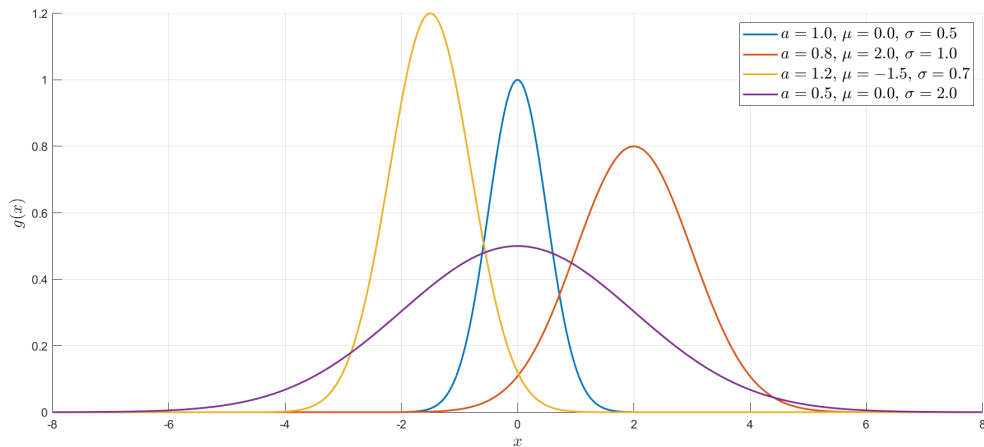
1.1.2 Một số hàm đặc biệt

1.1.2.1 Hàm Gauss

Hàm Gauss một biến là hàm có dạng

$$g(x) = ae^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

trong đó, a, μ, σ là các hằng số thực.

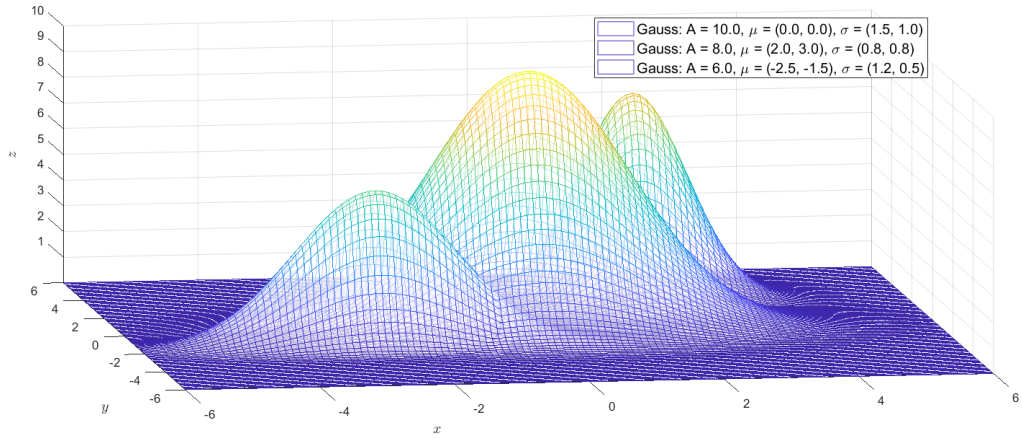


Hình 1.1: Các hàm Gauss một biến.

Trong không gian n -chiều, hàm Gauss nhiều biến được định nghĩa theo công thức

$$g(\mathbf{x}) = A \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;$$

trong đó, $A \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$, Σ là ma trận vuông cấp n , đối xứng và xác định dương.



Hình 1.2: Các hàm Gauss hai biến.

Tích phân của hàm Gauss trên $\mathbb{R}^n$ được xác định bởi $\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = A(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\Sigma|}$.

Nhận xét 1.1 Các hàm Gauss thuộc không gian các hàm giảm nhanh $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và có những tính chất toán học quan trọng trong giải tích Fourier, như tính chất tự nghịch đảo dưới phép biến đổi Fourier và đóng dưới phép tích chập Fourier.

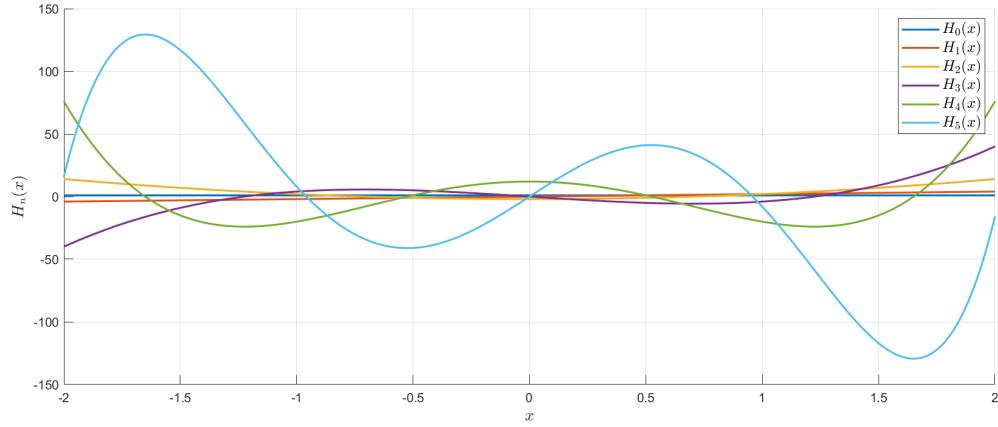
1.1.2.2 Hàm Hermite

Các đa thức Hermite một biến được định nghĩa theo công thức

$$H_k(x) := (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0;$$

hoặc có thể được định nghĩa theo công thức truy hồi

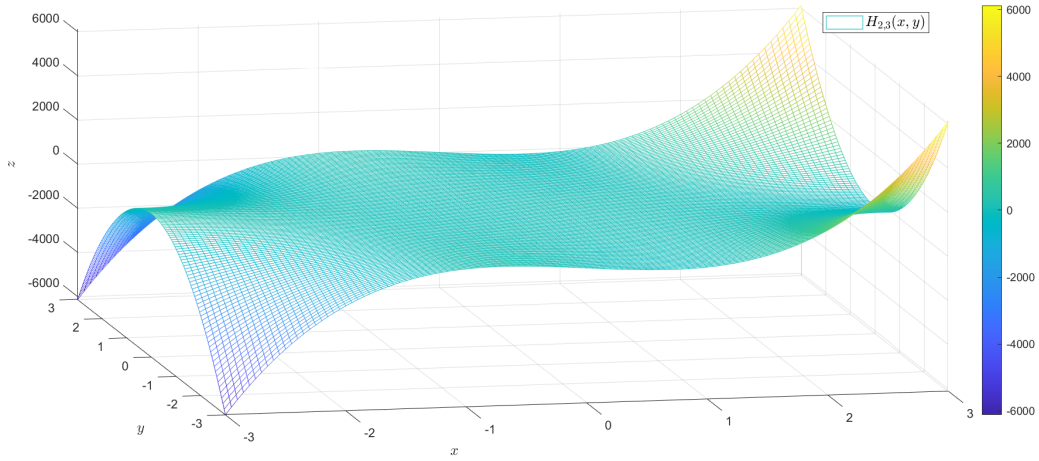
$$H_k(x) = 2xH_{k-1}(x) - 2kH_{k-2}(x), H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0.$$



Hình 1.3: Các đa thức Hermite một biến.

Trong không gian nhiều chiều, với α là một n -bó, đa thức Hermite n biến được định nghĩa bởi

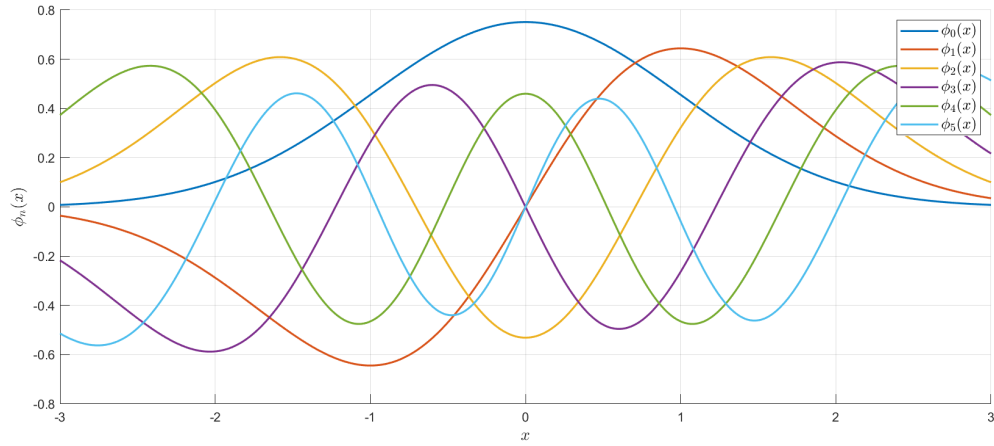
$$H_{\alpha}(\mathbf{x}) := (-1)^{|\alpha|} e^{|\mathbf{x}|^2} D_{\mathbf{x}}^{\alpha} e^{-|\mathbf{x}|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$



Hình 1.4: Đa thức Hermite hai biến.

Hàm Hermite và hàm Hermite chuẩn hóa một biến được định nghĩa theo các công thức

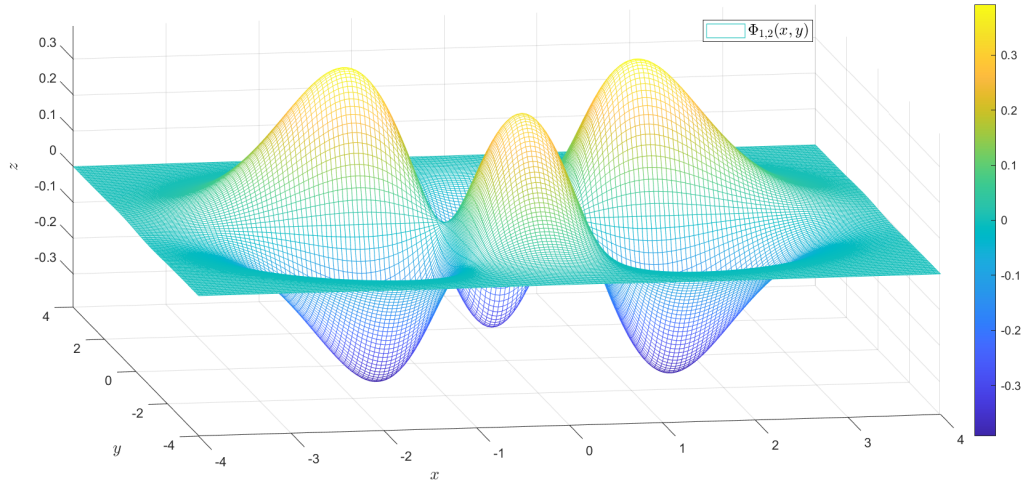
$$h_k(x) := H_k(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \phi_k(x) := \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^k k!}} H_k(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$



Hình 1.5: Các hàm Hermite chuẩn hóa một biến.

Hàm Hermite và hàm Hermite chuẩn hóa nhiều biến được định nghĩa theo các công thức

$$h_{\alpha}(\mathbf{x}) := H_{\alpha}(\mathbf{x})e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}, \quad \Phi_{\alpha}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\pi^{n/4}\sqrt{2^{|\alpha|}\alpha!}}H_{\alpha}(\mathbf{x})e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n\text{-bó } \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$



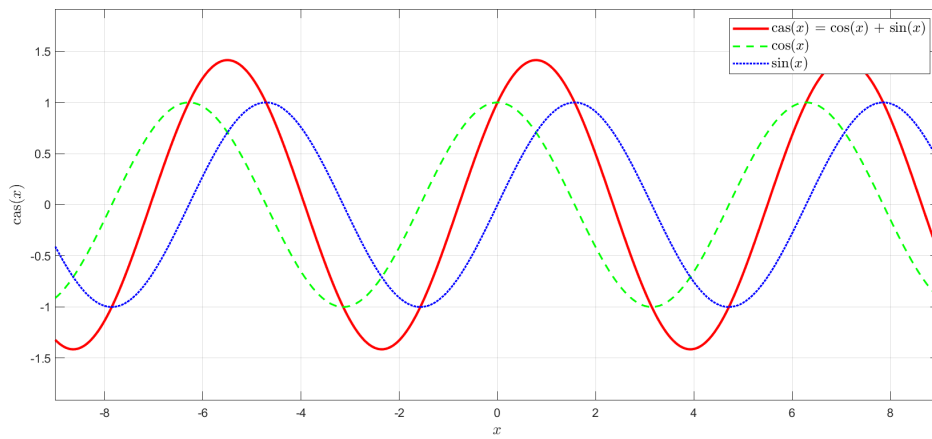
Hình 1.6: Hàm Hermite chuẩn hóa hai biến.

Nhận xét 1.2 Hàm Hermite được định nghĩa trên cơ sở đa thức Hermite, có các tính chất như hội tụ về 0, là hàm riêng của toán tử tích phân Fourier và các hàm Hermite tạo thành cơ sở trực chuẩn đầy đủ trong không gian Hilbert L^2 . Những tính chất này làm cho FT trở thành một công cụ mạnh trong nhiều lĩnh vực khoa học, như phương trình đạo hàm riêng, xử lý tín hiệu.

1.1.2.3 Hàm Hartley

Hàm Hartley, hay là hàm cas, được định nghĩa như sau:

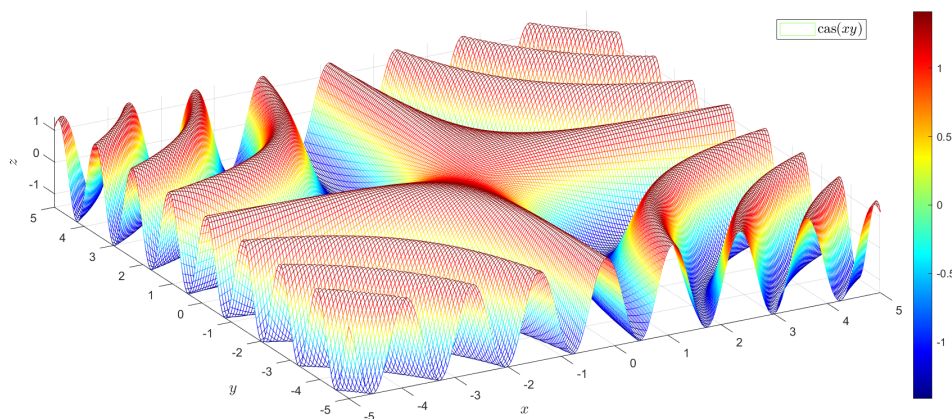
$$\text{cas}(x) := \cos(x) + \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



Hình 1.7: Hàm $\text{cas}(x)$ và các hàm thành phần $\cos(x)$ và $\sin(x)$ một biến.

Hàm cas nhiều biến được xác định theo công thức

$$\text{cas}(\mathbf{xy}) := \cos(\mathbf{xy}) + \sin(\mathbf{xy}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$



Hình 1.8: Hàm $\text{cas}(xy)$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

1.1.3 Các không gian hàm

Xét các không gian hàm xác định trên $\mathbb{R}^n$ và có giá trị phức. Ký hiệu:

- $C(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n$.
- $C_b(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục, bị chặn trong $\mathbb{R}^n$.
- $C_c(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n$ và có giá compact.
- $C^k(\mathbb{R}^n)$ ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) là không gian các hàm khả vi liên tục cấp k trên $\mathbb{R}^n$.
- $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm khả vi liên tục cấp k trên $\mathbb{R}^n$ và có giá compact.
- $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}^n$.
- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}^n$ và có giá compact.
- $C_0(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm liên tục và triệt tiêu tại vô cùng.

Không gian $C_0(\mathbb{R}^n)$ có thể trang bị chuẩn $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|$ để trở thành không gian Banach. Hơn nữa, $C_0(\mathbb{R}^n)$ là một đại số Banach với phép nhân điểm các hàm thông thường.

Với mỗi $1 \leq p \leq \infty$, ký hiệu $L^p(\mathbb{R}^n)$ là không gian Banach các hàm đo được Lebesgue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ có chuẩn hữu hạn, trong đó chuẩn được xác định như sau:

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup } \{ |f(\mathbf{x})| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} & p = \infty. \end{cases}$$

Trong trường hợp $p = 1$, không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$ được gọi là không gian các hàm khả tích tuyệt đối trên $\mathbb{R}^n$ và chuẩn được định nghĩa bởi $\|f\|_1 := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$.

Hai hàm $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, với μ là độ đo Lebesgue, được gọi là bằng nhau hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, ký hiệu là $f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{a.e.}}{=} g(\mathbf{x})$, nếu $\mu\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})\} = 0$.

Định nghĩa 1.1 ([66]) (i) Một hàm $f \in C(\mathbb{R}^n)$ được gọi là hàm giảm nhanh, nếu với mọi $N \in \mathbb{N}_0$, ta có $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|)^N |f(\mathbf{x})| < \infty$, hay tương đương, với mọi $N \in \mathbb{N}_0$, tồn tại hằng số $C_N < \infty$ sao cho $|f(\mathbf{x})| \leq C_N (1 + |\mathbf{x}|)^{-N}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Một hàm $f \in C(\mathbb{R}^n)$ được gọi là hàm tăng cấp đa thức, nếu tồn tại một số $N < \infty$ sao cho $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (1 + |\mathbf{x}|)^{-N} |f(\mathbf{x})| < \infty$, hay tương đương, tồn tại một số $N \in \mathbb{N}_0$ và hằng số $C < \infty$ sao cho $|f(\mathbf{x})| \leq C (1 + |\mathbf{x}|)^N$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Nhận xét 1.3 Ta có thể hiểu, hàm giảm nhanh là hàm mà nó cùng với tích của nó với đa thức mọi cấp đều triệt tiêu ở vô cùng. Nói cách khác, hàm giảm nhanh có vô cùng bé bậc cao hơn mọi vô cùng bé $\theta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(1+|\mathbf{x}|)^N}$, $N \in \mathbb{N}_0$.

Nếu hàm f khả vi vô hạn thì f là hàm giảm nhanh khi và chỉ khi với mọi n -bó α và β , tồn tại một hằng số dương $C_{\alpha,\beta}$ sao cho $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |\mathbf{x}^\alpha D^\beta f(\mathbf{x})| \leq C_{\alpha,\beta}$.

Không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Định nghĩa 1.2 (Không gian Schwartz [66]) Không gian tất cả các hàm khả vi vô hạn, tức là không gian các hàm $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ thỏa mãn $\mathbf{x}^\alpha D^\beta f(\mathbf{x}) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, với mọi đa chỉ số $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, được gọi là không gian Schwartz, hay không gian các hàm giảm nhanh.

Ta ký hiệu không gian Schwartz là $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Để ký hiệu được đơn giản trong một số trường hợp ta sử dụng ký hiệu $\mathcal{S}$.

Trong không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ta có thể trang bị một trong số các họ nửa chuẩn sau:

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |\mathbf{x}^\alpha D^\beta f(\mathbf{x})|; \quad (1.2)$$

$$\|f\|_{N,\alpha} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| (1 + |\mathbf{x}|)^N D^\alpha f(\mathbf{x}) \right|, \quad N \in \mathbb{N}_0; \quad (1.3)$$

$$\|f\|_{C_0(\mathbb{R}^n),N} := \max_{\alpha \leq N} \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| (1 + |\mathbf{x}|)^N D^\alpha f(\mathbf{x}) \right|, \quad N \in \mathbb{N}_0; \quad (1.4)$$

trong đó, α, β là các n -bó. Họ các nửa chuẩn này là tương đương, và do đó, chúng xác định cùng một cấu trúc tôpô trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Khi được trang bị nửa chuẩn (1.3), không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{N,\alpha} < \infty, \text{ với mọi } N \in \mathbb{N}_0 \text{ và } n\text{-bó } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

Định nghĩa 1.3 ([66]) Trong không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, một dãy hàm $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ được gọi là hội tụ đến hàm $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nếu với mọi n -bó α và β , dãy hàm $(\mathbf{x}^\alpha D^\beta f_k(\mathbf{x}))_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ đều đến hàm $\mathbf{x}^\alpha D^\beta f(\mathbf{x})$ trên $\mathbb{R}^n$. Ta viết, $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ ($k \rightarrow \infty$).

Họ nửa chuẩn (1.4) thỏa mãn $\|f\|_{C_0(\mathbb{R}^n),0} \leq \|f\|_{C_0(\mathbb{R}^n),1} \leq \|f\|_{C_0(\mathbb{R}^n),2} \leq \dots$ và hữu hạn với mọi $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Do đó, sự hội tụ của một dãy hàm trong không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cũng có thể được định nghĩa theo Mệnh đề 1.1 dưới đây.

Mệnh đề 1.1 ([66]) *Giả sử dãy hàm $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và hàm $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ ($k \rightarrow \infty$) khi và chỉ khi $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{C_0(\mathbb{R}^n),N} = 0$, với mọi $N \in \mathbb{N}_0$.*

Nhận xét 1.4 Không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ có một số tính chất đặc biệt để trở thành một môi trường lý tưởng cho nghiên cứu về FT.

- Không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là không gian con trù mật trong các không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$.
- Nếu hàm f thuộc không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, thì FT của f cũng thuộc không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nói cách khác, không gian Schwartz đóng dưới phép FT.
- Không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là không gian Fréchet (không gian tuyến tính lồi địa phương đầy đủ).

Định nghĩa 1.4 (Không gian hàm tăng cấp đa thức [2]) Ký hiệu $\mathcal{P}$ là không gian các hàm khả vi vô hạn sao cho mỗi hàm và các đạo hàm của nó là hàm tăng bậc không quá đa thức. Nói cách khác, một hàm $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ thuộc không gian $\mathcal{P}$ khi và chỉ khi với mọi n -bó α , tồn tại hằng số $N_\alpha \in \mathbb{N}_0$ sao cho $\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| (1 + |\mathbf{x}|)^{-N_\alpha} D^\alpha f(\mathbf{x}) \right| < \infty$.

Nhận xét 1.5 Mọi đa thức n biến xác định trên $\mathbb{R}^n$ đều thuộc không gian $\mathcal{P}$.

Không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$

Ký hiệu Φ_α là hàm Hermite, đặt

$$N_\alpha := 2\|\Phi_\alpha\|_1 = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \quad (1.5)$$

Hiển nhiên $N_\alpha > 0$. Trong không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$, ta có thể định nghĩa các chuẩn sau:

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, & \|f\|_{1-1} &:= \frac{2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \\ \|f\|_{N_1} &:= \frac{N_\alpha}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, & \|f\|_{N_2} &:= \frac{N_\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Để $L^1(\mathbb{R}^n)$ trở thành một vành định chuẩn, ta cần trang bị trong $L^1(\mathbb{R}^n)$ các yếu tố:

1. **Phép cộng:** là phép cộng điểm thông thường, biến $L^1(\mathbb{R}^n)$ trở thành một nhóm Abel.
2. **Phép nhân:** được định nghĩa là tích chập. Không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$ khi được trang bị phép nhân này, cùng với phép cộng điểm, sẽ trở thành một vành.
3. **Chuẩn:** Trang bị trong $L^1(\mathbb{R}^n)$ chuẩn thông thường $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$. Chuẩn này biến không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$ thành một không gian định chuẩn.
4. **Dưới nhân tính (Sub-multiplicative):** Chuẩn của phép nhân (tích chập) cần phải thỏa mãn bất đẳng thức chuẩn $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Khi đó, không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$ trở thành một không gian Banach. Vì vậy, $L^1(\mathbb{R}^n)$ còn được gọi là một đại số Banach (*Banach algebra*).

Nhận xét 1.6 Để xây dựng không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$ thành một vành định chuẩn với phép nhân được định nghĩa là tích chập, tích chập cần phải thỏa mãn bất đẳng thức chuẩn. Ta có thể chọn một trong các chuẩn được định nghĩa trong (1.6) cho mỗi trường hợp tích chập cụ thể.

Không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$

Ký hiệu $L^2(\mathbb{R}^n)$ là không gian các hàm bình phương khả tích Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$, hay

$$L^2(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty \right\}.$$

Trong không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$, ta có thể trang bị tích vô hướng và chuẩn cảm sinh được định nghĩa như sau:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}, \quad \|f\|_2 := \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Khi đó, $L^2(\mathbb{R}^n)$ trở thành một không gian Hilbert.

Nhận xét 1.7 ([66]) Do $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ là một không gian con trù mật trong các không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$, nên không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cũng là một không gian con trù mật trong các không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty)$. Hơn nữa, ta còn có thể thấy mối quan hệ giữa các không gian hàm là $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ví dụ 1.1 Một hàm điển hình thuộc không gian $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là hàm kiểm thử

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Giá compact của hàm φ là hình cầu đơn vị $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

Mọi hàm Gauss $e^{-a|\mathbf{x}|^2}$, với $a > 0$, đều thuộc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nhưng không thuộc $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Với mọi $N \in \mathbb{N}$, hàm $f(\mathbf{x}) := (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-N}$ thuộc $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, nhưng không thuộc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, do hàm $|\mathbf{x}|^{2N} f(\mathbf{x})$ không tiến đến 0 khi $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Ví dụ 1.2 Trong trường hợp một chiều, tích của một đa thức với hàm Gauss $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ là hàm giảm nhanh. Các hàm Hermite $h_k(x) := e^{-\frac{1}{2}x^2} H_k(x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, thuộc không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ và tạo thành cơ sở trực giao của $L^2(\mathbb{R})$. Do đó, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ trù mật trong không gian $L^2(\mathbb{R})$.

Trong trường hợp nhiều chiều, với mỗi n -bó $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}_0^n$, hàm $\mathbf{x}^\alpha e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}$ là một hàm giảm nhanh. Tập các hàm $h_\alpha(\mathbf{x}) := e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2} \prod_{i=1}^n H_{\alpha_i}(x_i)$ thuộc không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và tạo thành cơ sở trực giao của $L^2(\mathbb{R}^n)$. Do đó, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ trù mật trong không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$.

1.2 Một số khái niệm trong không gian Hilbert thực

Ký hiệu $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ và $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$ là chuẩn cảm sinh tương ứng. Nếu không có sự nhầm lẫn, để đơn giản ta cũng ký hiệu là $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và $\| \cdot \|$.

Định nghĩa 1.5 ([3]) Một dãy (x_k) trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$ được gọi là:

- **Hội tụ mạnh (hay hội tụ theo chuẩn)** đến $x \in \mathcal{H}$, nếu $\|x_k - x\| \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$, và được ký hiệu là $x_k \rightarrow x$.
- **Hội tụ yếu** đến $x \in \mathcal{H}$, nếu $\langle y, x_k \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle$ khi $k \rightarrow \infty$, với mọi $y \in \mathcal{H}$, và được ký hiệu là $x_k \rightharpoonup x$.

Nhận xét 1.8 Trong không gian Hilbert hữu hạn chiều hoặc trên một tập compact tương đối, hai khái niệm hội tụ trên là tương đương. Trong trường hợp không gian Hilbert vô hạn chiều, từ $x_k \rightarrow x$, suy ra $x_k \rightharpoonup x$. Nhưng để có điều ngược lại ta cần thêm điều kiện $\|x_k\| \rightarrow \|x\|$.

Định nghĩa 1.6 ([3]) Giả sử C là một tập con trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$.

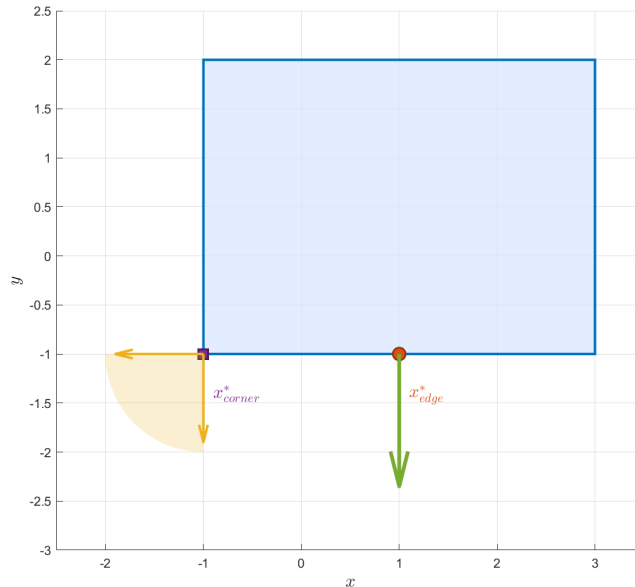
- Tập C được gọi là tập lồi trong $\mathcal{H}$, nếu với mọi $x, y \in C$, $\alpha \in [0, 1]$, thì $\alpha x + (1 - \alpha)y$ cũng thuộc tập C .
- Tập C được gọi là nón có đỉnh tại 0, nếu với mọi $x \in C$ và với mọi $\alpha \in \mathbb{R}_+$, thì $\alpha x \in C$. Khi $C - x_0$ là nón có đỉnh tại 0, thì ta nói C là nón có đỉnh tại x_0 .

Trong lĩnh vực tối ưu hóa, đặc biệt là tối ưu hóa có ràng buộc, nón pháp tuyến ngoài, ký hiệu là $\mathcal{N}_C$, đóng vai trò trung tâm trong việc định hình các điều kiện tối ưu. Nón pháp tuyến ngoài là một phương tiện để diễn tả hướng mà tại đó một hàm không thể giảm thêm được nữa trong khi vẫn nằm trong tập ràng buộc.

Định nghĩa 1.7 ([15]) Cho C là một tập con khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$, x^* là một phần tử thuộc tập C . Khi đó, tập

$$\mathcal{N}_C(x^*) = \{y \in \mathcal{H} : \langle y, x - x^* \rangle \leq 0, \forall x \in C\}$$

được gọi là nón pháp tuyến ngoài của C tại x^* .



Hình 1.9: Hình minh họa nón pháp tuyến ngoài $\mathcal{N}_C(x^*)$.

1.3 Biến đổi Fourier

Định nghĩa 1.8 ([72, 81]) Biến đổi Fourier (FT) và biến đổi Fourier ngược (IFT) của một hàm f được định nghĩa theo các công thức sau:

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{F}^{-1}[f(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\omega}) e^{i\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}} d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

khi các tích phân về bên phải tồn tại. Hàm f được gọi là hàm gốc, hàm $\mathcal{F}f$ được gọi là hàm ảnh của phép FT.

Miền xác định của FT được gọi là miền tần số. Biến đổi Fourier xác định số dao động quanh tần số $\boldsymbol{\omega}$ được chứa trong hàm gốc f . Hàm ảnh $\mathcal{F}f = |f|e^{i\arg f}$ được gọi là phổ của f với môđun $|\mathcal{F}f|$ và pha $\arg f$.

Để biểu diễn công thức được gọn gàng, ta sử dụng các ký hiệu khác nhau cho FT. Cụ thể, ta sử dụng các ký hiệu sau:

$$F(\boldsymbol{\omega}) := \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) := (\mathcal{F}f)(\boldsymbol{\omega}) := \mathcal{F}[f](\boldsymbol{\omega}) := \mathcal{F}[f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}),$$

$$(fg)^\wedge(\boldsymbol{\omega}) := \mathcal{F}[fg](\boldsymbol{\omega}) := \mathcal{F}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}),$$

$$F^{-1}(\mathbf{x}) := \check{f}(\mathbf{x}) := (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathbf{x}) := \mathcal{F}^{-1}[f](\mathbf{x}) := \mathcal{F}^{-1}[f(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}),$$

trong đó, $\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$.

Nhận xét 1.9 Một hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ khi và chỉ khi $f^- \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, ta có các quan hệ $\mathcal{F}f^- = \mathcal{F}^{-1}f$, $\mathcal{F}f = \mathcal{F}^{-1}f^-$.

Định nghĩa 1.9 (Tích chập Fourier) Cho các hàm $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ và $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$. Tích chập Fourier của hàm f và g , ký hiệu là $f * g$, được định nghĩa bởi công thức

$$(f * g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.7)$$

khi tích phân về bên phải của (1.7) tồn tại.

1.3.1 Biến đổi Fourier trên các không gian hàm

Nghiên cứu về FT trên các không gian hàm Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ đóng vai trò là nền tảng cốt lõi trong việc nghiên cứu các tính chất toán tử, đặc trưng toán tử của FT, từ đó cho phép mở rộng phạm vi định nghĩa FT sang các không gian hàm tổng quát hơn, tiêu biểu như không gian phân phối tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; đồng thời, tạo tiền đề để xây dựng những không gian hàm quan trọng trong giải tích hiện đại, như không gian Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, không gian Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, các họ không gian Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ và Triebel-Lizorkin $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Hệ thống lý thuyết này cung cấp một khuôn khổ toán học chặt chẽ, làm cơ sở để giải các bài toán trong các lĩnh vực như phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng và lý thuyết xử lý tín hiệu.

1.3.1.1 Biến đổi Fourier trên không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Định lý 1.1 ([2, 66, 72]) (i) *Biến đổi Fourier $\mathcal{F}$ trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là một song ánh tuyến tính vào chính nó và là toán tử đối hợp bậc bốn, nghĩa là $\mathcal{F}^4 = I$. Hơn nữa, $\mathcal{F}$ là toán tử liên tục trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tức là với mọi dãy $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ ($k \rightarrow \infty$), thì $\mathcal{F}f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}f$ ($k \rightarrow \infty$).*

(ii) *Biến đổi Fourier ngược trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ cũng là một song ánh tuyến tính liên tục trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, toán tử $\mathcal{F}^{-1}$ thỏa mãn*

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\boldsymbol{\omega}) e^{i\mathbf{x}\boldsymbol{\omega}} d\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Định lý 1.2 ([2]) Với $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\alpha}$ là n -bó, cho $\{a_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \subset \mathcal{D}$ là tập các hàm tăng cấp đa thức. Xét toán tử $L_k = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \partial^{\boldsymbol{\alpha}}$. Khi đó, $L_k(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nói cách khác, L_k là một toán tử tuyến tính trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Với $N \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\alpha}$ là n -bó, cho $\{a_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq N}$ là tập các hàm trơn xác định trên $\mathbb{R}^n$ và có cấp không vượt quá N . Ký hiệu $P_{\{a_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq N}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq N} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) \mathbf{y}^{\boldsymbol{\alpha}}$ là một hàm theo các biến $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ và $P_{\{a_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq N}}(\mathbf{x}, D_{\mathbf{x}}) := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq N} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) D_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}$. Nếu các hàm $a_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x})$ là đa thức theo biến $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ký hiệu $P_{\{a_{\boldsymbol{\alpha}}\}_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq N}}(-D_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq N} a_{\boldsymbol{\alpha}}(-D_{\mathbf{x}}) M_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}$, trong đó, ký hiệu $M_{\mathbf{x}}^{\boldsymbol{\alpha}}(f) := \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} f(\mathbf{x})$ là một toán tử nhân với đơn thức.

Định lý 1.3 ([2]) Với $N \in \mathbb{N}$ và α là n -bó, cho $\{a_\alpha(\mathbf{x})\}_{|\alpha| \leq N}$ là một tập các đa thức theo biến $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ có bậc không vượt quá N . Cho $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, $P_{\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq N}}(-D_\omega, \omega) \mathcal{F}f(\omega)$ và $\mathcal{F}[P_{\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq N}}(D_\mathbf{x}, -\mathbf{x})f(\mathbf{x})](\omega)$ cũng thuộc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa,

$$\mathcal{F}[P_{\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq N}}(\mathbf{x}, D_\mathbf{x})f(\mathbf{x})](\omega) = P_{\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq N}}(-D_\omega, \omega) \mathcal{F}[f(\mathbf{x})](\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^n;$$

$$P_{\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq N}}(\omega, D_\omega) \mathcal{F}[f(\mathbf{x})](\omega) = \mathcal{F}[P_{\{a_\alpha\}_{|\alpha| \leq N}}(D_\mathbf{x}, -\mathbf{x})f(\mathbf{x})](\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Định lý 1.4 (Định lý tích chập trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [66]) Cho f và g thuộc không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, tích fg và tích chập $f * g$ thuộc không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

1.3.1.2 Biến đổi Fourier trên không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$

Định lý 1.5 ([66]) Biến đổi Fourier trên không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$ là một toán tử tuyến tính liên tục $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ với chuẩn toán tử $\|\mathcal{F}\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)} = 1$. Cụ thể, $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$. Hơn nữa, hàm ảnh $\hat{f}$ liên tục đều trên $\mathbb{R}^n$.

Định lý 1.6 ([66]) Cho các hàm $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, $\hat{f}g$ và $f\hat{g}$ cũng thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, và

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega)g(\omega)d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega)\hat{g}(\omega)d\omega.$$

Định lý 1.7 ([66]) Nếu dãy hàm $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ hội tụ (theo L^1 -chuẩn) đến hàm f , thì dãy hàm ảnh $(\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ đều đến hàm ảnh $\hat{f}$. Cụ thể, nếu $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_1 = 0$, thì

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}_k(\omega) - \hat{f}(\omega)| = 0.$$

Các định lý dưới đây cho biết mối liên hệ giữa phép toán vi phân trong miền ban đầu với phép toán đại số trong miền biến đổi qua phép FT.

Định lý 1.8 ([2]) Cho hàm $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Nếu hàm $xf(x)$ thuộc $L^1(\mathbb{R})$, thì tồn tại đạo hàm của hàm ảnh $(\mathcal{F}f)'$. Hơn nữa, ta có $(\mathcal{F}f)'(\omega) = \mathcal{F}[-ixf(x)](\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(ii) Nếu hàm f có đạo hàm f' thuộc $L^1(\mathbb{R})$, thì $(\mathcal{F}f')(\omega) = i\omega(\mathcal{F}f)(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Định lý 1.9 ([2]) Cho α và β là các n -bó thỏa mãn $\alpha \leq \beta$ và hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) Nếu hàm $\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})$ thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì tồn tại đạo hàm riêng của hàm ảnh $D_\omega^\beta(\mathcal{F}f(\omega))$. Hơn nữa, $D_\omega^\beta(\mathcal{F}f(\omega)) = \mathcal{F}[(-i\mathbf{x})^\beta f(\mathbf{x})](\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Nếu hàm f có đạo hàm riêng $D_\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})$ thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì FT của đạo hàm riêng $D_\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})$ thỏa mãn $\mathcal{F}[D_\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})](\omega) = (i\omega)^\alpha(\mathcal{F}f)(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}^n$.

Định lý 1.10 ([2]) Cho α là n -bó và hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu hàm f có đạo hàm riêng $D_\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})$ thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì

$$\left| \frac{(\mathcal{F}f)(\omega)}{\frac{1}{|\omega|^{|\alpha|}}} \right| = \left| \mathcal{F}[D_\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x})](\omega) \right| \rightarrow 0 \text{ khi } |\omega| \rightarrow \infty.$$

Nói cách khác, ảnh Fourier của hàm f là vô cùng bé bậc cao hơn $\frac{1}{|\omega|^{|\alpha|}}$.

Mệnh đề 1.2 ([2]) Cho các hàm $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} g(\mathbf{x})$. Nếu f và g là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^n$, thì $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Định lý 1.11 (Định lý biến đổi Fourier ngược [66]) Cho hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\mathcal{F}f$ thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì IFT $\mathcal{F}^{-1} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ thỏa mãn

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}f)(\omega)](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}f)(\omega) e^{i\mathbf{x}\omega} d\omega, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.8)$$

Hơn nữa, nếu f là hàm liên tục, thì IFT có tính chất nghịch đảo theo điểm, tức là công thức (1.8) thỏa mãn với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Hệ quả 1.1 (Định lý tồn tại duy nhất [2]) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\mathcal{F}f = 0$ trong $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì $f \stackrel{a.e.}{=} 0$ trên $\mathbb{R}^n$.

Hệ quả 1.2 (Bổ đề Lebesgue-Riemann [2]) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Khi đó,

$$\lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \cos(\omega \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{|\omega| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sin(\omega \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Nhận xét 1.10 Tương tự như FT, ảnh của hàm khả tích tuyệt đối qua biến đổi tích phân với các nhân lượng giác cosine hoặc sine là hàm liên tục và triệt tiêu tại vô cùng.

Định lý sau tổng kết một số tính chất cơ bản của FT.

Định lý 1.12 (Tính chất của biến đổi Fourier trên $L^1(\mathbb{R}^n)$ [2]) Cho α là một n -bó.

(i) Cho hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ và $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(ii) Cho hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ký hiệu $\tau_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, với hằng số $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\mathcal{F}[\tau_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})](\omega) = e^{-i\mathbf{x}_0 \omega} \hat{f}(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) Cho các hàm $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) g(\omega) d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega) \hat{g}(\omega) d\omega$.

(iv) Cho hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ký hiệu $(f \circ \mathcal{T})(\mathbf{x}) := f(\mathcal{T}(\mathbf{x}))$ ($\mathcal{T}$ có thể được xem như là một phép đổi biến), nếu $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ là một phép biến đổi tuyến tính khả nghịch trên $\mathbb{R}^n$, thì

$$\mathcal{F}[(f \circ \mathcal{T})(\mathbf{x})](\omega) = |\det(\mathcal{T})|^{-1} \mathcal{F}[f(\mathbf{x})](\mathcal{T}^{-1} \omega), \omega \in \mathbb{R}^n.$$

(v) Cho hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu hàm $(1 + |\mathbf{x}|)^N f(\mathbf{x})$, $N \in \mathbb{N}$, thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì với mọi n -bó α thỏa mãn $|\alpha| \leq N$, ta có $\hat{f} \in C^N(\mathbb{R}^n)$ và $\partial^\alpha \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa,

$$\partial^\alpha \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[(-i\mathbf{x})^\alpha f(\mathbf{x})](\omega), \omega \in \mathbb{R}^n.$$

(vi) Nếu $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ với $N \in \mathbb{N}$, và $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ với mọi n -bó α thỏa mãn $|\alpha| \leq N$, thì

$$(1 + |\omega|)^N \hat{f}(\omega) \in C_0(\mathbb{R}^n) \text{ và } \mathcal{F}[\partial^\alpha f](\omega) = (i\omega)^\alpha \hat{f}(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n,$$

với mọi n -bó α thỏa mãn $|\alpha| \leq N$.

(vii) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^{n-k})$. Tích tensor của f và g được định nghĩa bởi

$$h(\mathbf{x}) = (f \otimes g)(\mathbf{x}) := f(x_1, \dots, x_k) g(x_{k+1}, \dots, x_n), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, $\hat{h} = \hat{f} \otimes \hat{g}$.

Định lý 1.13 ([2]) Cho $\lambda \in \mathbb{C}$. Nếu tồn tại $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $f \neq 0$ (tức là $\|f\|_1 \neq 0$) thỏa mãn $\mathcal{F}f = \lambda f$, thì $\lambda \in \{\pm 1, \pm i\}$.

Hệ quả 1.3 ([2]) *Toán tử tích phân Fourier*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)] & \longrightarrow & L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{F}[L^1(\mathbb{R}^n)] \\ f & \longmapsto & \mathcal{F}f \end{array}$$

có đúng bốn giá trị riêng là $\{\pm 1, \pm i\}$.

Định lý 1.14 (Định lý tích chập [66]) *Cho $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, tích chập $f * g$ tồn tại hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$ và $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.*

Định lý 1.15 ([66]) (i) *Cho $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ và $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, tích chập $f * g$ tồn tại hầu khắp nơi, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ và thỏa mãn bất đẳng thức Young $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$.*

(ii) *Cho $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ và $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó, $f * g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ và thỏa mãn $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

(iii) *Cho $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ và $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p, q, r \leq \infty$ và $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Khi đó, $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ và thỏa mãn bất đẳng thức Young $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

1.3.1.3 Biến đổi Fourier trên không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$

Toán tử tích phân của FT trên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ có thể không tồn tại, do đó, FT trên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ được định nghĩa bằng cách thác triển toán tử FT trên không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hoặc không gian $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Mệnh đề 1.3 (Đẳng thức Parseval [66]) *Cho các hàm $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\hat{f}$ và $\hat{g}$ cũng thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ và ta có đẳng thức Parseval $\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.*

Định lý Plancherel cho phép thác triển FT từ các không gian con là không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ hoặc không gian $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ lên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$. Vì không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (hoặc $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$) là không gian con trù mật trong $L^2(\mathbb{R}^n)$, nên với mọi hàm $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tồn tại một dãy hàm $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (hoặc $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$) sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_2 = 0$. Do đó, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong $L^2(\mathbb{R}^n)$. Theo Mệnh đề 1.3, $(\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cũng là một dãy Cauchy trong $L^2(\mathbb{R}^n)$. Không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ là không gian đầy đủ, nên dãy $(\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ hội tụ đến một hàm thuộc $L^2(\mathbb{R}^n)$, ký hiệu là $\tilde{\mathcal{F}}f$. Ta định nghĩa FT của hàm f là $\tilde{\mathcal{F}}f := \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k$.

Định lý 1.16 (Định lý Plancherel [66]) *Biến đổi Fourier $\mathcal{F}$ trên không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ có thể được thác triển liên tục duy nhất thành toán tử unita $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ thỏa mãn $\tilde{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}f, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, $\tilde{\mathcal{F}}$ là toán tử đối hợp bậc bốn, nghĩa là $\tilde{\mathcal{F}}^4 = \mathcal{I}$.*

Định lý 1.17 (Định lý biến đổi Fourier ngược [66]) *Cho $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\tilde{\mathcal{F}}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì*

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \tilde{\mathcal{F}}^{-1}[(\tilde{\mathcal{F}}f)(\omega)](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{\mathcal{F}}f)(\omega) e^{i\omega\mathbf{x}} d\omega, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

Hơn nữa, nếu hàm f liên tục thì công thức (1.9) thỏa mãn với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Biến đổi Fourier trên $L^2(\mathbb{R}^n)$ cũng có thể được thác triển từ không gian $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ lên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ bằng cách sử dụng giới hạn của toán tử tích phân trên miền hữu hạn.

Định lý 1.18 (Định lý giới hạn tích phân chặt cụt [72, 81]) *Cho hàm $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(i) *Đặt*

$$(\mathcal{F}_R f)(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{x}| \leq R} f(\mathbf{x}) e^{-i\omega\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad R \in \mathbb{R}_+.$$

Các hàm $\mathcal{F}_R f$ hội tụ mạnh đến một hàm thuộc $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cụ thể, tồn tại toán tử đẳng cự tuyến tính $\tilde{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ là thác triển liên tục duy nhất từ không gian $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ lên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\tilde{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}f, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ và $\tilde{\mathcal{F}}$ được xác định bởi $\lim_{R \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathcal{F}}f - \mathcal{F}_R f\|_2 = 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, $(\tilde{\mathcal{F}}f)(\omega) \stackrel{a.e.}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{F}_R f)(\omega)$.

(ii) *Đặt*

$$(\mathcal{F}_R^{-1} f)(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\omega| \leq R} f(\omega) e^{i\omega\mathbf{x}} d\omega, \quad R \in \mathbb{R}_+.$$

Các hàm $\mathcal{F}_R^{-1} f$ hội tụ mạnh về một hàm thuộc $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cụ thể, tồn tại toán tử đẳng cự tuyến tính $\tilde{\mathcal{F}}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ là thác triển liên tục duy nhất từ không gian $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ lên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\tilde{\mathcal{F}}^{-1} f = \mathcal{F}^{-1} f, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ và $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ được xác định bởi $\lim_{R \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathcal{F}}^{-1} f - \mathcal{F}_R^{-1} f\|_2 = 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, $(\tilde{\mathcal{F}}^{-1} f)(\omega) \stackrel{a.e.}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{F}_R^{-1} f)(\omega)$.

Nếu $\tilde{\mathcal{F}}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}[(\tilde{\mathcal{F}}f)(\omega)](\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} f(\mathbf{x})$. Cụ thể, nếu định nghĩa

$$f_R(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\omega| \leq R} (\mathcal{F}f)(\omega) e^{i\omega\mathbf{x}} d\omega, \quad R \in \mathbb{R}_+,$$

thì $\lim_{R \rightarrow \infty} \|f - f_R\|_2 = 0$ và $f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(\mathbf{x})$. Nếu f liên tục thì $f(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow \infty} f_R(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Định lý 1.19 ([2]) Cho $\tilde{\mathcal{F}}$ là toán tử thác triển được định nghĩa trong Định lý 1.18.

- (i) $\tilde{\mathcal{F}}$ và $\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ là những toán tử unita trên không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) Nếu hàm f thuộc $L^2(\mathbb{R}^n)$, thì $\tilde{\mathcal{F}}f$ xác định duy nhất như một hàm thuộc $L^2(\mathbb{R}^n)$ và thỏa mãn $\langle \tilde{\mathcal{F}}f, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \hat{\psi} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, với mọi $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) Nếu $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, thì $\tilde{\mathcal{F}}f \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{F}f$ trên $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét 1.11 Từ Định lý 1.19, ta có thể đồng nhất các ký hiệu $\tilde{\mathcal{F}}$ và $\mathcal{F}$, và quy ước sử dụng ký hiệu $\mathcal{F}$ cho toán tử FT trên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Định lý 1.20 (Định lý tích chập [66]) Cho $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, $f * g, \hat{f} * \hat{g} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ và $\hat{f} * \hat{g} = \mathcal{F}(fg)$.

Định nghĩa 1.10 ([72]) Cho $\mathcal{X}$ là một không gian tuyến tính định chuẩn trên trường số phức $\mathbb{C}$, và $\mathcal{A} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ là một toán tử tuyến tính liên tục.

- (i) Số $\lambda \in \mathbb{C}$ được gọi là giá trị chính quy của $\mathcal{A}$ nếu toán tử $\mathcal{A}_\lambda := \lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}$ khả nghịch và $\mathcal{A}_\lambda^{-1}$ là liên tục trên $\mathcal{X}$. Tập tất cả các giá trị chính quy của $\mathcal{A}$ ký hiệu là $\rho(\mathcal{A})$.
- (ii) Phổ của toán tử $\mathcal{A}$, ký hiệu là $\sigma(\mathcal{A})$, được xác định bởi hệ thức $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$. Ta gọi $r(\mathcal{A}) := \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} |\lambda|$ là bán kính phổ của $\mathcal{A}$.

Định lý 1.21 ([2]) Phổ của toán tử Fourier $\mathcal{F}$ bao gồm đúng bốn điểm thuộc đường tròn đơn vị là $\sigma(\mathcal{F}) = \{-1, 1, -i, i\}$.

Định nghĩa 1.11 ([2]) Giả sử $\mathcal{X}$ là một không gian tuyến tính định chuẩn trên trường số phức $\mathbb{C}$, và $A \in L(\mathcal{X})$ là toán tử tuyến tính giới nội trên $\mathcal{X}$. Toán tử A được gọi là đại số nếu tồn tại một đa thức đại số $P_n(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$, ($n \in \mathbb{N}_0; a_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2, \dots, n$), sao cho $P_n(A) = 0$. Khi đó, đa thức có bậc nhỏ nhất, ký hiệu là $P(t)$, được gọi là đa thức đặc trưng của toán tử A .

Hệ quả 1.4 ([2]) Toán tử Fourier $\mathcal{F}$ là toán tử đại số trên không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ với đa thức đặc trưng là $P_{\mathcal{F}}(t) = t^4 - 1$.

Định lý 1.22 ([72, 81]) Ảnh Fourier của hàm Hermite là hàm Hermite sai khác một hằng số. Cụ thể, giả sử Φ_α là hàm Hermite n biến, ta có $\mathcal{F}\Phi_\alpha = (-i)^{|\alpha|}\Phi_\alpha$ và $\mathcal{F}^{-1}\Phi_\alpha = i^{|\alpha|}\Phi_\alpha$.

1.4 Bài toán đặt không chỉnh

Các dữ liệu trong mô hình toán học thường được xác định thông qua các phép đo lường, do đó, chúng chỉ có thể đạt được mức độ chính xác nhất định. Hơn nữa, các tham số của một mô hình thực tế thường biến đổi theo thời gian/không gian và giá trị chính xác của nó không được biết. Ngoài ra, trong quá trình tính toán trên máy tính còn xuất hiện sai số tính toán, sai số làm tròn, và những sai số khác. Thực tế cho thấy, có những bài toán mà chỉ một sai số rất nhỏ trong dữ liệu ban đầu (các hệ số, tham số, điều kiện biên/ban đầu) cũng có thể dẫn đến sai số đáng kể của nghiệm. Những bài toán như vậy được gọi là bài toán đặt không chỉnh (*ill-posed problem*). Dạng bài toán này mang đến những thách thức lớn trong lĩnh vực toán ứng dụng, nhưng lại rất có ý nghĩa trong thực tế. Nghiên cứu về bài toán đặt không chỉnh là một yêu cầu cấp thiết trong toán ứng dụng, nhằm đạt được kết quả tính toán đáng tin cậy với mức sai số chấp nhận được.

Năm 1902, Jacques Hadamard đã đưa ra khái niệm bài toán đặt chỉnh (*well-posed problem*).

Định nghĩa 1.12 ([1]) Một bài toán được gọi là đặt chỉnh nếu thỏa mãn cả ba điều kiện sau:

1. Bài toán phải có ít nhất một nghiệm.
2. Bài toán chỉ có một nghiệm duy nhất.
3. Nghiệm của bài toán thay đổi một cách liên tục theo dữ liệu ban đầu.

Một bài toán được gọi là đặt không chỉnh (*ill-posed problem*) nếu nó không thỏa mãn ít nhất một trong ba điều kiện trên.

Nhận xét 1.12 Mỗi điều kiện trong định nghĩa của Hadamard đều mang một ý nghĩa sâu sắc. Điều kiện thứ nhất (tồn tại nghiệm) mô tả tính tương thích của mô hình toán học với thực tế, đảm bảo rằng ít nhất có một giải pháp khả thi. Điều kiện thứ hai (tính duy nhất nghiệm) phản ánh tính xác định của bài toán trong tình huống thực tế, nghĩa là chỉ có một kết quả cụ thể tương ứng với một tập dữ liệu. Điều kiện thứ ba (nghiệm phụ thuộc liên tục vào dữ liệu ban đầu) thể hiện tính ổn định của nghiệm. Đây là yếu tố cực kỳ quan trọng và luôn được mong muốn trong các ứng dụng thực tế, bởi lẽ, các mô hình và dữ liệu luôn có một mức sai số nhất định. Nếu một bài toán ổn định, thì những sai số nhỏ trong mô hình hay dữ liệu ban đầu sẽ chỉ dẫn đến những sai số nhỏ trong kết quả tính toán, đảm bảo được độ tin cậy của phương pháp tìm nghiệm.

1.5 Cơ sở lý thuyết toán tử đơn điệu

Định nghĩa 1.13 ([15]) Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đa trị xác định trên không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Ký hiệu $D(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{H} : \mathcal{A}x \neq \emptyset\}$ là miền xác định của toán tử $\mathcal{A}$, $R(\mathcal{A}) = \{y \in \mathcal{H} : \exists x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{A}x\}$ là miền giá trị của toán tử $\mathcal{A}$, $\text{Zero}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{H} : 0 \in \mathcal{A}x\}$ là tập các không điểm của toán tử $\mathcal{A}$, $\text{Graph}(\mathcal{A}) = \{(x, y) : x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{A}x\}$ là đồ thị của toán tử $\mathcal{A}$. Toán tử đa trị $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ được gọi là:

- (i) **Đơn điệu**, nếu $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$ và mọi $u \in \mathcal{A}x, v \in \mathcal{A}y$.
- (ii) **γ -đơn điệu mạnh**, nếu tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho $\langle u - v, x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$ và mọi $u \in \mathcal{A}x, v \in \mathcal{A}y$.
- (iii) **c^{-1} đơn điệu mạnh ngược với hằng số $c \in \mathbb{R}_+$** , nếu $\langle u - v, x - y \rangle \geq \frac{1}{c} \|u - v\|^2$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$ và mọi $u \in \mathcal{A}x, v \in \mathcal{A}y$.
- (iv) **Đơn điệu cực đại**, nếu $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu và đồ thị của nó không thực sự chứa trong đồ thị của một toán tử đơn điệu nào khác.
- (v) **ρ -giả đơn điệu mạnh với hệ số $\rho > 0$** , nếu từ $\langle u, y - x \rangle \geq 0$, suy ra $\langle v, y - x \rangle \geq \rho \|x - y\|^2$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$ và mọi $u \in \mathcal{A}x, v \in \mathcal{A}y$.
- (vi) **Không giãn**, nếu $\|u - v\| \leq \|x - y\|$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$ và mọi $u \in \mathcal{A}x, v \in \mathcal{A}y$.

Dưới đây là một số tính chất liên quan đến toán tử đơn điệu cực đại.

Mệnh đề 1.4 ([15]) Giả sử $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu cực đại. Cặp (x, u) thuộc $\text{Graph}(\mathcal{A})$ khi và chỉ khi $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$, với mọi (y, v) thuộc $\text{Graph}(\mathcal{A})$.

Mệnh đề 1.5 ([15]) Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ là một toán tử đơn điệu cực đại. Khi đó, với mọi $x \in \mathcal{H}$, tập $\mathcal{A}x$ là tập lồi và đóng.

Nhận xét 1.13 Toán tử $\mathcal{A}^{-1}$ được định nghĩa bởi $\text{Graph}(\mathcal{A}^{-1}) = \{(x, u) : (u, x) \in \text{Graph}(\mathcal{A})\}$. Dễ thấy nếu $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu (toán tử đơn điệu cực đại) thì $\mathcal{A}^{-1}$, $\lambda \mathcal{A}$, với $\lambda > 0$ cũng là toán tử đơn điệu (toán tử đơn điệu cực đại).

Hệ quả 1.5 Tập không điểm của một toán tử đơn điệu cực đại là tập lồi và đóng.

Việc sử dụng toán tử giải thức $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}} := (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{A})^{-1}$ để giải bài toán bao hàm thức biến phân là một phương pháp rất phổ biến, nhằm chuyển một bài toán khó thành một bài toán dễ tiếp cận hơn, có cấu trúc tốt hơn và cho phép giải bài toán này nhờ vào một số lượng lớn các phương pháp hiệu quả và ổn định đã có từ lý thuyết điểm bất động và tối ưu lồi, cũng như cho phép đơn giản hóa việc xử lý các ràng buộc và hàm không khả vi.

Toán tử giải thức của một toán tử đơn điệu cực đại $\mathcal{A}$ là một toán tử không giãn. Trong trường hợp $\mathcal{A}$ là đơn điệu mạnh, toán tử giải thức còn là một toán tử co. Tính chất không giãn (hoặc co) rất quan trọng trong việc thiết kế các thuật toán lặp. Trong nhiều bài toán tối ưu, toán tử $\mathcal{A}$ là một toán tử đa trị, việc giải các bài toán này thường rất khó khăn. Trong khi đó, toán tử giải thức $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}$ luôn là một toán tử đơn trị, ngay cả khi $\mathcal{A}$ là toán tử đa trị. Điều này làm đơn giản hóa đáng kể bài toán. Bài toán bao hàm thức biến phân có cấu trúc tổng $0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})u$, khi $\mathcal{A}$ hoặc $\mathcal{B}$ là các toán tử đa trị hoặc phi tuyến, thường là một bài toán phức tạp. Sử dụng toán tử giải thức, bài toán này có thể được chuyển thành một bài toán điểm bất động (*Fixed-Point Problem* - FPP) có dạng $u = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}(u - \lambda\mathcal{B}u)$. Trong trường hợp hàm f là một hàm lồi và đóng, toán tử dưới gradient ∂f là toán tử đơn điệu cực đại, và toán tử giải thức $\mathcal{J}_{\lambda\partial f}$ chính là toán tử điểm gần kề $\mathcal{J}_{\lambda\partial f}(x) = \text{prox}_{\lambda f}(x) := \text{argmin}_u \left\{ f(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - x\|^2 \right\}$. Khi đó, bài toán tìm nghiệm của VInP $0 \in \partial f(x)$ trở thành bài toán tìm điểm bất động của toán tử $\text{prox}_{\lambda f}(x)$, vốn đã có nhiều phương pháp giải hiệu quả.

Định nghĩa 1.14 ([15]) Ký hiệu $\mathcal{I}$ là toán tử đồng nhất. Giải thức của toán tử $\mathcal{A}$, với $\lambda > 0$, được định nghĩa là toán tử $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}} = (\mathcal{I} + \lambda\mathcal{A})^{-1}$.

Định lý 1.23 dưới đây đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các bao hàm thức đơn điệu.

Định lý 1.23 (Minty, [15] - Định lý 21.1) Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ là một toán tử đa trị.

- (i) $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu khi và chỉ khi toán tử $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}$ không giãn với mọi $\lambda > 0$.
- (ii) Toán tử đơn điệu $\mathcal{A}$ là đơn điệu cực đại khi và chỉ khi $D(\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}) = \mathcal{H}$, hay $\mathcal{I} + \lambda\mathcal{A}$ là toàn ánh với mọi $\lambda > 0$.

Hệ quả 1.6 Giải thức $\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}$ của toán tử đơn điệu cực đại $\mathcal{A}$ là một toán tử đơn trị, xác định trên toàn không gian $\mathcal{H}$ và không giãn vững, tức là $\langle \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}x - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}y, x - y \rangle \geq \|\mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}x - \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}y\|^2$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.

Định nghĩa 1.15 ([15]) Toán tử đơn trị $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ được gọi là:

1. **Liên tục Lipschitz ($L_{\mathcal{B}}$ -liên tục Lipschitz)**, nếu tồn tại một hằng số $L_{\mathcal{B}} > 0$ sao cho $\|\mathcal{B}x - \mathcal{B}y\| \leq L_{\mathcal{B}}\|x - y\|$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.
2. **Đơn điệu**, nếu $\langle \mathcal{B}x - \mathcal{B}y, x - y \rangle \geq 0$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.
3. **Đơn điệu mạnh (γ -đơn điệu mạnh)**, nếu tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho $\langle \mathcal{B}x - \mathcal{B}y, x - y \rangle \geq \gamma\|x - y\|^2$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.
4. **Đồng bức, hay đơn điệu mạnh ngược (β -đồng bức, hay β -đơn điệu mạnh ngược)**, nếu tồn tại hằng số $\beta > 0$ sao cho $\langle \mathcal{B}x - \mathcal{B}y, x - y \rangle \geq \beta\|\mathcal{B}x - \mathcal{B}y\|^2$, với mọi $x, y \in \mathcal{H}$.

Mệnh đề 1.6 ([55] - Bổ đề 1) Cho $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử tuyến tính, tự liên hợp và compact. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:

- (i) Tồn tại một hằng số $\beta > 0$ sao cho với mọi $x \in \mathcal{H}$, ta có $\langle \mathcal{B}x, x \rangle \geq \beta\|\mathcal{B}x\|^2$.
- (ii) Với mọi $x \in \mathcal{H}$, ta có $\langle \mathcal{B}x, x \rangle \geq 0$.
- (iii) Tất cả các giá trị riêng của $\mathcal{B}$ đều không âm.

Mệnh đề 1.7 (Brezis [21]) Nếu $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đa trị đơn điệu cực đại và $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử đơn trị đơn điệu, liên tục Lipschitz, thì $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ là toán tử đa trị đơn điệu cực đại.

Mệnh đề 1.8 ([15]) Nếu $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử đơn điệu và hemi-liên tục (hemi-liên tục là $\lim_{\alpha \downarrow 0} \langle z, \mathcal{B}(x + \alpha y) \rangle = \langle z, \mathcal{B}x \rangle$ với mọi $x, y, z \in \mathcal{H}$), thì $\mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu cực đại.

Hệ quả 1.7 Nếu $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là toán tử liên tục, đơn điệu; thì $\mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu cực đại.

Mệnh đề 1.9 dưới đây cho biết mối liên hệ giữa tập các không điểm của VInP có cấu trúc tổng và tập điểm bất động của toán tử. Nhờ mối quan hệ này, bài toán tìm không điểm của tổng hai toán tử $(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ có thể được đưa về FPP của một toán tử đơn giản hơn $\mathcal{T}_{\lambda} = \mathcal{J}_{\lambda\mathcal{A}}(\mathcal{I} - \lambda\mathcal{B})$. Khi đó, ta có thể sử dụng các phương pháp lập điểm bất động đã biết, như các thuật toán chiếu (projection algorithms), PPA, các phương pháp ánh xạ không giãn (non-expansive mapping methods), để tìm không điểm của VInP có cấu trúc tổng.

Mệnh đề 1.9 (Takahashi (2000) [41]) Cho $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ là một toán tử đa trị đơn điệu cực đại, $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử đơn trị. Khi đó, $x \in \text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ khi và chỉ khi $x \in \text{Fix}(\mathcal{T}_{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, trong đó, $\text{Fix}(\mathcal{T}_{\lambda})$ là tập các điểm bất động của toán tử $\mathcal{T}_{\lambda}$.

1.6 Phương pháp chỉnh lập song song giải hệ các phương trình đặt không chỉnh

Tính toán song song là một hình thức tính toán hiệu năng cao (*High-Performance Computing*), trong đó, một bài toán lớn được chia thành nhiều bài toán nhỏ độc lập để có thể xử lý đồng thời trên nhiều đơn vị xử lý (*processors*) khác nhau, nhằm tối ưu hóa hiệu suất tính toán.

Để đạt được hiệu năng cao, vượt xa khả năng tính toán trên một máy tính đơn lẻ, tính toán song song cần hạ tầng là nền tảng vật lý hoặc môi trường ảo hóa có quy mô lớn (như siêu máy tính, cụm máy tính), nơi các tác vụ được thực thi song song. Sự khác biệt giữa tính toán song song và tính toán tuần tự chủ yếu nằm ở cách các đơn vị xử lý được kết nối và đồng bộ.

Bên cạnh hạ tầng song song, các thuật toán song song cần được phát triển để phù hợp với hạ tầng này. Các thuật toán tuần tự truyền thống thường được thiết kế hoạt động tuần tự, phụ thuộc vào nhau, không phù hợp với những kiến trúc phân cứng có nhiều đơn vị xử lý.

Xét hệ phương trình toán tử

$$\mathcal{A}_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.10)$$

trong đó, $\mathcal{A}_i : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \dots, N$, là các toán tử có thể phi tuyến đã biết, xác định trên toàn không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$; $x \in \mathcal{H}$ là ẩn cần tìm.

Bài toán (1.10) là bài toán chấp nhận lỗi (*Convex Feasibility Problem*), là bài toán tìm các điểm nằm trong tập giao điểm của một họ hữu hạn các tập lồi, đóng C_i , $i = 1, 2, \dots, N$, trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Bài toán này có cấu trúc đơn giản, nhưng lại xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán ứng dụng, như lý thuyết tối ưu hóa, tái tạo tín hiệu và hình ảnh, lý thuyết trò chơi, khoa học dữ liệu và học máy. Tuy nhiên, đây nói chung là bài toán đặt không chỉnh và khó giải. Để giải bài toán này, ta thường sử dụng các phương pháp hiệu chỉnh để đưa về bài toán đặt chỉnh dễ giải hơn. Vì vậy, cùng với bài toán (1.10), ta xét bài toán hiệu chỉnh

$$\mathcal{A}_i(x) + \alpha_n x = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.11)$$

trong đó, α_n là các tham số hiệu chỉnh.

Năm 2009, khi nghiên cứu các phương pháp song song giải gần đúng bài toán (1.10), P.K. Anh và C.V. Chung đã phát triển các thuật toán song song dựa trên ý tưởng hiệu chỉnh hệ phương trình phi tuyến liên quan đến toán tử đơn điệu và sử dụng các kỹ thuật phân rã song song, vốn được dùng để giải các bài toán elliptic phi tuyến [8]. Cụ thể, họ đã đề xuất hai phương pháp mới là phương pháp chỉnh lặp ẩn song song (PIRM) và phương pháp chỉnh lặp hiện song song (PEIRM) để tìm nghiệm gần đúng của bài toán hiệu chỉnh (1.11), nghiệm của bài toán này hội tụ mạnh đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán (1.10).

Định lý 1.24 dưới đây là kết quả từ phương pháp chỉnh lặp ẩn song song giải gần đúng hệ phương trình (1.10). Trên mỗi bước lặp, thuật toán tìm nghiệm xấp xỉ của các phương trình hiệu chỉnh đặt chỉnh (1.11) bằng các quá trình được thực hiện song song.

Định lý 1.24 ([8] - Định lý 2.1) Cho (α_n) và (γ_n) là hai dãy số nguyên dương thỏa mãn các điều kiện:

$$(C1) \quad \alpha_n \rightarrow 0, \gamma_n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$$(C2) \quad \frac{\gamma_n |\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_n^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$$(C3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = +\infty.$$

Giả sử nghiệm xấp xỉ thứ n là x_n đã biết, còn x_{n+1} được xác định từ hệ thức

$$\begin{cases} \mathcal{A}_i(x_n^i) + \left(\frac{\alpha_n}{N} + \gamma_n\right) x_n^i = \gamma_n x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ x_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_n^i, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$(1.13)$$

khi đó, quá trình chỉnh lặp song song hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $x^\dagger$ của hệ (1.10).

Mỗi phương trình hiệu chỉnh (1.12) có thể được quy về bài toán tìm điểm bất động tương đương $x = T_n^{(i)}(x)$, trong đó, toán tử $T_n^{(i)}(x) := x_n - \frac{1}{\gamma_n} [\mathcal{A}_i(x) + \frac{\alpha_n}{N} x]$ là một phép co, cụ thể là $\|T_n^{(i)}(x) - T_n^{(i)}(y)\| \leq \frac{Nc + \alpha_n}{N\gamma_n} \|x - y\|$, với $\frac{Nc + \alpha_n}{N\gamma_n} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Khi đó, quá trình lặp

$$\begin{cases} x_{n,i}^0 := x_n \\ x_{n,i}^{k+1} = x_n - \frac{1}{\gamma_n} \left[\mathcal{A}_i(x_{n,i}^k) + \frac{\alpha_n}{N} x_{n,i}^k \right], \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (1.14)$$

hội tụ về nghiệm x_n^i của phương trình tương ứng trong hệ (1.12) khi $k \rightarrow +\infty$.

Thực hiện m lần lặp theo quá trình (1.14) với $k = 0, 1, \dots, m-1$, ta nhận được phương trình $x_{n,i}^m = x_n - \frac{1}{\gamma_n} \left[\mathcal{A}_i(x_{n,i}^{m-1}) + \frac{\alpha_n}{N} x_{n,i}^{m-1} \right]$. Đặt

$$x_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{n,i}^m = x_n - \frac{1}{N\gamma_n} \sum_{i=1}^N \left[\mathcal{A}_i(x_{n,i}^{m-1}) + \frac{\alpha_n}{N} x_{n,i}^{m-1} \right],$$

ta có một quá trình lặp hiện hai cấp. Quá trình chỉnh lặp hiện này có thể được thực hiện song song và ta nhận được một dãy lặp hội tụ về nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của bài toán (1.10).

Định lý 1.25 dưới đây là kết quả cho trường hợp quá trình chỉnh lặp hiện song song.

Định lý 1.25 ([8] - Định lý 2.2) *Giả sử các dãy (α_n) và (γ_n) thỏa mãn các điều kiện trong Định lý 1.24, và thỏa mãn thêm điều kiện:*

$$(C4) \quad \frac{Nc + \alpha_n}{\gamma_n} \leq q \leq 1, n \geq 0.$$

Hơn nữa, giả sử $\alpha_n \gamma_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow \infty$. Khi đó, quá trình chỉnh lặp song song

$$\begin{cases} z_{n,i}^{k+1} := z_n - \frac{1}{\gamma_n} \left[\mathcal{A}_i(z_{n,i}^k) + \frac{\alpha_n}{N} z_{n,i}^k \right], & z_{n,i}^0 := z_n \quad k = 0, 1, \dots, m-1, i = 1, 2, \dots, N \\ z_{n+1} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_{n,i}^m & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

hội tụ về nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của hệ (1.10).

1.7 Phương pháp chỉnh lặp giải bài toán bao hàm thức biến phân

Xét bài toán bao hàm thức biến phân (VInP) có cấu trúc tổng trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$:

$$\text{Tìm } u^* \in \mathcal{H} \text{ thỏa mãn } 0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})u^*, \quad (1.15)$$

trong đó, $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ là một toán tử đa trị đơn điệu cực đại, $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử đơn trị đơn điệu và liên tục Lipschitz. Ký hiệu $\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{-1}(0)$ là tập nghiệm của bài toán (1.15). Ta giả thiết bài toán là tương thích, tức là tập nghiệm $\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ khác rỗng.

Để giải bài toán (1.15) và đồng thời chọn một nghiệm đặc biệt của nó, ta đi đến việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) hai cấp (BVIP) sau:

$$\text{Tìm } u^* \in \text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \text{ thỏa mãn } \langle \mathcal{F}u^*, u - u^* \rangle \geq 0, \forall u \in \text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B}), \quad (1.16)$$

trong đó, $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz.

Với các điều kiện của bài toán BVIP (1.16), và từ giả thiết tập nghiệm $\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ là một tập lồi, đóng, khác rỗng, bài toán (1.16) có nghiệm duy nhất. Trong trường hợp đặc biệt, khi $\mathcal{F} = \mathcal{I} - g$, trong đó, $\mathcal{I}$ là toán tử đồng nhất và g là một điểm cho trước trong $\mathcal{H}$, thì nghiệm duy nhất của bài toán (1.16) chính là hình chiếu metric của điểm g lên tập $\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, tức là $u^* = P_{\text{Zero}(\mathcal{A} + \mathcal{B})}(g)$. Hơn nữa, nếu cho $g = 0$, thì $u^\dagger := u^*$ là nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của VInP (1.15).

Các bài toán tổng quát trên thường là bài toán đặt không chính, hoặc rất phức tạp để chứng minh sự tồn tại nghiệm và tính duy nhất nghiệm của nó. Tuy nhiên, khi chuyển sang bài toán hiệu chỉnh, ta có thể áp dụng nhiều công cụ hiệu quả đã có từ lý thuyết toán tử đơn điệu để giải. Cụ thể, với điều kiện toán tử là đơn điệu hoặc đơn điệu cực đại, bài toán hiệu chỉnh thường có nghiệm duy nhất. Hơn nữa, bài toán bao hàm thức biến phân hiệu chỉnh (RVInP) có cấu trúc rất thuận lợi để thiết kế thuật toán lặp. Đã có nhiều thuật toán lặp hiệu quả và hội tụ tốt được phát triển để giải bài toán dạng này (ví dụ như PPA, hoặc các biến thể của nó). Ngoài ra, lý thuyết toán tử đơn điệu đã được phát triển mạnh, là cơ sở vững chắc để nghiên cứu VInP. Khi chuyển sang bài toán hiệu chỉnh, ta có thể khai thác tối đa các tính chất của toán tử đơn điệu, đặc biệt là tính chất đơn điệu cực đại, vốn là một điều kiện cấu trúc nền tảng để chứng minh sự tồn tại nghiệm, tính duy nhất nghiệm và sự hội tụ của nhiều thuật toán.

Vì vậy, cùng với VInP (1.15), ta xét RVInP sau:

$$\text{Tìm } u^* \in \mathcal{H} \text{ thỏa mãn } 0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})u^* + \alpha \mathcal{F}u^*, \quad (1.17)$$

với tham số hiệu chỉnh $\alpha > 0$. Nghiệm của bài toán RVInP (1.17) tồn tại và duy nhất. Ta ký hiệu nghiệm này là u_α .

Mệnh đề 1.10 dưới đây cho biết các tính chất nghiệm của RVInP (1.17), và mối liên hệ giữa nghiệm của RVInP (1.17) với nghiệm của BVIP (1.16).

Mệnh đề 1.10 ([41]) (i) Dãy (u_α) bị chặn.

(ii) Tồn tại một số $M > 0$ sao cho, với mọi $\alpha > 0$ và $\beta > 0$, ta có $\|u_\alpha - u_\beta\| \leq \frac{|\alpha - \beta|}{\alpha} M$.

(iii) Nghiệm của $RVInP$ (1.17) hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của $BVIP$ (1.16). Cụ thể, $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \|u_\alpha - u^\dagger\| \rightarrow 0$, và $u^\dagger$ là nghiệm duy nhất của bài toán $BVIP$ (1.16).

1.7.1 Phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi và chỉnh lặp tiến-lùi-tiến giải gần đúng bài toán bao hàm thức biến phân

Phần này trình bày hai phương pháp chỉnh lặp có thể được sử dụng để giải gần đúng $BVIP$ (1.16) trong trường hợp biết trước hằng số Lipschitz L_B của toán tử $\mathcal{B}$, hằng số Lipschitz $L_{\mathcal{F}}$ của toán tử $\mathcal{F}$ và mô đun đơn điệu mạnh γ của toán tử $\mathcal{F}$.

Định lý 1.26 dưới đây cho thấy, với các điều kiện về độ dài bước λ_n và các tham số hiệu chỉnh α_n mà định lý đưa ra, thì phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (FBSM) hội tụ.

Định lý 1.26 ([41] - Định lý 1) Cho $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu cực đại, $\mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu và L_B -liên tục Lipschitz, $\mathcal{F}$ là toán tử γ -đơn điệu mạnh và $L_{\mathcal{F}}$ -liên tục Lipschitz. Cho (λ_n) và (α_n) là các dãy số không âm thỏa mãn các điều kiện:

$$(C1) \quad 0 < \lambda_n < \frac{2(\gamma-l)\alpha_n}{(L_B+L_{\mathcal{F}}\alpha_n)^2}, \text{ trong đó, } 0 < l < \min\{\gamma, 1\};$$

$$(C2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0;$$

$$(C3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n = +\infty;$$

$$(C4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_n - \lambda_{n-1}| + |\lambda_n \alpha_n - \lambda_{n-1} \alpha_{n-1}|}{\lambda_n^2 \alpha_n^2} = 0.$$

Khi đó, quá trình

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{H} \\ u_{n+1} = J_{\lambda_n \mathcal{A}}(u_n - \lambda_n(\mathcal{B}u_n + \alpha_n \mathcal{F}u_n)) \end{cases}$$

hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất $u^\dagger$ của bài toán $BVIP$ (1.16).

Thuật toán trong Định lý 1.26 có cấu trúc đơn giản, tuy nhiên, độ dài bước λ_n của thuật toán phụ thuộc vào các tham số hiệu chỉnh α_n , điều đó hạn chế việc lựa chọn các tham số này. Hơn

nữa, khi độ dài bước λ_n giảm dần, thuật toán có thể hội tụ chậm. Để khắc phục vấn đề này, ta có thể sử dụng phương pháp chỉnh lặp được trình bày trong Định lý 1.27 dưới đây, trong đó các tham số α_n và λ_n được chọn một cách độc lập, hơn nữa, độ dài bước λ_n được tách biệt khỏi giá trị 0, và chỉ phụ thuộc vào hằng số Lipschitz $L_{\mathcal{B}}$ của toán tử $\mathcal{B}$. Các hằng số Lipschitz $L_{\mathcal{F}}$ và môđun γ đơn điệu mạnh của toán tử $\mathcal{F}$ không nhất thiết phải được biết. So sánh với thuật toán trong Định lý 1.26, thuật toán này cần thêm một lần tính giá trị $\mathcal{B}$ ở mỗi bước lặp.

Định lý 1.27 dưới đây cho thấy, với một số điều kiện đặt lên độ dài bước λ_n và tham số hiệu chỉnh α_n , thì phương pháp chỉnh lặp tiên-lùi-tiến (FBFSM) hội tụ.

Định lý 1.27 ([41] - Định lý 2) *Cho $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu cực đại, $\mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu và $L_{\mathcal{B}}$ -liên tục Lipschitz, $\mathcal{F}$ là toán tử γ -đơn điệu mạnh và $L_{\mathcal{F}}$ -liên tục Lipschitz. Cho (λ_n) và (α_n) là các dãy số không âm thỏa mãn các điều kiện:*

$$(C5) \quad \{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset \left(0, \frac{1}{L_{\mathcal{B}}}\right),$$

$$(C6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

$$(C7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty,$$

$$(C8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \alpha_n^{-2} = 0.$$

Khi đó, dãy (u_n) của quá trình

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{H} \\ v_n = J_{\lambda_n \mathcal{A}}(u_n - \lambda_n(\mathcal{B}u_n + \alpha_n \mathcal{F}u_n)) \\ u_{n+1} = v_n + \lambda_n(\mathcal{B}u_n - \mathcal{B}v_n) \end{cases}$$

hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất $u^\dagger$ của bài toán BVIP (1.16).

Nhận xét 1.14 Gần đây, P.K. Anh và T.N. Hải đã sử dụng phương pháp hệ động lực để phát triển các FBSM và FBFSM với các tham số nói lòng cho phép giải VInP đơn điệu có cấu trúc tổng (1.15) [9, 10].

Chương 2

Biến đổi Hartley và tích chập liên kết với biến đổi Hartley

Tích chập và phép biến đổi tích phân có mối quan hệ mật thiết, được thể hiện qua các định lý tích chập. Các định lý này cho thấy sự tương quan sâu sắc giữa phép toán tích chập trong miền ban đầu (miền thời gian/không gian) và phép nhân trong miền biến đổi (miền tần số). Định lý tích chập cung cấp một công cụ để cải thiện hiệu suất tính toán tích chập. Thay vì tính toán tích chập trực tiếp, ta chuyển các hàm sang một miền không gian khác qua phép biến đổi tích phân, nơi mối quan hệ giữa các hàm có thể đơn giản hơn để tính toán. Sau đó, áp dụng phép biến đổi tích phân ngược để nhận được phép toán tích chập ban đầu.

Chương này của luận án nghiên cứu về cơ sở lý thuyết của HT, nhằm hệ thống lại và phát triển các tính chất toán tử, đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án tập trung nghiên cứu phát triển một số lớp tích chập mới liên kết với HT và HT hữu hạn, các tính chất toán học quan trọng của chúng, như các bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Trên cơ sở các lớp tích chập liên kết với HT, luận án nghiên cứu xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, nhằm nghiên cứu sâu sắc hơn về không gian hàm $L^1(\mathbb{R}^n)$ và các tích chập trong $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Nội dung của chương này được viết dựa trên các công trình [CT1, CT2] trong danh mục các công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án và các tài liệu [2, 83, 96].

2.1 Biến đổi Hartley hữu hạn

Biến đổi Fourier hữu hạn là một công cụ toán học đóng vai trò nền tảng trong giải tích hiện đại và kỹ thuật. Nó cho thấy mọi hàm số tuần hoàn (hoặc hàm số trên một đoạn hữu hạn) đều có thể được biểu diễn dưới dạng tổng của các hàm lượng giác cơ bản, từ đó cho phép phân tích một tín hiệu phức tạp thành các thành phần đơn giản hơn. Biến đổi Fourier hữu hạn còn giúp phát triển không gian Hilbert, đặt nền móng cho giải tích hàm. Chuỗi Fourier đã có nhiều ứng dụng trong giải các phương trình đạo hàm riêng, xử lý tín hiệu và nén dữ liệu. Xem [62, 63, 96]. Biến đổi Hartley hữu hạn có những đặc điểm tương đồng như biến đổi Fourier hữu hạn. Vì vậy, việc nghiên cứu về cơ sở lý thuyết và ứng dụng của biến đổi Hartley hữu hạn là cần thiết.

2.1.1 Biến đổi Fourier-cosine và Fourier-sine hữu hạn

Định nghĩa 2.1 Cho f là một hàm khả tích Lebesgue trên $[-\pi, \pi]$. Biến đổi Fourier-cosine và Fourier-sine của hàm f được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}\hat{f}_c(n) &:= \mathcal{F}_c[f(x)](n) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \hat{f}_s(n) &:= \mathcal{F}_s[f(x)](n) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Chuỗi Fourier của hàm f trên $[-\pi, \pi]$ có thể được biểu diễn qua các biến đổi Fourier-cosine và Fourier-sine theo công thức

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{\hat{f}_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{f}_c(n) \cos(nx) + \hat{f}_s(n) \sin(nx) \right]. \quad (2.1)$$

Các hệ số $\hat{f}_c(n)$, $\hat{f}_s(n)$ được gọi là hệ số Fourier thứ n của hàm f . Chuỗi (2.1) có thể được viết lại dưới dạng

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{\hat{f}_c(0) + \hat{f}_s(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{f}_c(n) + \hat{f}_s(n)}{2} \text{cas}(nx) + \frac{\hat{f}_c(n) - \hat{f}_s(n)}{2} \text{cas}(-nx) \right\}.$$

Biểu diễn này cho ý tưởng về định nghĩa HT trên miền hữu hạn (còn gọi là HT hữu hạn).

2.1.2 Biến đổi Hartley hữu hạn

Định nghĩa 2.2 (Biến đổi Hartley hữu hạn) (i) Cho f là một hàm khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Biến đổi Hartley hữu hạn của hàm f được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(n) &:= \mathcal{H}_1[f(x)](n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cas}(nx) dx, \\ \hat{f}_2(n) &:= \mathcal{H}_2[f(x)](n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cas}(-nx) dx,\end{aligned}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Tổng

$$\mathcal{H}_f(x) = \hat{f}_1(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{f}_1(n) \operatorname{cas}(nx) + \hat{f}_2(n) \operatorname{cas}(-nx)] \quad (2.2)$$

được gọi là chuỗi Hartley của hàm f trên miền $[-\pi, \pi]$. Các hệ số $\hat{f}_1(n), \hat{f}_2(n)$ được gọi là hệ số Hartley thứ n của các phép biến đổi $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ tương ứng.

Từ sự hội tụ của chuỗi (2.1) cho thấy, nếu hàm f thuộc $L^2[-\pi, \pi]$, thì chuỗi về bên phải của (2.2) xác định một hàm trong không gian $L^2[-\pi, \pi]$. Hai dạng của phép HT có mối quan hệ được thể hiện qua các hệ thức

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(-n) &= \hat{f}_2(n), \quad \mathcal{H}_1[f^-(x)](n) = \mathcal{H}_2[f(x)](n), \\ \hat{f}_1(n) &= \frac{1}{2}[\hat{f}_c(n) + \hat{f}_s(n)], \quad \hat{f}_2(n) = \frac{1}{2}[\hat{f}_c(n) - \hat{f}_s(n)],\end{aligned}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}_0$.

Định lý 2.1 ([11]) (i) Với mọi $m, n \in \mathbb{N}_0$, ta có các đồng nhất thức sau:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{cas} m(x+u) \operatorname{cas}(nu) du &= \delta_{mn} \cos nx, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{cas} m(x-u) \operatorname{cas}(nu) du &= \delta_{mn} \sin nx,\end{aligned}$$

trong đó, δ_{mn} là ký hiệu delta Kronecker.

(ii) Tập các hàm

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{cas}(nx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{cas}(-nx) : n \geq 1 \right\} \quad (2.3)$$

tạo thành cơ sở trực chuẩn của không gian Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$. Hơn nữa, chuỗi Hartley

$$\mathcal{H}_f(x) = \hat{f}_1(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{f}_1(n) \text{cas}(nx) + \hat{f}_2(n) \text{cas}(-nx) \right] \quad (2.4)$$

hội tụ theo chuẩn L^p đến một hàm thuộc không gian $L^p[-\pi, \pi]$ nếu hàm f thuộc không gian $L^p[-\pi, \pi]$, với $1 < p < \infty$.

2.1.3 Tích chập liên kết với biến đổi Hartley hữu hạn

Tích chập rời rạc liên kết với phép FT đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết chuỗi Fourier và giải tích Fourier cho hàm tuần hoàn. Loại tích chập này đã có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật cả về mặt lý thuyết và ứng dụng. Tích chập rời rạc là công cụ chính để mô hình hóa các hệ LTI, chứng minh tính hội tụ của chuỗi Fourier, phân tích phổ và giải phương trình tích phân. Biến đổi Hartley hữu hạn có nhiều tính chất tương đồng như FT cho hàm tuần hoàn. Điều này gợi mở những tiềm năng ứng dụng của tích chập liên kết với phép HT hữu hạn, như đối với tích chập tuần hoàn của FT.

Bổ đề 2.1 dưới đây được sử dụng để xây dựng các phép tích chập liên kết với HT.

Bổ đề 2.1 Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ta có các đồng nhất thức sau:

$$2 \text{cas}(a) \text{cas}(b) = \text{cas}(a+b) + \text{cas}(a-b) + \text{cas}(-a+b) - \text{cas}(-a-b), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} 2 \text{cas}(a) \text{cas}(b) \text{cas}(c) &= \text{cas}(-a+b+c) + \text{cas}(a-b+c) \\ &\quad + \text{cas}(a+b-c) - \text{cas}(-a-b-c). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Bổ đề 2.2 Cho f là hàm tuần hoàn với chu kỳ T hữu hạn và khả tích Lebesgue trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T . Khi đó, hàm f cũng khả tích Lebesgue trên bất kỳ đoạn nào khác có độ dài bằng chu kỳ T . Hơn nữa, tích phân Lebesgue của hàm f trên mọi đoạn có độ dài bằng chu kỳ T đều bằng nhau.

Định lý 2.2 (Định lý tích chập cho $\mathcal{H}_1$) Cho f là hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ 2π và $h \in \mathbb{R}$ cố định. Giả sử các hàm f và g khả tích Lebesgue trên đoạn $[-\pi, \pi]$. Khi đó, mỗi phép biến đổi tích phân dưới đây xác định một tích chập liên kết với biến đổi Hartley hữu hạn $\mathcal{H}_1$. Hơn nữa, tương ứng với mỗi tích chập là các bất đẳng thức chuẩn và đẳng thức nhân tử hóa được thiết lập.

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-u+h) + f(-x+u+h) + f(x+u-h) \\ &\quad - f(-x-u-h)]g(u)du, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g\right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_1(n) \hat{g}_1(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+u+h) + f(-x-u+h) + f(x-u-h) \\ &\quad - f(-x+u-h)]g(u)du, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g\right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g\right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_1(n) \hat{g}_2(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(-x+u-h) + f(x-u-h) + f(-x-u+h) \\ &\quad + f(x+u+h)]g(u)du, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g\right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_2(n) \hat{g}_1(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(-x-u-h) + f(x+u-h) + f(-x+u+h) \\ &\quad - f(x-u+h)]g(u)du, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*} g\right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*} g\right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_2(n) \hat{g}_2(n);$$

trong đó, $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}_0$.

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp tích chập (2.7), các trường hợp khác được chứng minh tương tự.

Trước tiên, ta chứng minh bất đẳng thức chuẩn. Cho $u, h \in \mathbb{R}$ cố định. Thực hiện các phép đổi biến tích phân và sử dụng Bổ đề 2.2, ta có

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\pm x \pm u \pm h)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f\|_1.$$

Do f, g tuần hoàn với chu kỳ 2π và khả tích Lesbesgue trên đoạn $[-\pi, \pi]$, bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân và sử dụng Bổ đề 2.2, ta có

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g \right)(x) \right| dx \\ & \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ |f(x - u + h)| + |f(-x + u + h)| + |f(x + u - h)| \right. \\ & \quad \left. + |f(-x - u - h)| \right\} |g(u)| du dx \\ & = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du |g(u)| \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ |f(x - u + h)| + |f(-x + u + h)| \right. \\ & \quad \left. + |f(x + u - h)| + |f(-x - u - h)| \right\} dx \\ & = \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta chứng minh đẳng thức nhân tử hóa. Sử dụng Bổ đề 2.1, thực hiện đổi biến $x := \pm h \pm u \pm \nu$ trong các tích phân và sử dụng Bổ đề 2.2, ta có

$$\begin{aligned} & \text{cas}(hn) (\mathcal{H}_1 f)(n) (\mathcal{H}_1 g)(n) \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{cas}(hn) \text{cas}(nu) \text{cas}(n\nu) f(u) g(\nu) du d\nu \\ & = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\text{cas}(n(-h + u + \nu)) + \text{cas}(n(h - u + \nu)) + \text{cas}(n(h + u - \nu)) \right. \\ & \quad \left. - \text{cas}(n(-h - u - \nu)) \right] f(u) g(\nu) du d\nu \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \text{cas}(nx) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x - \nu + h) + f(-x + \nu + h) \right. \\ & \quad \left. + f(x + \nu - h) - f(-x - \nu - h)] g(\nu) d\nu \right) \\ & = \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g \right)(n). \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Tương tự, ta có kết quả cho biến đổi Hartley $\mathcal{H}_2$.

Định lý 2.3 (Định lý tích chập cho $\mathcal{H}_2$) Cho f là hàm xác định trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ 2π và $h \in \mathbb{R}$ cố định. Giả sử các hàm f và g khả tích Lebesgue trên $[-\pi, \pi]$. Khi đó, mỗi phép biến đổi tích phân dưới đây xác định một tích chập liên kết với biến đổi Hartley hữu hạn $\mathcal{H}_2$. Hơn nữa, tương ứng với mỗi tích chập là các bất đẳng thức chuẩn và đẳng thức nhân tử hóa được thiết lập.

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(-x - u + h) + f(x + u + h) + f(-x + u - h) \\ &\quad - f(x - u - h)] g(u) du, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_2 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_2(n) \hat{g}_2(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(-x + u + h) + f(x - u + h) + f(-x - u - h) \\ &\quad - f(x + u - h)] g(u) du, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_2 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_2(n) \hat{g}_1(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x + u - h) + f(-x - u - h) + f(x - u + h) \\ &\quad - f(-x + u + h)] g(u) du, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_2 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_1(n) \hat{g}_2(n);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g\right)(x) &:= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x - u - h) + f(-x + u - h) + f(x + u + h) \\ &\quad - f(-x - u + h)] g(u) du, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right\|_1 \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_2 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right)(n) = \text{cas}(hn) \hat{f}_1(n) \hat{g}_1(n);$$

trong đó, $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{N}_0$.

Mệnh đề 2.1 Cho f là hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π và liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$, hàm $g \in L^1[-\pi, \pi]$ và $h \in \mathbb{R}$ cố định. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u+h)g(u)du\right)(n) &= \text{cas}(hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) \\ &\quad - \text{cas}(hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) + \text{cas}(-hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n) + \text{cas}(-hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u+h)g(u)du\right)(n) &= \text{cas}(-hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) \\ &\quad - \text{cas}(-hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) + \text{cas}(hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n) + \text{cas}(hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u-h)g(u)du\right)(n) &= \text{cas}(-hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) \\ &\quad - \text{cas}(-hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) + \text{cas}(hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n) + \text{cas}(hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u-h)g(u)du\right)(n) &= \text{cas}(hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) \\ &\quad - \text{cas}(hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) + \text{cas}(-hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n) + \text{cas}(-hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u+h)g(u)du\right)(n) &= \text{cas}(hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n) \\ &\quad - \text{cas}(hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n) + \text{cas}(-hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) + \text{cas}(-hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u+h)g(u)du\right)(n) &= \text{cas}(-hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n) \\ &\quad - \text{cas}(-hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n) + \text{cas}(hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) + \text{cas}(hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u-h)g(u)du\right)(n) &= \text{cas}(-hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n) \\ &\quad - \text{cas}(-hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n) + \text{cas}(hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) + \text{cas}(hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u-h)g(u)du\right)(n) &= \text{cas}(hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n) \\ &\quad - \text{cas}(hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n) + \text{cas}(-hn)\hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) + \text{cas}(-hn)\hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Chứng minh. Từ Định lý 2.2 và Định lý 2.3, ta nhận được các đồng nhất thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u+h)g(u)du \\ = \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g\right)(x) - \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g\right)(x) + \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g\right)(x) + \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g\right)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u-h)g(u)du \\ = \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g\right)(x) - \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g\right)(x) + \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g\right)(x) + \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g\right)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u+h)g(u)du \\ = \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g\right)(x) - \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g\right)(x) + \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g\right)(x) + \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g\right)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u-h)g(u)du \\ = \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g\right)(x) - \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g\right)(x) + \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g\right)(x) + \left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} g\right)(x). \end{aligned}$$

Tác động $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ vào hai phía của các đồng nhất thức trên, ta nhận được kết quả mong muốn.

Định lý được chứng minh. $\square$

Từ Mệnh đề 2.1, cho $h = 0$, ta nhận được kết quả dưới đây.

Hệ quả 2.1 Cho f là hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π và liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$, hàm $g \in L^1[-\pi, \pi]$ và $h \in \mathbb{R}$ cố định. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, ta có

$$\mathcal{H}_1\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du\right)(n) = \hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) - \hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) + \hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n) + \hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n), \quad (2.23)$$

$$\mathcal{H}_2\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)g(u)du\right)(n) = \hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) - \hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) + \hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n) + \hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n), \quad (2.24)$$

$$\mathcal{H}_1\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)g(u)du\right)(n) = \hat{f}_1(n)\hat{g}_1(n) + \hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) - \hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n) + \hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n), \quad (2.25)$$

$$\mathcal{H}_2\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)g(u)du\right)(n) = \hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) + \hat{f}_2(n)\hat{g}_2(n) - \hat{f}_1(n)\hat{g}_2(n) + \hat{f}_2(n)\hat{g}_1(n). \quad (2.26)$$

2.2 Biến đổi Hartley

Định nghĩa 2.3 (Biến đổi Hartley) Các biến đổi Hartley (HT) và biến đổi Hartley ngược (IHT) của một hàm f xác định trên $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa theo các công thức

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1[f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}) &:= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \operatorname{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{H}_1^{-1}[f(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) &:= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \\ \mathcal{H}_2[f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}) &:= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \operatorname{cas}(-\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{H}_2^{-1}[f(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) &:= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{cas}(-\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\end{aligned}$$

khi tích phân về bên phải tồn tại.

Để đơn giản trong biểu diễn công thức, ta dùng những ký hiệu khác nhau để biểu diễn HT. Cụ thể, ta sử dụng các ký hiệu như sau:

$$\begin{aligned}H_1(\boldsymbol{\omega}) &:= \hat{f}_1(\boldsymbol{\omega}) := (\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) := \mathcal{H}_1[f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \\ H_2(\boldsymbol{\omega}) &:= \hat{f}_2(\boldsymbol{\omega}) := (\mathcal{H}_2 f)(\boldsymbol{\omega}) := \mathcal{H}_2[f(\mathbf{x})](\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Ta dùng ký hiệu $\mathcal{H}$ (H) đại diện cho cả $\mathcal{H}_1$ (H_1) và $\mathcal{H}_2$ (H_2) trong một số trường hợp kết quả đúng cho cả hai định nghĩa của HT.

Nhận xét 2.1 (Tính hợp lý của các định nghĩa HT) (i) Định nghĩa

$$(W\varphi)(\mathbf{x}) := \varphi(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

là toán tử phản xạ. Khi đó, hai biến đổi $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ có mối quan hệ như sau:

$$\mathcal{H}_2 = W\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1W, \quad \mathcal{H}_1 = W\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2W.$$

Như vậy, mỗi phép biến đổi $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ có tính chất giao hoán với phản xạ. Bởi vậy, ta cũng gọi phép biến đổi $\mathcal{H}_2$ là HT.

(ii) Biến đổi Hartley là một biến đổi tích phân đối xứng (Hermite) trong các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, hai công thức định nghĩa HT có mối quan hệ như sau:

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}_1 f)(\omega) &= (\mathcal{H}_2 f)(-\omega), & (\mathcal{H}_1 f)(\omega) &= (\mathcal{H}_2 f^-)(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^n; \\(\mathcal{H}_2 f)(\omega) &= (\mathcal{H}_1 f)(-\omega), & (\mathcal{H}_2 f)(\omega) &= (\mathcal{H}_1 f^-)(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

(iii) Biến đổi Hartley có quan hệ gần gũi với FT. Cụ thể, nhân của HT có thể được biểu diễn qua nhân của FT, và ngược lại:

$$\text{cas}(\omega \mathbf{x}) = \frac{1-i}{2} e^{i\omega \mathbf{x}} + \frac{1+i}{2} e^{-i\omega \mathbf{x}}, \quad \omega, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\text{cas}(-\omega \mathbf{x}) &= \frac{1+i}{2} e^{i\omega \mathbf{x}} + \frac{1-i}{2} e^{-i\omega \mathbf{x}}, \quad \omega, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \\e^{-i\omega \mathbf{x}} &= \frac{\text{cas}(\omega \mathbf{x}) + \text{cas}(-\omega \mathbf{x})}{2} - i \frac{\text{cas}(\omega \mathbf{x}) - \text{cas}(-\omega \mathbf{x})}{2}, \quad \omega, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.\end{aligned} \quad (2.28)$$

Hơn nữa, HT cũng có thể được xác định thông qua FT, và ngược lại:

$$\mathcal{H}_1 f = \text{Re}(\mathcal{F}f) - \text{Im}(\mathcal{F}f) = \frac{1+i}{2} \mathcal{F}f + \frac{1-i}{2} \mathcal{F}^{-1}f, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{H}_2 f = \text{Re}(\mathcal{F}f) + \text{Im}(\mathcal{F}f) = \frac{1+i}{2} \mathcal{F}^{-1}f + \frac{1-i}{2} \mathcal{F}f, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f &= \frac{1}{2} \left\{ [\mathcal{H}_1 f + (\mathcal{H}_1 f)^-] - i[\mathcal{H}_1 f - (\mathcal{H}_1 f)^-] \right\}, \\ \mathcal{F}f &= \frac{1}{2} \left\{ [\mathcal{H}_2 f + (\mathcal{H}_2 f)^-] + i[\mathcal{H}_2 f - (\mathcal{H}_2 f)^-] \right\}.\end{aligned}$$

(iv) Không gian ảnh của HT trên không gian Schwartz là không gian Schwartz. Biến đổi Hartley cũng có thể được định nghĩa trên các không gian hàm $L^p(\mathbb{R}^n)$ với $p \geq 1$, tuy nhiên, hàm ảnh có thể thuộc hoặc không thuộc không gian ban đầu.

Định nghĩa 2.4 Cho hàm f xác định trên $\mathbb{R}^n$ và $\mathcal{H}_i f$, $i = 1, 2$, là HT của f . Định nghĩa

$$\begin{aligned}\hat{f}_{ie}(\omega) &:= (\mathcal{H}_i f)_e(\omega) := \frac{1}{2} [(\mathcal{H}_i f)(\omega) + (\mathcal{H}_i f)(-\omega)], \quad \omega \in \mathbb{R}^n; \\ \hat{f}_{io}(\omega) &:= (\mathcal{H}_i f)_o(\omega) := \frac{1}{2} [(\mathcal{H}_i f)(\omega) - (\mathcal{H}_i f)(-\omega)], \quad \omega \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Các hàm $(\mathcal{H}_i f)_e$ và $(\mathcal{H}_i f)_o$ được gọi là phần chẵn và phần lẻ của HT $\mathcal{H}_i$ của hàm f .

2.2.1 Tính chất của biến đổi Hartley

Tính chất 2.1 (Tuyến tính [2]) Cho $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, ta có

$$\mathcal{H}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{H}f + \beta \mathcal{H}g.$$

Tính chất 2.2 (Dịch chuyển [2]) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ cố định. Ta có

$$\mathcal{H}_1[f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)](\omega) = \cos(\omega \mathbf{x}_0)(\mathcal{H}_1 f)(\omega) + \sin(\omega \mathbf{x}_0)(\mathcal{H}_2 f)(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n; \quad (2.31)$$

$$\mathcal{H}_2[f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)](\omega) = \cos(\omega \mathbf{x}_0)(\mathcal{H}_2 f)(\omega) - \sin(\omega \mathbf{x}_0)(\mathcal{H}_1 f)(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n. \quad (2.32)$$

Chứng minh. Ta chứng minh đẳng thức (2.31), đẳng thức (2.32) được chứng minh tương tự. Ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1[f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)](\omega) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \text{cas}(\omega \mathbf{x}) f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \text{cas} \omega(\mathbf{u} + \mathbf{x}_0) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [\cos(\omega \mathbf{x}_0) \text{cas}(\omega \mathbf{u}) + \sin(\omega \mathbf{x}_0) \text{cas}(\omega \mathbf{u})] f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &= \cos(\omega \mathbf{x}_0)(\mathcal{H}_1 f)(\omega) + \sin(\omega \mathbf{x}_0)(\mathcal{H}_2 f)(\omega), \omega \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Tính chất được chứng minh. □

Tính chất 2.3 (Dịch chuyển ảnh [2]) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$ cố định. Ta có

$$\mathcal{H}_1[f(\mathbf{x})](\omega - \omega_0) = \mathcal{H}_1[\cos(\omega_0 \mathbf{x}) f(\mathbf{x})](\omega) - \mathcal{H}_2[\sin(\omega_0 \mathbf{x}) f(\mathbf{x})](\omega), \omega \in \mathbb{R}^n;$$

$$\mathcal{H}_2[f(\mathbf{x})](\omega - \omega_0) = \mathcal{H}_2[\cos(\omega_0 \mathbf{x}) f(\mathbf{x})](\omega) + \mathcal{H}_1[\sin(\omega_0 \mathbf{x}) f(\mathbf{x})](\omega), \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Tính chất 2.4 (Đồng dạng [2]) Với n -bó α , ký hiệu $\alpha \odot \mathbf{x} := [\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n]$. Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ta có

$$\mathcal{H}[f(\alpha \odot \mathbf{x})](\omega) = \frac{1}{|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n|} (\mathcal{H}f)(\alpha^{-1} \odot \omega), \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Tính chất 2.5 (Liên hợp phức [2]) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ký hiệu $\bar{f}$ là liên hợp phức của f . Ta có

$$(\mathcal{H}\bar{f})(\omega) = \overline{(\mathcal{H}f)(\omega)}, \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Tính chất 2.6 (Xem thêm [2]) Nếu $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì $(\mathcal{H}f)g$ và $(\mathcal{H}g)f$ cũng thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Hơn nữa,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}f)(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}g)(\boldsymbol{\omega})f(\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $\mathcal{H}_1$, trường hợp $\mathcal{H}_2$ được chứng minh tương tự.

Do $|\text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})| = |\cos(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) + \sin(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})| \leq \sqrt{2}$, với mọi $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})f(\boldsymbol{\omega})g(\mathbf{x})|d\boldsymbol{\omega}d\mathbf{x} &\leq \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{\omega})||g(\mathbf{x})|d\boldsymbol{\omega}d\mathbf{x} \\ &= \sqrt{2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{\omega})|d\boldsymbol{\omega} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \right) \\ &= \sqrt{2}\|f\|_1\|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Fubini, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}f)(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})f(\boldsymbol{\omega})g(\mathbf{x})d\boldsymbol{\omega}d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d\boldsymbol{\omega}f(\boldsymbol{\omega}) \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}g)(\boldsymbol{\omega})f(\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Tính chất được chứng minh. □

Tính chất 2.7 (Xem thêm [2]) Nếu dãy hàm $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ hội tụ (theo L^1 -chuẩn) đến hàm f , thì dãy hàm ảnh của HT $\mathcal{H}$ hội tụ đều (hội tụ theo điểm) đến hàm ảnh của nó. Cụ thể, nếu $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_1 = 0$, thì $\mathcal{H}f_k \Rightarrow \mathcal{H}f$ trên $\mathbb{R}^n$, hay $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n} |(\mathcal{H}f_k)(\boldsymbol{\omega}) - (\mathcal{H}f)(\boldsymbol{\omega})| = 0$.

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $\mathcal{H}_1$, trường hợp $\mathcal{H}_2$ được chứng minh tương tự.

Sự hội tụ đều của hai dãy này được suy trực tiếp từ đánh giá sau:

$$\begin{aligned} |(\mathcal{H}_1 f_k)(\boldsymbol{\omega}) - (\mathcal{H}_1 f_m)(\boldsymbol{\omega})| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x})| |\text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &\leq \sqrt{2}\|f_k - f_m\|_1 \rightarrow 0 \quad (k, m \rightarrow \infty), \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Tính chất được chứng minh. □

Tính chất 2.8 ([2]) Nếu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì $\mathcal{H}f$ là hàm liên tục, giới nội và triệt tiêu tại vô cùng.

Định lý 2.4 ([2]) Nếu $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì $\mathcal{H}f$ là hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}^n$.

Tính chất dưới đây thể hiện mối quan hệ giữa hai định nghĩa của HT thông qua công thức đạo hàm. Ta trình bày kết quả cho cả trường hợp một chiều và nhiều chiều.

Tính chất 2.9 ([2]) (i) Cho hàm $f \in L^1(\mathbb{R})$. Nếu $xf(x)$ thuộc $L^1(\mathbb{R})$, thì tồn tại đạo hàm của các hàm ảnh $\mathcal{H}_1 f$ và $\mathcal{H}_2 f$. Hơn nữa,

$$(\mathcal{H}_1 f)'(\omega) = \mathcal{H}_2[xf(x)](\omega), \quad (\mathcal{H}_2 f)'(\omega) = -\mathcal{H}_1[xf(x)](\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(ii) Cho hàm $f \in L^1(\mathbb{R})$. Nếu hàm f có đạo hàm $f' \in L^1(\mathbb{R})$, thì

$$\mathcal{H}_1[f'(x)](\omega) = \omega \mathcal{H}_2[f(x)](\omega), \quad \mathcal{H}_2[f'(x)](\omega) = -\omega \mathcal{H}_1[f(x)](\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh.

(i) Sự tồn tại các đạo hàm được suy trực tiếp từ các đẳng thức (2.27), (2.28) và kết quả của FT. Các đẳng thức đạo hàm nhận được bằng cách tính trực tiếp, do giả thiết các hàm f và $xf(x)$ khả tích tuyệt đối.

(ii) Tính chất này suy ra từ phép lấy tích phân từng phần. Hơn nữa, do f' khả tích tuyệt đối trên $\mathbb{R}$, nên hàm f liên tục đều trên $\mathbb{R}$, vì vậy, $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$.

Tính chất được chứng minh. □

Tính chất 2.10 ([2]) Cho α, β là các n -bó thỏa mãn $\beta \leq \alpha$.

(i) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\mathbf{x}^\alpha f(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì tồn tại các đạo hàm riêng của hàm f đến cấp $\beta \leq \alpha$, cụ thể,

$$D_\omega^\beta \left(\mathcal{H}_1[f(\mathbf{x})](\omega) \right) = \begin{cases} \mathcal{H}_1[\mathbf{x}^\beta f(\mathbf{x})](\omega) & \text{nếu } |\beta| = 0 \pmod{4} \\ \mathcal{H}_2[\mathbf{x}^\beta f(\mathbf{x})](\omega) & \text{nếu } |\beta| = 1 \pmod{4} \\ -\mathcal{H}_1[\mathbf{x}^\beta f(\mathbf{x})](\omega) & \text{nếu } |\beta| = 2 \pmod{4} \\ -\mathcal{H}_2[\mathbf{x}^\beta f(\mathbf{x})](\omega) & \text{nếu } |\beta| = 3 \pmod{4} \end{cases}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu f có đạo hàm riêng $D_{\mathbf{x}}^{\alpha} f(\mathbf{x})$ thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì các hàm $\omega^{\alpha}(\mathcal{H}_1 f)(\omega)$ và $\omega^{\alpha}(\mathcal{H}_2 f)(\omega)$ thuộc $C_0(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa,

$$\mathcal{H}_1[D_{\mathbf{x}}^{\alpha} f(\mathbf{x})](\omega) = \begin{cases} \omega^{\alpha} \mathcal{H}_2[f(\mathbf{x})](\omega) & \text{nếu } |\alpha| = 0 \pmod{4} \\ -\omega^{\alpha} \mathcal{H}_1[f(\mathbf{x})](\omega) & \text{nếu } |\alpha| = 1 \pmod{4} \\ -\omega^{\alpha} \mathcal{H}_2[f(\mathbf{x})](\omega) & \text{nếu } |\alpha| = 2 \pmod{4} \\ \omega^{\alpha} \mathcal{H}_1[\mathbf{x}^{\alpha} f(\mathbf{x})](\omega) & \text{nếu } |\alpha| = 3 \pmod{4}. \end{cases}, \forall \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Tính chất 2.11 ([2]) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\mathbf{x}^{\alpha} f(\mathbf{x}) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì

$$\left| \frac{\mathcal{H}[f(\mathbf{x})](\omega)}{\frac{1}{|\omega|^{|\alpha|}}} \right| = \left| \mathcal{H}[D_{\mathbf{x}}^{\alpha} f(\mathbf{x})](\omega) \right| \rightarrow 0 \quad (|\omega| \rightarrow \infty).$$

Nói cách khác, các hàm ảnh $\mathcal{H}f$ có vô cùng bé bậc cao hơn $\frac{1}{|\omega|^{|\alpha|}}$.

Phổ lũy thừa của tín hiệu f trong miền Fourier được định nghĩa là $\mathcal{P}(f) := |\mathcal{F}f|^2$. Hơn nữa, $\mathcal{P}(f)$ còn được xác định bởi công thức

$$\mathcal{P}(f) = [\operatorname{Re}(\mathcal{F}f)]^2 + [\operatorname{Im}(\mathcal{F}f)]^2.$$

Ta cũng có thể định nghĩa phổ lũy thừa của tín hiệu thực f trong miền Hartley.

Tính chất 2.12 ([2]) Phổ lũy thừa $\mathcal{P}(f)$ của f trong miền Hartley được xác định như sau:

$$\mathcal{P}(f) = \frac{1}{2} \left\{ (\mathcal{H}f)^2 + [(\mathcal{H}f)^{-}]^2 \right\}.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f) &= \operatorname{Re}(\mathcal{F}f)^2 + \operatorname{Im}(\mathcal{F}f)^2 = (\mathcal{H}f)_o^2 + (\mathcal{H}f)_e^2 \\ &= \frac{1}{4} [\mathcal{H}f + (\mathcal{H}f)^{-}]^2 + \frac{1}{4} [\mathcal{H}f - (\mathcal{H}f)^{-}]^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (\mathcal{H}f)^2 + [(\mathcal{H}f)^{-}]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Tính chất được chứng minh. □

2.2.2 Đặc trưng toán tử của biến đổi Hartley

Nghiên cứu các đặc trưng toán tử của HT trên các không gian hàm tiêu biểu, như không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ đóng vai trò trung tâm trong việc nghiên cứu các tính chất toán học nền tảng của toán tử tích phân Hartley, giúp thiết lập các tính chất bảo toàn cấu trúc đại số, tính khả nghịch, tính bảo toàn năng lượng, nguyên lý bất định, tính bị chặn, các bất đẳng thức chuẩn và tính chất phổ của toán tử tích phân Hartley.

Định lý 2.5 (Xem thêm [2]) (i) *Biến đổi Hartley $\mathcal{H}$ trên không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là một song ánh tuyến tính vào chính nó và là một toán tử đối hợp bậc hai, nghĩa là $\mathcal{H}^2 = \mathcal{I}$. Hơn nữa, HT là toán tử liên tục trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tức là với mọi dãy $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và hàm $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, nếu $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ ($k \rightarrow \infty$) thì $\mathcal{H}f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{H}f$ ($k \rightarrow \infty$).*

(ii) *Biến đổi Hartley ngược cũng là một song ánh tuyến tính liên tục trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và được xác định như sau:*

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_1^{-1}[(\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_2^{-1}[(\mathcal{H}_2 f)(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_2 f)(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{cas}(-\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Chứng minh. Từ mối liên hệ giữa HT và FT qua các đẳng thức (2.29), (2.30), tính song tuyến tính liên tục của HT $\mathcal{H}$ được suy trực tiếp từ tính song tuyến tính liên tục của các FT $\mathcal{F}$ và IFT $\mathcal{F}^{-1}$ trên $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Ta chứng minh tính đối hợp bậc hai của $\mathcal{H}$. Thật vậy, từ các đẳng thức (2.29), (2.30), và các đẳng thức $\mathcal{F}^4 = \mathcal{I}$, $(\mathcal{F}^{-1})^4 = \mathcal{I}$, suy ra $\mathcal{H}^2 = \mathcal{I}$.

Định lý được chứng minh. □

Định lý 2.6 *Biến đổi Hartley $\mathcal{H}$ trên không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục từ $L^1(\mathbb{R}^n)$ vào $C_0(\mathbb{R}^n)$ với chuẩn toán tử $\|\mathcal{H}\|_{L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{2}$.*

Chứng minh. Từ các đẳng thức (2.29), (2.30) và kết quả của FT, ta nhận được kết quả mong muốn.

Định lý được chứng minh. □

Kết quả dưới đây nghiên cứu về sự tồn tại của các IHT trên không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Định lý 2.7 (Định lý biến đổi Hartley ngược, xem thêm [2]) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\mathcal{H}_1 f$ và $\mathcal{H}_2 f$ thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{H}_1^{-1}[(\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) \text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad (2.33)$$

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{H}_2^{-1}[(\mathcal{H}_2 f)(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_2 f)(\boldsymbol{\omega}) \text{cas}(-\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.34)$$

Hơn nữa, nếu f là hàm liên tục, thì các IHT có tính chất nghịch đảo theo điểm, tức là các công thức (2.33) và (2.34) thỏa mãn với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $\mathcal{H}_1$, trường hợp $\mathcal{H}_2$ được chứng minh tương tự. Theo Định lý 2.5, $\mathcal{H}_1$ là song ánh tuyến tính liên tục từ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vào chính nó, và toán tử Hartley nghịch đảo của $\mathcal{H}_1$ là chính nó, vì $\mathcal{H}_1^2 = \mathcal{I}$.

Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Áp dụng định lý Fubini, ta có

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})(\mathcal{H}_1 g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}. \quad (2.35)$$

Thay $g = \mathcal{H}_1(\mathcal{H}_1 g)$ vào vế phải của (2.35) và áp dụng định lý Fubini một lần nữa, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})(\mathcal{H}_1 g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_1 g)(\mathbf{x}) \text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] (\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} (\mathcal{H}_1 g)(\mathbf{x}) \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) \text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_0(\mathbf{x})(\mathcal{H}_1 g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Do $\text{Im}g(\mathcal{H}_1|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ta có $\int_{\mathbb{R}^n} [f_0(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, do $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là không gian con trù mật trong không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$, suy ra $f_0 \stackrel{a.e.}{=} f$ trên $\mathbb{R}^n$.

Nếu hàm f liên tục trên $\mathbb{R}^n$, thì từ kết quả của FT ta suy ra công thức IHT có tính chất nghịch đảo theo điểm.

Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 2.2 (Định lý tồn tại duy nhất [2]) Cho $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\mathcal{H}f = 0$ trong $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì $f \stackrel{a.e.}{=} 0$ trên $\mathbb{R}^n$.

Biến đổi Hartley trên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ có thể được định nghĩa bằng cách thác triển tuyến tính liên tục từ HT trên không gian con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Định lý 2.8 (Định lý Plancherel, xem thêm [2]) Biến đổi Hartley trên không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ có thể được thác triển liên tục duy nhất thành toán tử unita $\tilde{\mathcal{H}} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ thỏa mãn

$$\tilde{\mathcal{H}}f = \mathcal{H}f, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Hơn nữa, toán tử thác triển $\tilde{\mathcal{H}}$ là toán tử đối hợp bậc hai, tức là $\tilde{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{I}$.

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $\mathcal{H}_1$, trường hợp $\mathcal{H}_2$ được chứng minh tương tự.

Cho $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Từ định lý biến đổi Hartley ngược, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \bar{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \bar{g}(\mathbf{x}) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_1 f)(\omega) \text{cas}(\omega \mathbf{x}) d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d\omega (\mathcal{H}_1 f)(\omega) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(\mathbf{x}) \text{cas}(\omega \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\overline{\mathcal{H}_1 g})(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nếu $f = g$, thì ta có

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{H}_1 f\|_2. \quad (2.37)$$

Do $L^2(\mathbb{R}^n)$ là không gian đầy đủ và $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ là không gian con trù mật trong không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$, từ đẳng thức (2.37), theo định lý thác triển tuyến tính liên tục, tồn tại duy nhất thác triển tuyến tính liên tục $\tilde{\mathcal{H}}_1 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ sao cho $\tilde{\mathcal{H}}_1 f = \mathcal{H}_1 f, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và $\tilde{\mathcal{H}}_1$ là ánh xạ đẳng cự tuyến tính trên $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.2 Từ Định lý 2.8, ta có thể đồng nhất các ký hiệu $\mathcal{H}$ và $\tilde{\mathcal{H}}$, và cũng sử dụng ký hiệu $\mathcal{H}$ cho HT trên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Hệ quả 2.3 (Công thức Parseval) Các toán tử Hartley $\mathcal{H}$ là toán tử đẳng cự tuyến tính trên không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cụ thể,

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle \mathcal{H}f, \mathcal{H}g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \|f\|_2 = \|\mathcal{H}f\|_2, \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Định lý 2.9 (Định lý biến đổi Hartley ngược trên $L^2(\mathbb{R}^n)$, xem thêm [2]) Cho $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Nếu $\mathcal{H}_1 f$ và $\mathcal{H}_2 f$ thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{H}_1^{-1}[(\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad (2.38)$$

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{H}_2^{-1}[(\mathcal{H}_2 f)(\boldsymbol{\omega})](\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_2 f)(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{cas}(-\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.39)$$

Hơn nữa, nếu f là hàm liên tục, thì các IHT có tính chất nghịch đảo theo điểm, tức là các công thức (2.38) và (2.39) thỏa mãn với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Biến đổi Hartley trên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ cũng có thể được định nghĩa bằng cách thác triển tuyến tính liên tục từ HT trên không gian con $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, sử dụng giới hạn của toán tử tích phân trên miền hữu hạn.

Định lý 2.10 (Định lý giới hạn tích phân chặt chẽ, xem thêm [2]) Cho $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(i) Đặt

$$(\mathcal{H}_{1,R} f)(\boldsymbol{\omega}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{x}| \leq R} f(\mathbf{x}) \operatorname{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n, \quad R \in \mathbb{R}_+;$$

$$(\mathcal{H}_{2,R} f)(\boldsymbol{\omega}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\mathbf{x}| \leq R} f(\mathbf{x}) \operatorname{cas}(-\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n, \quad R \in \mathbb{R}_+.$$

Khi đó, mỗi $\mathcal{H}_{1,R} f$ và $\mathcal{H}_{2,R} f$ hội tụ mạnh đến một hàm thuộc không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ khi $R \rightarrow \infty$, ký hiệu là $\tilde{\mathcal{H}}_1 f$ và $\tilde{\mathcal{H}}_2 f$ tương ứng. Cụ thể, tồn tại các toán tử unita $\tilde{\mathcal{H}}_1 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ và $\tilde{\mathcal{H}}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ là thác triển liên tục duy nhất từ không gian $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ lên không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ và được xác định bởi các giới hạn

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathcal{H}}_1 f - \mathcal{H}_{1,R} f\|_2 = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathcal{H}}_2 f - \mathcal{H}_{2,R} f\|_2 = 0.$$

Hơn nữa, ta cũng có $(\tilde{\mathcal{H}}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) \stackrel{a.e.}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{H}_{1,R} f)(\boldsymbol{\omega})$ và $(\tilde{\mathcal{H}}_2 f)(\boldsymbol{\omega}) \stackrel{a.e.}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} (\mathcal{H}_{2,R} f)(\boldsymbol{\omega})$.

(ii) Nếu $\tilde{\mathcal{H}}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $\tilde{\mathcal{H}}_2 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, đặt

$$f_{1,R}(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\omega}| \leq R} (\tilde{\mathcal{H}}_1 f)(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad R \in \mathbb{R}_+;$$

$$f_{2,R}(\mathbf{x}) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{|\boldsymbol{\omega}| \leq R} (\tilde{\mathcal{H}}_2 f)(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{cas}(-\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad R \in \mathbb{R}_+,$$

thì $f_{1,R}$ và $f_{2,R}$ hội tụ mạnh đến hàm gốc f khi $R \rightarrow \infty$. Cụ thể, IHT của các hàm $\tilde{\mathcal{H}}_1 f$ và $\tilde{\mathcal{H}}_2 f$ theo $\tilde{\mathcal{H}}_1^{-1}$ và $\tilde{\mathcal{H}}_2^{-1}$ tương ứng thỏa mãn

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|f - f_{1,R}\|_2 = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \|f - f_{2,R}\|_2 = 0.$$

Hơn nữa, ta có $f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} f_{1,R}(\mathbf{x})$ và $f(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} f_{2,R}(\mathbf{x})$. Nếu hàm f liên tục, thì ta có $f(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow \infty} f_{1,R}(\mathbf{x})$ và $f(\mathbf{x}) = \lim_{R \rightarrow \infty} f_{2,R}(\mathbf{x})$, với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Hệ quả 2.4 ([2]) Toán tử Hartley $\mathcal{H}$ là toán tử đại số xác định trên không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ với đa thức đặc trưng là

$$P_{\mathcal{H}}(t) = t^2 - 1.$$

Định lý 2.11 (Định lý phổ [2]) Phổ của toán tử Hartley $\mathcal{H}$ là thực và là

$$\sigma(\mathcal{H}) = \{-1, 1\}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp $\mathcal{H}_1$, trường hợp $\mathcal{H}_2$ được chứng minh tương tự.

Xét toán tử $\lambda \mathcal{I} + \mathcal{H}_1$, trong đó $\lambda \in \mathbb{C}$. Ta xem xét các trường hợp khi $\lambda \neq \pm 1$ và $\lambda = \pm 1$.

Nếu $\lambda \neq \pm 1$, ta dễ dàng chứng minh đẳng thức sau:

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{H}_1)^{-1} = \frac{\lambda \mathcal{I} - \mathcal{H}_1}{\lambda^2 - 1}.$$

Do đó, toán tử $\lambda \mathcal{I} - \mathcal{H}_1$ có nghịch đảo và toán tử nghịch đảo này liên tục do $\mathcal{H}_1$ liên tục.

Nếu $\lambda = \pm 1$. Theo Định lý 2.12, hàm Hermite là các hàm riêng của $\mathcal{H}_1$ với các giá trị riêng là 1 hoặc -1 . Suy ra, các toán tử $\mathcal{I} - \mathcal{H}_1$ và $-\mathcal{I} - \mathcal{H}_1$ không khả nghịch.

Như vậy, $\sigma(\mathcal{H}_1) = \{-1, 1\}$.

Định lý được chứng minh. □

Định lý 2.12 (Xem thêm [2]) Các hàm Hermite là cơ sở trực giao của không gian $L^2(\mathbb{R}^n)$ và là các hàm riêng của HT. Cụ thể, HT của các hàm Hermite được xác định bởi các công thức

$$(\mathcal{H}_1 \Phi_\alpha)(\omega) = \begin{cases} \Phi_\alpha(\omega) & \text{nếu } |\alpha| = 0, 1 \pmod{4} \\ -\Phi_\alpha(\omega) & \text{nếu } |\alpha| = 2, 3 \pmod{4} \end{cases}, \omega \in \mathbb{R}^n;$$

và

$$(\mathcal{H}_2 \Phi_\alpha)(\omega) = \begin{cases} \Phi_\alpha(\omega) & \text{nếu } |\alpha| = 0, 3 \pmod{4} \\ -\Phi_\alpha(\omega) & \text{nếu } |\alpha| = 1, 2 \pmod{4} \end{cases}, \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Chứng minh. Các hàm Hermite thuộc không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mặt khác, từ các hệ thức về mối liên hệ giữa FT và HT (2.29) và (2.29), và từ định lý đặc trưng toán tử của FT là

$$(\mathcal{F} \Phi_\alpha)(\omega) = (-i)^{|\alpha|} \Phi_\alpha(\omega), \quad (\mathcal{F}^{-1} \Phi_\alpha)(\omega) = (i)^{|\alpha|} \Phi_\alpha(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^n,$$

ta nhận được

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_1 \Phi_\alpha)(\omega) &= \frac{1}{2} \left[(-i)^{|\alpha|} + (i)^{|\alpha|} - (-i)^{|\alpha|+1} - (i)^{|\alpha|+1} \right] \Phi_\alpha(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^n; \\ (\mathcal{H}_2 \Phi_\alpha)(\omega) &= \frac{1}{2} \left[(-i)^{|\alpha|} + (i)^{|\alpha|} + (-i)^{|\alpha|+1} + (i)^{|\alpha|+1} \right] \Phi_\alpha(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Tính toán hệ số các biểu thức ở về các hệ thức trên, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[(-i)^{|\alpha|} + (i)^{|\alpha|} - (-i)^{|\alpha|+1} - (i)^{|\alpha|+1} \right] \Phi_\alpha(\omega) &= 1 & \text{nếu } |\alpha| = 0, 1 \pmod{4}, \\ \frac{1}{2} \left[(-i)^{|\alpha|} + (i)^{|\alpha|} - (-i)^{|\alpha|+1} - (i)^{|\alpha|+1} \right] \Phi_\alpha(\omega) &= -1 & \text{nếu } |\alpha| = 2, 3 \pmod{4}, \\ \frac{1}{2} \left[(-i)^{|\alpha|} + (i)^{|\alpha|} + (-i)^{|\alpha|+1} + (i)^{|\alpha|+1} \right] \Phi_\alpha(\omega) &= 1 & \text{nếu } |\alpha| = 0, 3 \pmod{4}, \\ \frac{1}{2} \left[(-i)^{|\alpha|} + (i)^{|\alpha|} + (-i)^{|\alpha|+1} + (i)^{|\alpha|+1} \right] \Phi_\alpha(\omega) &= -1 & \text{nếu } |\alpha| = 1, 2 \pmod{4}, \end{aligned}$$

với mọi $\omega \in \mathbb{R}^n$.

Từ đây ta nhận được các kết quả của định lý.

Định lý được chứng minh. □

2.3 Tích chập liên kết với biến đổi Hartley

Tương tự như định lý tích chập cho FT, định lý tích chập cho HT cho phép ta tính toán phép tích chập một cách hiệu quả hơn, bằng cách biến đổi các hàm sang miền tần số, thực hiện phép nhân thông thường, sau đó thực hiện phép biến đổi ngược. Quá trình này thường nhanh hơn đáng kể so với việc tính toán các phép tích chập trực tiếp, đặc biệt trong trường hợp các tín hiệu được lấy mẫu lớn, nhờ vào các thuật toán FHT tương tự như các thuật toán FFT. Như vậy, việc phát triển các tích chập cho HT không chỉ mang lại lợi ích trong việc xây dựng một cơ sở lý thuyết đầy đủ cho HT, mà nó còn là một công cụ hiệu quả trong ứng dụng tính toán số.

2.3.1 Tích chập Hartley

Định lý 2.13 Cho các hàm $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ cố định. Mỗi phép biến đổi tích phân dưới đây xác định một tích chập liên kết với phép biến đổi Hartley $\mathcal{H}_1$. Hơn nữa, tương ứng với mỗi tích chập là các bất đẳng thức chuẩn và đẳng thức nhân tử hóa được thiết lập.

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) \\ &\quad - f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g\right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(\omega) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) \\ &\quad - f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g\right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*} g\right)(\omega) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_2 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) \\ &\quad - f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\left\|f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g\right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*} g\right)(\omega) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\mathcal{H}_2 f)(\omega)(\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_1}{*}} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) \\ &\quad - f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_1}{*}} g \right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_1}{*}} g\right)(\boldsymbol{\omega}) = \text{cas}(\mathbf{h}\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_2 f)(\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_2 g)(\boldsymbol{\omega}).$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp tích chập (2.40), các trường hợp khác được chứng minh tương tự.

Trước tiên, ta chứng minh bất đẳng thức chuẩn. Cho $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ cố định. Thực hiện các phép đổi biến tích phân, ta có

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\pm \mathbf{x} \pm \mathbf{u} \pm \mathbf{h})| d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \|f\|_1.$$

Do $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nên ta có thể đổi thứ tự lấy tích phân, ta có

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_1}{*}} g\right)(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ |f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h})| + |f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h})| + |f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h})| \right. \\ &\quad \left. + |f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h})| \right\} |g(\mathbf{u})| d\mathbf{u} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{u} |g(\mathbf{u})| \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ |f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h})| + |f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h})| \right. \\ &\quad \left. + |f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h})| + |f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h})| \right\} d\mathbf{x} \\ &= 2(2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra, $\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_1}{*}} g\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_1}{*}} g \right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1$.

Tiếp theo, ta chứng minh đẳng thức nhân tử hóa. Sử dụng Bổ đề 2.1 và thực hiện đổi biến $\mathbf{x} := \pm \mathbf{h} \pm \mathbf{u} \pm \boldsymbol{\nu}$ trong các tích phân, ta có

$$\begin{aligned} &\text{cas}(\mathbf{h}\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_1 g)(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \text{cas}(\mathbf{h}\boldsymbol{\omega}) \text{cas}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{u}) \text{cas}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nu}) f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\text{cas}(\omega(-\mathbf{h} + \mathbf{u} + \nu)) + \text{cas}(\omega(\mathbf{h} - \mathbf{u} + \nu)) + \text{cas}(\omega(\mathbf{h} + \mathbf{u} - \nu)) \right. \\
&\quad \left. - \text{cas}(\omega(-\mathbf{h} - \mathbf{u} - \nu)) \right] f(\mathbf{u})g(\nu) d\mathbf{u}d\nu \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \text{cas}(\omega\mathbf{x}) \left(\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} - \nu + \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} + \nu + \mathbf{h}) \right. \\
&\quad \left. + f(\mathbf{x} + \nu - \mathbf{h}) - f(-\mathbf{x} - \nu - \mathbf{h})] g(\nu) d\nu \right) \\
&= \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_1}{*}} g \right) (\omega).
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Tương tự như cách thiết lập các tích chập liên kết với HT $\mathcal{H}_1$ trong Định lý 2.13, ta có thể thiết lập các tích chập liên kết với HT $\mathcal{H}_2$.

Định lý 2.14 Cho các hàm $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ cố định. Mỗi phép biến đổi tích phân dưới đây xác định một tích chập liên kết với phép biến đổi Hartley $\mathcal{H}_2$. Hơn nữa, tương ứng với mỗi tích chập là các bất đẳng thức chuẩn và các đẳng thức nhân tử hóa được thiết lập.

$$\begin{aligned}
\left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) \\
&\quad - f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u},
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_2 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right) (\omega) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega) (\mathcal{H}_2 f) (\omega) (\mathcal{H}_2 g) (\omega);$$

$$\begin{aligned}
\left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) \\
&\quad - f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u},
\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_2 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right) (\omega) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega) (\mathcal{H}_2 f) (\omega) (\mathcal{H}_1 g) (\omega);$$

$$\begin{aligned}
\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) \\
&\quad - f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u},
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_2 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right) (\omega) = \text{cas}(\mathbf{h}\omega) (\mathcal{H}_1 f) (\omega) (\mathcal{H}_2 g) (\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) + f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}) \\ &\quad - f(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h})] g(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g \right\|_1 \leq 2\|f\|_1\|g\|_1, \quad \mathcal{H}_2\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\mathcal{H}_2}{*}} g\right)(\boldsymbol{\omega}) = \text{cas}(\mathbf{h}\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_1 g)(\boldsymbol{\omega}).$$

Nhận xét 2.3 Định lý 2.13 và Định lý 2.14 chứa các tích chập xuất hiện trong hầu hết các toán tử tích phân Hartley trong trường hợp $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, xem [18, 19]. Mặt khác, $\mathbf{h}$ xuất hiện trong tám tích chập (2.40) - (2.47) có thể khác nhau. Trong thực tế, chúng có thể là những dịch chuyển cố định theo thời gian hoặc tần số. Thậm chí, nếu $\mathbf{h}$ trong những tích chập này là giống nhau (dịch chuyển cùng giá trị), các tích chập (2.40) - (2.47) vẫn là các hàm độc lập tuyến tính. Hơn nữa, khi sắp xếp lại các nhân $f(\pm\mathbf{x} \pm \mathbf{u} \pm \mathbf{h})$ của các tích chập này theo một thứ tự, ví dụ như

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}), f(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}), f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}), f(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}) \\ &f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}), f(-\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}), f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}), f(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}), \end{aligned} \quad (2.48)$$

ta nhận được một ma trận A có các hàng được xác định bởi các hệ số ± 1 và 0 của các hàm này. Theo thứ tự trên, ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -256 \neq 0.$$

Do đó, nếu các giá trị tích chập về bên trái của (2.40) - (2.47) được biết, thì tám thành phần tích phân với các nhân trong (2.48) có thể xác định được thông qua việc giải hệ phương trình đại số tuyến tính. Tính chất này rất hữu dụng và được sử dụng trong phần xây dựng đại số Wiener và ứng dụng giải phương trình tích phân.

Ví dụ 2.1 Các mô hình hỗn hợp Gauss (*Gaussian Mixture Models* - GMMs) đóng vai trò quan trọng trong việc mô hình hóa các tập dữ liệu phức tạp. Các mô hình này thường được sử dụng để phân cụm dữ liệu, mô hình hóa mật độ xác suất, phân loại các điểm dữ liệu và tiền xử lý dữ liệu. Tích chập của các hỗn hợp phân phối Gauss cũng được sử dụng trong các lĩnh vực thống kê, học máy và xử lý tín hiệu để mô hình hóa, phân tích và tổng hợp dữ liệu. Trong ví dụ này, ta đi tính tích chập Hartley của hai phân phối Gauss. Tích chập Hartley của hai hỗn hợp các phân phối Gauss có thể tính được do tính chất tuyến tính của tích chập Hartley.

Xét các hàm số

$$f(x) = e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad g(x) = e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Từ kết quả đã biết của FT, ta có

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right](\omega) = e^{-i\mu\omega} \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} [\cos(\mu\omega) - i \sin(\mu\omega)].$$

Từ mối quan hệ giữa FT và HT theo hệ thức (2.29), suy ra

$$(\mathcal{H}_1 f)(\omega) = \sqrt{2\pi}\sigma_1 e^{-\frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}} \text{cas}(\mu_1\omega), \quad (\mathcal{H}_1 g)(\omega) = \sqrt{2\pi}\sigma_2 e^{-\frac{\sigma_2^2\omega^2}{2}} \text{cas}(\mu_2\omega).$$

Theo (2.40), cho $h = 0$, ta nhận được

$$\mathcal{H}_1 \left[f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g \right](\omega) = (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega) = 2\pi\sigma_1\sigma_2 e^{-\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\omega^2}{2}} \text{cas}(\mu_1\omega) \text{cas}(\mu_2\omega).$$

Áp dụng IHT, ta có $\left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\mathcal{H}_1} g \right)(x) = 2\pi\sigma_1\sigma_2 \mathcal{H}_1 \left[e^{-\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\omega^2}{2}} \text{cas}(\mu_1\omega) \text{cas}(\mu_2\omega) \right](x)$. Mặt khác,

$$\begin{aligned} & \text{cas}(\mu_1\omega) \text{cas}(\mu_2\omega) \\ &= \left(\frac{e^{i\mu_1\omega} + e^{-i\mu_1\omega}}{2} + \frac{e^{i\mu_1\omega} - e^{-i\mu_1\omega}}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\mu_2\omega} + e^{-i\mu_2\omega}}{2} + \frac{e^{i\mu_2\omega} - e^{-i\mu_2\omega}}{2i} \right) \\ &= \frac{-i}{2} e^{i(\mu_1 + \mu_2)\omega} + \frac{1}{2} e^{i(\mu_1 - \mu_2)\omega} + \frac{1}{2} e^{-i(\mu_1 - \mu_2)\omega} + \frac{i}{2} e^{-i(\mu_1 + \mu_2)\omega}. \end{aligned}$$

Ta tính toán FT của $e^{-\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\omega^2}{2}} \text{cas}(\mu_1\omega) \text{cas}(\mu_2\omega)$ từ kết quả đã biết của FT,

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{a^2\omega^2}{2}} e^{-ib\omega}\right](x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a} e^{-\frac{(x+b)^2}{2a^2}},$$

và từ quan hệ giữa FT và HT, $H_1(\omega) = \text{Re}(F(\omega)) - \text{Im}(F(\omega))$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \left[e^{-\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\omega^2}{2}} \text{cas}(\mu_1\omega) \text{cas}(\mu_2\omega) \right] (x) \\ = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \left[e^{\frac{-[x+(\mu_1-\mu_2)]}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} + e^{\frac{-[x-(\mu_1-\mu_2)]}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} + e^{\frac{-[x+(\mu_1+\mu_2)]}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} - e^{\frac{-[x-(\mu_1+\mu_2)]}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \right]. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\left(f \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right) (x) = \frac{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2}{2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \left[e^{\frac{-[x+(\mu_1-\mu_2)]}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} + e^{\frac{-[x-(\mu_1-\mu_2)]}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} + e^{\frac{-[x+(\mu_1+\mu_2)]}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} - e^{\frac{-[x-(\mu_1+\mu_2)]}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \right].$$

2.3.2 Tích chập Hartley liên kết với hàm Hermite

Họ các hàm Hermite xác định trên $\mathbb{R}^n$ sở hữu những tính chất toán học đặc biệt, như là hàm riêng của HT, thuộc không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ và là cơ sở trực chuẩn của không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Hàm Hermite gắn liền với cấu trúc năng lượng, dao động và phân bố nhiễu trong tự nhiên. Việc xây dựng các tích chập Hartley liên kết với hàm Hermite có khả năng mở ra hướng mới để giải một số bài toán thực tế trong các lĩnh vực như quang học lượng tử, xử lý tín hiệu, khuếch tán nhiệt động học, và truyền sóng qua môi trường chiết suất biến đổi.

Với n -bó α , đặt

$$N_\alpha := 2\|\Phi_\alpha\|_1 = \frac{2}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Định lý 2.15 Cho $|\alpha| = r \pmod{4}$, với $r = 0, 1, 2, 3$. Cho $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Mỗi phép biến đổi tích phân dưới đây xác định một tích chập Hartley của $\mathcal{H}_1$ liên kết với các hàm trọng Hermite. Hơn nữa, tương ứng với mỗi tích chập là các bất đẳng thức chuẩn và đẳng thức nhân tử hóa được thiết lập.

- Trường hợp $r = 0$

$$\begin{aligned} \left(f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1} \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right) (\mathbf{x}) := \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\mathbf{v}) [\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{v}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v})] d\mathbf{u} d\mathbf{v}, \quad (2.49) \end{aligned}$$

$$\left\| f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1} \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \begin{smallmatrix} \Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1} \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} g \right) (\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) [\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \\ &\quad + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu})] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\left\|f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g\right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g\right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_2 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) [\Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \\ &\quad + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu})] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\left\|f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g\right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g\right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2 f)(\omega)(\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) [\Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \\ &\quad + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu})] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\left\|f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g\right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g\right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2 f)(\omega)(\mathcal{H}_2 g)(\omega).$$

• Trường hợp $r = 1$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\left\|f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} g\right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} g\right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\left\|f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g\right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1\left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g\right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_2 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\left\| f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\nu) \left[-\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \nu) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nu) \right. \\ &\quad \left. + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \nu) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \nu) \right] d\mathbf{u} d\nu, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\left\| f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega).$$

• Trường hợp $r = 2$

$$\begin{aligned} \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\nu) \left[-\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \nu) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \nu) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nu) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \nu) \right] d\mathbf{u} d\nu, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\left\| f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\nu) \left[-\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nu) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \nu) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \nu) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \nu) \right] d\mathbf{u} d\nu, \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\left\| f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\nu) \left[-\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \nu) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \nu) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \nu) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nu) \right] d\mathbf{u} d\nu, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\left\| f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g \right) (\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\nu) \left[-\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \nu) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \nu) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \nu) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \nu) \right] d\mathbf{u} d\nu, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\left\| f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g \right\|_1 \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \stackrel{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1}{*}_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2} g \right) (\omega) = \Phi_{\alpha}(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega).$$

• Trường hợp $r = 3$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_1 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_1 g)(\omega);$$

$$\begin{aligned} \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g\right)(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\boldsymbol{\nu}) \left[-\Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right\|_1 \leq N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}{*}^{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1} g \right)(\omega) = \Phi_\alpha(\omega) (\mathcal{H}_2 f)(\omega) (\mathcal{H}_2 g)(\omega).$$

Chứng minh. Xét trường hợp $r = 0$.

Khi đó, $\Phi_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ta cũng có

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(\mathbf{x} \pm \mathbf{u} \pm \boldsymbol{\nu})| d\mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \|\Phi_\alpha\|_1 = \frac{N_\alpha}{2}.$$

Cho $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ta có

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}} g \right|(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &\leq \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{u})| \cdot |g(\boldsymbol{\nu})| \cdot |\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \\
&\quad + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu})| d\mathbf{x} d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} \\
&\leq \frac{2}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{\nu})| d\boldsymbol{\nu} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} N_\alpha \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Từ đây, ta nhận được bất đẳng thức chuẩn và $f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}} g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Tiếp theo, ta chứng minh đẳng thức nhân tử hóa. Theo Định lý 2.12, $\mathcal{H}_1(\Phi_\alpha) = \Phi_\alpha$. Sử dụng tính chất $\Phi_\alpha(\boldsymbol{\omega}) = \Phi_\alpha(-\boldsymbol{\omega})$ ($\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$), Bổ đề 2.1 và thực hiện đổi biến tích phân, ta có

$$\begin{aligned}
&\Phi_\alpha(\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_1 f)(\boldsymbol{\omega})(\mathcal{H}_1 g)(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \text{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{t}) \text{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{u}) \text{cas}(\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\nu}) f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \Phi_\alpha(\mathbf{t}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} d\mathbf{t} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\text{cas}(\boldsymbol{\omega}(-\mathbf{t} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu})) + \text{cas}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu})) \right. \\
&\quad \left. + \text{cas}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu})) - \text{cas}(\boldsymbol{\omega}(-\mathbf{t} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu})) \right] f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \Phi_\alpha(\mathbf{t}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} d\mathbf{t} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \text{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) \left[\Phi_\alpha(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\
&\quad \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} d\mathbf{x} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \text{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) \left\{ \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\Phi_\alpha(-\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right] f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} \right\} \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} \text{cas}(\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}) \left\{ \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) + \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \right] f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} \right\} \\
&= \mathcal{H}_1 \left(f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}} g \right) (\boldsymbol{\omega}).
\end{aligned}$$

Đẳng thức nhân tử hóa cho tích chập (2.49) được chứng minh.

Tương tự, ta có thể chứng minh cho các tích chập từ (2.50) - (2.62). Quá trình chứng minh được thực hiện theo các bước sau đây:

1. Thiết lập bất đẳng thức chuẩn theo cách tương tự như trong (2.49).
2. Chú ý rằng hàm Hermite Φ_α với $\alpha \in \mathbb{R}^n$ là hàm riêng của cả hai biến đổi $\mathcal{H}_j (j = 1, 2)$, với các giá trị riêng là ± 1 theo Định lý 2.12.
3. Sử dụng các đẳng thức $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = (-1)^{|\alpha|} \Phi_\alpha(-\mathbf{x})$, với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, theo (1.1).
4. Điều chỉnh như (2.6) để có thể áp dụng vào chứng minh cụ thể. Ví dụ, để chứng minh (2.53) cho $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2$, ta có thể điều chỉnh (2.6) bởi thay thế Q bằng $-Q$ và R bằng $-R$ để nhận được

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{cas}(P) \operatorname{cas}(-Q) \operatorname{cas}(-R) &= \operatorname{cas}(P - Q + R) + \operatorname{cas}(P + Q - R) \\ &\quad + \operatorname{cas}(-P - Q - R) - \operatorname{cas}(-P + Q + R). \end{aligned}$$

Cuối cùng, để chứng minh đẳng thức nhân tử hóa (2.53), ta có thể thực hiện tương tự như trường hợp (2.49).

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.4 (i) Ta có thể nhận được số lượng tích chập tương tự cho các biến đổi theo thứ tự $(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_j, \mathcal{H}_k)$, với $j, k = 1, 2$, như trường hợp $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_j, \mathcal{H}_k)$ trong Định lý 2.15. Có thể thấy, có tám nhân được chỉ ra trong (2.48) trong tám tích chập (2.40) - (2.47), nhưng do tính chất $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = (-1)^{|\alpha|} \Phi_\alpha(-\mathbf{x})$ nên chỉ có bốn nhân là

$$\Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}), \quad \Phi_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}), \quad \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}), \quad \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu})$$

xuất hiện trong mười sáu trường hợp của Định lý 2.15.

(ii) Với mỗi trường hợp $r = 0, 1, 2, 3$, bốn tích chập được định nghĩa trong Định lý 2.15 là các hàm độc lập tuyến tính (điều này có thể thấy được như trong Nhận xét 2.3). Do đó, mỗi thành phần tích phân trong vế bên phải của tích chập là một tổ hợp tuyến tính của bốn tích chập và có thể được xác định bằng cách giải hệ phương trình đại số tuyến tính tương ứng.

2.4 Bất đẳng thức tích chập dạng Young

Phần này của luận án chứng minh hai bất đẳng thức chuẩn cho các tích chập đã được xây dựng. Phép chứng minh sử dụng bất đẳng thức tích phân Minkowski quen thuộc như sau:

$$\left(\int_{\mathcal{X}_2} \left| \int_{\mathcal{X}_1} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mu_1(\mathbf{x}) \right|^s d\mu_2(\mathbf{y}) \right)^{1/s} \leq \int_{\mathcal{X}_1} \left(\int_{\mathcal{X}_2} |F(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^s d\mu_2(\mathbf{y}) \right)^{1/s} d\mu_1(\mathbf{x}),$$

trong đó, $(\mathcal{X}_1, \mu_1)$ và $(\mathcal{X}_2, \mu_2)$ là các không gian đo được, $F(\cdot, \cdot) : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ là hàm đo được, và $s \geq 1$.

Do có một số lớn các tích chập được xem xét, ta sử dụng ký hiệu tích chập $\circledast$ cho tất cả các tích chập từ (2.40) - (2.47), và sử dụng ký hiệu tích chập $\star$ cho các tích chập (2.49) - (2.64) để đơn giản hóa việc biểu diễn các công thức.

Định lý 2.16 (Bất đẳng thức Young) (i) Các tích chập $\circledast$ là toán tử song tuyến tính giữa các không gian $L^s(\mathbb{R}^n)$ phù hợp, theo nghĩa: nếu $1 \leq p, q, r \leq \infty$ và thỏa mãn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, và nếu $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, thì

$$\|f \circledast g\|_r \leq C_{\circledast} \|f\|_p \|g\|_q, \quad (2.65)$$

trong đó, $C_{\circledast}$ là một hằng số dương.

(ii) Các tích chập $\star$ là toán tử song tuyến tính trên $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nếu $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì với mọi $s \geq 1$, ta có

$$\|f \star g\|_s \leq C_{\star} \|f\|_1 \|g\|_1, \quad (2.66)$$

trong đó, $C_{\star}$ là một hằng số dương.

Chứng minh. Ta thấy rằng, mỗi tích chập có bốn thành phần tích phân cần được xem xét. Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức Young cho một thành phần, các thành phần khác được chứng minh tương tự. Cụ thể, ta sẽ chứng minh cho các thành phần sau:

$$M(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) g(\mathbf{u}) d\mathbf{u},$$

$$N(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u}) g(\boldsymbol{\nu}) \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}.$$

Trước tiên, ta chứng minh (2.65). Nếu $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, ta có

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h})g(\mathbf{u})d\mathbf{u} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h})g^-(\mathbf{u})d\mathbf{u} = (f \underset{\mathcal{F}}{*} g^-)(\mathbf{x} + \mathbf{h}),$$

trong đó, $(\cdot \underset{\mathcal{F}}{*} \cdot)$ ký hiệu tích chập Fourier. Dễ thấy $g^- \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Sử dụng bất đẳng thức tích chập dạng Young [19], ta có $f \underset{\mathcal{F}}{*} g^- \in L^r(\mathbb{R}^n)$, với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Do $\mathbf{h}$ là một vector hằng, suy ra $M(\mathbf{x}) = (f \underset{\mathcal{F}}{*} g^-)(\mathbf{x})(\cdot + \mathbf{h}) \in L^r(\mathbb{R}^n)$, do đó, $M(\mathbf{x})$ thỏa mãn (2.65). Tiếp theo, ta chứng minh cho $N(\mathbf{x})$. Đổi biến $\mathbf{t} = -\mathbf{u} - \mathbf{v}$, ta có

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{u})g(\mathbf{v})\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v})d\mathbf{u}d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(-\mathbf{t} - \mathbf{v})g(\mathbf{v})\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{t})d\mathbf{t}d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{t} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f^-(\mathbf{t} - \mathbf{v})g^-(\mathbf{v})d\mathbf{v} \right] = \left[\Phi_{\alpha} \underset{\mathcal{F}}{*} (f^- \underset{\mathcal{F}}{*} g^-) \right](\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Young, $f^- \underset{\mathcal{F}}{*} g^- \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Dễ thấy, $\Phi_{\alpha} \in L^s(\mathbb{R}^n)$ với mọi $s \geq 1$. Áp dụng bất đẳng thức Young cho trường hợp $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{r} + 1$, ta nhận được $N(\mathbf{x}) \in L^r(\mathbb{R}^n)$.

Cuối cùng, ta chứng minh (2.66). Do $\Phi_{\alpha} \in L^s(\mathbb{R}^n)$ với mọi $(s \geq 1)$ và

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v})|^s d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{s}} = \|\Phi_{\alpha}\|_s,$$

trong đó, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ cố định, áp dụng bất đẳng thức tích phân Minkowski, ta có

$$\begin{aligned} &\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v})f(\mathbf{u})g(\mathbf{v})d\mathbf{u}d\mathbf{v} \right|^s d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{s}} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v})|^s |f(\mathbf{u})|^s |g(\mathbf{v})|^s d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{s}} d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v})|^s d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{2}} |f(\mathbf{u})| |g(\mathbf{v})| d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\Phi_{\alpha}\|_s \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{u})| |g(\mathbf{v})| d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\Phi_{\alpha}\|_s \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Ta nhận được (2.66).

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 2.5 (i) Ta có thể viết lại kết quả cuối cùng dạng như sau:

$$L^p(\mathbb{R}^n) \otimes L^q(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1; \quad (2.67)$$

$$L^1(\mathbb{R}^n) \star L^1(\mathbb{R}^n) \subset L^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{với } s \geq 1. \quad (2.68)$$

Khi $p = q = r = 1$ trong (2.67), hoặc cho $s = 1$ trong (2.68), ta nhận được bất đẳng thức chuẩn trong các định lý 2.13, 2.14 và 2.15 với một hằng số cho trước.

(ii) Chọn $s = 2$ trong (2.66), ta thấy rằng nếu $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì tích chập xác định một hàm trong không gian $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Mặt khác, các tích chập (2.49) - (2.64) có một tính chất quan trọng theo nghĩa: ta chỉ cần giả thiết $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, khi đó $f \star g \in L^s(\mathbb{R}^n)$ với mọi $s \geq 1$. So sánh với các trường hợp tương tự đã biết khác, tính chất (2.66) thể hiện sự khác biệt đáng kể của các tích chập mới này. Có thể thấy, không gian ảnh của các tích chập (2.49) - (2.64) là lớn hơn so với các tích chập đã biết trước đây.

Như vậy, sự xuất hiện của các hàm Hermite trong các nhân của các tích chập đóng một vai trò quan trọng. Hơn nữa, bất đẳng thức dạng Young (2.66) cho thấy các tích chập đã được xây dựng có cấu trúc tốt và có ý nghĩa.

2.5 Đại số Wiener trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$

Đại số Wiener trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$ là một cấu trúc đại số Banach quan trọng trong giải tích điều hòa và lý thuyết đại số Banach, được ứng dụng nhiều trong lĩnh vực xử lý tín hiệu. Nghiên cứu về đại số Banach giúp ta có một cái nhìn sâu sắc hơn về không gian hàm $L^1(\mathbb{R}^n)$, cũng như tích chập của các hàm thuộc không gian này. Hơn nữa, ta cũng có thể sử dụng các công cụ của lý thuyết đại số Banach để nghiên cứu sâu sắc hơn tính chất của các hàm trong không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$, như tính khả nghịch và phổ của các toán tử tích chập. Điều đó mở ra tiềm năng mở rộng phạm vi nghiên cứu lý thuyết và ứng dụng của chúng trong các lĩnh vực giải phương trình vi phân, tích phân, xử lý tín hiệu và xử lý ảnh. Xem [27, 54, 72].

Phần này của luận án nghiên cứu về xây dựng đại số định chuẩn trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$ khi định nghĩa phép nhân là một trong các tích chập đã đề xuất, và được trang bị một chuẩn thích hợp. Hơn nữa, một số đại số này có thể là đại số giao hoán. Do đó, khi được trang bị

một cấu trúc phù hợp sử dụng các tích chập được đề xuất, $L^1(\mathbb{R}^n)$ có thể trở thành một đại số Banach giao hoán. Do có thể xây dựng vô hạn những phép tích chập Hartley liên kết với hàm Hertmite, có vô hạn đại số Wiener có thể được xây dựng từ các tích chập Hartley đã đề xuất.

Định lý 2.17 Không gian $\mathcal{X} := L^1(\mathbb{R}^n)$ khi được trang bị một trong các tích chập được định nghĩa từ (2.40) đến (2.47) và từ (2.49) đến (2.64) sẽ trở thành một đại số phức không có đơn vị (có thể không có tính chất kết hợp).

(i) Đối với các tích chập (2.40), (2.43), (2.44), (2.47), (2.49), (2.52), (2.53), (2.56), (2.57), (2.60), (2.61) và (2.64), các đại số tương ứng là giao hoán.

(ii) Đối với các tích chập (2.41), (2.42), (2.45), (2.46), (2.50), (2.51), (2.54), (2.55), (2.58), (2.59), (2.62) và (2.63), các đại số tương ứng là không giao hoán.

Chứng minh. Chứng minh được chia thành hai bước.

Bước 1: $\mathcal{X}$ có cấu trúc vành định chuẩn.

Ta thấy rằng, khi $\mathcal{X}$ được trang bị một trong các tích chập ở trên, $\mathcal{X}$ sẽ có cấu trúc vành. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức nhân tính cho tích chập (2.49), các trường hợp khác được chứng minh tương tự. Ta có

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1}}{*}} g \right|(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & \leq \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{u})| \cdot |g(\boldsymbol{\nu})| \cdot |\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \\ & \quad + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) - \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu})| d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} \\ & \leq \frac{2}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \int_{\mathbb{R}^n} |g(\boldsymbol{\nu})| d\boldsymbol{\nu} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_{\alpha}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1}}{*}} g \right|(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \leq \frac{N_{\alpha}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{u})| d\mathbf{u} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(\boldsymbol{\nu})| d\boldsymbol{\nu} = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Suy ra,

$$\left\| f \underset{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_{\alpha, \mathcal{H}_1}}{*}} g \right\| \leq N_{\alpha} \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Bước 2: $\mathcal{X}$ không có đơn vị.

Để trình bày chứng minh được ngắn gọn, ta sử dụng ký hiệu $*$ cho tất cả các tích chập từ (2.49) đến (2.62), và ta chỉ trình bày chứng minh cho các trường hợp này.

Giả sử tồn tại một phần tử $e \in \mathcal{X}$ thỏa mãn $f = f * e = e * f$, với mọi $f \in \mathcal{X}$. Chọn $g(\mathbf{x}) := e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}$, ta có $\mathcal{H}_1 g = \mathcal{H}_2 g = g$. Do $g = g * e = e * g$ và từ các đẳng thức nhân tử hóa của tích chập này, ta có $\mathcal{H}_i(g) = \Phi_\alpha \mathcal{H}_k(g) \mathcal{H}_l(e)$, trong đó, $\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_k, \mathcal{H}_l \in \{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\}$ (chú ý rằng có thể là $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_k = \mathcal{H}_l = \mathcal{H}_1$, v.v.). Suy ra, $g = \Phi_\alpha g \mathcal{H}_l(e)$. Do $g(\mathbf{x}) \neq 0$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$), ta nhận được $\Phi_\alpha(\mathbf{x})[\mathcal{H}_l(e)](\mathbf{x}) = 1$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$). Điều này mâu thuẫn với $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Phi_\alpha(\mathbf{x})[\mathcal{H}_l(e)](\mathbf{x}) = 0$, theo bổ đề Riemann-Lebesgue. Do đó, $\mathcal{X}$ không có đơn vị.

Rõ ràng, các tích chập (2.49), (2.52), (2.53), (2.56), (2.57), (2.60), (2.61), (2.64) là giao hoán. Ta chứng minh tính không giao hoán của tích chập (2.51), các trường hợp (2.50), (2.55), (2.54), (2.59), (2.58), (2.62), (2.63) được chứng minh tương tự.

Xét các hàm Hermite $\Phi_0(\mathbf{x}) = e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}$, $\Phi_1(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x}e^{-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2}$. Theo Định lý 2.12, ta có

$$\mathcal{H}_1 \left(\Phi_0 \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}} \Phi_1 \right) = \Phi_\alpha \Phi_0 \Phi_1, \quad \mathcal{H}_1 \left(\Phi_1 \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{*}} \Phi_0 \right) = -\Phi_\alpha \Phi_0 \Phi_1.$$

Suy ra, tích chập (2.51) không giao hoán.

Định lý được chứng minh. □

Đại số Wiener $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ liên kết với FT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$ được định nghĩa là không gian ảnh của FT trên không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$, cùng phép nhân là phép nhân điểm và được trang bị chuẩn cảm sinh là $\|\mathcal{F}(f)\|_{\mathcal{W}_{\mathcal{F}}} = \|f\|_1$. Theo định lý tích chập, phép nhân điểm của hai hàm trên $\mathcal{W}_{\mathcal{F}}$ tương ứng với tích chập Fourier trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$. Đại số Wiener liên kết với HT có thể được định nghĩa theo cách tương tự.

Định nghĩa 2.5 Đại số Wiener liên kết với HT $\mathcal{H}_1$ trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, ký hiệu là $\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}$, được định nghĩa là không gian ảnh của HT $\mathcal{H}_1$ trên không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$, cùng với phép nhân là phép nhân điểm và được trang bị chuẩn cảm sinh $\|\mathcal{H}_1(f)\|_{\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}} = \|f\|_1$. Cụ thể, ta có thể viết $\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1} := \{\mathcal{H}_1(f) : f \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ cùng với các phép toán đại số và được trang bị chuẩn là $\|\mathcal{H}_1(f)\|_{\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}} = \|f\|_1$. Theo định lý tích chập, phép nhân điểm của hai hàm trên $\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}$ tương ứng với phép tích chập Hartley liên kết với HT $\mathcal{H}_1$ trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Định lý 2.18 Ký hiệu $\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}$ là không gian ảnh của biến đổi Hartley $\mathcal{H}_1$ trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$. Không gian $\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}$ khi được định nghĩa phép nhân là phép nhân điểm và được trang bị chuẩn cảm sinh $\|\mathcal{H}_1(f)\|_{\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}} = \|f\|_1$ là một đại số định chuẩn giao hoán.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh phép nhân điểm là đóng trong $\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}$.

Giả sử $F, G \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}$. Tồn tại các hàm $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sao cho $F = \mathcal{H}_1 f$ và $G = \mathcal{H}_1 g$. Từ đẳng thức nhân tử hóa của tích chập (2.40) (với $\mathbf{h} = \mathbf{0}$), ta có

$$F(\omega)G(\omega) = (\mathcal{H}_1 f)(\omega)(\mathcal{H}_1 g)(\omega) = \mathcal{H}_1[f * g](\omega).$$

Theo Định lý 2.13, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, suy ra $F \cdot G \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}$. Tính giao hoán của phép nhân theo từng điểm trong $\mathcal{W}_{\mathcal{H}_1}$ là hiển nhiên, do tính giao hoán của phép nhân tích chập $f * g = g * f$.

Định lý được chứng minh. □

Kết luận chương 2

Chương này của luận án nghiên cứu về cơ sở lý thuyết của HT. Luận án đã hệ thống hóa và phát triển các tính chất toán tử, đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, luận án đề xuất một số lớp tích chập mới liên kết với HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, bao gồm các bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Trên cơ sở các lớp tích chập mới đã đề xuất, luận án xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, nhằm nghiên cứu sâu sắc hơn về không gian hàm $L^1(\mathbb{R}^n)$, cũng như các tích chập trong không gian hàm $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Chương 3

Ứng dụng biến đổi Hartley và tích chập Hartley giải phương trình tích phân

Chương này của luận án nghiên cứu về phương pháp giải một số lớp FIE, trong đó tập trung vào trường hợp FIE có nhân dạng TPH. Dạng phương trình này có mối liên hệ gần gũi với phương trình tích phân Wiener-Hopf + Hankel [24, 61, 65], và là lớp phương trình phát sinh một cách tự nhiên trong các bài toán vật lý và kỹ thuật liên quan đến miền không gian giới hạn và có yếu tố phản xạ hoặc tán xạ. Lớp phương trình này có cấu trúc phức tạp nhưng lại vô cùng đặc biệt, vì chúng cho phép mô hình hóa chính xác nhiều hiện tượng quan trọng trong vật lý và kỹ thuật. Ứng dụng điển hình của lớp phương trình này đã xuất hiện trong các lĩnh vực như vật lý lượng tử, lý thuyết tán xạ, lý thuyết lọc tuyến tính, bài toán truyền sóng bức xạ, và các ứng dụng trong lĩnh vực y học và sinh học.

Luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH trên miền hữu hạn và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn. Luận án cũng nghiên cứu một số lớp FIE-II trên miền vô hạn và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT. Hơn nữa, luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến.

Nội dung chương này được viết dựa trên các công trình [CT1, CT2] trong danh mục công trình khoa học của tác giả có liên quan đến luận án.

3.1 Phương trình tích phân Fredholm

Định nghĩa 3.1 Phương trình tích phân Fredholm (FIE) có dạng:

$$g(x)\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt + f(x), \quad a \leq t \leq b, \quad c \leq x \leq d, \quad (3.1)$$

trong đó, λ là một tham số cho trước; $a, b \in \mathbb{R}$ là các hằng số cố định; nhân $K(x, t)$, các hàm $g(x)$ và $f(x)$ đã biết; $\varphi(x)$ là ẩn hàm cần tìm. Khi $g(x) = 0$, phương trình (3.1) trở thành

$$\lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt + f(x) = 0. \quad (3.2)$$

Phương trình này được gọi là FIE loại I (FIE-I). Khi $g(x) = 1$, phương trình (3.1) trở thành

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt + f(x). \quad (3.3)$$

Phương trình này được gọi là FIE loại II (FIE-II).

Nhận xét 3.1 Phương trình tích phân Fredholm loại I (3.2) nói chung là bài toán đặt không chỉnh. Đây là dạng bài toán khó giải và thường không có phương pháp giải tích để tìm nghiệm đúng dưới dạng đóng. Xem [16, 36].

Để nghiên cứu FIE một cách tổng quát và hiệu quả, FIE được nghiên cứu trong bối cảnh một bài toán tổng quát hơn, như chuyển bài toán này sang phương trình toán tử, bài toán bất đẳng thức biên phân (VIP), hoặc bài toán bao hàm thức biên phân (VInP). Chuyển FIE sang phương trình toán tử cho phép áp dụng lý thuyết toán tử, đặc biệt là lý thuyết Fredholm, để nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm trong các không gian hàm. Chuyển FIE sang VIP cho phép mở rộng khả năng mô hình hóa để nghiên cứu FIE như một bài toán tối ưu hóa có ràng buộc hoặc bài toán giá trị biên (BVP), nghiên cứu những vấn đề mà FIE truyền thống có thể không xử lý được. Bài toán bao hàm thức biên phân cho phép xử lý các bài toán có sự tham gia của các hàm không trơn (*non-smooth functions*) hoặc toán tử đa trị. Chuyển FIE sang VInP cho phép áp dụng các định lý tồn tại nghiệm mạnh nhất và các thuật toán lặp hiệu quả từ lý thuyết tối ưu hóa để tìm nghiệm ổn định cho phương trình tích phân ban đầu. Xem [37, 50, 68, 69, 73].

Mối liên hệ giữa FIE và phương trình toán tử

Các FIE trên đều có thể được biểu diễn dưới dạng một phương trình toán tử. Cụ thể, phương trình (3.2) có thể đưa về phương trình toán tử trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$ như sau:

$$\mathcal{A}x = f, \quad (x, f \in \mathcal{H}), \quad (3.4)$$

trong đó, $\mathcal{A}$ là một toán tử tuyến tính đã biết (toán tử đại số, toán tử vi phân, toán tử tích phân, và các toán tử khác), f cho trước, và x là ẩn cần tìm.

Mối liên hệ giữa phương trình toán tử và bài toán bất đẳng thức biến phân

Bài toán bất đẳng thức biến phân (VIP) được định nghĩa như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ thỏa mãn } \langle \mathcal{F}x^*, x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C, \quad (3.5)$$

trong đó, C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$; $\mathcal{F}$ là một toán tử từ C vào $\mathcal{H}$; và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng được trang bị trong $\mathcal{H}$.

Bài toán bất đẳng thức biến phân (3.5) là trường hợp tổng quát hóa của phương trình (3.4). Thật vậy, đặt $\mathcal{F}x = \mathcal{A}x - f$, khi đó phương trình toán tử $\mathcal{A}x = f$ có thể đưa về VIP:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ thỏa mãn } \langle \mathcal{A}x^* - f, y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in \mathcal{H},$$

trong đó, nghiệm được tìm trong tập lồi C là toàn bộ không gian Hilbert $\mathcal{H}$. Ta có thể chứng minh nghiệm của phương trình toán tử $\mathcal{A}x = f$ và nghiệm của VIP là tương đương:

- Giả sử x^* là nghiệm của phương trình toán tử $\mathcal{A}x = f$. Khi đó, $\mathcal{A}x^* - f = 0$, suy ra

$$\langle \mathcal{A}x^* - f, y - x^* \rangle = \langle 0, y - x^* \rangle = 0.$$

Tức là x^* là nghiệm của VIP.

- Giả sử x^* là nghiệm của VIP, tức là $\langle \mathcal{A}x^* - f, y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in \mathcal{H}$. Chọn $y = x^* + u$, với $u \in \mathcal{H}$ tùy ý, khi đó, bất đẳng thức biến phân trở thành $\langle \mathcal{A}x^* - f, u \rangle \geq 0, \forall u \in \mathcal{H}$. Suy ra, $\mathcal{A}x^* - f = 0$, hay $\mathcal{A}x^* = f$.

Mối liên hệ giữa VIP và bài toán bao hàm thức biến phân

Bài toán bao hàm thức biến phân (VInP) có cấu trúc tổng được định nghĩa như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \mathcal{H} \text{ thỏa mãn } 0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})x^*, \quad (3.6)$$

trong đó, $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ là một toán tử đa trị, đơn điệu cực đại và $\mathcal{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là một toán tử đơn trị, liên tục Lipschitz. Hơn nữa, ta cũng có thể giả thiết $\mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu, hoặc tổng quát hơn, giả thiết $\mathcal{G} := \mathcal{A} + \mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu cực đại.

Bài toán bao hàm thức biến phân (3.6) là dạng tổng quát hóa của VIP (3.5). Thật vậy, nếu ta xét VInP có dạng $0 \in (\mathcal{N}_C + \mathcal{F})x^*$, trong đó $\mathcal{N}_C(x^*)$ là nón pháp tuyến của tập C tại điểm x^* , thì bài toán (3.6) trở thành VIP (3.5). Ta có thể chứng minh bằng cách sử dụng định nghĩa của nón pháp tuyến $\mathcal{N}_C(x^*)$:

- Giả sử x^* là nghiệm của bài toán (3.5), khi đó, $x^* \in C$ và $\langle \mathcal{F}(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in C$.
Tức là $-\mathcal{F}(x^*) \in \mathcal{N}_C(x^*)$, hay $0 \in (\mathcal{N}_C + \mathcal{F})x^*$.
- Ngược lại, nếu $0 \in (\mathcal{N}_C + \mathcal{F})x^*$, thì tồn tại $u \in \mathcal{N}_C(x^*)$ sao cho $u = -\mathcal{F}(x^*)$. Theo định nghĩa của nón pháp tuyến, $x^* \in C$ và $\langle u, y - x^* \rangle \leq 0, \forall y \in C$. Thay $u = -\mathcal{F}(x^*)$, ta nhận được $\langle -\mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle \leq 0$, hay $\langle \mathcal{F}(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in C$.

Như vậy, để nghiên cứu FIE trong khuôn khổ một bài toán tổng quát hơn, từ FIE, ta có thể đưa về phương trình toán tử, VIP hoặc VInP. Mối liên hệ giữa các bài toán này có thể được mô tả qua sơ đồ dưới đây.

Phương trình tích phân Fredholm

$\Downarrow$

Phương trình toán tử $\mathcal{A}x = f$

$\Downarrow$

Bài toán bất đẳng thức biến phân $\langle \mathcal{F}x^*, y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in \mathcal{H}$

$\Downarrow$

Bài toán bao hàm thức biến phân $0 \in \mathcal{N}_C(x^*) + \mathcal{F}x^*$

3.2 Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(x) + \int_a^b [p(x-u) + q(x+u)]\varphi(u)du = f(x), \quad (3.7)$$

trong đó, tham số $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước, $a, b \in \mathbb{R}$ là các hằng số cố định; các hàm p, q và dữ liệu f đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm. Các hàm p, q là nhân Toeplitz và Henkel tương ứng.

Năm 1981, J.N. Tsitsiklis và B.C Levy đã nghiên cứu phương trình tích phân (3.7) với nhân có cấu trúc dạng TPH. Họ đã sử dụng giả thiết các hàm p, q khả vi liên tục cấp hai trên $\mathbb{R}$ để khảo sát các đặc trưng toán tử và giải số cho phương trình (3.7) [82]. Với giả thiết nhân $K(x, u)$ khả vi liên tục theo từng biến x và u , các tác giả này đã chuyển bài toán (3.7) về một họ các phương trình đạo hàm riêng bậc nhất, từ đó cho phép giải gần đúng bài toán này bằng phương pháp đệ quy. Kết quả của họ đã được ứng dụng trong lĩnh vực xử lý tín hiệu. Năm 2000, I. Feldman và cộng sự đã đưa ra các điều kiện cần và đủ thông qua các chỉ số địa phương để xác định tính khả nghịch của toán tử tích phân Toeplitz (không có phần Hankel) trong không gian các hàm khả tích Lebesgue trên một khoảng hữu hạn [32]. Năm 2014, L.P. Castro và cộng sự đã đề xuất một cách tiếp cận mới để giải một số lớp phương trình tích phân loại II (IE-II) có nhân dạng TPH dựa trên phương pháp nhân tái tạo trong không gian Hilbert [25]. Gần đây, Castro và cộng sự (2020) cũng giới thiệu các tích chập mới và ứng dụng các tích chập này giải IE-II với nhân dạng Winer-Hopf + Hankel [24].

Luận án nghiên cứu một số phương pháp ứng dụng các tích chập liên kết với các biến đổi Hartley hữu hạn để giải phương trình tích phân (3.7), cũng như phương trình tích phân dạng (3.7) cho trường hợp tổng quát hơn khi các nhân Toeplitz và Hankel có dịch chuyển. Ý tưởng là sử dụng các tích chập Hartley hữu hạn để đưa phương trình (3.7) về hệ hai phương trình đại số tuyến tính. Nghiệm nhận được từ hệ phương trình này thuộc không gian Hilbert L^2 và được biểu diễn dưới dạng một chuỗi Hartley tường minh. Do đó, thay vì giả thiết về độ trơn của các hàm nhân p và q như trong các công trình khác thường sử dụng, các phương pháp này chỉ cần giả thiết các hàm này khả tích Lebesgue, liên tục từng khúc và tuần hoàn với chu kỳ 2π .

3.2.1 Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel dịch chuyển

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u-h_1) + q(x+u-h_2)]\varphi(u)du = f(x), \quad (3.8)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ cho trước; các hàm p, q và f đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Nhận xét 3.2 Một hàm liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$ có thể được thác triển thành một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $\mathbb{R}$. Vì vậy, ta có thể giả thiết p, q là các hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $\mathbb{R}$ và liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, đặt

$$\begin{aligned} A(n) &:= \lambda + \text{cas}^-(h_1n)\hat{p}_1(n) + \text{cas}(h_1n)\hat{p}_2(n) + \text{cas}(h_2n)\hat{q}_1(n) - \text{cas}^-(h_2n)\hat{q}_2(n), \\ B(n) &:= \text{cas}(h_1n)\hat{p}_1(n) - \text{cas}^-(h_1n)\hat{p}_2(n) + \text{cas}^-(h_2n)\hat{q}_1(n) + \text{cas}(h_2n)\hat{q}_2(n), \\ D_1(n) &:= A^-(n)\hat{f}_1(n) - B(n)\hat{f}_2(n), \quad D_2(n) := A(n)\hat{f}_2(n) - B^-(n)\hat{f}_1(n), \\ D(n) &:= A(n)A^-(n) - B(n)B^-(n). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Định lý 3.1 Cho p, q là các hàm liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$ và f là hàm bình phương khả tích.

- (i) Nếu $\lambda \neq 0$, tồn tại một số nguyên K^* sao cho $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geq K^*$.
- (ii) Nếu $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, thì phương trình (3.8) có nghiệm duy nhất trong $L^2[-\pi, \pi]$ với mọi $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Hơn nữa, nghiệm được xác định bởi công thức

$$\varphi(x) = \frac{D_1(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{D_1(n)}{D(n)} \text{cas}(nx) + \frac{D_2(n)}{D(n)} \text{cas}(-nx) \right]. \quad (3.10)$$

Chứng minh.

- (i) Theo bổ đề Riemann-Lebesgue, ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{p}_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_j(n) = 0$ ($j = 1, 2$), nên $\lim_{n \rightarrow \infty} D(n) = \lambda^2 \neq 0$. Do đó, tồn tại số nguyên $K^* \in \mathbb{N}_0$ sao cho $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geq K^*$.

(ii) Ta chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình (3.8) sử dụng định lý loại trừ Fredholm. Giả sử phương trình là thuần nhất (nghĩa là $f = 0$) có nghiệm $\varphi_* \in L^2[-\pi, \pi]$ (chú ý rằng phương trình luôn có ít nhất một nghiệm tầm thường $\varphi = 0$), nghĩa là

$$\lambda\varphi_*(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u-h_1) + q(x+u-h_2)]\varphi_*(u)du = 0. \quad (3.11)$$

Tác động $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ vào hai vế của đồng nhất thức (3.11), đồng thời sử dụng các đồng nhất thức (2.15) - (2.22), ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} A(n)\hat{\varphi}_{*1}(n) + B(n)\hat{\varphi}_{*2}(n) = 0 \\ B^-(n)\hat{\varphi}_{*1}(n) + A^-(n)\hat{\varphi}_{*2}(n) = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

trong đó, $\hat{\varphi}_{*1}(n), \hat{\varphi}_{*2}(n)$ là các hệ số Hartley chưa biết của hàm φ_* . Với $n \in \mathbb{N}_0$, định thức của hệ phương trình (3.12) chính là $D(n)$ được định nghĩa trong (3.9). Do $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, nên $\hat{\varphi}_{*1}(n) = \hat{\varphi}_{*2}(n) = 0$ với mọi $n \geq 0$. Theo định lý tồn tại duy nhất của HT, ta suy ra $\varphi_* = 0$. Như vậy, phương trình thuần nhất (3.8) chỉ có duy nhất nghiệm tầm thường, do đó, theo định lý loại trừ Fredholm, phương trình (3.8) có nghiệm duy nhất.

Tiếp theo, ta chứng minh công thức nghiệm (3.10). Giả sử một hàm $\varphi \in L^2[-\pi, \pi]$ thỏa mãn phương trình (3.8). Tương tự như cách ta nhận được hệ (3.12), ta có hệ hai phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} A(n)\hat{\varphi}_1(n) + B(n)\hat{\varphi}_2(n) = \hat{f}_1(n) \\ B^-(n)\hat{\varphi}_1(n) + A^-(n)\hat{\varphi}_2(n) = \hat{f}_2(n), \end{cases} \quad (3.13)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}_0$. Do $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, hệ (3.13) có nghiệm duy nhất là

$$\hat{\varphi}_1(n) = \frac{D_1(n)}{D(n)}, \quad \hat{\varphi}_2(n) = \frac{D_2(n)}{D(n)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.14)$$

Theo Định lý 2.1, do hàm φ thuộc không gian $L^2[-\pi, \pi]$, nên φ có khai triển theo chuỗi Hartley hội tụ, hơn nữa, các hệ số Hartley của φ chính là (3.14) và thỏa mãn hệ phương trình (3.13), do đó, ta có

$$\|\varphi\|_2 = \left| \frac{D_1(0)}{D(0)} \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{D_1(n)}{D(n)} \right|^2 + \left| \frac{D_2(n)}{D(n)} \right|^2 \right) < +\infty.$$

Ngược lại, nếu một hàm $\varphi_0(x)$ được xác định bởi công thức

$$\varphi_0(x) = \frac{D_1(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{D_1(n)}{D(n)} \text{cas}(nx) + \frac{D_2(n)}{D(n)} \text{cas}(-nx) \right],$$

thì φ_0 thuộc $L^2[-\pi, \pi]$, và $\varphi_0 \stackrel{\text{a.e.}}{=} \varphi$ trên $[-\pi, \pi]$. Vì φ thỏa mãn phương trình (3.8), nên φ_0 cũng thỏa mãn phương trình (3.8).

Định lý được chứng minh. $\square$

3.2.2 Phương trình tích phân Fredholm loại II với nhân dạng Toeplitz + Hankel

Xét phương trình tích phân

$$\lambda \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du = f(x), \quad (3.15)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước, các hàm p, q và dữ liệu ban đầu f đã biết, φ là ẩn hàm cần tìm.

Với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, đặt

$$\begin{aligned} A(n) &:= \lambda + \hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n), \\ B(n) &:= \hat{p}_1(n) - \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n), \\ D_1(n) &:= A^-(n) \hat{f}_1(n) - B(n) \hat{f}_2(n), \quad D_2(n) := A(n) \hat{f}_2(n) - B^-(n) \hat{f}_1(n), \\ D(n) &:= A(n) A^-(n) - B(n) B^-(n). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Định lý 3.2 Cho p, q là các hàm liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$ và f là hàm bình phương khả tích.

- (i) Nếu $\lambda \neq 0$, tồn tại một số nguyên K^* thỏa mãn $D(n) \neq 0$ với mọi $n \geq K^*$.
- (ii) Nếu $D(n) \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}_0$, thì phương trình (3.15) có nghiệm duy nhất trong $L^2[-\pi, \pi]$ với mọi $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Hơn nữa, nghiệm được xác định bởi công thức

$$\varphi(x) = \frac{D_1(0)}{D(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{D_1(n)}{D(n)} \text{cas}(nx) + \frac{D_2(n)}{D(n)} \text{cas}(-nx) \right]. \quad (3.17)$$

Chứng minh. Từ Định lý 3.1, xét trường hợp hằng số $h_1 = h_2 = 0$ và sử dụng các đồng nhất thức (2.23) - (2.26), ta nhận được kết quả mong muốn.

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.3 Đây là một trường hợp riêng của phương trình tích phân (3.8), trường hợp này cũng đã được đề cập đến và chứng minh bởi N.M. Tuấn và cộng sự ([11] - Định lý 3.1).

3.3 Phương trình tích phân Fredholm loại I với phần tuyến tính Toeplitz + Hankel

Xét phương trình tích phân

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du = f(x), \quad (3.18)$$

trong đó, các hàm p, q và dữ liệu f đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Phương trình (3.18) cho phép mô hình hóa chính xác các hệ thống tuyến tính có cả tính chất dịch chuyển (Toeplitz) và tính chất đối xứng hoặc phản xạ (Hankel). Phương trình này đã xuất hiện trong nhiều lĩnh vực như lý thuyết tán xạ, vật lý lượng tử và kỹ thuật điện từ.

Phương trình tích phân Fredholm loại I nói chung là bài toán đặt không chỉnh. Tức là bài toán có thể không tồn tại nghiệm, hoặc nghiệm tồn tại nhưng không duy nhất, hoặc cũng có thể nghiệm tồn tại nhưng không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu ban đầu. Do các tính chất này, nghiệm của FIE-I với phần tuyến tính TPH có thể không tồn tại, và nếu tồn tại thì cũng không chắc phụ thuộc liên tục vào các hệ số và dữ liệu vế phải của phương trình.

Đã có nhiều phương pháp được nghiên cứu để giải FIE-I, các phương pháp này thường sử dụng quy trình rời rạc hóa kết hợp với kỹ thuật hiệu chỉnh để tìm nghiệm gần đúng ổn định. Các phương pháp rời rạc hóa phổ biến nhất thường được sử dụng là phương pháp trùng khớp (*collocation*), phương pháp Nyström, phương pháp Galerkin, kết hợp với các phương pháp hiệu chỉnh, như phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov (*Tikhonov Regularization*), phương pháp phân tích giá trị kỳ dị cắt ngắn (*Truncated SVD*), phương pháp lặp Landweber và phương pháp biến phân toàn phần hiệu chỉnh (*Total Variation Regularization*).

Phương trình tích phân (3.18) là trường hợp đặc biệt của FIE-I và là dạng bài toán đặt không chỉnh. Loại phương trình này đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu và phát triển các phương pháp giải của nhiều nhà khoa học. M.T. Nair và S.V. Pereverzev (2007) [59], M.T. Nair (2009) [58] sử dụng các phương pháp nhân tách được, phương pháp Nyström hiệu chỉnh, phương pháp trùng khớp hiệu chỉnh để giải. T.K. Ku và C.C.J. Kuo (1993) [51], M.K. Ng (1994) [60] phát triển một số phương pháp lặp để giải hệ phương trình đại số tuyến tính liên quan đến ma trận Toeplitz và Hankel. V.D. Didenko và B. Silbermann (2016) [29] đề xuất phương pháp giải tích sử dụng nghịch đảo tổng quát để tìm nghiệm dạng đóng cho các IE-I với phần tuyến tính TPH.

Để giải bài toán (3.18), luận án sử dụng các phương pháp hiệu chỉnh để đưa bài toán (3.18) về bài toán đặt chỉnh IE-II, cùng với các điều kiện bổ sung cho phép thu hẹp không gian nghiệm và chọn ra được nghiệm phù hợp nhất. Nghiệm của bài toán này ổn định với sự thay đổi của dữ liệu ban đầu.

Vì vậy, cùng với bài toán (3.18), ta xét bài toán hiệu chỉnh sau:

$$\alpha\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)]\varphi(u)du = f(x), \quad (3.19)$$

trong đó, $\alpha > 0$ được gọi là tham số hiệu chỉnh.

Trong thực tế, nhiều khi dữ liệu $f(x)$ không được biết chính xác, ta chỉ biết dữ liệu nhiễu f_δ với mức nhiễu không vượt quá δ , tức là $\|f_\delta - f\|_2 \leq \delta$. Do đó, cùng với bài toán (3.19), ta xét thêm một bài toán nữa có dạng

$$\alpha\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)]\varphi(u)du = f_\delta(x). \quad (3.20)$$

Các bài toán (3.18) - (3.20) trên có thể được viết lại dưới dạng phương trình toán tử trong không gian Hilbert thực $L^2[-\pi, \pi]$ như sau:

$$\mathcal{K}\varphi = f, \quad (3.21)$$

$$(\mathcal{K} + \alpha\mathcal{I})\varphi = f, \quad (3.22)$$

$$(\mathcal{K} + \alpha\mathcal{I})\varphi = f_\delta, \quad (3.23)$$

trong đó, $(\mathcal{K}\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)]\varphi(u)du$ và $\mathcal{I}$ là toán tử đồng nhất.

Ta nghiên cứu về điều kiện để $\mathcal{K}$ là toán tử compact không âm.

Dễ dàng chứng minh kết quả sơ cấp dưới đây.

Bổ đề 3.1 *Dạng toàn phương $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ với các hệ số thực A, B, C là không âm khi và chỉ khi $A \geq 0$, $C \geq 0$ và $AC - B^2 \geq 0$.*

Đặt

$$\begin{aligned} G_0 &:= \hat{p}_1(0) + \hat{q}_1(0), \\ G_n &:= \hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n), \\ E_n &:= \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n), \\ H_n &:= \hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) + \hat{q}_2(n) - \hat{q}_1(n), \\ F_n &:= G_n H_n - E_n^2, \end{aligned}$$

với mọi $n \geq 1$.

Bổ đề 3.2 *Giả sử p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π và liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$; giả sử p là hàm chẵn. Khi đó, $\mathcal{K}$ là toán tử tuyến tính tự liên hợp compact trên $L^2[-\pi, \pi]$. Hơn nữa, $\mathcal{K}$ là toán tử không âm khi và chỉ khi*

$$\begin{cases} G_0 \geq 0 \\ G_n \geq 0 \\ H_n \geq 0 \\ F_n \geq 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh. Tính chất tuyến tính tự liên hợp và compact của toán tử $\mathcal{K}$ là hệ quả của lý thuyết toán tử.

Ta kiểm tra tính không âm của toán tử $\mathcal{K}$. Với mọi $\varphi \in L^2[-\pi, \pi]$, đặt $\psi(x) := (\mathcal{K}\varphi)(x)$. Xét tích vô hướng

$$\langle \mathcal{K}\varphi, \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

Sử dụng các đồng nhất thức (2.23) - (2.26) để tính các hệ số Hartley của ψ , ta có

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1(n) &= [\hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n)]\hat{\varphi}_1(n) \\ &\quad + [\hat{p}_1(n) - \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n)]\hat{\varphi}_2(n),\end{aligned}\quad (3.25)$$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_2(n) &= [-\hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) + \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n)]\hat{\varphi}_1(n) \\ &\quad + [\hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) - \hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n)]\hat{\varphi}_2(n).\end{aligned}\quad (3.26)$$

Thay thế ψ bằng chuỗi Hartley hội tụ trong $L^2[-\pi, \pi]$ như trong (2.4), và để ý đến tính liên tục của tích vô hướng, đồng thời sử dụng các quan hệ (3.25) và (3.26), ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\langle \mathcal{K}\varphi, \varphi \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \hat{\psi}_1(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [\hat{\psi}_1(n) \text{cas}(nx) + \hat{\psi}_2(n) \text{cas}(-nx)] \right\} \varphi(x) dx \\ &= 2G_0 [\hat{\varphi}_1(0)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ G_n [\hat{\varphi}_1(n)]^2 + 2E_n \hat{\varphi}_1(n) \hat{\varphi}_2(n) + H_n [\hat{\varphi}_2(n)]^2 \right\} \\ &= 2G_0 [\hat{\varphi}_1(0)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n,\end{aligned}\quad (3.27)$$

trong đó, $T_n := G_n [\hat{\varphi}_1(n)]^2 + 2E_n \hat{\varphi}_1(n) \hat{\varphi}_2(n) + H_n [\hat{\varphi}_2(n)]^2$, $n \geq 1$.

Phần tiếp theo của chứng minh Bổ đề 3.2 được thực hiện theo các bước dưới đây.

Điều kiện cần. Giả sử toán tử $\mathcal{K}$ không âm, tức là

$$\frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{K}\varphi, \varphi \rangle = 2[\hat{p}_1(0) + \hat{q}_1(0)] [\hat{\varphi}_1(0)]^2 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \geq 0, \quad (3.28)$$

với mọi $\varphi \in L^2[-\pi, \pi]$. Chú ý rằng tập các hàm (2.3) tạo thành cơ sở trực chuẩn của $L^2[-\pi, \pi]$, và $\hat{p}_1(0) = \hat{p}_2(0)$, $\hat{q}_1(0) = \hat{q}_2(0)$, $\hat{\varphi}_1(0) = \hat{\varphi}_2(0)$, với mọi p, q, φ thuộc $L^2[-\pi, \pi]$. Mặt khác, với mọi $k \in \mathbb{N}_0$, các hàm $\alpha(x) = \text{cas}(0x) = 1$, $\beta(x) = \text{cas}(kx)$ và $\gamma(x) = \text{cas}(-kx)$ đều thuộc $L^2[-\pi, \pi]$. Hơn nữa,

$$\hat{\alpha}_1(0) = \hat{\alpha}_2(0) = 1, \quad \hat{\alpha}_1(n) = \hat{\alpha}_2(n) = 0 \quad \text{với mọi } n \geq 1; \quad (3.29)$$

$$\hat{\beta}_1(k) = 1, \quad \hat{\beta}_2(k) = 0, \quad \hat{\beta}_1(n) = \hat{\beta}_2(n) = 0 \quad \text{với mọi } n \neq k; \quad (3.30)$$

$$\hat{\gamma}_2(k) = 1, \quad \hat{\gamma}_1(k) = 0, \quad \hat{\gamma}_1(n) = \hat{\gamma}_2(n) = 0 \quad \text{với mọi } n \neq k. \quad (3.31)$$

Cho $\alpha(x) = 1$ trong (3.28) và sử dụng (3.29), ta nhận được

$$G_0 = \hat{p}_1(0) + \hat{q}_1(0) \geq 0.$$

Với $k \geq 1$ cố định, thay $\beta(x) = \text{cas}(kx)$ ($\gamma(x) = \text{cas}(-kx)$) vào (3.28) và sử dụng (3.30), ta nhận được

$$G_k \geq 0 \quad (H_k \geq 0).$$

Mặt khác, đặt $\varphi(x) = t \text{cas}(kx) + \text{cas}(-kx)$, trong đó t là số thực và k là một số nguyên cố định trong (3.28), ta nhận được $G_k t^2 + 2E_k t + H_k \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Theo Bổ đề 3.1, ta có

$$G_k H_k - E_k^2 \geq 0.$$

Điều kiện đủ. Giả sử tất cả điều kiện trong (3.24) được thỏa mãn. Theo (3.27) và Bổ đề 3.1, ta dễ dàng suy ra

$$\langle \mathcal{K}\varphi, \varphi \rangle \geq 0, \quad \forall \varphi \in L^2[-\pi, \pi].$$

Bổ đề được chứng minh. □

Hệ quả 3.1 Giả sử p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π và liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$; giả sử p là hàm chẵn. Hơn nữa, giả sử rằng tất cả các hệ số Hartley của p và q là không âm. Khi đó, $\mathcal{K}$ là toán tử compact tự liên hợp không âm trên $L^2[-\pi, \pi]$ nếu

$$\hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) \geq \left\{ [\hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n)]^2 + [\hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n)]^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall n \geq 1. \quad (3.32)$$

Chứng minh. Vì các hệ số Hartley của p và q là không âm, nên rõ ràng $G_0 \geq 0$ và $E_n \geq 0$. Giả sử bất đẳng thức (3.32) đúng, khi đó $\hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n) \geq |\hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n)|$, do đó $G_n \geq 0$ và $H_n \geq 0$. Cuối cùng, sử dụng (3.32), ta có

$$G_n H_n = [\hat{p}_1(n) + \hat{p}_2(n)]^2 - [\hat{q}_1(n) - \hat{q}_2(n)]^2 \geq [\hat{q}_1(n) + \hat{q}_2(n)]^2 = E_n^2.$$

Như vậy, tất cả các điều kiện trong Bổ đề 3.2 được thỏa mãn, do đó $\mathcal{K}$ là toán tử compact tự liên hợp không âm.

Hệ quả được chứng minh. □

Bổ đề 3.3 Giả sử tất cả các điều kiện trong Bổ đề 3.2 được thỏa mãn và $\hat{p}_1(0) \geq 0$. Khi đó, tất cả các định thức $D(n)$ được định nghĩa trong (3.16) khác 0, vì vậy phương trình (3.20) có một nghiệm duy nhất cho bởi công thức (3.10).

Chứng minh. Ta có

$$D(0) = [\alpha + 2\hat{p}_1(0)][\alpha + 2\hat{p}_2(0)] + 4\hat{q}_1(0)\hat{q}_2(0) = [\alpha + 2\hat{p}_1(0)]^2 + 4(\hat{q}_1(0))^2 \geq \alpha^2 > 0.$$

Giả sử tồn tại $n_0 \geq 1$ sao cho $D(n_0) = 0$. Khi đó, hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất tương ứng có nghiệm không tầm thường, nghĩa là tồn tại $\varphi_{1n_0}, \varphi_{2n_0}$ sao cho $\varphi_{1n_0}^2 + \varphi_{2n_0}^2 > 0$ thỏa mãn

$$\begin{cases} A(n_0)\varphi_{1n_0} + B(n_0)\varphi_{2n_0} = 0 \\ B^-(n_0)\varphi_{1n_0} + A^-(n_0)\varphi_{2n_0} = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

Đặt $\varphi(x) := \varphi_{1n_0} \text{cas}(n_0x) + \varphi_{2n_0} \text{cas}^-(n_0x)$. Rõ ràng, $\|\varphi\|_2^2 = \varphi_{1n_0}^2 + \varphi_{2n_0}^2 > 0$. Hơn nữa, $\hat{\varphi}_1(m) = \varphi_{1n_0}\delta_{mn_0}$, $\hat{\varphi}_2(m) = \varphi_{2n_0}\delta_{mn_0}$, $\forall m \geq 0$. Đặt

$$\psi(x) := \alpha\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)]\varphi(u)du. \quad (3.34)$$

Tác động $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ vào vế bên phải của (3.34), từ các quan hệ (2.23) - (2.26), ta nhận được

$$\begin{cases} \hat{\psi}_1(m) = A(m)\hat{\varphi}_1(m) + B(m)\hat{\varphi}_2(m) \\ \hat{\psi}_2(m) = B^-(m)\hat{\varphi}_1(m) + A^-(m)\hat{\varphi}_2(m). \end{cases}$$

Nếu $m \neq n_0$ thì $\hat{\varphi}_1(m) = \hat{\varphi}_2(m) = 0$, do đó $\hat{\psi}_1(m) = \hat{\psi}_2(m) = 0$. Nếu $m = n_0$, thì theo (3.33), $\hat{\psi}_1(n_0) = A(n_0)\hat{\varphi}_1(n_0) + B(n_0)\hat{\varphi}_2(n_0) = A(n_0)\varphi_{1n_0} + B(n_0)\varphi_{2n_0} = 0$. Tương tự, $\hat{\psi}_2(n_0) = 0$. Như vậy, $\hat{\psi}_1(m) = \hat{\psi}_2(m) = 0$, $\forall m \geq 0$, do đó $\psi = 0$. Từ quan hệ (3.34), φ là nghiệm không tầm thường của phương trình tích phân thuần nhất $(\mathcal{K} + \alpha\mathcal{I})\varphi = 0$.

Mặt khác, theo Bổ đề 3.2, $\mathcal{K} + \alpha\mathcal{I}$ là toán tử tự liên hợp xác định dương, do đó, nó có nghịch đảo bị chặn. Vì vậy, phương trình thuần nhất tương ứng chỉ có duy nhất nghiệm tầm thường. Ta đi đến mâu thuẫn.

Bổ đề được chứng minh. □

Định lý 3.3 Giả sử p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π . Hơn nữa, giả sử rằng các hệ số Hartley của p và q thỏa mãn bất đẳng thức (3.24) và $\hat{p}_1(0) \geq 0$. Giả sử rằng phương trình (3.18) có nghiệm $\varphi^\dagger$, và nghiệm thỏa mãn điều kiện nguồn (source condition) $\varphi^\dagger \in \text{Im}(\mathcal{K}^\nu)$, với ν thỏa mãn $0 < \nu \leq 1$. Khi đó, nghiệm hiệu chỉnh $\varphi_{\alpha,\delta}$ được xác định trong công thức (3.10) hội tụ đến nghiệm chính xác $\varphi^\dagger$. Hơn nữa, ta có ước lượng sai số

$$\|\varphi_{\alpha,\delta} - \varphi^\dagger\| \leq \delta/\alpha + c\alpha^\nu, \quad (3.35)$$

trong đó, c là một hằng số dương. Trường hợp đặc biệt, nếu $\alpha = \delta^{1/(\nu+1)}$, thì ta có

$$\|\varphi_{\alpha,\delta} - \varphi^\dagger\| = O(\delta^{\nu/(\nu+1)}). \quad (3.36)$$

Chứng minh. Chứng minh được thực hiện theo sơ đồ chung, ví dụ xem Y. Alber và I. Ryazantseva (2006) [6], M.T. Nair và S.V. Pereverzev (2007) [59].

Theo Bổ đề 3.2, các phương trình (3.21) - (3.22) có nghiệm duy nhất, ký hiệu là φ_α và $\varphi_{\alpha,\delta}$ tương ứng. Hơn nữa, theo Bổ đề 3.3, nghiệm $\varphi_{\alpha,\delta}$ được xác định bởi công thức (3.10). Từ điều kiện nguồn, tồn tại một phân tử $\psi \in L^2[-\pi, \pi]$ thỏa mãn $\varphi^\dagger = \mathcal{K}^\nu \psi$. Khi đó,

$$\varphi_\alpha - \varphi^\dagger = -\alpha(\mathcal{K} + \alpha\mathcal{I})^{-1}\varphi^\dagger = -\alpha(\mathcal{K} + \alpha\mathcal{I})^{-1}\mathcal{K}^\nu\psi.$$

Sử dụng các ước lượng $\|(\mathcal{K} + \alpha\mathcal{I})^{-1}\| \leq 1/\alpha$ và $\|\alpha(\mathcal{K} + \alpha\mathcal{I})^{-1}\mathcal{K}^\nu\| \leq \alpha^\nu$, ta có

$$\|\varphi_{\alpha,\delta} - \varphi^\dagger\| \leq \|\varphi_{\alpha,\delta} - \varphi_\alpha\| + \|\varphi_\alpha - \varphi^\dagger\| \leq \delta/\alpha + \alpha^\nu\|\psi\|.$$

Từ đây, nếu chọn tham số hiệu chỉnh $\alpha = \delta^\mu$, với $0 < \mu < 1$, thì ước lượng (3.35) trở thành $\|\varphi_{\alpha,\delta} - \varphi^\dagger\| \leq \delta^{1-\mu} + \delta^{\nu\mu}\|\psi\|$. Ta có thể chọn $\mu = 1/(\nu + 1)$, và nhận được (3.36).

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.4 Nếu điều kiện nguồn không được thỏa mãn, thì ước lượng sai số (3.35) có thể không đúng. Tuy nhiên, ta có thể chứng minh rằng nghiệm hiệu chỉnh φ_α vẫn hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của (3.21), ký hiệu là $\varphi^\dagger$, khi $\alpha \rightarrow 0$. Do đó, nên chọn tham số hiệu chỉnh α thỏa mãn $\alpha \rightarrow 0$ và $\delta/\alpha \rightarrow 0$ khi mức nhiễu $\delta \rightarrow 0$, thì $\varphi_{\alpha,\delta} \rightarrow \varphi^\dagger$.

3.3.1 Phương pháp chỉnh lặp song song giải gần đúng hệ phương trình tích phân Fredholm loại I với nhân dạng Toeplitz + Hankel

Xét hệ phương trình tích phân

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p_i(x-u) + q_i(x+u)] \varphi(u) du = f_i(x), \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.37)$$

trong đó, các dữ liệu $f_i \in L^2[-\pi, \pi]$. Hệ (3.37) có thể viết lại dưới dạng toán tử:

$$\mathcal{K}_i \varphi = f_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

trong đó, $(\mathcal{K}_i \varphi)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p_i(x-u) + q_i(x+u)] \varphi(u) du$.

Trước tiên, ta nghiên cứu trường hợp dữ liệu chính xác.

Định lý 3.4 *Giả sử tập S tất cả các nghiệm của hệ (3.37) không rỗng. Hơn nữa, giả thiết các nhân p_i và q_i , $i = 1, \dots, N$ thỏa mãn các điều kiện trong Bổ đề 3.2 và $\hat{p}_{i1}(0) \geq 0$, $i = 1, \dots, N$. Cho (α_n) và (γ_n) là hai dãy số dương được chọn trước thỏa mãn các điều kiện $\alpha_n \searrow 0$, $\gamma_n \nearrow \infty$, $\frac{\gamma_n(\alpha_n - \alpha_{n+1})}{\alpha_n^2} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} = \infty$. Khi đó, quá trình chỉnh lặp song song*

$$\begin{cases} \mathcal{K}_i(\varphi_n^i) + \left(\frac{\alpha_n}{N} + \gamma_n\right) \varphi_n^i = \gamma_n \varphi_n + f_i, \quad i = 1, \dots, N \\ \varphi_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_n^i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_n^i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ của hệ (3.37).

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.2, $\mathcal{K}_i$ ($i = 1, \dots, N$) là các toán tử tuyến tính compact, tự liên hợp và không âm. Theo Mệnh đề 1.6, các toán tử này là đơn điệu mạnh ngược, tức là tồn tại $\beta_i > 0$ sao cho $\langle \mathcal{K}_i \varphi, \varphi \rangle \geq \beta_i \|\mathcal{K}_i \varphi\|^2$, $i = 1, \dots, N$. Do đó, ta có thể áp dụng phương pháp chỉnh lặp ả song song trong Định lý 1.24 cho hệ phương trình với toán tử đơn điệu mạnh ngược. Do tập S các nghiệm của phương trình đơn điệu mạnh ngược là tập đóng và lồi trong không gian Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$, nên tồn tại một nghiệm có chuẩn nhỏ nhất, ký hiệu là $\varphi^\dagger := \operatorname{argmin}_{\varphi \in S} \|\varphi\|$. Theo Định lý 1.24, quá trình (3.38) - (3.39) hội tụ đến nghiệm $\varphi^\dagger$.

Mặt khác, tất cả các phương trình (3.38) là đặt chỉnh và độc lập với nhau, do đó, theo Bổ đề 3.3, các nghiệm của chúng có thể được tính toán song song theo công thức (3.10).

Định lý được chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.5 Dãy $\alpha_n = (1+n)^{-1/2}$, $\gamma_n = \ln(n+2)$ hoặc $\alpha_n = (1+n)^{-p}$, $\gamma_n = (1+n)^{1/2}$, với $0 < p < 1/2$, thỏa mãn tất cả điều kiện trong Định lý 3.4.

Tương tự, ta có kết quả cho trường hợp dữ liệu đã cho có nhiều, tức là thay vì biết f_i chính xác, ta chỉ biết $f_{i,n}$ thỏa mãn $\|f_{i,n} - f_i\| \leq \delta_n$, $i = 1, \dots, N$, trong đó, $\delta_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Định lý 3.5 Với điều kiện như trong Định lý 3.4, nếu các dãy (α_n) , (γ_n) và mức nhiễu (δ_n) thỏa mãn các điều kiện $\alpha_n \gamma_n \geq N$, $\delta_n \gamma_n \leq M$, với M là một hằng số dương, thì quá trình chỉnh lặp song song

$$\begin{cases} \mathcal{K}_i(\varphi_n^i) + \left(\frac{\alpha_n}{N} + \gamma_n\right) \varphi_n^i = \gamma_n \varphi_n + f_{i,n}, \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varphi_n^i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.41)$$

hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ của hệ (3.37).

3.3.2 Phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi và chỉnh lặp tiến-lùi-tiến giải gần đúng phương trình tích phân Fredholm loại I với phần tuyến tính Toeplitz + Hankel

Xét phương trình tích phân

$$\mathcal{K}\varphi + \mathcal{F}(\varphi) = f, \quad (3.42)$$

trong đó, $(\mathcal{K}\varphi)(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du$, và toán tử tích phân phi tuyến

$$\mathcal{F}(\varphi)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}(x, u, \varphi(u)) du$$

là toán tử đơn điệu, liên tục Lipschitz từ không gian Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$ vào chính nó. Ta giả thiết phương trình (3.42) là tương thích, nghĩa là tập nghiệm của nó, ký hiệu là S , không rỗng.

Kết hợp Bổ đề 3.2 và Định lý 1.26, ta nhận được phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (FBSM) để giải gần đúng bài toán đặt không chỉnh (3.42).

Định lý 3.6 *Giả sử p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π và liên tục từng khúc trên đoạn $[-\pi, \pi]$; giả sử p là hàm chẵn. Hơn nữa, giả sử rằng các hệ số Hartley của p và q thỏa mãn các bất đẳng thức (3.24) và $\hat{p}_1(0) \geq 0$, toán tử $\mathcal{F} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ là toán tử đơn điệu và liên tục $L_{\mathcal{F}}$ -Lipschitz. Giả sử phương trình (3.42) là tương thích và các dãy tham số (α_n) , (λ_n) thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$(C1) \quad 0 < \lambda_n < \frac{\alpha_n}{4L_{\mathcal{F}}^2},$$

$$(C2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

$$(C3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n = +\infty,$$

$$(C4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|\lambda_n - \lambda_{n-1}| |\alpha_n - \alpha_{n-1}|}{\lambda_n^3 \alpha_n^2} + \frac{|\lambda_n - \lambda_{n-1}| + |\lambda_n \alpha_n - \lambda_{n-1} \alpha_{n-1}|}{\lambda_n^2 \alpha_n^2} \right) = 0.$$

Khi đó, xuất phát từ một điểm ban đầu $\varphi_0 \in L^2[-\pi, \pi]$ nào đó, quá trình chỉnh lặp

$$\varphi_{n+1} + \lambda_n \mathcal{K} \varphi_{n+1} = (1 - \alpha_n \lambda_n) \varphi_n - \lambda_n \mathcal{F}(\varphi_n) + \lambda_n f \quad (3.43)$$

hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ khi $n \rightarrow \infty$.

Chứng minh. Phương trình (3.42) có thể viết lại dưới dạng VInP đơn điệu như sau:

$$\text{Tìm } u^* \in L^2[-\pi, \pi] \text{ thỏa mãn } 0 \in (\mathcal{A} + \mathcal{B})u^*, \quad (3.44)$$

trong đó, $\mathcal{A} := \mathcal{K}$ và $\mathcal{B} := \mathcal{F} - f$.

Theo Bổ đề 3.2, $\mathcal{K}$ là toán tử tuyến tính compact, tự liên hợp và không âm, do đó $\mathcal{A}$ là toán tử đơn điệu cực đại. Toán tử $\mathcal{B}$ là toán tử đơn điệu và liên tục Lipschitz.

Định nghĩa giải thức của toán tử đơn điệu cực đại $\mathcal{A}$ là $J_{\lambda \mathcal{A}} := (\mathcal{I} + \lambda \mathcal{A})^{-1}$, ta thiết lập thuật toán theo phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi (FBSM) như sau:

$$\varphi_{n+1} = J_{\lambda_n \mathcal{A}} \left(\varphi_n - \lambda_n [\mathcal{B} \varphi_n + \alpha_n \mathcal{R}(\varphi_n)] \right), \quad (3.45)$$

trong đó, $\mathcal{R} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ là một toán tử γ -đơn điệu mạnh và $L_{\mathcal{R}}$ -liên tục Lipschitz

đã biết. Trong trường hợp riêng, chọn $\mathcal{R} := \mathcal{I}$ và $L_{\mathcal{R}} = \gamma = 1$, theo Định lý 1.26, dãy (φ_n) được xác định bởi (3.45) hội tụ mạnh đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ của (3.44) nếu các dãy tham số (α_n) và (λ_n) thỏa mãn các điều kiện (C2) - (C3), và thỏa mãn điều kiện

$$C1' \quad 0 < \lambda_n < \frac{2(\gamma - l)\alpha_n}{(L_{\mathcal{F}} + L_{\mathcal{R}}\alpha_n)^2}, \quad l \in (0, \min\{\gamma, 1\}).$$

Do $\mathcal{R} := \mathcal{I}$, $L_{\mathcal{R}} = \gamma = 1$, ta có thể chọn $l = 0.5$. Hơn nữa, theo điều kiện (C2), $\alpha_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết $\alpha_n \leq L_{\mathcal{F}}$, $\forall n \geq 1$. Khi đó, điều kiện (C1') trở thành $0 < \lambda_n < \frac{\alpha_n}{(L_{\mathcal{F}} + \alpha_n)^2}$. Từ điều kiện (C1), ta có $0 < \lambda_n < \frac{\alpha_n}{4L_{\mathcal{F}}^2} \leq \frac{\alpha_n}{(L_{\mathcal{F}} + \alpha_n)^2}$, nên điều kiện (C1') được thỏa mãn.

Cho $J_{\lambda_n \mathcal{A}} = (\mathcal{I} + \lambda_n \mathcal{A})^{-1}$, $\mathcal{B}\varphi_n = \mathcal{F}(\varphi_n) - f$ và $\mathcal{R}(\varphi_n) = \varphi_n$ trong (3.45), ta nhận được công thức (3.43).

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.6 Một ví dụ tồn tại các dãy số (α_n) và (λ_n) thỏa mãn các điều kiện (C1) - (C4) là $\alpha_n = (n + 1)^{-q}$ và $\lambda_n = \frac{1}{4L_{\mathcal{F}}^2}(n + 1)^{-p}$, với $0 < q < p < 1$ và $2q + p < 1$.

Nhận xét 3.7 Đặt

$$\mathcal{F}(\varphi) := \varphi + \mathcal{W}(\varphi),$$

trong đó, $\mathcal{W}(\varphi)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} h(x, u, \varphi(u)) du$ là một toán tử Uryshon. Theo M.G. Krein và cộng sự (1972) [49], toán tử $\mathcal{W}$ từ $L^2[-\pi, \pi]$ vào $L^2[-\pi, \pi]$ là toán tử liên tục (thậm chí hoàn toàn liên tục) nếu nhân của nó là $h(x, s, \varphi)$ thỏa mãn điều kiện tăng trưởng

$$|h(x, s, \varphi)| \leq |R(x, s)|(a + b|\varphi|), \quad -\pi \leq x, s \leq \pi, \quad |\varphi| < \infty$$

theo φ , trong đó, $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |R(x, s)|^2 dx ds < \infty$. Giả sử nhân h thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo biến thứ ba, nghĩa là

$$|h(x, s, \varphi) - h(x, s, \psi)| \leq \omega(x, s)|\varphi - \psi|, \quad \forall x, s \in [-\pi, \pi], \quad \forall |\varphi|, |\psi| < \infty;$$

hơn nữa, giả thiết $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \omega^2(x, s) dx ds \leq 1$; khi đó, $\mathcal{W}$ là toán tử không giãn, nghĩa là $\|\mathcal{W}(\varphi) - \mathcal{W}(\psi)\| \leq \|\varphi - \psi\|$, với mọi $\varphi, \psi \in L^2[-\pi, \pi]$. Theo H.H. Bauschke và P.L. Combettes ([15] - Ví dụ 20.7), $\mathcal{F} = \mathcal{I} + \mathcal{W}$ là toán tử đơn điệu cực đại. Mặt khác, $\mathcal{F}$ là toán tử liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz $L_{\mathcal{F}} = 2$.

Nhận xét 3.8 Một nhược điểm của thuật toán 3.43 là khi độ dài bước λ_n giảm dần, thuật toán có thể hội tụ chậm. Để khắc phục nhược điểm này, ta xem xét một thuật toán khác sử dụng phương pháp chỉnh lặp tiến-lùi-tiến (FBFSM) như sau:

$$\begin{cases} v_n = J_{\lambda_n \mathcal{A}}(u_n - \lambda_n(\mathcal{B}u_n + \alpha_n \mathcal{R}u_n)) \\ u_{n+1} = v_n + \lambda_n(\mathcal{B}u_n - \mathcal{B}v_n), \end{cases} \quad (3.46)$$

trong đó, các dãy tham số hiệu chỉnh (α_n) và độ dài bước (λ_n) được chọn độc lập. Hơn nữa, các độ dài bước (λ_n) bị chặn và tách biệt khỏi giá trị 0.

Giả sử các toán tử $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ và $\mathcal{R}$ thỏa mãn các điều kiện như trong Định lý 3.6, khi đó theo Định lý 1.27, với những điều kiện sau về các dãy tham số hiệu chỉnh (α_n) và độ dài bước (λ_n) :

$$(C5) \quad \{\lambda_n\} \subset [a, b] \subset \left(0, \frac{1}{L_{\mathcal{B}}}\right),$$

$$(C6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0,$$

$$(C7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty,$$

$$(C8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n+1}}{\alpha_n^2} = 0,$$

thì FBFSM (3.46) hội tụ mạnh đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của (3.44).

Xét phương trình tích phân phi tuyến (3.42) với cùng giả thiết về các toán tử $\mathcal{K}, \mathcal{F}$ và chọn $\mathcal{R} := \mathcal{I}$, ta có kết quả sau.

Định lý 3.7 Cho p và q là các hàm xác định trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kỳ 2π và liên tục từng khúc trên $[-\pi, \pi]$; giả sử p là hàm chẵn. Giả sử rằng các hệ số Hartley của p và q thỏa mãn các bất đẳng thức (3.24) và $\hat{p}_1(0) \geq 0$, toán tử $\mathcal{F} : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$ là toán tử đơn điệu và liên tục $L_{\mathcal{F}}$ -Lipschitz, phương trình (3.42) là tương thích và các dãy tham số $(\alpha_n), (\lambda_n)$ thỏa mãn các điều kiện (C5) - (C8). Khi đó, xuất phát từ $\varphi_0 \in L^2[-\pi, \pi]$ nào đó, quá trình lặp

$$\begin{cases} \psi_n + \lambda_n \mathcal{K} \psi_n = (1 - \alpha_n \lambda_n) \varphi_n - \lambda_n \mathcal{F}(\varphi_n) + \lambda_n f \\ \varphi_{n+1} = \psi_n + \lambda_n [\mathcal{F}(\varphi_n) - \mathcal{F}(\psi_n)] \end{cases} \quad (3.47)$$

hội tụ đến nghiệm có chuẩn nhỏ nhất $\varphi^\dagger$ khi $n \rightarrow \infty$.

3.3.3 Ví dụ số

Trước tiên, ta lấy ví dụ về các hàm p và q thỏa mãn các điều kiện của Hệ quả 3.1.

Ví dụ 3.1 Cho $p(x) = 1 + 8 \cos^2 x$, $q(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$. Rõ ràng, $\hat{p}_1(0) = 5$, $\hat{p}_1(m) = 2\delta_{m2}$, $\hat{p}_2(m) = 2\delta_{m2}$. Hơn nữa, $\hat{q}_1(m) = 0$, $\hat{q}_2(m) = \delta_{m2}$. Quan hệ (3.32) hiển nhiên đúng.

Ta xét một ví dụ phức tạp hơn.

Bổ đề 3.4 Các hàm $p(x) = -\ln(5/4 - \cos x)$ và $q(x) = (\cos x + \sin x)/2$ thỏa mãn các điều kiện trong Hệ quả 3.1.

Chứng minh. Xét hàm biến phức $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^n}{n}$, trong đó, $z := \cos x + i \sin x$ và a là tham số thực thỏa mãn điều kiện $|a| < 1$. Do $g'(z) = a \sum_{n=0}^{\infty} (az)^n = \frac{a}{1-az}$, ta có $g(z) = -\ln(1-az) + c$, với c là một hằng số. Để ý rằng $g(0) = 0$, nên ta có $c = 0$ và $g(z) = -\ln(1-az)$. Mặt khác,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} (\cos nx + i \sin nx).$$

Do đó, phần thực của $g(z)$ thỏa mãn hệ thức

$$\operatorname{Re}(g(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} [\operatorname{cas}(nx) + \operatorname{cas}(-nx)].$$

Đặt $1 - az = re^{i\theta}$, ta có $r = |1 - az| = (1 - 2a \cos x + a^2)^{1/2}$. Hơn nữa, $g(z) = -\ln(re^{i\theta}) = -\ln r - i\theta$, do đó $\operatorname{Re} g(z) = -\ln r$. Vì vậy, ta có khai triển Hartley

$$p(x) := -\ln(1 - 2a \cos x + a^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} [\operatorname{cas}(nx) + \operatorname{cas}(-nx)].$$

Trong trường hợp riêng, cho $a = 1/2$, ta có

$$p(x) := -\ln(5/4 - \cos x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} [\operatorname{cas}(nx) + \operatorname{cas}(-nx)]. \quad (3.48)$$

Rõ ràng, các hàm p, q là tuần hoàn với chu kỳ 2π trên $\mathbb{R}$ và liên tục trên $[-\pi, \pi]$. Hơn nữa, p là hàm chẵn. Mặt khác, từ (3.48), ta có $\hat{p}_1(n) = \hat{p}_2(n) = 2^{-n}/n$, $n \geq 1$; $\hat{p}_1(0) = \hat{p}_2(0) = 0$ và $\hat{q}_1(n) = \delta_{n1}/2$, $\hat{q}_2(n) = 0$, $n \geq 0$.

Nếu $n \neq 1$ thì hệ thức (3.32) hiển nhiên đúng, do vế bên phải bằng 0. Trường hợp $n = 1$, ta có $[\hat{p}_1(1) + \hat{p}_2(1)]^2 = 1 > [\hat{q}_1(1) + \hat{q}_2(1)]^2 + [\hat{q}_1(1) - \hat{q}_2(1)]^2 = 1/2$.

Bổ đề 3.4 được chứng minh. $\square$

Ví dụ 3.2 Xét phương trình (3.18) với các dữ liệu sau:

$$p(x) = -\ln(5/4 - \cos x), \quad q(x) = (\cos x + \sin x)/2, \quad f(x) = \cos x.$$

Nghiệm chính xác của phương trình là $\varphi^\dagger = \text{cas}(-x)$.

Ta thực hiện tính toán với một số dữ liệu không chính xác có dạng

1. $f_\delta(x) = \cos x + \delta$,
2. $f_\delta(x) = \cos x + \delta \sin x$,
3. $f_\delta(x) = \cos x + \delta \cos(2x)$.

Trong các trường hợp trên, có thể thấy các hệ số Hartley $\hat{f}_{\delta 1}(n) = \hat{f}_{\delta 2}(n) = 0$ bắt đầu từ n_0 nào đó, do đó, nghiệm hiệu chỉnh $\varphi_{\alpha, \delta}$ có thể được khai triển thành tổng Hartley hữu hạn. Từ những tính toán đơn giản, ta nhận được kết quả như sau:

1. $\varphi_{\alpha, \delta} = \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\alpha \text{cas } x + (\alpha + 1) \text{cas}(-x)}{2\alpha^2 + 4\alpha + 1}$,
2. $\varphi_{\alpha, \delta} = \frac{\alpha(1 + \delta) + \delta}{2\alpha^2 + 4\alpha + 1} \text{cas } x + \frac{\alpha(1 - \delta) + 1 - 2\delta}{2\alpha^2 + 4\alpha + 1} \text{cas}(-x)$,
3. $\varphi_{\alpha, \delta} = \frac{\alpha \text{cas } x}{2\alpha^2 + 4\alpha + 1} + \frac{(\alpha + 1) \text{cas}(-x)}{2\alpha^2 + 4\alpha + 1} + \frac{2\delta}{4\alpha + 1} [\text{cas}(2x) + \text{cas}(-2x)]$.

Rõ ràng, khi $\delta \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow 0$ và $\delta/\alpha \rightarrow 0$, tất cả các nghiệm hiệu chỉnh $\varphi_{\alpha, \delta}$ hội tụ đến nghiệm chính xác $\varphi^\dagger = \text{cas}(-x)$.

Ví dụ 3.3 Ta xét một ví dụ giải hệ (3.37) với dữ liệu như sau:

$$\begin{aligned} N = 2; \quad p_1(x) &= -\ln(5/4 - \cos x), \quad q_1(x) = (\cos x + \sin x)/2; \\ p_2(x) &= 1 + 2 \cos x + 8 \cos^2 x, \quad q_2(x) = \sin x + (\cos x)/2; \\ f_1(x) &= \cos x, \quad f_2(x) = (3 \cos x - \sin x)/2. \end{aligned}$$

Nghiệm chính xác $\varphi^\dagger$ của hệ là $\text{cas}^-(x)$.

Theo Bổ đề 3.4, các hệ số Hartley của p_1 và q_1 thỏa mãn bất đẳng thức (3.32). Tính đúng đắn của (3.32) với các hệ số Hartley của p_2 và q_2 có thể kiểm tra trực tiếp.

Giả sử thay vì sử dụng dữ liệu chính xác f_1 và f_2 , ta thực hiện tính toán với dữ liệu có nhiều dạng:

$$f_{1,n} = \cos x + \delta_n \sin x, \quad f_{2,n} = (3 \cos x - \sin x)/2 + \delta_n \sin x,$$

trong đó, $\delta_n = (1+n)^{-3/4}$. Áp dụng quá trình chỉnh lặp song song (3.40), (3.41) từ Định lý 3.4, với tham số hiệu chỉnh $\alpha_n = (1+n)^{-2/5}$ và tham số phân rã song song $\gamma_n = 8(1+n)^{1/2}$, ta nhận được công thức tính nghiệm xấp xỉ.

Xuất phát từ điểm ban đầu $\varphi_0 = a_0 \operatorname{cas} x + b_0 \operatorname{cas}(-x)$, nghiệm xấp xỉ thứ n là φ_n có dạng $\varphi_n = a_n \operatorname{cas} x + b_n \operatorname{cas}(-x)$, $n \geq 0$, trong đó, các hệ số a_n, b_n có thể được xác định từ quan hệ truy hồi. Thật vậy, đặt $F^{(i)} := \gamma_n \varphi_n + f_{i,n}$, $i = 1, 2$, ta có

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \left[a_n \gamma_n + \frac{1 + \delta_n}{2} \right] \operatorname{cas} x + \left[b_n \gamma_n + \frac{1 - \delta_n}{2} \right] \operatorname{cas}(-x), \\ F^{(2)} &= \left[a_n \gamma_n + \frac{1 + \delta_n}{2} \right] \operatorname{cas} x + \left[b_n \gamma_n + \frac{2 - \delta_n}{2} \right] \operatorname{cas}(-x). \end{aligned}$$

Có thể thấy, $\hat{F}_1^{(i)}(k) = \hat{F}_2^{(i)}(k) = 0$, $i = 1, 2$, $\forall k \neq 1$. Từ Mệnh đề 2.1 và Mệnh đề 3.16, ta có $\hat{\varphi}_{n1}^i(k) = \hat{\varphi}_{n2}^i(k) = 0$ ($i = 1, 2$), với mọi $k \neq 1$, do đó

$$\varphi_n^i = a_{i,n} \operatorname{cas} x + b_{i,n} \operatorname{cas}(-x),$$

với các hệ số $a_{i,n}, b_{i,n}$ ($i = 1, 2$) nào đó. Theo (3.36), ta có

$$\varphi_{n+1} = a_{n+1} \operatorname{cas} x + b_{n+1} \operatorname{cas}(-x),$$

trong đó, $a_{n+1} = (a_{1,n} + a_{2,n})/2$ và $b_{n+1} = (b_{1,n} + b_{2,n})/2$.

Sử dụng (3.16), (3.10) và (3.38), với mọi $n \geq 1$, ta tính toán được

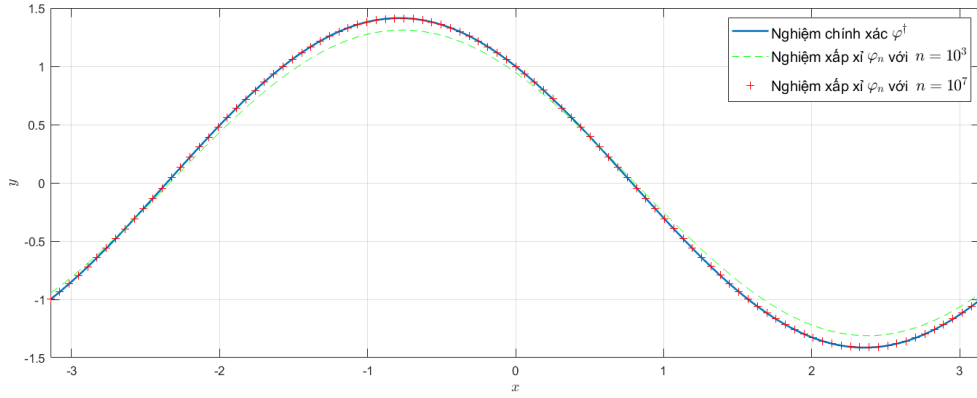
$$\begin{aligned} a_{1,n} &= \frac{(\alpha_n + 2\gamma_n + 2)(2a_n\gamma_n + \delta_n + 1) - 2b_n\gamma_n + \delta_n - 1}{(\alpha_n + 2\gamma_n + 3)(\alpha_n + 2\gamma_n + 1) - 1}, \\ b_{1,n} &= \frac{(\alpha_n + 2\gamma_n + 3)(2b_n\gamma_n - \delta_n + 1) - 2a_n\gamma_n - \delta_n - 1}{(\alpha_n + 2\gamma_n + 3)(\alpha_n + 2\gamma_n + 1) - 1}, \end{aligned}$$

$$a_{2,n} = \frac{(\alpha_n + 2\gamma_n + 2)(2a_n\gamma_n + \delta_n + 1) - 2b_n\gamma_n + \delta_n - 2}{(\alpha_n + 2\gamma_n + 6)(\alpha_n + 2\gamma_n + 2) - 1},$$

$$b_{2,n} = \frac{(\alpha_n + 2\gamma_n + 6)(2b_n\gamma_n - \delta_n + 2) - 2a_n\gamma_n - \delta_n - 1}{(\alpha_n + 2\gamma_n + 6)(\alpha_n + 2\gamma_n + 2) - 1}.$$

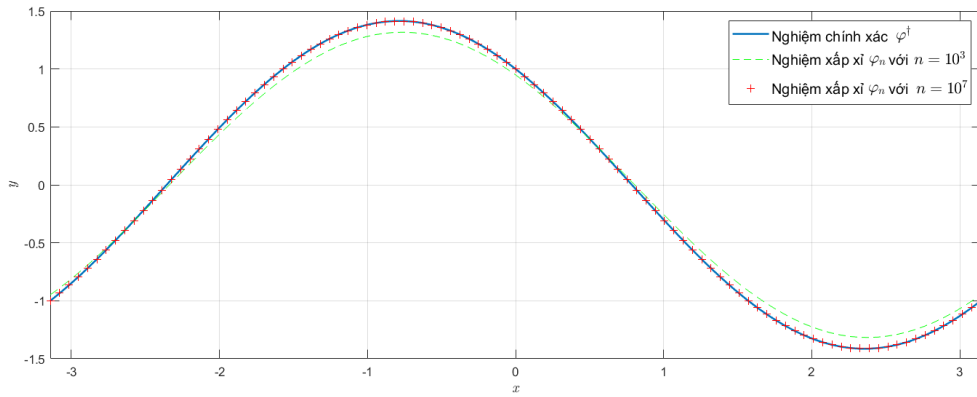
Từ các công thức này, dễ dàng tính toán được các hệ số $a_{i,n}$ và $b_{i,n}$ ($i = 1, 2$), $n \geq 1$, và quá trình tính toán có thể được thực hiện trên bốn quá trình song song.

Nếu xuất phát từ $a_0 = b_0 = 0$, thì với $n = 10^3$, ta có $\varphi_n = 0.0188 \cos x + 0.9272 \cos(-x)$, và với $n = 10^7$, ta có $\varphi_n = 0.00028 \cos x + 0.9988 \cos(-x)$.



Hình 3.1: Nghiệm của hệ FIE-I với nhân dạng TPH khi $\varphi_0 = 0$.

Nếu xuất phát từ $\varphi_0 = \cos x + \cos(-x)$, tức là $a_0 = b_0 = 1$, thì với $n = 10^3$, ta có $\varphi_n = 0.0177 \cos x + 0.9310 \cos(-x)$, và với $n = 10^7$, ta có $\varphi_n = 0.00028 \cos x + 0.9988 \cos(-x)$.



Hình 3.2: Nghiệm của hệ FIE-I với nhân dạng TPH khi $\varphi_0 = \cos(x) + \cos(-x)$.

Ví dụ 3.4 Ta xét một ví dụ về phương trình tích phân Fredholm phi tuyến (NLFIE).

Xét phương trình tích phân

$$\mathcal{K}\varphi + \varphi + \mathcal{W}(\varphi) = f, \quad (3.49)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\varphi(x) &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [p(x-u) + q(x+u)] \varphi(u) du, \quad p(x) = 1 + 8 \cos^2 x, \quad q(x) = \text{cas}(-2x); \\ \mathcal{W}(\varphi)(x) &:= \int_{-\pi}^{\pi} h(x, u, \varphi(u)) du, \quad h(x, u, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \text{cas } x \cos \varphi; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{cas } x. \end{aligned}$$

Giải gần đúng phương trình sử dụng FBFSM kết hợp với tích chập Hartley hữu hạn

Đặt

$$e_0 := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_n^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{cas}(\pm nx), \quad (n \geq 1),$$

khi đó, hệ $\{e_0, e_n^{\pm} : n \geq 1\}$ tạo thành cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{W}$. Mặt khác, ta có

$$\cos nx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (e_n^+ + e_n^-), \quad \sin nx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (e_n^+ - e_n^-), \quad n \geq 1.$$

Phương trình (3.49) có thể được viết lại dưới dạng

$$\mathcal{K}\varphi + \varphi + \frac{e_1^+}{\sqrt{2\pi}} \langle e_0, \cos \varphi \rangle = e_1^+. \quad (3.50)$$

Các hàm p và q có thể được viết lại thành $p(x) = \sqrt{2\pi}(5e_0 + 2e_2^+ + 2e_2^-)$, $q(x) = \sqrt{2\pi}e_2^-$. Để dàng tính toán được các hệ số Hartley là $\hat{p}_1(0) = \hat{p}_2(0) = 5$; $\hat{p}_1(n) = \hat{p}_2(n) = 2\delta_{n2}$, $n \geq 1$; $\hat{q}_1(n) = 0$, $n \geq 0$; $\hat{q}_2(n) = \delta_{n2}$, $n \geq 0$. Nghiệm có chuẩn nhỏ nhất của (3.50) là $\varphi^\dagger = 0$.

Xét phần phi tuyến $\mathcal{F}(\varphi) := \varphi + \mathcal{W}(\varphi)$, ta có

$$|h(x, u, \varphi)| \leq R(x, u) := \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} |\text{cas } x|;$$

$$|h(x, u, \varphi) - h(x, u, \psi)| \leq R(x, u) |\varphi - \psi|, \quad \forall x, u \in [-\pi, \pi], \quad \forall |\varphi|, |\psi| < \infty;$$

trong đó, $\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R^2(x, u) dx du < 1$.

Theo Nhận xét 3.7, $\mathcal{W}$ là toán tử không giãn, do đó $\mathcal{F}$ là toán tử đơn điệu. Mặt khác, $\mathcal{F}$ là liên tục 2-Lipschitz. Áp dụng FBFMS cho phương trình (3.49) với các dãy tham số được chọn là $\lambda_n = 0.25$ và $\alpha_n = (n+1)^{-1/2}$, ta nhận được quá trình

$$\begin{cases} 4\psi_n + \mathcal{K}\psi_n = f_n := (3 - \alpha_n)\varphi_n - \frac{e_1^+}{\sqrt{2\pi}}\langle e_0, \cos \varphi_n \rangle + e_1^+ \\ \varphi_{n+1} = \frac{3}{4}\psi_n + \frac{1}{4}\left(\varphi_n + \frac{e_1^+}{\sqrt{2\pi}}\langle e_0, \cos \varphi_n - \cos \psi_n \rangle\right). \end{cases} \quad (3.51)$$

Từ công thức (3.51), nghiệm xấp xỉ thứ n có dạng $\varphi_n = a_n e_1^+$. Áp dụng Định lý 3.1, ta đi tính toán các giá trị sau:

$$\begin{aligned} A(k) &= 4 + \hat{p}_1(k) + \hat{p}_2(k) + \hat{q}_1(k) - \hat{q}_2(k), \quad B(k) = \hat{p}_1(k) - \hat{p}_2(k) + \hat{q}_1(k) + \hat{q}_2(k), \\ D_{1,n}(k) &= A^-(k)\hat{f}_{n1}(k) - B(k)\hat{f}_{n2}(k), \quad D_{2,n}(k) = A(k)\hat{f}_{n2}(k) - B^-(k)\hat{f}_{n1}(k), \\ D(k) &= A(k)A^-(k) - B(k)B^-(k), \end{aligned}$$

với $k \in \mathbb{N}_0$, trong đó, $\hat{f}_{n1}(k)$ và $\hat{f}_{n2}(k)$ là các hệ số Hartley của hàm

$$f_n = \left[(3 - \alpha_n)a_n + 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle e_0, \cos \varphi_n \rangle \right] e_1^+.$$

Dễ thấy, $\hat{f}_{n1}(k) = 0$, với mọi $k \neq 1$; $\hat{f}_{n2}(m) = 0$, với mọi $m \geq 0$. Mặt khác, ta có

$$\hat{f}_{n1}(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(3 - \alpha_n)a_n + 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle e_0, \cos \varphi_n \rangle \right].$$

Theo công thức (3.10), ta có $\psi_n = \frac{D_{1,n}(1)}{D(1)}\sqrt{2\pi}e_1^+ = b_n e_1^+$, trong đó,

$$b_n := \frac{1}{4} \left[(3 - \alpha_n)a_n + 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle e_0, \cos \varphi_n \rangle \right].$$

Từ quá trình (3.51), $\varphi_{n+1} = \left[\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\langle e_0, \cos(a_n e_1^+) - \cos(b_n e_1^+) \rangle \right] e_1^+$. Do đó,

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\langle e_0, \cos(a_n e_1^+) - \cos(b_n e_1^+) \rangle.$$

Như vậy, bắt đầu từ a_0 , ta có thể tính được a_n . Khi đó, các nghiệm xấp xỉ φ_n ($n \geq 1$) cũng tính

được từ quan hệ $\varphi_n = a_n e_1^+$. Quá trình tính toán được thực hiện theo công thức

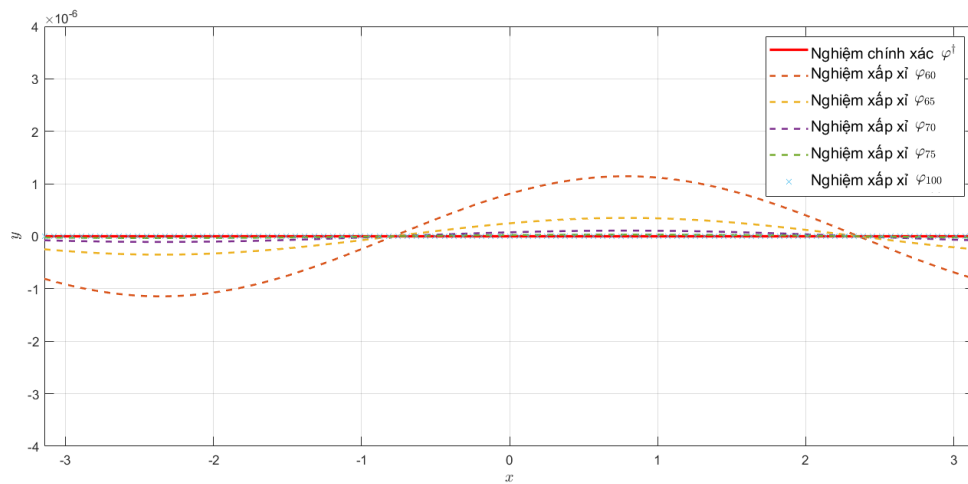
$$\begin{cases} b_n = \frac{1}{4} \left[(3 - \alpha_n) a_n + 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e_0, \cos(a_n e_1^+) \rangle \right], \\ a_{n+1} = \left[\frac{3}{4} b_n + \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \langle e_0, \cos(a_n e_1^+) - \cos(b_n e_1^+) \rangle \right]. \end{cases} \quad (3.52)$$

Nếu xuất phát từ $a_0 = 0$, thì hiển nhiên, $a_n = 0$ với mọi $n \geq 0$. Do đó, $\varphi_n = 0 = \varphi^\dagger$.

Nếu xuất phát từ $a_0 = 10$, ta tính toán được các giá trị a_n và các sai số theo công thức $\|\varphi_n\| = \|a_n e_1^+\| = a_n$, $n > 0$. Số liệu tính toán từ quá trình (3.52) được cho trong Bảng 3.1. Hình 3.3 cho thấy các nghiệm xấp xỉ φ_n hội tụ đến nghiệm chính xác qua các bước lặp.

Bảng 3.1: FBFSM giải gần đúng NLFIE khi $a_0 = 10$.

n	a_n	Sai số của $\varphi_n (\ \varphi_n\)$
60	2.0287e-06	2.0287e-06
65	6.2054e-07	6.2054e-07
70	1.9085e-07	1.9085e-07
75	1.9085e-07	1.9085e-07
100	1.7651e-10	1.7651e-10

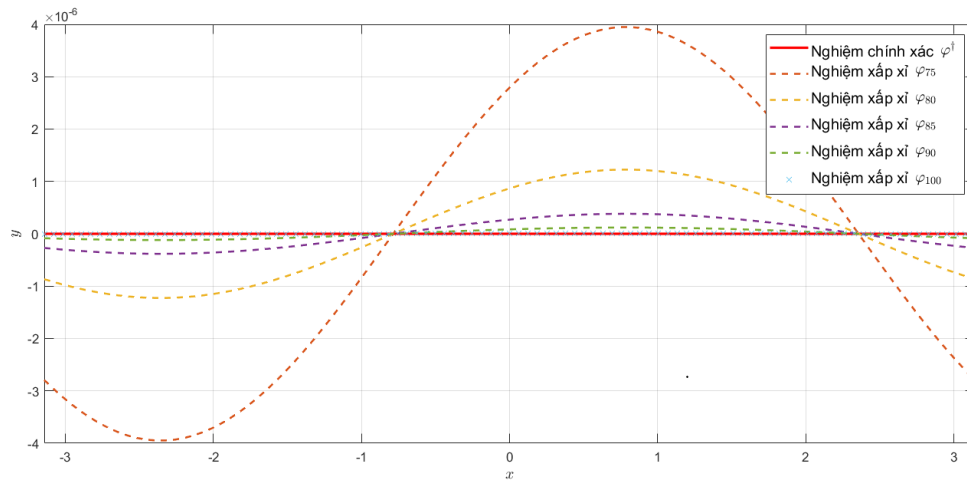


Hình 3.3: Nghiệm của NLFIE sử dụng FBFSM khi $a_0 = 10$.

Nếu xuất phát từ $a_0 = 10^3$, ta tính toán được các giá trị a_n và các sai số theo công thức $\|\varphi_n\| = \|a_n e_1^+\| = a_n$, $n > 0$. Số liệu tính toán từ quá trình (3.52) được cho trong Bảng 3.2. Hình 3.4 cho thấy các nghiệm xấp xỉ φ_n hội tụ đến nghiệm chính xác qua các bước lặp.

Bảng 3.2: FBFSM giải gần đúng NLFIE khi $a_0 = 10^3$.

n	a_n	Sai số của $\varphi_n(\ \varphi_n\)$
75	7.0007e-06	7.0007e-06
80	2.1733e-06	2.1733e-06
85	6.7743e-07	6.7743e-07
90	2.1193e-07	2.1193e-07
100	2.0949e-08	2.0949e-08



Hình 3.4: Nghiệm của NLFIE sử dụng FBFSM khi $a_0 = 10^3$.

Như vậy, trong mọi trường hợp, ta đều có $\varphi_n \simeq \varphi^\dagger$ khi n đủ lớn.

Phương pháp lặp Landweber phi tuyến là một thuật toán phổ biến được sử dụng để giải các bài toán ngược phi tuyến. Để so sánh, ta áp dụng phương pháp lặp Landweber phi tuyến (NLI) (xem B. Kaltenbacher và cộng sự (2008), [44]) cho phương trình (3.49).

Giải gần đúng phương trình bằng phương pháp lặp Landweber phi tuyến

Phương trình tích phân có thể được viết lại dưới dạng $\mathcal{G}(\varphi) = f$, trong đó, $\mathcal{G} := \mathcal{I} + \mathcal{K} + \mathcal{W}$.

Ta có

$$\bar{\varphi}_{n+1} = \bar{\varphi}_n + \beta^2 \mathcal{G}'(\bar{\varphi}_n)^* [f - \mathcal{G}(\bar{\varphi}_n)], \quad (3.53)$$

trong đó, β là tham số tỷ lệ.

Lấy đạo hàm Fréchet, ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{G}'(\varphi)\eta &= (\mathcal{I} + \mathcal{K})\eta + \mathcal{W}'(\varphi)\eta, \\ (\mathcal{W}'(\varphi)\eta)(x) &= -\frac{\cos x}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi(u) \eta(u) du. \end{aligned}$$

Do $\mathcal{K}$ là toán tử tự liên hợp, ta nhận được

$$\mathcal{G}'(\varphi)^* \psi = (\mathcal{I} + \mathcal{K})\psi + \mathcal{W}'(\varphi)^* \psi,$$

trong đó,

$$(\mathcal{W}'(\varphi)^* \psi)(u) = -\frac{\sin \varphi(u)}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \psi(x) dx.$$

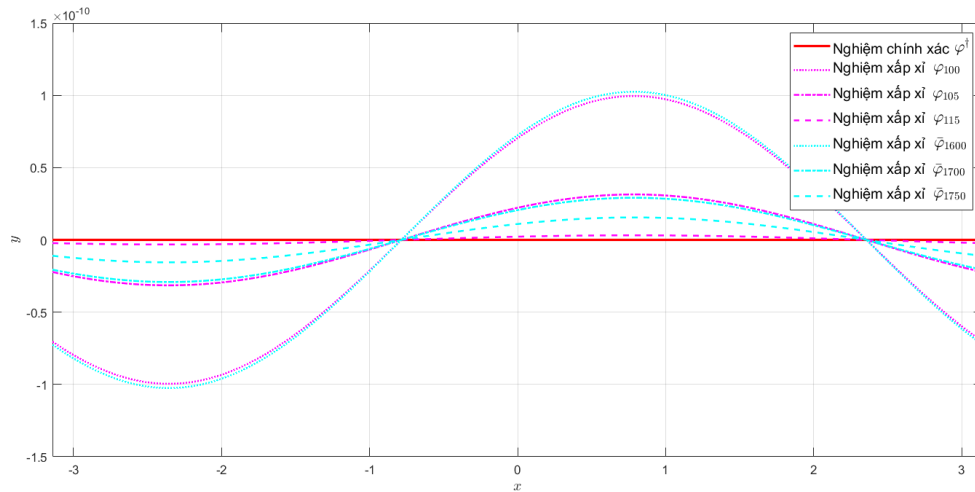
Ký hiệu $\psi_n := f - \mathcal{G}(\bar{\varphi}_n)$, phương pháp lặp Landweber phi tuyến (3.53) dẫn đến quá trình

$$\begin{cases} \psi_n(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}} - \left[\bar{\varphi}_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, u) \bar{\varphi}_n(u) du \right. \\ \quad \left. + \frac{\cos x}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \bar{\varphi}_n(u) du \right] \\ \bar{\varphi}_{n+1}(x) = \bar{\varphi}_n(x) + \beta^2 \left[\psi_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x, u) \psi_n(u) du \right. \\ \quad \left. - \frac{\sin \bar{\varphi}_n(x)}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos u \psi_n(u) du \right], \end{cases} \quad (3.54)$$

trong đó, $g(x, u) = 1 + 8 \cos^2(x - u) + \cos(-2(x + u))$.

Chọn $\beta = \frac{1}{\sqrt{80}}$ và $\bar{\varphi}_0 = \frac{\cos(x)}{10\sqrt{2\pi}}$ cho phương trình (3.54), và chọn $a_0 = \frac{1}{10}$ cho phương trình (3.52). Khi đó, $\varphi_0 = \bar{\varphi}_0$. Nghiệm xấp xỉ được tính toán theo quá trình (3.54).

Hình 3.5 minh họa nghiệm chính xác và các nghiệm xấp xỉ được tính toán theo các quá trình (3.52) và (3.54). Ta có thể thấy quá trình (3.52) cho nghiệm xấp xỉ nghiệm chính xác nhanh hơn so với quá trình (3.54) qua các bước lặp.



Hình 3.5: Nghiệm của NLFIE sử dụng FBFSM và NLI.

Bảng 3.3: So sánh FBFSM và NLI giải gần đúng NLFIE.

n	Sai số của φ_n	Sai số của $\bar{\varphi}_n$
100	1.7651e-10	0.0284
105	5.5742e-11	0.0267
115	5.6029e-12	0.0235
1600	1.6653e-16	1.8173e-10
1700	1.6653e-16	5.1658e-11
1750	1.6653e-16	2.7542e-11

Bảng 3.3 cho kết quả thực nghiệm so sánh FBFSM và NLI. Khi thực thi trên cùng một cấu hình máy tính, thời gian để tính toán φ_{100} nhanh hơn nhiều so với thời gian để tính toán $\bar{\varphi}_{100}$. Cụ thể, thời gian thực thi để tính toán φ_{100} là 0,0106 giây, thời gian thực thi tính toán $\bar{\varphi}_{100}$ là 2,9888 giây. Hơn nữa, với cùng mức sai số ϵ cho trước, quá trình (3.52) xấp xỉ nghiệm chính xác nhanh hơn so với quá trình (3.54) cả về mặt thời gian và số bước lặp.

Thay vì sử dụng phương pháp giải tích số để tính toán các công thức nghiệm tường minh qua mỗi bước lặp, ta có thể tính toán nghiệm xấp xỉ qua mỗi bước lặp bằng cách sử dụng thuật toán biến đổi Hartley nhanh (FHT).

Giải gần đúng phương trình sử dụng FBSM và FHT

Áp dụng FBSM cho phương trình (3.49) với các dãy tham số được chọn là $\lambda_n = 0.25$ và $\alpha_n = (n+1)^{-1/2}$, ta nhận được quá trình:

$$4\varphi_{n+1} + \mathcal{K}\varphi_{n+1} = f_n := (3 - \alpha_n)\varphi_n - \frac{e_1^+}{\sqrt{2\pi}} \langle e_0, \cos \varphi_n \rangle + e_1^+. \quad (3.55)$$

Áp dụng Định lý 3.1, sử dụng thuật toán FHT ta tính toán các giá trị sau:

$$\begin{aligned} A(k) &= 4 + \hat{p}_1(k) + \hat{p}_2(k) + \hat{q}_1(k) - \hat{q}_2(k), \quad B(k) = \hat{p}_1(k) - \hat{p}_2(k) + \hat{q}_1(k) + \hat{q}_2(k), \\ D_{1,n}(k) &= A^-(k)\hat{f}_{n1}(k) - B(k)\hat{f}_{n2}(k), \quad D_{2,n}(k) = A(k)\hat{f}_{n2}(k) - B^-(k)\hat{f}_{n1}(k). \\ D(k) &= A(k)A^-(k) - B(k)B^-(k), \end{aligned}$$

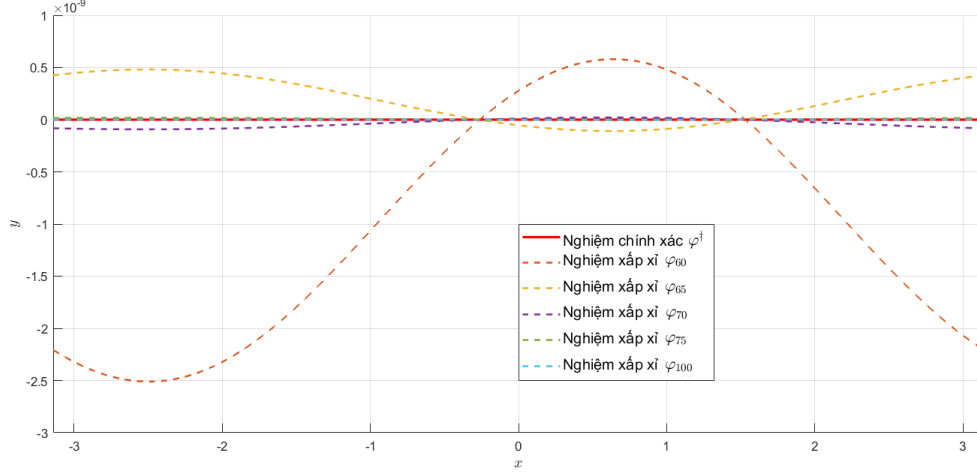
với $k \in \mathbb{N}_0$. Sử dụng công thức (3.10) để tính toán các nghiệm xấp xỉ φ_n của FIE-II (3.55).

Xuất phát từ $\varphi_0 = 10 \cos(x)$, kết quả tính toán cho trong Bảng 3.4 cho thấy các nghiệm xấp xỉ φ_n hội tụ về nghiệm chính xác $\varphi^\dagger$.

Bảng 3.4: FBSM giải gần đúng NLFIE sử dụng FHT khi $\varphi_0 = 10 \cos(x)$.

n	Sai số của φ_n
60	4.6837e-08
65	8.9813e-09
70	1.7361e-09
75	3.3803e-10
100	6.7522e-12

Hình 3.6 minh họa các nghiệm xấp xỉ φ_n hội tụ về nghiệm chính xác $\varphi^\dagger$.



Hình 3.6: Nghiệm gần đúng của NLFIE sử dụng FBSM và FHT khi $\varphi_0 = 10 \cos(x)$.

Giải gần đúng phương trình sử dụng FBFSM và FHT

Áp dụng FBFSM cho phương trình (3.49) với các dãy tham số được chọn là $\lambda_n = 0.25$ và $\alpha_n = (n+1)^{-1/2}$, ta nhận được quá trình:

$$\begin{cases} 4\psi_n + \mathcal{K}\psi_n = f_n := (3 - \alpha_n)\varphi_n - \frac{e_1^+}{\sqrt{2\pi}} \langle e_0, \cos \varphi_n \rangle + e_1^+ \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \frac{3}{4}\psi_n + \frac{1}{4} \left(\varphi_n + \frac{e_1^+}{\sqrt{2\pi}} \langle e_0, \cos \varphi_n - \cos \psi_n \rangle \right). \end{cases} \quad (3.57)$$

Áp dụng Định lý 3.1, sử dụng thuật toán FHT ta tính toán các giá trị sau:

$$A(k) = 4 + \hat{p}_1(k) + \hat{p}_2(k) + \hat{q}_1(k) - \hat{q}_2(k), \quad B(k) = \hat{p}_1(k) - \hat{p}_2(k) + \hat{q}_1(k) + \hat{q}_2(k),$$

$$D_{1,n}(k) = A^-(k) \hat{f}_{n1}(k) - B(k) \hat{f}_{n2}(k), \quad D_{2,n}(k) = A(k) \hat{f}_{n2}(k) - B^-(k) \hat{f}_{n1}(k),$$

$$D(k) = A(k)A^-(k) - B(k)B^-(k),$$

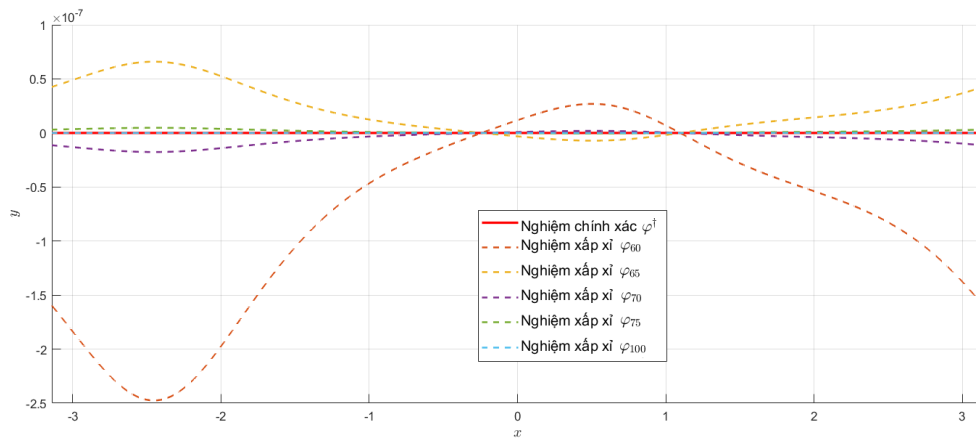
với $k \in \mathbb{N}_0$. Sử dụng công thức (3.10) tính toán các hàm ψ_n từ FIE-II (3.56). Các nghiệm xấp xỉ φ_n được tính toán theo quá trình (3.57).

Xuất phát từ $\varphi_0 = 10 \cos(x)$, kết quả tính toán từ các quá trình (3.56) và (3.57) được cho trong Bảng 3.5 cho thấy các nghiệm xấp xỉ φ_n hội tụ về nghiệm chính xác $\varphi^\dagger$.

Bảng 3.5: FBFSM giải gần đúng NLFIE sử dụng FHT khi $\varphi_0 = 10 \cos(x)$.

n	Sai số của φ_n
60	3.6887e-06
65	9.8281e-07
70	2.6323e-07
75	7.0833e-08
100	1.0577e-10

Hình 3.7 minh họa các nghiệm xấp xỉ φ_n hội tụ về nghiệm chính xác $\varphi^\dagger$.



Hình 3.7: Nghiệm gần đúng của NLFIE sử dụng FBFSM và FHT khi $\varphi_0 = 10 \cos(x)$.

Nhận xét 3.9 Phương pháp giải tích số cho kết quả chính xác hơn và hiệu suất tính toán tốt hơn. Trong trường hợp các hệ số Hartley của dữ liệu ban đầu khó xác định tường minh, ta có thể sử dụng HFT để tính xấp xỉ.

3.4 Phương trình tích chập

Phương trình tích chập cho phép mô hình hóa các hệ thống vật lý có miền không gian không giới hạn, và đã có nhiều ứng dụng trong lý thuyết tán xạ, vật lý lượng tử, kỹ thuật điện từ [52, 89]. Phần này luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II với miền tích phân được lấy trên toàn bộ không gian $\mathbb{R}^n$ (hay còn được gọi là phương trình tích chập). Luận án nghiên cứu phương pháp giải các lớp phương trình này sử dụng các phép tích chập liên kết với các HT đã được đề xuất.

3.4.1 Phương trình tích chập liên kết với biến đổi Hartley

Có thể có một số lượng đáng kể các phương trình tích chập có thể giải được tường minh bằng cách sử dụng các tích chập được đề xuất từ (2.40) - (2.47), và từ (2.49) - (2.64). Sử dụng các tích chập được ký hiệu $\circledast$ và $\star$ như trong mục 2.4, luận án nghiên cứu hai lớp phương trình tích chập sau:

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + (k \circledast \varphi)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (3.58)$$

và

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + (k \star \varphi)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (3.59)$$

trong đó, tham số $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước, các hàm k và f thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết, φ là ẩn hàm cần tìm được giả thiết thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$. Sự khác biệt chính trong các lớp phương trình này là biểu thức tích chập trong phương trình (3.58) có dạng một tích phân đơn, trong khi biểu thức tích chập trong phương trình (3.59) có dạng một tích phân bội với sự góp mặt của hàm Hermite Φ_α .

Luận án trình bày phương pháp tìm nghiệm cho lớp phương trình (3.58), lớp phương trình (3.59) có thể được thực hiện theo cách tương tự.

Xét phương trình tích chập sau trong $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + \left(k \underset{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}{\overset{\Phi_\alpha, \mathcal{H}_1}{\star}} \varphi \right)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (3.60)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước; các hàm $k, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; và φ là ẩn hàm cần tìm.

Đặt $G(\omega) := \lambda + \Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)$. Theo Định lý 2.6, hàm $\Phi_\alpha(\mathcal{H}_2 k)$ liên tục đều và bị chặn trên $\mathbb{R}^n$, tức là $\sup_{\omega \in \mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)| < \infty$ và $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(\omega)| = \lambda$.

Định lý 3.8 (i) Nếu phương trình (3.60) có nghiệm trong không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$, thì điều kiện cần là $\mathcal{H}_1 f = 0$ khi $G = 0$. Giả sử điều kiện này được thỏa mãn và $\mathcal{H}_1 f/G \in L^1(\mathbb{R}^n)$, khi đó, L^1 -nghiệm duy nhất được xác định bởi công thức

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{H}_1[\mathcal{H}_1 f/G](\mathbf{x}). \quad (3.61)$$

(ii) Nếu $G(\omega) \neq 0$ với mọi $\omega \in \mathbb{R}^n$ và $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì phương trình (3.60) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$ và nghiệm được xác định bởi công thức (3.61).

(iii) Nếu $|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \{|\Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)|\}$, thì phương trình (3.60) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm của phương trình được xác định bởi công thức (3.61) và có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi.

Chứng minh.

(i) Ta xét hai trường hợp $\lambda = 0$ và $\lambda \neq 0$ đồng thời. Giả sử $\varphi_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ là một L^1 -nghiệm của (3.60). Tác động $\mathcal{H}_1$ với cả hai vế của (3.60), ta nhận được $G(\omega)(\mathcal{H}_1 \varphi_0)(\omega) = (\mathcal{H}_1 f)(\omega)$. Do cả hai vế của đồng nhất thức này là các hàm liên tục đều trên $\mathbb{R}^n$, suy ra $(\mathcal{H}_1 f)(\omega) = 0$ khi $G(\omega) = 0$. Hơn nữa, do giả thiết $\mathcal{H}_1 f/G \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ta có thể áp dụng định lý biến đổi ngược để nhận được $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_1[\mathcal{H}_1 f/G](\mathbf{x})$.

Ngược lại, sử dụng định lý biến đổi ngược cho $\mathcal{H}_1$, ta dễ dàng chứng minh được hàm xác định trong (3.61) thỏa mãn (3.60) hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$ khi $\mathcal{H}_1 f/G \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Do các hàm Hermite luôn có không điểm, nên $|\lambda| > 0$. Lập luận tương tự như trên, ta thấy rằng, nếu φ_0 là nghiệm của (3.60), thì $\mathcal{H}_1 \varphi_0 = \mathcal{H}_1 f/G$. Do G liên tục đều và bị chặn trên $\mathbb{R}^n$ và $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(\omega)| = \lambda \neq 0$, suy ra, hàm G^{-1} cũng liên tục đều và bị chặn trên $\mathbb{R}^n$. Do đó, tồn tại M và N sao cho $M < |G|^{-1} < N$. Như vậy, $\mathcal{H}_1 f/G \in L^1(\mathbb{R}^n)$ khi và chỉ khi $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ta đưa về trường hợp (i) đã được chứng minh ở trên.

(iii) Từ giả thiết ta suy ra $\lambda \neq 0$. Tác động $\mathcal{H}_1$ vào cả hai vế của (3.60), ta nhận được

$$(\mathcal{H}_1 \varphi)(\omega) = \frac{(\mathcal{H}_1 f)(\omega)}{\lambda} \left[1 - \frac{\delta(\mathcal{H}_2 \Phi_\alpha)(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)}{\lambda + \delta(\mathcal{H}_2 \Phi_\alpha)(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)} \right], \quad (3.62)$$

trong đó, $\delta = 1$ hoặc $\delta = -1$; $r = 0, 3$ hoặc $r = 1, 2$ tương ứng (theo Định lý 2.12).

Ký hiệu

$$(p \odot q)(\mathbf{x}) := \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \left[p(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + p(\mathbf{x} + \mathbf{u}) + p(-\mathbf{x} + \mathbf{u}) - p(-\mathbf{x} - \mathbf{u}) \right] q(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \quad (3.63)$$

Tích chập $p \odot q$ trong (3.63) là một trường hợp riêng của tích chập (2.44) khi $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Xét hàm $H(z) := z(\lambda + z)^{-1}$. Hàm H là hàm giải tích trong miền $D_\lambda := \{z \in \mathbb{C} : |z| < |\lambda|\}$. Từ Định lý 2.12 và giả thiết, ta nhận được

$$|\delta(\mathcal{H}_2\Phi_\alpha)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)| = |\Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)| < |\lambda|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^n. \quad (3.64)$$

Do đó, H là hàm giải tích dọc đường cong $\gamma := H[\delta(\mathcal{H}_2\Phi_\alpha)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)] \in \mathbb{C}$. Theo định lý Wiener-Lévy cho FT (xem [4]), $H(0) = 0$, vì vậy, tồn tại hàm $P \in L^1(\mathbb{R}^n)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} H[\delta(\mathcal{H}_2\Phi_\alpha)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)] &= \frac{\delta(\mathcal{H}_2\Phi_\alpha)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)}{\lambda + \delta(\mathcal{H}_2\Phi_\alpha)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)} = (\mathcal{F}P)(\omega) \\ &= \left(\frac{1}{2}(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)P - \frac{i}{2}(\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2)P \right)(\omega) \\ &= \mathcal{H}_2 \left[\frac{1+i}{2}P + \frac{1-i}{2}P^- \right](\omega) =: (\mathcal{H}_2Q)(\omega), \end{aligned}$$

trong đó, $Q(\mathbf{x}) := \frac{1+i}{2}P(\mathbf{x}) + \frac{1-i}{2}P^-(\mathbf{x})$. Kết hợp với (3.62), ta nhận được

$$(\mathcal{H}_1\varphi)(\omega) = \frac{1}{\lambda}(\mathcal{H}_1f)(\omega) \left[1 - (\mathcal{H}_2Q)(\omega) \right] = \mathcal{H}_1 \left[\frac{1}{\lambda}f - f \odot Q^- \right](\omega).$$

Theo định lý tồn tại duy nhất của $\mathcal{H}_1$, ta có

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \left[\frac{1}{\lambda}f - (f \odot Q^-) \right](\mathbf{x}). \quad (3.65)$$

Ngược lại, dễ dàng chứng minh được $\varphi(\mathbf{x})$ xác định bởi (3.65) thỏa mãn phương trình (3.60).

Nghiệm ẩn (3.65) có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi. Thật vậy, ta có thể viết

$$(\Phi_\alpha \odot k)^{\odot(j)} := \underbrace{(\Phi_\alpha \odot k) \odot \cdots \odot (\Phi_\alpha \odot k)}_{j \text{ lần } (\Phi_\alpha \odot k)}, \quad j \geq 1.$$

Do Φ_α thuộc không gian hàm Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, bằng quy nạp ta có thể chứng minh

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha \odot k)^{\odot(j+1)} &\in L^1(\mathbb{R}^n), \quad [\mathcal{H}_2(\Phi_\alpha \odot k)]^{(j+1)} \in L^1(\mathbb{R}^n), \\ [\mathcal{H}_2(\Phi_\alpha \odot k)]^{(j+1)} &= \mathcal{H}_2((\Phi_\alpha \odot k)^{\odot(j+1)}), \quad \forall j \geq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác, do H là một hàm giải tích trên miền D_λ , theo bổ đề Lebesgue-Riemann (xem [72], Định lý 7.5), hàm $[\mathcal{H}_2(\Phi_\alpha \odot k)]^{(j+1)}$ ($j \geq 0$) liên tục đều trên $\mathbb{R}^n$. Do đó, từ (3.63) và (3.64), ta có khai triển Taylor hội tụ tuyệt đối và đều như sau:

$$\begin{aligned} H[\delta(\mathcal{H}_2\Phi_2)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)] &= \frac{\delta(\mathcal{H}_2\Phi_2)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)}{\lambda + \delta(\mathcal{H}_2\Phi_2)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\delta(\mathcal{H}_2\Phi_2)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)}{1 + \frac{\delta(\mathcal{H}_2\Phi_2)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)}{\lambda}} \right] \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j [\delta(\mathcal{H}_2\Phi_2)(\omega)(\mathcal{H}_2k)(\omega)]^{j+1}}{\lambda^{j+1}} \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j \delta^{j+1} [(\mathcal{H}_2(\Phi_\alpha \odot k))(\omega)]^{j+1}}{\lambda^{j+1}} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$= \mathcal{H}_2 \left[\sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j \delta^{j+1} (\Phi_\alpha \odot k)^{\odot(j+1)}}{\lambda^{j+1}} \right] (\omega), \quad (3.67)$$

với mọi $\omega \in \mathbb{R}^n$. Trong đẳng thức cuối cùng (3.67), ta có thể hoán đổi $\mathcal{H}_2$ và tổng vô hạn do chuỗi hội tụ tuyệt đối và đều, mỗi phần tử của chuỗi là một tích phân Lebesgue, ta có

$$\|\mathcal{H}_2(\Phi_\alpha \odot k)\|_\infty = \|(\mathcal{H}_2\Phi_\alpha) \cdot (\mathcal{H}_2k)\|_\infty = \|\Phi_\alpha \cdot (\mathcal{H}_2k)\|_\infty < \lambda.$$

Do H là hàm giải tích dọc theo đường cong γ và từ kết quả của định lý Wiener-Lévy, chuỗi (3.66) hội tụ đều và tuyệt đối. Thay chuỗi (3.66) vào (3.62), ta nhận được kết quả mong muốn.

Như vậy, do $(\mathcal{H}_2\Phi_2)(\mathcal{H}_2k)$ là một hàm thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$, nên nghiệm của phương trình có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa. Trong trường hợp tổng quát khi $p, k \in L^1(\mathbb{R}^n)$, nói chung $(\mathcal{H}_2p)(\mathcal{H}_2k)$ không thỏa mãn điều kiện thuộc không gian $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.10 (a) Có thể có vô hạn các IE liên quan đến hàm Hermite có thể giải được nhờ sử dụng các tích chập đã đề xuất.

(b) Kết quả này đáp ứng đặc trưng của HT là nghiệm có thể được biểu diễn dưới dạng chuỗi với giả thiết $|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)|$ trong mục (iii), điều này khác với dạng nghiệm trong (3.61) từ giả thiết đơn giản $G(\omega) \neq 0$ trong mục (ii). Ví dụ, nếu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (tức là một số phức) và k là có giá trị thực cho trước, thì $G(\omega) \neq 0$ với mọi $\omega \in \mathbb{R}^n$, do $\Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega) \in \mathbb{R}$. Do đó, nếu $|\lambda| = |\Phi_\alpha(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)|$ với $\omega \in \mathbb{R}^n$ nào đó, chuỗi (3.66) có thể không tồn tại.

(c) Do các tích chập được xây dựng vẫn đúng cho các hàm $p, q \in L^2(\mathbb{R}^n)$ với cùng tính chất của các đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức chuẩn (theo nghĩa hầu khắp nơi), ta có thể nhận được các kết quả tương tự cho các phương trình (3.58) - (3.59) khi được điều chỉnh phù hợp.

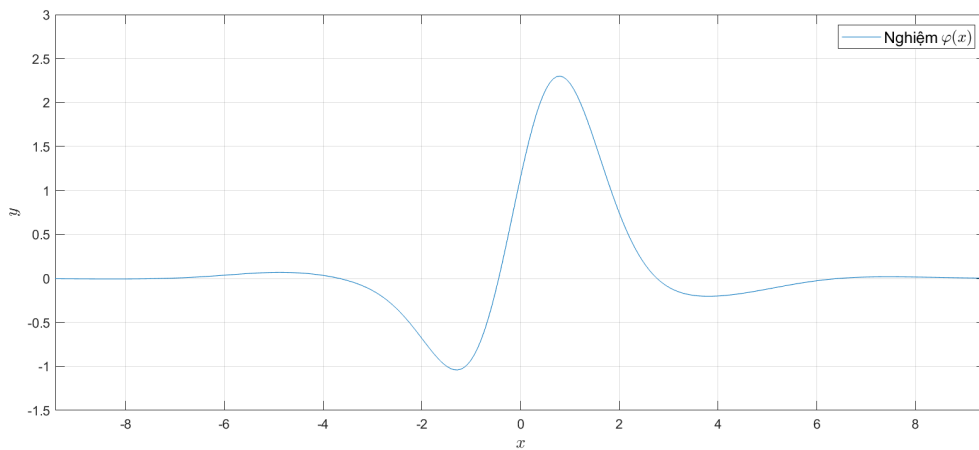
(d) Điều kiện đủ trong Định lý 3.8 là thiết thực. Hơn nữa, nếu $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ và nếu λ đủ lớn, thì $\mathcal{H}_1 f / G \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Điều này hoàn toàn phù hợp với những kiến thức đã biết về chuỗi Neumann và nghiệm chuỗi riêng như được trình bày trong mục (iii). Đây là một cách tiếp cận mới so với các công trình đã công bố khác về các phương trình tích chập (xem [7, 19, 22]).

Ví dụ 3.5 Xét phương trình tích phân

$$3\varphi(x) + \left(k_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}^{\phi_4, \mathcal{H}_1} \varphi \right)(x) = f(x), \quad (3.68)$$

trong đó, $k(x) = \text{tri}(-\pi, \pi, x)$, $f(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}}(e^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2})$.

Ta có $G(\omega) = 3 + \phi_4(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)$ và $\max_{\omega \in \mathbb{R}} |\phi_4(\omega)(\mathcal{H}_2 k)(\omega)| = 1.4349$. Nghiệm của phương trình (3.68) được xác định bởi $\varphi(x) = \mathcal{H}_1[\mathcal{H}_1 f / G](x)$ có đồ thị như Hình 3.8.



Hình 3.8: Nghiệm $\varphi(x)$ của phương trình tích chập liên kết với HT.

3.4.2 Phương trình tích chập với nhân dịch chuyển

Cho tập $\{\mathbf{h}_{ij}\} \subset \mathbb{R}^n$ cố định, $\{a_{ij}\} \subset \mathbb{R}$ và $\{k_{ij}\}$ là các hàm thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$. Đặt

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \sum_{j=1}^N [a_{1j}k_{1j}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}_{1j}) + a_{2j}k_{2j}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}_{2j}) + a_{3j}k_{3j}(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h}_{3j}) + a_{4j}k_{4j}(-\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{h}_{4j})]. \quad (3.69)$$

Ký hiệu K_e và K_o là các phần chẵn và phần lẻ của hàm K , và được xác định như sau:

$$K_e(\mathbf{z}) := \frac{1}{2}[K(\mathbf{z}) + K(-\mathbf{z})], \quad K_o(\mathbf{z}) := \frac{1}{2}[K(\mathbf{z}) - K(-\mathbf{z})], \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n.$$

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{u})\varphi(\mathbf{u})d\mathbf{u} = f(\mathbf{x}), \quad (3.70)$$

trong đó, $\mathbf{h}_{1j}, \mathbf{h}_{2j}, \mathbf{h}_{3j}, \mathbf{h}_{4j} \in \mathbb{R}^n$, tham số $\lambda \in \mathbb{C}$ cố định cho trước; các hàm $\{k_{ij}\}$ và f thuộc L^1 (hoặc L^2) đã biết; và φ là ẩn hàm cần tìm.

Nhận xét 3.11 Có thể thấy rằng, do $\mathbf{h}_{1j}, \mathbf{h}_{2j}, \mathbf{h}_{3j}, \mathbf{h}_{4j}$ trong phương trình (3.69) có thể khác nhau, thành phần tích phân trong vế trái của phương trình này không có biểu diễn dạng tích chập. Do đó, ta không thể giải phương trình này bằng phương pháp sử dụng tích chập trực tiếp như được trình bày trong Định lý 3.8.

3.4.2.1 Phương trình tích chập với nhân dịch chuyển

Luận án trình bày phương pháp giải phương trình (3.70) cho trường hợp nhân tích phân có dạng $K(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = k(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h})$, các trường hợp dạng (3.69) được thực hiện theo cách tương tự.

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} k(-\mathbf{x} - \mathbf{u} - \mathbf{h})\varphi(\mathbf{u})d\mathbf{u} = f(\mathbf{x}), \quad (3.71)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ cho trước; các hàm $k, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; và φ là ẩn hàm cần tìm.

Đặt

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= \frac{-\sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e1}(\omega) - \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o1}(\omega)}{2}, & B_1(\omega) &= \frac{\cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e1}(\omega) - \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o1}(\omega)}{2}, \\ A_2(\omega) &= \frac{\cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e2}(\omega) + \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o2}(\omega)}{2}, & B_2(\omega) &= \frac{\sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e2}(\omega) - \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o2}(\omega)}{2}, \\ D_1 &= (\lambda + B_2)\hat{f}_1 - B_1\hat{f}_2, & D &= (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - A_2B_1. \end{aligned}$$

Định lý 3.9 (i) Nếu $D(\omega) \neq 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, hay

$$\lambda \neq \frac{1}{2} \left[- (A_1 + B_2)(\omega) \pm |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1)(\omega)|^{1/2} \right],$$

hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, và nếu $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì phương trình (3.71) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{H}_1 [D_1/D](\mathbf{x}). \quad (3.72)$$

(ii) Nếu

$$|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\{ [(A_1 + B_2)^2 + |A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1|](\omega) \right\}^{1/2},$$

thì phương trình (3.71) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm của phương trình này tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức (3.72) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh.

(i) Phương trình tích phân (3.71) có thể viết lại dưới dạng

$$\lambda \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} [k_e(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) - k_o(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h})] \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f(\mathbf{x}). \quad (3.73)$$

Đặt

$$K_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} k_e(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) \varphi(\nu) d\mathbf{u} d\nu, \quad K_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} k_o(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}) \varphi(\nu) d\mathbf{u} d\nu.$$

Do k_e là hàm chẵn và k_o là hàm lẻ, từ các định lý tích chập 2.13 và 2.14, ta có

$$K_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left[- \left(k_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(k_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \left(k_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(k_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.74)$$

$$K_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left[\left(k_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(k_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \left(k_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) - \left(k_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.75)$$

Tác động $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ vào hai vế của (3.74) và (3.75), sử dụng tính chất $(\mathcal{H}_1 k)(\omega) = (\mathcal{H}_2 k)(-\omega)$, $(\mathcal{H}_2 k)(\omega) = (\mathcal{H}_1 k)(-\omega)$, ta nhận được

$$(\mathcal{H}_1 K_e)(\omega) = \frac{1}{4} [\text{cas}(\mathbf{h}\omega)(-\hat{k}_{e1}\hat{\varphi}_1 + \hat{k}_{e1}\hat{\varphi}_2)(\omega) + \text{cas}(-\mathbf{h}\omega)(\hat{k}_{e1}\hat{\varphi}_1 + \hat{k}_{e1}\hat{\varphi}_2)(\omega)] \\ = -\frac{1}{2} \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e1}(\omega)\hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{1}{2} \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e1}(\omega)\hat{\varphi}_2(\omega),$$

$$(\mathcal{H}_2 K_e)(\omega) = \frac{1}{4} [\text{cas}(-\mathbf{h}\omega)(-\hat{k}_{e2}\hat{\varphi}_2 + \hat{k}_{e2}\hat{\varphi}_1)(\omega) + \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\hat{k}_{e2}\hat{\varphi}_2 + \hat{k}_{e2}\hat{\varphi}_1)(\omega)] \\ = \frac{1}{2} \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e2}(\omega)\hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{1}{2} \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e2}(\omega)\hat{\varphi}_2(\omega),$$

$$(\mathcal{H}_1 K_o)(\omega) = \frac{1}{4} [\text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\hat{k}_{o1}\hat{\varphi}_1 + \hat{k}_{o1}\hat{\varphi}_2)(\omega) + \text{cas}(-\mathbf{h}\omega)(\hat{k}_{o1}\hat{\varphi}_1 - \hat{k}_{o1}\hat{\varphi}_2)(\omega)] \\ = \frac{1}{2} \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o1}(\omega)\hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{1}{2} \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o1}(\omega)\hat{\varphi}_2(\omega),$$

$$(\mathcal{H}_2 K_o)(\omega) = \frac{1}{4} [\text{cas}(-\mathbf{h}\omega)(\hat{k}_{o2}\hat{\varphi}_2 + \hat{k}_{o2}\hat{\varphi}_1)(\omega) + \text{cas}(\mathbf{h}\omega)(\hat{k}_{o2}\hat{\varphi}_2 - \hat{k}_{o2}\hat{\varphi}_1)(\omega)] \\ = -\frac{1}{2} \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o2}(\omega)\hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{1}{2} \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o2}(\omega)\hat{\varphi}_2(\omega).$$

Từ đây, tác động $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ vào hai vế của phương trình (3.73), ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} \left[\lambda - \frac{\sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e1}(\omega) + \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o1}(\omega)}{2} \right] \hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{\cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e1}(\omega) - \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o1}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_2(\omega) = \hat{f}_1(\omega) \\ \frac{\cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e2}(\omega) + \sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o2}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_1(\omega) + \left[\lambda + \frac{\sin(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{e2}(\omega) - \cos(\mathbf{h}\omega)\hat{k}_{o2}(\omega)}{2} \right] \hat{\varphi}_2(\omega) = \hat{f}_2(\omega). \end{cases}$$

Nếu $D(\omega) \neq 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, và $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì nghiệm $\varphi(\mathbf{x})$ được xác định bởi (3.72). Hơn nữa, theo định lý tồn tại duy nhất của HT, $\varphi(\mathbf{x})$ được xác định duy nhất.

Ngược lại, dễ dàng chứng minh được $\varphi(\mathbf{x})$ thỏa mãn phương trình (3.71).

(ii) Do $D = (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - A_2 B_1$, nên với mỗi ω , $D(\omega)$ chỉ có thể bằng 0 tại $\lambda = \frac{1}{2} \left\{ - (A_1 + B_2)(\omega) \pm [A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1 |(\omega)|^{1/2}] \right\}$, hoặc $\lambda = \frac{1}{2} \left\{ - (A_1 + B_2)(\omega) \pm i [A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1 |(\omega)|^{1/2}] \right\}$. Do đó, nếu

$$|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\{ \left[(A_1 + B_2)^2 + |A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1| \right] (\omega) \right\}^{1/2},$$

thì do $D(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}^n$, phương trình (3.71) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm của phương trình này tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức (3.72) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.12 Trong trường hợp ta chỉ xét tham số $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có ước lượng chặt hơn là: nếu $\lambda < \min_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left[- (A_1 + B_2)(\omega) - |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1)(\omega)|^{1/2} \right]$, hoặc nếu $\lambda > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left[- (A_1 + B_2)(\omega) + |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1)(\omega)|^{1/2} \right]$ thì phương trình (3.71) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức (3.72) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

3.4.2.2 Phương trình tích chập với nhân dạng Toeplitz + Hankel dịch chuyển

Xét phương trình tích phân

$$\lambda \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}_1) + q(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}_2) \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f(\mathbf{x}), \quad (3.76)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{R}^n$ cho trước; các hàm $k, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Đặt

$$P_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} p_e(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}_1) \varphi(\nu) d\mathbf{u} d\nu, \quad P_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} p_o(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \mathbf{h}_1) \varphi(\nu) d\mathbf{u} d\nu;$$

$$Q_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} q_e(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}_2) \varphi(\nu) d\mathbf{u} d\nu, \quad Q_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} q_o(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{h}_2) \varphi(\nu) d\mathbf{u} d\nu.$$

Từ các định lý tích chập 2.13 và 2.14, ta có

$$P_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left[\left(p_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) - \left(p_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \left(p_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(p_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right], \quad (3.77)$$

$$P_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left[\left(p_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(p_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right. \\ \left. - \left(p_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(p_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right], \quad (3.78)$$

$$Q_e(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left[- \left(q_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(q_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \left(q_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(q_e \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right], \quad (3.79)$$

$$Q_o(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left[\left(q_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) + \left(q_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_1 \\ * \\ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right. \\ \left. + \left(q_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) - \left(q_o \begin{smallmatrix} \mathcal{H}_2 \\ * \\ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1 \end{smallmatrix} \varphi \right)(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.80)$$

Tác động $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ vào hai vế của các hệ thức (3.77) - (3.80), ta nhận được

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_1 P)(\omega) &= \frac{\cos(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{e1}(\omega) + \sin(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{o1}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{-\sin(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{e1}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{o1}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_2(\omega), \\ (\mathcal{H}_2 P)(\omega) &= \frac{\sin(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{e2}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{o2}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{\cos(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{e2}(\omega) - \sin(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{o2}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_2(\omega), \\ (\mathcal{H}_1 Q)(\omega) &= \frac{-\sin(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{e1}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{o1}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{\cos(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{e1}(\omega) + \sin(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{o1}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_2(\omega), \\ (\mathcal{H}_2 Q)(\omega) &= \frac{\cos(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{e2}(\omega) - \sin(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{o2}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_1(\omega) + \frac{\sin(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{e2}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{o2}(\omega)}{2} \hat{\varphi}_2(\omega). \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} A_1(\omega) &= \frac{\cos(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{e1}(\omega) + \sin(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{o1}(\omega)}{2} + \frac{-\sin(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{e1}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{o1}(\omega)}{2}, \\ B_1(\omega) &= \frac{-\sin(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{e1}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{o1}(\omega)}{2} + \frac{\cos(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{e1}(\omega) + \sin(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{o1}(\omega)}{2}, \\ A_2(\omega) &= \frac{\sin(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{e2}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{o2}(\omega)}{2} + \frac{\cos(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{e2}(\omega) - \sin(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{o2}(\omega)}{2}, \\ B_2(\omega) &= \frac{\cos(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{e2}(\omega) - \sin(\mathbf{h}_1 \omega) \hat{p}_{o2}(\omega)}{2} + \frac{\sin(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{e2}(\omega) + \cos(\mathbf{h}_2 \omega) \hat{q}_{o2}(\omega)}{2}, \\ D_1 &= (\lambda + B_2) \hat{f}_1 - B_1 \hat{f}_2, \quad D = (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - A_2 B_1. \end{aligned}$$

Nếu $D(\omega) \neq 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, hay

$$\lambda \neq \frac{1}{2} \left[- (A_1 + B_2)(\omega) \pm \left| (A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1)(\omega) \right|^{1/2} \right]$$

hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, và nếu $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì $\varphi(\mathbf{x})$ được xác định bởi công thức

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \mathcal{H}_1 [D_1/D](\mathbf{x}). \quad (3.81)$$

Hơn nữa, theo định lý tồn tại duy nhất của HT, $\varphi(\mathbf{x})$ được xác định duy nhất.

Ngược lại, dễ dàng chứng minh được $\varphi(\mathbf{x})$ thỏa mãn phương trình (3.76).

Mặt khác, nếu

$$|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\{ \left[(A_1 + B_2)^2 + |A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1| \right](\omega) \right\}^{1/2},$$

thì do $D(\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathbb{R}^n$, phương trình (3.76) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$ và nghiệm tồn tại duy nhất được xác định bởi công thức (3.81) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ví dụ 3.6 Xét phương trình tích phân

$$\lambda \varphi(x) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} p(x-u+h_1) + q(x+u+h_2) \varphi(u) du = f(x), \quad (3.82)$$

trong đó, $p(x) = 0.2e^{-0.1|x|}$, $q(x) = 0.05e^{-0.01x^2}$, $f(x) = e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}$.

Đặt

$$A_1(\omega) = \frac{1}{2} [\cos(h_1\omega) \hat{p}_{e1}(\omega) + \sin(h_1\omega) \hat{p}_{o1}(\omega) - \sin(h_2\omega) \hat{q}_{e1}(\omega) + \cos(h_2\omega) \hat{q}_{o1}(\omega)],$$

$$B_1(\omega) = \frac{1}{2} [-\sin(h_1\omega) \hat{p}_{e1}(\omega) + \cos(h_1\omega) \hat{p}_{o1}(\omega) + \cos(h_2\omega) \hat{q}_{e1}(\omega) + \sin(h_2\omega) \hat{q}_{o1}(\omega)],$$

$$A_2(\omega) = \frac{1}{2} [\sin(h_1\omega) \hat{p}_{e2}(\omega) + \cos(h_1\omega) \hat{p}_{o2}(\omega) + \cos(h_2\omega) \hat{q}_{e2}(\omega) - \sin(h_2\omega) \hat{q}_{o2}(\omega)],$$

$$B_2(\omega) = \frac{1}{2} [\cos(h_1\omega) \hat{p}_{e2}(\omega) - \sin(h_1\omega) \hat{p}_{o2}(\omega) + \sin(h_2\omega) \hat{q}_{e2}(\omega) + \cos(h_2\omega) \hat{q}_{o2}(\omega)],$$

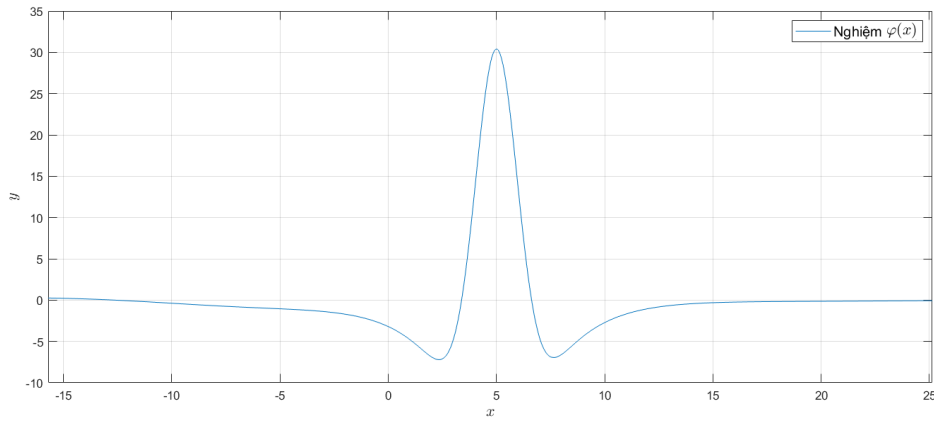
$$D_1 = (\lambda + B_2) \hat{f}_1 - B_1 \hat{f}_2, \quad D = (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - A_2 B_1.$$

Với $h_1 = 0, h_2 = 0$, ta tính toán được

$$\min_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \left[- (A_1 + B_2)(\omega) - |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1)(\omega)|^{1/2} \right] = -2.3450,$$

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \left[- (A_1 + B_2)(\omega) + |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1)(\omega)|^{1/2} \right] = 2.8371e - 06.$$

Nghiệm của phương trình với $\lambda = 0.1$ được xác định bởi $\varphi(x) = \mathcal{H}_1[D_1/D](x)$ có đồ thị như Hình 3.9.



Hình 3.9: Nghiệm $\varphi(x)$ của phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển.

3.4.3 Phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite

Cho tập $\{a_{ij}\} \subset \mathbb{R}$, $\{k_{ij}\}$ là các hàm thuộc $L^1(\mathbb{R}^n)$ và $\{\Phi_{\alpha_{ij}}\}$ là tập các hàm Hermite. Đặt

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) := \sum_{j=1}^N \left[a_{1j} k_{1j}(\mathbf{u}) \Phi_{\alpha_{1j}}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + a_{2j} k_{2j}(\mathbf{u}) \Phi_{\alpha_{2j}}(\mathbf{x} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right. \\ \left. + a_{3j} k_{3j}(\mathbf{u}) \Phi_{\alpha_{3j}}(\mathbf{x} - \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) + a_{4j} k_{4j}(\mathbf{u}) \Phi_{\alpha_{4j}}(\mathbf{x} - \mathbf{u} - \boldsymbol{\nu}) \right].$$

Xét phương trình tích phân

$$\lambda \varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) \varphi(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu} = f(\mathbf{x}), \quad (3.83)$$

trong đó, $\lambda \in \mathbb{C}$ cho trước và dữ liệu ban đầu f đã biết, φ là ẩn hàm cần tìm.

Nhận xét 3.13 Trong trường hợp tổng quát, thành phần tích phân trong vế trái của phương trình (3.83) không có biểu diễn dạng tích chập. Do đó, ta không thể giải phương trình này bằng phương pháp sử dụng tích chập trực tiếp như được trình bày trong Định lý 3.8.

Ta trình bày phương pháp giải phương trình (3.83) cho trường hợp nhân tích phân có dạng $K(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\nu}) = k(\mathbf{u})\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu})$, trường hợp tổng quát được thực hiện theo cách tương tự.

Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{u})\Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu})\varphi(\boldsymbol{\nu})d\mathbf{u}d\boldsymbol{\nu} = f(\mathbf{x}), \quad (3.84)$$

trong đó, $|\alpha| = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ cho trước; các hàm $k, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ đã biết; φ là ẩn hàm cần tìm.

Đặt

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha}\hat{k}_1 + \Phi_{\alpha}\hat{k}_2), & B_1 &= \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha}\hat{k}_1 - \Phi_{\alpha}\hat{k}_2), \\ A_2 &= \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha}\hat{k}_2 - \Phi_{\alpha}\hat{k}_1), & B_2 &= -\frac{1}{4}(\Phi_{\alpha}\hat{k}_2 + \Phi_{\alpha}\hat{k}_1), \\ D_1 &= (\lambda + B_2)\hat{f}_1 - A_2\hat{f}_2, & D &= (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - B_1A_2. \end{aligned}$$

Định lý 3.10 (i) Nếu $D(\omega) \neq 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, hay

$$\lambda \neq \frac{1}{2} \left[-(A_1 + B_2)(\omega) \pm |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1)(\omega)|^{1/2} \right]$$

hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, và nếu $\mathcal{H}_1 f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, thì phương trình (3.84) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức

$$\varphi(\mathbf{x}) \stackrel{a.e.}{=} \mathcal{H}_1 [D_1/D](\mathbf{x}). \quad (3.85)$$

(ii) Nếu

$$|\lambda| > \max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\{ \left[(A_1 + B_2)^2 + |A_1^2 + B_2^2 - 2A_1B_2 + 4A_2B_1| \right](\omega) \right\}^{1/2},$$

thì phương trình (3.84) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nghiệm của phương trình này tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức (3.85) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Chứng minh.

(i) Đặt

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} k(\mathbf{u}) \Phi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\nu}) \varphi(\boldsymbol{\nu}) d\mathbf{u} d\boldsymbol{\nu}.$$

Với $|\alpha| = r \pmod{4}$, từ các tích chập (2.49) - (2.56), ta có

$$G(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{4} \left(-k_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} \varphi + k_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} \varphi + k_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} \varphi + k_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} \varphi \right)(\mathbf{x}) & r = 0, 2 \\ \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{4} \left(k_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} \varphi + k_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} \varphi + k_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} \varphi - k_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_2}^{\Phi_{\alpha}, \mathcal{H}_1} \varphi \right)(\mathbf{x}) & r = 1, 3. \end{cases} \quad (3.86)$$

Với $r = 1$, tác động $\mathcal{H}_1$ và $\mathcal{H}_2$ vào hai vế của phương trình (3.84) và sử dụng đồng nhất thức (3.86), ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính

$$\begin{cases} \left[\lambda + \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha} \hat{k}_1 + \Phi_{\alpha} \hat{k}_2) \right] \hat{\varphi}_1 + \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha} \hat{k}_1 - \Phi_{\alpha} \hat{k}_2) \hat{\varphi}_2 = \hat{f}_1 \\ \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha} \hat{k}_2 - \Phi_{\alpha} \hat{k}_1) \hat{\varphi}_1 + \left[\lambda - \frac{1}{4}(\Phi_{\alpha} \hat{k}_2 + \Phi_{\alpha} \hat{k}_1) \right] \hat{\varphi}_2 = \hat{f}_2. \end{cases} \quad (3.87)$$

Do đó, nếu $D(\boldsymbol{\omega}) \stackrel{\text{a.e.}}{\neq} 0$ trên $\mathbb{R}^n$, thì phương trình (3.84) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, theo định lý tồn tại duy nhất của HT, $\varphi(\mathbf{x})$ tồn tại duy nhất và được xác định bởi công thức (3.85).

Ngược lại, dễ dàng chứng minh được $\varphi(\mathbf{x})$ thỏa mãn phương trình (3.84).

(ii) Do $D = (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - A_2 B_1$, nên với mỗi $\boldsymbol{\omega}$, $D(\boldsymbol{\omega})$ chỉ có thể bằng 0 tại $\lambda = \frac{1}{2} \left[-(A_1 + B_2)(\boldsymbol{\omega}) \pm \left| (A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1)(\boldsymbol{\omega}) \right|^{1/2} \right]$, hoặc $\lambda = \frac{1}{2} \left[-(A_1 + B_2)(\boldsymbol{\omega}) \pm i \left| (A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1)(\boldsymbol{\omega}) \right|^{1/2} \right]$. Do đó, nếu

$$|\lambda| > \max_{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \left\{ \left[(A_1 + B_2)^2 + \left| A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1 \right| \right](\boldsymbol{\omega}) \right\}^{1/2},$$

thì do $D(\boldsymbol{\omega}) \neq 0, \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$, phương trình (3.84) giải được trong $L^1(\mathbb{R}^n)$ và nghiệm tồn tại duy nhất được xác định bởi công thức (3.85) với mọi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Định lý được chứng minh. □

Ví dụ 3.7 Xét phương trình tích phân

$$\lambda\varphi(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} K(x, u, \nu) \varphi(\nu) du d\nu = f(x), \quad (3.88)$$

trong đó,

$$\begin{aligned} K(x, u, \nu) &= k_1(u)\phi_1(x + u + \nu) + k_2(u)\phi_2(x - u + \nu) \\ &\quad + k_3(u)\phi_3(x + u - \nu) + k_4(u)\phi_4(x - u - \nu), \end{aligned}$$

$$k_1(u) = e^{-u^2/2}, \quad k_2(u) = e^{-u^2/4}, \quad k_3(u) = e^{-u^2/6}, \quad k_4(u) = e^{-u^2/8},$$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ là các hàm Hermite,

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{\pi} \frac{3\pi - 2x}{4} \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\pi} \frac{3\pi + 2x}{4} \right) \right].$$

Đặt

$$A1 = \frac{1}{4} (\Phi_1 \hat{k}_{11} + \Phi_1 \hat{k}_{12} - \Phi_2 \hat{k}_{21} + \Phi_2 \hat{k}_{22} - \Phi_3 \hat{k}_{31} + \Phi_3 \hat{k}_{32} + \Phi_4 \hat{k}_{41} + \Phi_4 \hat{k}_{42}),$$

$$B1 = \frac{1}{4} (\Phi_1 \hat{k}_{11} - \Phi_1 \hat{k}_{12} - \Phi_2 \hat{k}_{21} - \Phi_2 \hat{k}_{22} - \Phi_3 \hat{k}_{31} - \Phi_3 \hat{k}_{32} + \Phi_4 \hat{k}_{41} - \Phi_4 \hat{k}_{42}),$$

$$A2 = \frac{1}{4} (-\Phi_1 \hat{k}_{12} + \Phi_1 \hat{k}_{11} - \Phi_2 \hat{k}_{22} - \Phi_2 \hat{k}_{21} + \Phi_3 \hat{k}_{32} + \Phi_3 \hat{k}_{31} + \Phi_4 \hat{k}_{42} - \Phi_4 \hat{k}_{41}),$$

$$B2 = \frac{1}{4} (-\Phi_1 \hat{k}_{12} - \Phi_1 \hat{k}_{11} - \Phi_2 \hat{k}_{22} + \Phi_2 \hat{k}_{21} + \Phi_3 \hat{k}_{32} - \Phi_3 \hat{k}_{31} + \Phi_4 \hat{k}_{42} + \Phi_4 \hat{k}_{41}),$$

$$D_1 = (\lambda + B_2) \hat{f}_1 - A_2 \hat{f}_2,$$

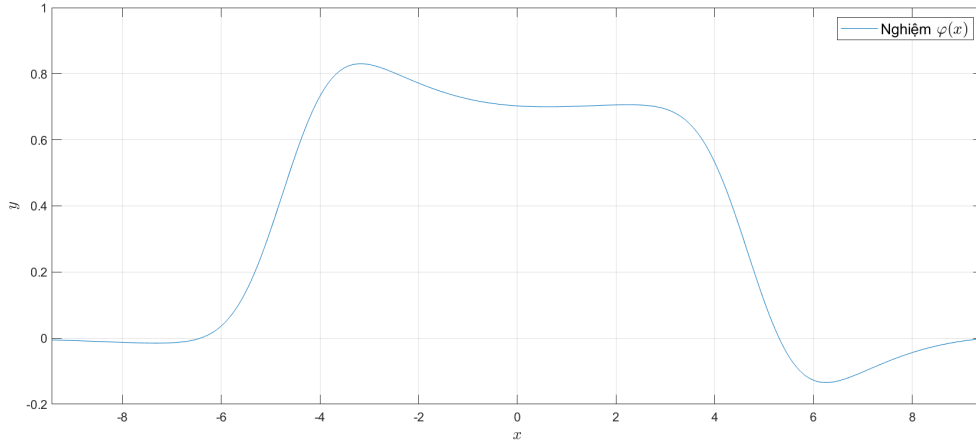
$$D = (\lambda + A_1)(\lambda + B_2) - A_2 B_1.$$

Ta tính toán được

$$\min_{\omega \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \left[- (A_1 + B_2)(\omega) - |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1)(\omega)|^{1/2} \right] \right\} = -2.0895,$$

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \left[- (A_1 + B_2)(\omega) + |(A_1^2 + B_2^2 - 2A_1 B_2 + 4A_2 B_1)(\omega)|^{1/2} \right] \right\} = 0.5280.$$

Nghiệm của phương trình với $\lambda = 5$ được xác định bởi $\varphi(x) = \mathcal{H}_1[D_1/D](x)$ có đồ thị như Hình 3.10.



Hình 3.10: Nghiệm $\varphi(x)$ của phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite.

Kết luận chương 3

Sau đây là một số kết quả chính nhận được từ chương 3.

Giải đúng FIE-II: Luận án đã nghiên cứu một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn, bao gồm FIE-II với nhân dạng TPH, FIE-II với nhân dạng TPH dịch chuyển. Luận án cũng nghiên cứu một số lớp FIE-II trên miền vô hạn và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT, bao gồm phương trình tích chập liên kết với HT, phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển và phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite.

Giải gần đúng FIE-I: Luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm các phương pháp chỉnh lập song song, FBSM và FBFSM. Trên mỗi bước lặp, các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn được sử dụng như một công cụ để chuyển FIE-II với nhân dạng TPH về hệ phương trình đại số tuyến tính. Quá trình này cho phép tìm nghiệm gần đúng của FIE-I với phần tuyến tính TPH một cách hiệu quả và ổn định.

Kết luận

1 Đóng góp của luận án

Luận án nghiên cứu về các phép HT và các phép tích chập liên quan đến HT, trên cơ sở đó, khám phá tiềm năng ứng dụng của chúng trong việc giải FIE. Luận án cũng nghiên cứu các phương pháp để giải FIE cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến. Dưới đây là những đóng góp chính của luận án.

Phát triển cơ sở lý thuyết cho HT: Luận án hệ thống hóa và phát triển các tính chất toán tử, đặc trưng toán tử của HT trên các không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, không gian Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$. Luận án đề xuất một số lớp tích chập mới liên quan đến HT và HT hữu hạn, đồng thời chứng minh các tính chất toán học quan trọng của chúng, như bất đẳng thức chuẩn, đẳng thức nhân tử hóa và bất đẳng thức Young. Đặc biệt, các tích chập mới này còn được sử dụng để xây dựng đại số Wiener liên kết với HT trên không gian nền $L^1(\mathbb{R}^n)$, nhằm mở rộng phạm vi nghiên cứu về không gian hàm $L^1(\mathbb{R}^n)$, cũng như các tích chập trong $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Giải đúng FIE-II: Luận án nghiên cứu một số lớp FIE-II và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho loại phương trình này. Kết quả đạt được nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT. Cụ thể, luận án đã nghiên cứu và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho một số lớp FIE-II với nhân dạng TPH, nhờ sử dụng các phép tích chập liên kết với HT hữu hạn, bao gồm FIE-II với nhân dạng TPH và FIE-II với nhân dạng TPH dịch chuyển. Luận án cũng nghiên cứu và đưa ra công thức nghiệm đúng dưới dạng đóng cho một số lớp FIE-II trên miền vô hạn, nhờ sử dụng các tích chập liên kết với HT, bao gồm phương trình tích chập liên kết với HT, phương trình tích chập với nhân dạng TPH dịch chuyển và phương trình tích chập với nhân liên kết với hàm Hermite. Điều này thể hiện tiềm năng ứng dụng HT để thay thế cho

FT trong việc giải một số lớp phương trình tích phân. Biến đổi Hartley có quan hệ gần gũi với FT, nhưng có một số tính chất mang lại ưu thế hơn so với FT khi xử lý dữ liệu thực, vốn là loại dữ liệu phổ biến trong thực tế. Sử dụng HT có thể giúp giảm đáng kể số lượng các phép tính số học, cũng như dung lượng bộ nhớ cần lưu trữ trong quá trình tính toán. Đặc điểm này là vô cùng quan trọng trong các lĩnh vực phát triển ứng dụng nhúng, hoặc phát triển ứng dụng trên các thiết bị có tài nguyên hạn chế. Hơn nữa, HT có tính chất tự ngược, tức là áp dụng HT hai lần sẽ trả về hàm ban đầu, điều này giúp đơn giản hóa việc tính toán HT và các tích chập Hartley, khi không cần phải phát triển các thuật toán riêng để tính toán IHT.

Giải gần đúng FIE-I: Phương trình tích phân Fredholm loại I, trường hợp đặc biệt là FIE-I với phần tuyến tính TPH, nói chung là bài toán đặt không chính. Nghiệm của bài toán này có thể không tồn tại, hoặc nghiệm tồn tại nhưng không duy nhất, hoặc cũng có thể nghiệm tồn tại nhưng không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu ban đầu, những tính chất này gây khó khăn trong việc tìm kiếm lời giải số ổn định. Việc giải bài toán này luôn là một thách thức lớn, nhưng bài toán này lại rất phổ biến trong thực tế.

- Luận án đề xuất áp dụng một số phương pháp chỉnh lập, kết hợp với các tích chập liên kết với HT hữu hạn, để giải gần đúng một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH cho cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến, bao gồm các phương pháp chỉnh lập song song, FBSM và FBFSM.
- Các kết quả đạt được của luận án cho thấy sự phù hợp và hiệu quả trong việc ứng dụng các phép HT và các cấu trúc tích chập liên quan đến HT trong việc giải một số lớp FIE-I với phần tuyến tính TPH.

2 Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Dưới đây là một số hướng nghiên cứu tiếp theo của luận án.

Nghiên cứu lý thuyết toán học:

- Nghiên cứu các tính chất toán học của các FTT trên các không gian trừu tượng, như các không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$; các không gian hàm kiểm thử, bao gồm không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ và không gian Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; các không gian phân

phối, bao gồm không gian các hàm suy rộng $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (*generalized functions*) và không gian phân phối tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (*tempered distributions*); không gian Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$, các họ không gian Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ và Triebel-Lizorkin $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$. Mặc dù đã có nhiều công trình nghiên cứu về các phép biến đổi tích phân như LCT, OLCT trên các không gian hàm này, nhưng mức độ hoàn thiện vẫn còn hạn chế đáng kể so với FT.

- Nghiên cứu các dạng tổng quát của các FTT nhằm tăng tính linh hoạt trong việc ứng dụng các FTT trong thực tiễn.

Nghiên cứu phát triển thuật toán:

- Nghiên cứu phát triển các thuật toán để tính toán hiệu quả với HT nói riêng và các FTT nói chung, nhằm tối ưu hiệu suất tính toán trên các thiết bị có kiến trúc phần cứng khác nhau (CPU, GPU, FPGA) và cho các dữ liệu có kích thước khác nhau.
- Nghiên cứu phát triển thuật toán trên không gian nhiều chiều. Nghiên cứu phát triển các thuật toán thưa để xử lý hiệu quả tín hiệu thưa, giúp giảm thời gian tính toán khi các tín hiệu có nhiều giá trị bằng 0.

Nghiên cứu ứng dụng:

- Nghiên cứu phát triển ứng dụng của các FTT cho các lĩnh vực như toán ứng dụng, xử lý tín hiệu, xử lý ảnh và video, quang học, mật mã học và học máy.
- Nghiên cứu các phương pháp giải phương trình tích phân với nhân dạng TPH, sử dụng các phương pháp trong lý thuyết toán tử, các phương pháp lặp, các kỹ thuật hiệu chỉnh.
- Tiếp tục nghiên cứu ứng dụng HT để giải gần đúng FIE-I có nhân dạng TPH theo hướng tiếp cận dựa trên lý thuyết tối ưu hai cấp.

Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án

- [CT1] N.M. Tuan, B.T. Giang, and Q.T. Ha (2025), “New Convolutions for the Hartley Integral Transform Imbedded in the Banach Algebras and Convolution-type Integral Equations”, *Demonstratio Mathematica* vol. 58 (1), pp. 20240087. DOI: 10.1515/dema-2024 0087. url: <https://doi.org/10.1515/dema-2024 0087>.
- [CT2] V.T. Dung, and Q.T. Ha (2021), “Approximate Solution for Integral Equations Involving Linear Toeplitz plus Hankel Parts”, *Computational and Applied Mathematics* vol. 40 (5), pp. 172. DOI: 10.1007/s40314-021-01558-8. url: <https://doi.org/10.1007/s40314-021-01558-8>.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Phạm Kỳ Anh và Nguyễn Bường (2007), *Bài toán đặt không chỉnh*, Hà Nội: Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội (các trang 11, 31).
- [2] Nguyễn Minh Tuấn (2016), *Biến đổi Tích phân dạng Fourier và Phương trình Tích phân dạng Chập*, Hà Nội: Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, ISBN: 978-604-949-570-5 (các trang 11, 19, 24–28, 30, 41, 52–61).
- [3] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và Giải tích hàm*, Tái bản lần thứ 5, có chỉnh lý, Hà Nội: Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội (các trang 11, 21, 22).

Tiếng Anh

- [4] Achieser, N.I. (1992), *Theory of Approximation*, New York: Dover Publications, ISBN: 978-0486671291 (trang 114).
- [5] Adams, R.A. and Fournier, J.J.F. (2003), *Sobolev Spaces*, 2nd, vol. 140, Elsevier/Academic Press, ISBN: 978-0120441434 (trang 11).
- [6] Alber, Y. and Ryazantseva, I. (2006), *Nonlinear Ill-posed Problems of Monotone Type*, Dordrecht, The Netherlands: Springer, ISBN: 1402043953 (trang 93).
- [7] Anh, P.K., Castro, L.P., Thao, P.T., and Tuan, N.M. (2017), “Two New Convolutions for the Fractional Fourier Transform”, *Wireless Personal Communications* vol. 92 (2), pp. 623–637 (trang 116).

- [8] Anh, P.K. and Chung, C.V. (2009), “Parallel Iterative Regularization Methods for Solving Systems of Ill-Posed Equations”, *Applied Mathematics and Computation* vol. 212 (2), pp. 542–550, ISSN: 0096-3003 (các trang 36, 37).
- [9] Anh, P.K. and Hai, T.N. (2023), “On Regularized Forward-Backward Dynamical Systems Associated with Structured Monotone Inclusions”, *Vietnam Journal of Mathematics* vol. 51, pp. 545–562 (trang 40).
- [10] Anh, P.K. and Hai, T.N. (2025), “A Simple Regularized Forward-Backward-Forward Dynamical System for Structured Monotone Inclusions”, *Computational and Applied Mathematics* vol. 44, pp. 1–20 (trang 40).
- [11] Anh, P.K., Tuan, N.M., and Tuan, P.D. (2013), “The finite Hartley new convolutions and solvability of the integral equations with Toeplitz plus Hankel kernels”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* vol. 397, pp. 537–549 (các trang 6, 43, 87).
- [12] Anh, P.T.V. and Thao, N.X. (2015), “Integral Transforms of Hartley–Fourier Cosine Polyconvolution Type”, *Applicable Analysis* vol. 94, pp. 1749–1765 (trang 3).
- [13] Atkinson, K.E. (1997), *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, vol. 4, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, ISBN: 978-0521588701 (trang 4).
- [14] Banerjea, S. and Mandal, B.N. (2023), *Integral Equations and Integral Transforms*, 1st ed., Singapore: Springer, ISBN: 978-981-99-6359-1 (trang 4).
- [15] Bauschke, H.H. and Combettes, P.L. (2017), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, 2nd ed., CMS Books in Mathematics, Cham, Switzerland: Springer, ISBN: 978-3-319-48310-4 (các trang 11, 22, 32–34, 97).
- [16] Bitsadze, Andrei Vasilievich (1995), *Integral Equations of the First Kind*, Singapore: World Scientific, ISBN: 978-981-02-1234-6 (trang 80).
- [17] Böttcher, A., Karlovich, Y.I., and Spitkovsky, I.M. (2002), *Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions*, vol. 131, Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser, ISBN: 3-7643-6672-9 (trang 2).
- [18] Bracewell, R.N. (1986), “Aspects of the Hartley Transform”, *Proceedings of the IEEE* vol. 74 (9), pp. 1283–1287 (các trang 2, 65).

- [19] Bracewell, R.N. (1986), *The Hartley Transform*, vol. 19, Oxford Engineering Science Series, New York: Oxford University Press, ISBN: 0195039696 (các trang 2, 65, 74, 116).
- [20] Bracewell, R.N., Buneman, O., Hao, H., and Villasenor, J. (1986), “Fast Two-Dimensional Hartley Transform”, *Proceedings of the IEEE* vol. 74, pp. 1282–1283 (trang 3).
- [21] Brézis, H. (2011), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York: Springer (trang 34).
- [22] Britvina, L.E. (2007), “Generalized Convolutions for the Hankel Transform and Related Integral Operators”, *Mathematische Nachrichten* vol. 280 (9-10), pp. 962–970 (trang 116).
- [23] Campos, R.G. (2019), *The XFT Quadrature in Discrete Fourier Analysis*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Cham, Switzerland: Birkhäuser, ISBN: 978-3-030-13422-8 (các trang 2, 142, 148).
- [24] Castro, L.P., Guerra, R.C., and Tuan, N.M. (2020), “New Convolutions and Their Applicability to Integral Equations of Wiener-Hopf plus Hankel Type”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* vol. 43 (7), pp. 4835–4846 (các trang 79, 83).
- [25] Castro, L.P., Silva, A.S., and Saitoh, S. (2014), “A Reproducing Kernel Hilbert Space Constructive Approximation for Integral Equations with Toeplitz and Hankel Kernels”, *Libertas Mathematica (New Series)* vol. 34 (1), pp. 1–22 (trang 83).
- [26] Coutinho, A.M.P.G., Coutinho, P.M.M., Costa, J.M.M., Silva, J.V.A.M., and Nogueira, F.J.P. (2021), “A novel Image Compression Method Based on Discrete Hartley Transform and Principal Component Analysis”, *Alexandria Engineering Journal* vol. 60 (4), pp. 4025–4037 (trang 3).
- [27] Dales, H.G., Aiena, P., Eschmeier, J., Laursen, K.B., and Willis, G.A. (2003), *An Introduction to Banach Algebras, Operators, and Harmonic Analysis*, vol. 57, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge: Cambridge University Press (trang 75).
- [28] Debnath, L. and Bhatta, D. (2024), *Integral Transforms and Their Applications*, 3rd ed., New York: Routledge, ISBN: 978-1-032-91748-1 (trang 1).

- [29] Didenko, V.D. and Silbermann, B. (2016), “Generalized Inverses and Solution of Equations with Toeplitz plus Hankel Operators”, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* vol. 22 (2), pp. 645–667 (trang 88).
- [30] Duhamel, P. and Vetterli, M. (1987), “Improved Fourier and Hartley Transform Algorithms: Application to Cyclic Convolution of Real Data”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* vol. 35, pp. 818–824 (trang 3).
- [31] Easton, R.L. (2010), *Fourier Methods in Imaging*, The Wiley-IS & T Imaging Science and Technology Series, New Jersey: John Wiley & Sons, ISBN: 978-0-470-68983-7 (trang 2).
- [32] Feldman, I., Gohberg, I., and Krupnik, N. (2000), “Convolution Equations on Finite Intervals and Factorization of Matrix Functions”, *Integral Equation Operator Theory* vol. 36, pp. 201–211 (trang 83).
- [33] Gelman, L., Sanderson, M., and Thompson, C. (2003), “Signal Recognition: Fourier Transform vs. Hartley Transform”, *Pattern Recognition* vol. 36 (12), pp. 2849–2853 (trang 3).
- [34] Goebel, K. and Kirk, W.A. (1990), *Topics in Metric Fixed Point Theory*, vol. 28, Cambridge Studies in Advanced Math. Cambridge: Cambridge University Press (trang 11).
- [35] Gohberg, I. and Krein, M.G. (1960), “Systems of Integral Equations on a Half-line with Kernels Depending on the Difference of Arguments”, (các trang 4, 5).
- [36] Groetsch, C. W. (2007), “Integral Equations of the First Kind, Inverse Problems and Regularization: A Crash Course”, *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 73, p. 012001 (trang 80).
- [37] Guo, D., Lakshmikantham, V., and Liu, X. (1999), *Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces*, vol. 478, Mathematics and Its Applications, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, ISBN: 978-0-7923-5593-3 (trang 80).
- [38] Ha, Q.T. and Minh, L.T. (2025), “Convolution of the Hartley Transform with an Extended Kernel and the Toeplitz plus Hankel Integral Equation”, *Journal of Applied Mathematics and Informatics* vol. 43 (2), pp. 367–380 (trang 6).

- [39] Ha, Q.T., Minh, L.T., and Tuan, N.M. (2019), “Convolution for the Offset Linear Canonical Transform with Gaussian Weight and Its Application”, *VNU Journal of Science: Mathematics - Physics* vol. 35 (1), pp. 47–54 (trang 2).
- [40] Heinig, G. and Rost, K. (2003), “New Fast Algorithms for Toeplitz plus Hankel Matrices”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* vol. 25 (3), pp. 842–857 (trang 6).
- [41] Hieu, D.V., Anh, P.K., Muu, L.D., and Strodiot, J.J. (2022), “Iterative Regularization Methods with New Stepsize Rules for Solving Variational Inclusions”, *Journal of Applied Mathematics and Computing* vol. 68, pp. 571–599 (các trang 34, 39, 40).
- [42] Jinsheng, N., Dingbo, C., and Jiancheng, L. (1993), “A Fast Hartley Transform Techniques of Computing Stokes Formula”, *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, pp. 3–10 (trang 3).
- [43] Jinsheng, N., Jiancheng, L., and Dingbo, C. (1998), “Application of the Hartley Transform in the Computation of the Geoid in China”, *Geospatial Information Science* vol. 1, pp. 43–49 (trang 3).
- [44] Kaltenbacher, B., Neubauer, A., and Scherzer, O. (2008), *Iterative Regularization Methods for Nonlinear Ill-Posed Problems*, Berlin: Walter de Gruyter (trang 106).
- [45] Kammler, D.W. (2016), *A First Course in Fourier Analysis*, 3rd ed., Cambridge: Cambridge University Press, ISBN: 978-1-107-11116-2 (trang 1).
- [46] Kanwal, R.P. (2013), *Linear Integral Equations: Theory and Technique*, 2nd ed., Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Massachusetts: Birkhäuser, ISBN: 978-1-4614-9333-3 (trang 4).
- [47] Khoa, N.M. (2023), “On the Polyconvolution Operator with a Trigonometric Weight Function for the Hartley Integral Transforms and Applications”, *Integral Transforms and Special Functions* vol. 34, pp. 861–877 (trang 3).
- [48] Krein, M.G. (1958), “Integral Equations on a Half-line with Kernel Depending upon the Difference of the Arguments”, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* vol. 13 (5), pp. 3–120 (trang 4).
- [49] Krein, S.G., Rutman, M.A., Milman, D.P., Smulian, V.L., and Naimark, M.A. (1972), *Functional Analysis*, Groningen, The Netherlands: Wolters-Noordhoff Publishing (trang 97).

- [50] Kress, R. (2014), *Linear Integral Equations*, 3rd ed., vol. 82, Applied Mathematical Sciences, Cham, Switzerland: Springer-Verlag, ISBN: 978-3-319-02604-0 (các trang 4, 80).
- [51] Ku, T.K. and Kuo, C.C.J. (1993), “Preconditioned Iterative Methods for Solving Toeplitz plus Hankel Systems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis* vol. 30 (3), pp. 824–845 (trang 88).
- [52] Lerer, L., Olshevsky, V., and Spitkovsky, I.M., eds., *Convolution Equations and Singular Integral Operators: Selected Papers*, vol. 206, Operator Theory: Advances and Applications, Basel, Switzerland: Birkhäuser Basel, ISBN: 978-3-7643-8955-0 (trang 112).
- [53] Levinson, N. (1947), “The Wiener RMS Error Criterion in Filter Design and Prediction”, *Journal of Mathematics and Physics* vol. 25 (4), pp. 261–278 (trang 6).
- [54] Liflyand, A., Samko, S., and Trigub, R.M. (2012), “The Wiener Algebra of Absolutely Convergent Fourier Integrals: An Overview”, *Analysis and Mathematical Physics* vol. 2 (1), pp. 1–68 (trang 75).
- [55] Liu, F. and Nashed, M.Z. (1998), “Regularization of Nonlinear Ill-Posed Variational Inequalities and Convergence Rates”, *Set-Valued Analysis* vol. 6, pp. 313–344 (trang 34).
- [56] Ma, Y., Zhou, W., Wang, Y., Wang, H., and Cheng, J. (2021), “The Single-Pixel Imaging Using Discrete Hartley Transform for High-Resolution and Efficient Data Acquisition”, *Optics and Lasers in Engineering* vol. 141, p. 106560 (trang 3).
- [57] Mohan, N.L. and Babu, L.A. (1994), “A Note on 2-D Hartley Transform”, *Geophysics* vol. 59, pp. 1150–1155 (trang 3).
- [58] Nair, M.T. (2009), *Linear Operator Equations, Approximation and Regularization*, World Scientific (trang 88).
- [59] Nair, M.T. and Pereverzev, S.V. (2007), “Regularized Collocation Method for Fredholm Integral Equations of the First Kind”, *Journal of Complex* vol. 23, pp. 454–467 (các trang 88, 93).
- [60] Ng, M.K. (1994), “Fast Iterative Methods for Solving Toeplitz-plus-Hankel Least Squares Problems”, *Electronic Transactions on Numerical Analysis* vol. 2, pp. 154–170 (trang 88).

- [61] Nolasco, A.P. and Castro, L.P. (2007), “A Duduchava-Saginashvili’s Type Theory for Wiener-Hopf plus Hankel Operators”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* vol. 331 (1), pp. 329–341 (trang 79).
- [62] Olson, T. (2017), *Applied Fourier Analysis: From Signal Processing to Medical Imaging*, 2nd ed., Applied and Numerical Harmonic Analysis, Cham, Switzerland: Birkhäuser, ISBN: 978-1-4939-7393-4 (các trang 2, 42).
- [63] Osgood, B.G. (2019), *Lectures on the Fourier Transform and Its Applications*, 1st ed., Graduate Studies in Mathematics, Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, ISBN: 978-1-4704-4191-3 (các trang 11, 42).
- [64] Peyré, G. (2020), *The Discrete Algebra of the Fourier Transform* (trang 142).
- [65] Pipkin, A.C. (1991), *A Course on Integral Equations*, vol. 81, Applied Mathematical Sciences, New York, NY: Springer-Verlag, ISBN: 978-0-387-97557-3 (trang 79).
- [66] Plonka, G., Potts, D., Steidl, G., and Tasche, M. (2023), *Numerical Fourier Analysis*, 2nd ed., Applied and Numerical Harmonic Analysis, Cham, Switzerland: Birkhäuser, ISBN: 978-3-030-04305-6 (các trang 11, 17–20, 24–26, 28–30, 142).
- [67] Poularikas, A.D. (2018), *The Transforms and Applications Handbook*, 3rd ed., Florida: CRC Press, ISBN: 978-1-4200-6652-4 (trang 2).
- [68] Precup, R. (2002), *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Singapore: World Scientific, ISBN: 978-981-02-4852-9 (trang 80).
- [69] Prüss, J. (2012), *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Modern Birkhäuser Classics, Basel, Switzerland: Springer Basel, ISBN: 978-3-0348-0498-1 (trang 80).
- [70] Rajavel, P. (2010), “Directional Hartley Transform and Content Based Image Retrieval”, *Signal Processing* vol. 90 (4), pp. 1267–1278 (trang 3).
- [71] Rani, S., Singh, S., and Sharma, S. (2024), “An Efficient Image Security Model Using Discrete Hartley Transform and Fractional Wavelet Transform for Medical Image Applications”, *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing* (trang 3).
- [72] Rudin, W. (1991), *Functional Analysis*, Second edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, New York: McGraw-Hill, ISBN: 0070542368 (các trang 23, 24, 29, 30, 75, 115).

- [73] Sacks, P. (2017), *Techniques of Functional Analysis for Differential and Integral Equations*, Academic Press International Edition, London, UK: Academic Press, ISBN: 978-0-12-810500-9 (trang 80).
- [74] Sakhnovich, L.A. (2012), *Integral Equations with Difference Kernels on Finite Intervals*, 2nd ed., vol. 222, Operator Theory: Advances and Applications, New York: Birkhäuser, ISBN: 978-3-0348-0346-6 (trang 4).
- [75] Scharf, L. and Friedlander, B. (2001), “Toeplitz and Hankel Kernels for Estimating Time-varying Spectra of Discrete-time Random Processes”, *IEEE Transactions on Signal Processing* vol. 49 (1), pp. 179–189 (trang 4).
- [76] Sorensen, H.V., Jones, D.L., Heideman, M.T., and Burrus, S.K. (1985), “On Computing the Discrete Hartley Transform”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* vol. 33, pp. 1231–1238 (trang 3).
- [77] Stein, E.M. and Shakarchi, R. (2011), *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, vol. 4, Princeton Lectures in Analysis, New Jersey: Princeton University Press, ISBN: 978-0-691-11387-6 (trang 11).
- [78] Strang, G. and MacNamara, S. (2014), “Functions of Difference Matrices Are Toeplitz Plus Hankel”, *SIAM Review* vol. 56, pp. 525–546 (trang 6).
- [79] Thao, N.X, Tuan, V.K., and Hong, N.T. (2008), “Generalized Convolution Transforms and Toeplitz Plus Hankel Integral Equations”, *Fractional Calculus and Applied Analysis* vol. 11, pp. 153–174 (trang 6).
- [80] Thao, N.X., Khoa, N.M., and Anh, P.T.V. (2014), “Polyconvolution and the Toeplitz plus Hankel Integral Equation”, *Electronic Journal of Differential Equations*, pp. 1–14 (trang 6).
- [81] Titchmarsh, E.C. (1986), *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, 3rd ed., New York: Chelsea Publishing Co., ISBN: 0828403244 (các trang 23, 29, 30).
- [82] Tsitsiklis, J.N. and Levy, B.C. (1981), “Integral Equations and Resolvents of Toeplitz Plus Hankel Kernels”, *Technical Report LIDS-P-1170, Laboratory for Information and Decision Systems, M.I.T., silver ed.* (các trang 6, 83).

- [83] Tuan, N.M. (2015), “An Approach for Developing Fourier Convolutions and Applications”, *Current Trends in Analysis and Its Applications*, ed. by M.V. Ruzhansky and Z. Zhunussova, Cham, Switzerland: Birkhäuser, pp. 289–297 (trang 41).
- [84] Tuan, N.M. and Huyen, N.T.T. (2010), “The Solvability and Explicit Solutions of Two Integral Equations via Generalized Convolutions”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* vol. 369, pp. 712–718 (trang 6).
- [85] Tuan, N.M. and Tuan, P.D. (2009), “Generalized Convolutions Relative to the Hartley Transforms with Applications”, *Scientiae Mathematicae Japonicae* vol. e-2009 (4), pp. 77–89 (trang 6).
- [86] Tuan, T. (2022), “Operational Properties of the Hartley Convolution and Its Applications”, *Mediterranean Journal of Mathematics* vol. 19 (trang 3).
- [87] Tuan, T. (2022), “Some Results of Watson and Plancherel-type Integral Transforms Related to the Hartley, Fourier Convolutions and Applications”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* vol. 45, pp. 11158–11180 (trang 3).
- [88] Tuan, T., Hoang, P.V., and Hong, N.T. (2018), “Integral Equation of Toeplitz plus Hankel’s Type and Parabolic Equation Related to the Kontorovich-Lebedev-Fourier Generalized Convolutions”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* vol. 41, pp. 8171–8181 (trang 6).
- [89] Volchkov, V.V. (2003), *Integral Geometry and Convolution Equations*, Utrecht, The Netherlands: VSP, ISBN: 978-9067643712 (trang 112).
- [90] Wazwaz, A.M. (2011), *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications*, 1st ed., New York: Springer, ISBN: 978-3-642-21448-6 (trang 4).
- [91] Widom, H. (1961), “On the Continuous Invertibility of a Class of Operators”, *Transactions of the American Mathematical Society* vol. 100 (2), pp. 313–322 (trang 5).
- [92] Widom, H. (1974), “Asymptotic Behavior of Block Toeplitz Matrices and Determinants”, *Advances in Mathematics* vol. 13 (3), pp. 284–322 (trang 5).
- [93] Zayed, A.I. (2024), *Fractional Integral Transforms: Theory and Applications*, 1st ed., Florida: CRC Press, ISBN: 978-0-367-54387-7 (trang 1).

- [94] Zemyan, A. (2012), *The Classical Theory of Integral Equations: A Concise Introduction*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Massachusetts: Birkhäuser, ISBN: 978-0-8176-8344-9 (trang 4).
- [95] Zhang, H. and Ma, J. (2020), “Hartley Spectral Pooling for Deep Learning”, *SIAM Transactions on Applied Mathematics* vol. 1 (3), pp. 518–529 (trang 3).
- [96] Zygmund, A. (2002), *Trigonometric Series*, 3rd ed., Cambridge Mathematical Library, Volumes I & II combined, with a Foreword by Robert Fefferman, Cambridge: Cambridge University Press, ISBN: 0521890535 (các trang 41, 42).

Phụ lục

Trong lĩnh vực xử lý tín hiệu số, dữ liệu cần xử lý được lấy mẫu tại các điểm rời rạc. Vì vậy, việc nghiên cứu và phát triển các phép biến đổi tích phân rời rạc, cũng như các thuật toán để tính toán hiệu quả là vô cùng cần thiết. Trong phần này, luận án trình bày cơ sở lý thuyết và các thuật toán luận án đã sử dụng để tính toán thực nghiệm các kết quả đã đạt được. Cụ thể, luận án đã sử dụng các phép biến đổi Hartley rời rạc (DHT) để tính toán nghiệm gần đúng của các FIE-II và FIE-I được trình bày trong chương 3, sử dụng biến đổi Hartley nhanh (FHT) để tính toán nghiệm xấp xỉ của các phương trình tích chập được trình bày trong chương 3. Nội dung được trình bày trong phần này được tham khảo trong các tài liệu [23, 64, 66].

1 Biến đổi Fourier rời rạc

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT) đóng vai trò rất quan trọng và được sử dụng phổ biến trong các lĩnh vực khoa học và kỹ thuật hiện đại. Vai trò của DFT có sự đóng góp rất lớn từ sự tồn tại của các thuật toán FFT. Các thuật toán FFT đã hiện thực hóa lĩnh vực phân tích phổ tần số tín hiệu từ những khái niệm mang tính chất lý thuyết, và là nền tảng của vô số những ứng dụng trong thực tế, bao trùm mọi lĩnh vực khoa học và kỹ thuật.

Định nghĩa 5.1 (Biến đổi Fourier rời rạc) Biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của một mẫu dữ liệu $\mathbf{f} := (f[n])_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ là một dãy số $\mathcal{F}\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}} := (\hat{f}[k])_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ được định nghĩa như sau:

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \omega_N^{-nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.1)$$

trong đó, $\omega_N = e^{\frac{i2\pi}{N}}$ là nghiệm phức nguyên thủy của 1.

Mệnh đề 5.1 (Biến đổi Fourier ngược rời rạc) *Dữ liệu gốc có thể được khôi phục lại từ biến đổi Fourier ngược rời rạc (DIFT), được xác định qua công thức*

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] \omega_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

1.1 Biểu diễn dạng ma trận

Toán tử DFT $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận chính tắc

$$\Omega_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_N^{-1} & \omega_N^{-2} & \dots & \omega_N^{-(N-1)} \\ 1 & \omega_N^{-2} & \omega_N^{-4} & \dots & \omega_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{-(N-1)} & \omega_N^{-2(N-1)} & \dots & \omega_N^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

Khi đó, DFT của một mẫu dữ liệu rời rạc $\mathbf{f} := [f[0], f[1], \dots, f[N-1]]$ có thể được viết dưới dạng

$$\hat{\mathbf{f}} = \Omega_N \mathbf{f}.$$

Nghịch đảo của ma trận Ω_N là $\frac{1}{N} \Omega_N^*$. Do đó, $\frac{1}{\sqrt{N}} \Omega_N$ là ma trận unita, tức là $\Omega_N \Omega_N^* = N \mathcal{I}_N$.

1.2 Tích chập liên kết với biến đổi Fourier rời rạc

Định nghĩa 5.2 (Tích chập Fourier rời rạc) Cho $\mathbf{f} := (f[n])_{n=0}^{N-1}$ và $\mathbf{g} := (g[n])_{n=0}^{N-1}$ là các mẫu dữ liệu rời rạc. Tích chập rời rạc của hai mẫu $\mathbf{f}$ và $\mathbf{g}$, ký hiệu là $\mathbf{f} * \mathbf{g}$, được định nghĩa là

$$(f * g)[n] := \sum_{k=0}^n f[k] g[(n-k)] + \sum_{k=n+1}^{N-1} f[k] g[n-k+N], \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Mệnh đề 5.2 (Định lý tích chập Fourier rời rạc) Cho $\mathbf{f} := (f[n])_{n=0}^{N-1}$ và $\mathbf{g} := (g[n])_{n=0}^{N-1}$ là các mẫu dữ liệu rời rạc. Tích chập Fourier rời rạc thỏa mãn hệ thức

$$\mathcal{F}(f * g)[n] = \hat{f}[n] \hat{g}[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

1.3 Tính đối xứng của biến đổi Fourier rời rạc

Định nghĩa 5.3 (Toán tử đối xứng) Cho $\mathbf{f} := [f[0], f[1], \dots, f[N-1]]$ là một vector kích thước N . Ta định nghĩa vector đối xứng tuần hoàn $\mathbf{f}^\#$ của $\mathbf{f}$ như sau:

$$\mathbf{f}^\#[k] := \mathbf{f}[(-k) \pmod{N}], \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Cụ thể, $\mathbf{f}^\# := [f[0], f[N-1], f[N-2], \dots, f[1]]$. Vector $\mathbf{f}$ được gọi là đối xứng nếu $\mathbf{f}^\# = \mathbf{f}$, và được gọi là phản đối xứng nếu $\mathbf{f}^\# = -\mathbf{f}$.

Định nghĩa 5.4 Cho $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^N$. Ký hiệu $\mathbf{f}_S$ và $\mathbf{f}_A$ là phần đối xứng và phần phản đối xứng của $\mathbf{f}$, được định nghĩa là

$$\mathbf{f}_S := \frac{1}{2}(\mathbf{f} + \mathbf{f}^\#), \quad \mathbf{f}_A := \frac{1}{2}(\mathbf{f} - \mathbf{f}^\#).$$

Mệnh đề 5.3 Cho $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^N$. Ta có các tính chất sau đây.

- (i) $\mathcal{F}(\mathbf{f}^\#) = N\mathcal{F}^{-1}(\mathbf{f})$ và $\mathcal{F}^2(\mathbf{f}^\#) = N\mathbf{f}$.
- (ii) Nếu $\mathbf{f}$ đối xứng, thì ta có $\mathcal{F}^2(\mathbf{f}) = N\mathbf{f}$ và $\mathcal{F}(\mathbf{f})$ là đối xứng. Nếu $\mathbf{f}$ là phản đối xứng, thì ta có $\mathcal{F}^2(\mathbf{f}) = -N\mathbf{f}$ và $\mathcal{F}(\mathbf{f})$ là phản đối xứng.
- (iii) Nếu $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ là đối xứng, thì $\mathcal{F}(\mathbf{f}) \in \mathbb{R}^n$. Nếu $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ là phản đối xứng, thì $\mathcal{F}(\mathbf{f}) \in (i\mathbb{R})^N$.

2 Biến đổi Hartley rời rạc

Biến đổi Fourier rời rạc được định nghĩa trên miền số phức, điều này có thể gây lãng phí khi xử lý tín hiệu thực, do số phép tính số học cần thực hiện và dung lượng bộ nhớ cần lưu trữ trong quá trình tính toán với số phức nhiều hơn so với số thực. Hơn nữa, việc phải thực hiện nhiều phép tính số học hơn cũng có thể làm cho các sai số làm tròn bị khuếch đại. Biến đổi Hartley rời rạc (DHT) được tính toán hoàn toàn trên miền số thực, đã được nghiên cứu và phát triển với mục đích cải thiện hiệu suất của DFT khi xử lý tín hiệu thực. Biến đổi Hartley rời rạc có ý nghĩa tương tự như DFT, và cũng đã được nghiên cứu phát triển các thuật toán biến đổi Hartley nhanh (FHT) để ứng dụng trong thực tế. So với các thuật toán FFT, các thuật toán FHT có thể chỉ cần thực hiện một nửa số phép tính số học và sử dụng một nửa dung lượng bộ nhớ cần lưu trữ trong quá trình tính toán.

Định nghĩa 5.5 (Biến đổi Hartley rời rạc) Biến đổi Hartley rời rạc (DHT) của một mẫu dữ liệu $\mathbf{f} := (f[k])_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$ là một dãy số $\mathcal{H}\mathbf{f} = \mathbf{f}_h := (\hat{f}_h[k])_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$ được định nghĩa là

$$\hat{f}_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right), \quad \hat{f}_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \operatorname{cas}\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right), \quad k = 0, 2, \dots, N-1.$$

Mệnh đề 5.4 (Biến đổi Hartley ngược rời rạc) Biến đổi Hartley rời rạc $\mathcal{H}$ là một đẳng cấu từ $\mathbb{R}^N$ vào $\mathbb{R}^N$. Hơn nữa, với $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$, ta có $\mathcal{H}^2(\mathbf{f}) = N\mathbf{f}$. Do đó, toán tử biến đổi Hartley ngược rời rạc (DIHT) thỏa mãn hệ thức $\mathcal{H}^{-1} = \frac{1}{N}\mathcal{H}$.

2.1 Mối liên hệ giữa biến đổi Fourier rời rạc và biến đổi Hartley rời rạc

Biến đổi Fourier rời rạc và DHT có mối quan hệ gần gũi, có thể tính toán DFT qua DHT và ngược lại. Mối liên hệ này được thể hiện qua các hệ thức

$$\mathcal{F}\mathbf{f} = (\mathcal{H}_1\mathbf{f})_e - i(\mathcal{H}_1\mathbf{f})_o = (\mathcal{H}_2\mathbf{f})_e + i(\mathcal{H}_2\mathbf{f})_o.$$

$$\mathcal{H}_1\mathbf{f} = \operatorname{Re}(\mathcal{F}\mathbf{f}) - \operatorname{Im}(\mathcal{F}\mathbf{f}), \quad \mathcal{H}_2\mathbf{f} = \operatorname{Re}(\mathcal{F}\mathbf{f}) + \operatorname{Im}(\mathcal{F}\mathbf{f}).$$

$$\operatorname{Re}(\mathcal{F}\mathbf{f}) = (\mathcal{H}_1\mathbf{f})_e = (\mathcal{H}_2\mathbf{f})_e, \quad \operatorname{Im}(\mathcal{F}\mathbf{f}) = (\mathcal{H}_1\mathbf{f})_o = -(\mathcal{H}_2\mathbf{f})_o.$$

Các thành phần $(\mathcal{H}\mathbf{f})_e$ và $(\mathcal{H}\mathbf{f})_o$ được gọi là phần chẵn và phần lẻ của DHT tương ứng.

2.2 Thuật toán biến đổi Hartley nhanh

Cho mẫu dữ liệu $(f[n])_{n=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N$. Công thức tính trực tiếp N hệ số của DHT như sau:

$$\hat{f}_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi nk}{N}\right), \quad \hat{f}_2[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \operatorname{cas}\left(-\frac{2\pi nk}{N}\right), \quad k = 0, 2, \dots, N-1.$$

Theo công thức trên, tính toán DHT của một mẫu dữ liệu có kích thước N cần N^2 phép tính số học, tức là có độ phức tạp tính toán $O(N^2)$. Dựa trên nguyên lý chia để trị, các thuật toán FHT đã được phát triển và đạt được hiệu suất vượt trội so với việc tính toán trực tiếp, giảm độ phức tạp tính toán xuống còn $O(N \log N)$, tương tự như đối với các thuật toán FFT.

Ta trình bày ý tưởng để thiết lập thuật toán FHT cho DHT $\mathcal{H}_1$. Từ định nghĩa biến đổi Hartley rời rạc, ta có thể viết lại công thức dưới dạng

$$\mathcal{H}_1(f)[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi}{N}2nk\right) + \sum_{n=0}^{N/2-1} f[2n+1] \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi}{N}(2n+1)k\right). \quad (5.2)$$

Ký hiệu phần chỉ số chẵn và phần chỉ số lẻ của $\mathbf{f}$ là

$$\mathbf{f}_{2k} := (f[0], f[2], \dots, f[N-2]), \quad \mathbf{f}_{2k+1} := (f[1], f[3], \dots, f[N-1]).$$

Từ hệ thức $\operatorname{cas}(x+y) = \operatorname{cas}(x)\cos(y) + \operatorname{cas}(-x)\sin(y)$, (5.2) có thể được viết lại dưới dạng

$$\mathcal{H}_1(f)[k] = \mathcal{H}_1(\mathbf{f}_{2k})[k] + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \mathcal{H}_1(\mathbf{f}_{2k+1})[k] + \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \mathcal{H}_1(\mathbf{f}_{2k+1})[-k].$$

Ký hiệu phần bên trái và phần bên phải của biến đổi Hartley $\hat{\mathbf{f}}_1$ là

$$\hat{\mathbf{f}}_{1l} := (\hat{f}_1[0], \hat{f}_1[1], \dots, \hat{f}_1[N/2-1]), \quad \hat{\mathbf{f}}_{1r} := (\hat{f}_1[N/2], \hat{f}_1[N/2+1], \dots, \hat{f}_1[N-1]).$$

Định nghĩa toán tử χ_N^x , với $x \in \mathbb{R}$, như sau:

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^N, \chi_N^x \mathbf{a} := \left\{ a[k] \cos\left(\frac{2\pi kx}{N}\right) + a^\#[k] \sin\left(\frac{2\pi kx}{N}\right) \right\}_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{R}^N. \quad (5.3)$$

Khi đó, chia vector $\hat{\mathbf{f}}_1$ thành các phần bên trái và phần bên phải, và từ hệ thức

$$\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi}{N}\left(n + \frac{N}{2}\right)\right) = -\operatorname{cas}\left(\frac{2\pi}{N}n\right),$$

ta nhận được công thức truy hồi

$$\hat{\mathbf{f}}_{1l} = \mathcal{H}_1(\mathbf{f}_{2k}) + \chi_{N/2}^{1/2} \mathcal{H}_1(\mathbf{f}_{2k+1}), \quad \hat{\mathbf{f}}_{1r} = \mathcal{H}_1(\mathbf{f}_{2k}) - \chi_{N/2}^{1/2} \mathcal{H}_1(\mathbf{f}_{2k+1}).$$

Từ các công thức này, ta có thể thiết lập thuật toán FHT.

Nhận xét 5.14 Thuật toán cho DHT $\mathcal{H}_2$ ta thay bằng dấu trừ $(-)$ trong biểu thức (5.3).

Thuật toán 1: Thuật toán FHT

Dữ liệu đầu vào: Dãy đầu vào $\mathbf{f}$ với độ dài $N = 2^k$.

Dữ liệu đầu ra: Dãy các biến đổi Hartley rời rạc $\hat{\mathbf{f}}_h$, $h = \{1, 2\}$ của $\mathbf{f}$.

if $N = 1$ **then**

return $\mathbf{f}$;

end

else

for $k = 0$ **to** $N/2 - 1$ **do**

$f_{2k}[k] = f[2k]$;

$f_{2k+1}[k] = f[2k + 1]$;

end

$\hat{\mathbf{f}}_{h,2k} = \text{FHT}(\mathbf{f}_{2k})$;

$\hat{\mathbf{f}}_{h,2k+1} = \text{FHT}(\mathbf{f}_{2k+1})$;

for $k = 0$ **to** $N/2 - 1$ **do**

$\hat{f}_h[k] = \hat{f}_{h,2k}[k] + \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot \hat{f}_{h,2k+1}[k] \pm \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot \hat{f}_{h,2k+1}[N - k] \right)$;

$\hat{f}_h[k + N/2] = \hat{f}_{h,2k}[k] - \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot \hat{f}_{h,2k+1}[k] \pm \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot \hat{f}_{h,2k+1}[N - k] \right)$;

end

return $\hat{\mathbf{f}}_h$;

end

2.3 Tích chập của biến đổi Hartley rời rạc

Mệnh đề 5.5 (Định lý tích chập Hartley rời rạc) Cho $\mathbf{f}$ và $\mathbf{g}$ là hai vector thuộc $\mathbb{R}^N$. Tích chập Hartley rời rạc của $\mathbf{f}$ và $\mathbf{g}$, ký hiệu là $\mathbf{f} * \mathbf{g}$, được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{H}(\mathbf{f} * \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{H}(\mathbf{f})\mathcal{H}(\mathbf{g}) - \mathcal{H}(\mathbf{f})^\# \mathcal{H}(\mathbf{g})^\# + \mathcal{H}(\mathbf{f})\mathcal{H}(\mathbf{g})^\# + \mathcal{H}(\mathbf{f})^\# \mathcal{H}(\mathbf{g}) \right].$$

Cụ thể, ta có

$$\mathcal{H}(f * g)[k] = \frac{1}{2} \left[\hat{f}[k](\hat{g}[k] + \hat{g}[N - 1 - k]) + \hat{f}[N - 1 - k](\hat{g}[k] - \hat{g}[N - 1 - k]) \right],$$

trong đó, $k = 0, \dots, N - 1$.

3 Biến đổi Fourier mở rộng

Biến đổi Fourier mở rộng (*eXtended Fourier Transform* - XFT) là các thuật toán cho phép tính toán các FTT một cách hiệu quả, được phát triển trên cơ sở phương pháp cầu phương biến đổi Fourier phân thứ (FrFT), do Rafael G. Campos và các cộng sự đã nghiên cứu trong nhiều năm qua. Thuật toán này có thể được phát triển thuật toán riêng, hoặc cũng có thể kết hợp sử dụng các thuật toán FFT. Nhờ có thể tận dụng các thuật toán FFT, và do các thuật toán FFT có độ phức tạp tính toán là $O(N \log N)$, nên các thuật toán XFT cũng có thể đạt được độ phức tạp tính toán không quá $O(N \log N)$. Hơn nữa, các thuật toán XFT được chứng minh có độ chính xác cao hơn và linh hoạt hơn so với các thuật toán FFT thông thường (xem [23]).

3.1 Thuật toán XFT tính xấp xỉ biến đổi Fourier

Cho dữ liệu cần tính toán FT là một vector $\mathbf{f} := [f_1, f_2, \dots, f_N] \in \mathbb{C}^N$, dữ liệu này có thể nhận được bằng kinh nghiệm, hoặc từ một hàm $f(t)$ với phân hoạch cách đều $\{t_k\}_{k=1}^N$. Thuật toán XFT để tính xấp xỉ FT của vector $\mathbf{f}$ tại các giá trị $\hat{f}(4\omega_k/\pi)$, $\omega_k = t_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, được thực hiện theo các bước dưới đây.

1. Xác định các điểm phân hoạch đều:

$$t_k = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \left(k - \frac{N+1}{2} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

2. Xác định dữ liệu cần tính toán, hoặc giá trị của hàm f tại các điểm phân hoạch đều t_k :

$$f_k = f(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

3. Tính toán các giá trị $\hat{f}_k := \hat{f}(4\omega_k/\pi)$, $\omega_k = t_k$, $k = 1, 2, \dots, N$ theo công thức:

$$\hat{f}_k \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{\sqrt{2N}} e^{-i\frac{\pi}{2} \frac{(N-1)^2}{N}} S.(\Omega_N.(S.\mathbf{f})),$$

trong đó, S là một ma trận đường chéo có các giá trị trên đường chéo chính là $\exp \left\{ i \frac{\pi(N-1)k}{N} \right\}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. Do $\Omega_N.(S.\mathbf{f})$ có dạng tích của một ma trận và một vector nên có thể sử dụng thuật toán FFT để tính toán.

Thuật toán 2: XFT tính xấp xỉ FT của hàm f

Dữ liệu đầu vào: Dãy số $\mathbf{f} := [f_1, f_2, \dots, f_N]$ với độ dài N

Dữ liệu đầu ra: Dãy biến đổi Fourier rời rạc $\hat{\mathbf{f}} = [\hat{f}(\frac{4}{\pi}\omega_1), \hat{f}(\frac{4}{\pi}\omega_2), \dots, \hat{f}(\frac{4}{\pi}\omega_N)]$

/ 1. Chọn các điểm phân hoạch đều t_k */*

/ 2. Tính các giá trị $f(t_k)$ của hàm f tại các điểm phân hoạch t_k */*

/ 3. Tính toán ma trận đường chéo S */*

for $k = 1$ **to** N **do**

$t_k = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} \left(k - \frac{N+1}{2}\right);$	<i>/* Tính toán các điểm phân hoạch đều t_k */</i>
$f_k \leftarrow f(t_k);$	<i>/* Tính giá trị của hàm f tại các điểm t_k */</i>
$S_k \leftarrow \exp\left(i \frac{\pi(N-1)k}{N}\right);$	<i>/* Tính toán ma trận đường chéo S */</i>

end

/ 4. Tính toán các giá trị là biến đổi Fourier của hàm f */*

for $k = 1$ **to** N **do**

$\hat{f}_k \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{\sqrt{2N}} e^{-i \frac{\pi}{2} \frac{(N-1)^2}{N}} S \cdot \text{FFT}(\Omega_N \cdot (S \cdot \mathbf{f}));$	<i>/* Sử dụng FFT để tính toán $\hat{\mathbf{f}}$ */</i>
--	---

end

return $\hat{\mathbf{f}};$

3.2 Thuật toán XFT tính xấp xỉ biến đổi Fourier-cosine và Fourier-sine

Cho dữ liệu cần tính toán FCT và FST là một vector $\mathbf{f} := [f_1, f_2, \dots, f_N] \in \mathbb{R}^N$, dữ liệu này có thể nhận được bằng kinh nghiệm, hoặc từ một hàm $f(t)$ với phân hoạch cách đều $\{t_k\}_{k=1}^N$. Thuật toán XFT để tính xấp xỉ FCT và FST của vector $\mathbf{f}$ tại các giá trị $\hat{f}_c(4\omega_k/\pi)$ và $\hat{f}_s(4\omega_k/\pi)$ $\omega_k = t_k, k = 1, 2, \dots, N$, được thực hiện theo các bước dưới đây.

1. Đặt $M = 2N$

2. Xác định các điểm phân hoạch đều:

$$t_k = \frac{\pi}{\sqrt{2M}} \left(k - \frac{M+1}{2}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

3. Xác định mẫu dữ liệu cần tính toán, hoặc giá trị của hàm f tại các điểm phân hoạch t_k :

$$f_k = f(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

4. Đặt $\tilde{\mathbf{f}}^+ := [\mathcal{I}\mathbf{f}, \mathbf{f}]$ và $\tilde{\mathbf{f}}^- := [-\mathcal{I}\mathbf{f}, \mathbf{f}]$, trong đó $\mathcal{I}$ là một ma trận được xác định bởi $\mathcal{I}_{jk} = \delta_{j, N-k+1}$.

5. Tính toán các giá trị $\tilde{\mathbf{f}}_c, \tilde{\mathbf{f}}_s$ theo các công thức

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_c &\leftarrow \frac{\pi}{\sqrt{2M}} e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{(M-1)^2}{M}} S.(\Omega_M.(S.\tilde{\mathbf{f}}^+)), \\ \tilde{\mathbf{f}}_s &\leftarrow \frac{\pi}{\sqrt{2M}} e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{(M-1)^2}{M}} S.(\Omega_M.(S.\tilde{\mathbf{f}}^-)),\end{aligned}$$

trong đó, S là một ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo chính có giá trị là $\exp\left\{-i\pi\frac{(M-1)k}{M}\right\}$, $k = 0, 1, \dots, M-1$. Do $\Omega_M.(S.\tilde{\mathbf{f}}^+)$ và $\Omega_M.(S.\tilde{\mathbf{f}}^-)$ có dạng tích của một ma trận và một vector, ta có thể sử dụng thuật toán FFT để tính toán.

6. Các giá trị $\hat{\mathbf{f}}_c$ và $\hat{\mathbf{f}}_s$ nhận được như sau:

$$\hat{f}_{ck} = \frac{1}{2}\tilde{f}_{c(N+k)}, \quad \hat{f}_{sk} = \frac{i}{2}\tilde{f}_{s(N+k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

4 Chương trình sử dụng Matlab



```
1 %% The routine computes chi operator of HT
  %% Usage: operator_chi(f, type)
3 % The parameter: type = 1 for H1, type = 2 for H2
  % -----
5 function chi = operator_chi(a, x, type)
  N = length(a);
7 a_inv = [a(1), a(N:-1:2)];
  k = 1:N;
9 if (type == 1)
    chi = a.*cos(2*pi*x*(k-1)/N) + a_inv .* sin(2*pi*x*(k-1)/N);
11 else
    chi = a.*cos(2*pi*x*(k-1)/N) - a_inv .* sin(2*pi*x*(k-1)/N);
13 end
end
```



```
% % The FHT algorithm to compute DHT
2 % % Usage: F = fht(f, type);
% The parameter: type = 1 for H1, type = 2 for H2
4 % N = length(f) must be a power of 2
% -----
6 function F = fht(f, type)
    if ((type ~= 1) || (type ~= 2))
8         F = f;
        return;
10    end

12    N = length(f);
    M = N/2;
14    if (N == 1)
        F = f;
16    return;
    end

18
    F = zeros(size(f));
20 % Construction of the two sub-vectors
    f_e = f(1:2:(N-1));
22 f_o = f(2:2:N);

24 % Recursive calls
    f_e = fht(f_e, type);
26 f_o = fht(f_o, type);

28 % Application of the chi operator
    f_o = operator_chi(f_o, 0.5, type);
30

    % Mix of the two results
32 F(1:M) = f_e + f_o;
    F((M + 1):N) = f_e - f_o;
34 end
```



```

%% The routine computes the XFT of the vector f
2 %% Usage: g = xft(f);
%% Example: Defining length, constants, and the vector of abscissas:
4 % N = 2^10; a = 4/pi; epsi = pi/sqrt(2*N); t = epsi*((1:N)-(N+1)/2);
%% Defining a function, its Fourier transform, and the xft transform:
6 % f = rectpuls(t,10); ge = 10*sinc(5*a*t/pi); ga = xft(f);
%% Displaying the output:
8 % ng = 400;
% tp = t(ng:N-ng+1); gep = ge(ng:N-ng+1); gap = ga(ng:N-ng+1);
10 % -----
function g = xft(f)
12 % Defining constants and phase factors:
N = length(f);
14 a0_inv = pi*exp(-1i*pi*(N-1)^2/2/N)/sqrt(2*N);
S_inv = exp(1i*pi*(N-1)*(0:N-1)/N);
16 % Computing the XFT transform of f:
g = (1/sqrt(2*pi))*a0_inv*S_inv.*fft(S_inv.*f)/N;

```



```

1 %% The routine computes the inverse XFT (as an inverse matrix)
%% Usage: f = ixft(g);
3 %% Example: Defining length, constants, and abscissas:
% N = 2^10; a = 4/pi; epsi = pi/sqrt(2*N); t = epsi*((1:N)-(N+1)/2);
5 % gev = 10*sinc(5*a*t/pi); fa = a*ixft(gev);
% fep = f(ng:N-ng+1); fap = fa(ng:N-ng+1);
7 % -----
function f = ixft(g)
9 % Defining the length, a constant and the phase factors:
N = length(g);
11 a0 = sqrt(2*N)*exp(1i*pi*(N-1)^2/2/N)/pi;
S = exp(-1i*pi*(N-1)*(0:N-1)/N);
13 % Computing the inverse XFT:
f = (1/sqrt(2*pi))*a0*S.*ifft(S.*g)*N;

```



```

%%The routine computes the XFT cosine transform of the vector f
2 %% Usage: g = xftcos(f);
%% Example: Defining lengths, constants, and abscissas:
4 % M = 2^8; N = 2*M; a = 4/pi; t = ((1:M)-1/2)*pi/sqrt(4*M);
%% Defining the function and computing the cosine transform:
6 % f = sinc(t/pi); ge = pi*(1+sign(1-a*t))/4; ga = real(xftcos(f));
% -----
8 function g = xftcos(f)
% Defining length and vectors:
10 M = length(f);
    fhat = horzcat(flip(f), f);
12 ghat = xft(fhat)/2;
% Computing the XFT cosine transform:
14 g = ghat(M + 1:2*M);

```



```

%% Solving first-kind integral equation using FBSM.
2 %% Usage: phi_n = fbsm(t, n);
%% Example: Defining length, constants, and abscissas:
4 % N = 2^10; t_min = -pi, t_max = pi; t = linspace(t_min, t_max, N);
% n = 100;
% -----
function phi_n = fbsm(t, n)
8 N = length(t);
% Define functions
10 p = @(t) 1 + 8*(cos(t).^2);
    q = @(t) cos(-2*t) - sin(2*t);
12 phi = @(t) 10*(1/(sqrt(2*pi)))*(cos(t) + sin(t));

14 % Data sampling
    p_t = p(t);
16 q_t = q(t);
    phi_t = phi(t);

```



```
18
    % Compute the Hartley coefficients using HFT
20 P1 = fht(p_t, 1);
    P1 = P1/N;
22 P2 = fht(p_t, 2);
    P2 = P2/N;
24 Q1 = fht(q_t, 1);
    Q1 = Q1/N;
26 Q2 = fht(q_t, 2);
    Q2 = Q2/N;
28 A = 4 + P1 + P2 + Q1 - Q2;
    A_ = 4 + P2 + P1 + Q2 - Q1;
30 B = P1 - P2 + Q1 + Q2;
    B_ = P2 - P1 + Q2 + Q1;
32 D = A.*A_ - B.*B_;

34 % Calculate approximate solution
    for m = 1:n
36     alpha_m = 1/sqrt(m + 1);
        f_m = (3 - alpha_m)*phi_t - ((1/(2*pi))*trapz(t, cos(phi_t)) - 1)*(
            ⇐ cos(t) + sin(t));
38     F1_m = fht(f_m, 1);
        F1_m = F1_m/N;
40     F2_m = fht(f_m, 2);
        F2_m = F2_m/N;
42     D1 = A_.*F1_m - B.*F2_m;
        D2 = A.*F2_m - B_.*F1_m;
44     D1D = D1./D;
        D2D = D2./D;

46
        phi_t = zeros(size(t));
48     for k = 1:N
        if (k == 1)
50         phi_t = phi_t + D1D(1);
        else
```



```

52     phi_t = phi_t + D1D(k)*(cos((k - 1)*t) + sin((k - 1)*t)) + D2D(k
    ↪ )*(cos((k - 1)*t) - sin((k - 1)*t));
        end
54     end
        end

```



```

1 %% Solving second-kind integral equation using FBFSM.
  %% Usage: phi_n = fbfsm(t, n);
3 %% Example: Defining length, constants, and abscissas:
  % N = 2^10; t_min = -pi, t_max = pi; t = linspace(t_min, t_max, N);
5 % n = 100;
  % -----
7 function phi_n = fbfsm(t, n)
  N = length(t);
9 % Define functions
  p = @(t) 1 + 8*(cos(t).^2);
11 q = @(t) cos(-2*t) - sin(2*t);
  phi = @(t) 10*(1/(sqrt(2*pi)))*(cos(t) + sin(t));
13
  % Data sampling
15 p_t = p(t);
  q_t = q(t);
17 phi_t = phi(t);

19 % Compute the Hartley coefficients using HFT
  P1 = fht(p_t, 1);
21 P1 = P1/N;
  P2 = fht(p_t, 2);
23 P2 = P2/N;
  Q1 = fht(q_t, 1);
25 Q1 = Q1/N;
  Q2 = fht(q_t, 2);
27 Q2 = Q2/N;

```



```
A = 4 + P1 + P2 + Q1 - Q2;  
29 A_ = 4 + P2 + P1 + Q2 - Q1;  
    B = P1 - P2 + Q1 + Q2;  
31 B_ = P2 - P1 + Q2 + Q1;  
    D = A.*A_ - B.*B_;  
33  
    % Calculate approximate solution  
35 for m = 1:n  
    alpha_m = 1/sqrt(n + 1);  
37 f_m = (3 - alpha_n)*phi_t - ((1/(2*pi))*trapz(t, cos(phi_t)) - 1)*(  
    ↪ cos(t) + sin(t));  
    F1_m = fht(f_m, 1);  
39 F1_m = F1_m/N;  
    F2_m = fht(f_m, 2);  
41 F2_m = F2_m/N;  
    D1 = A_.*F1_m - B.*F2_m;  
43 D2 = A.*F2_m - B_.*F1_m;  
    D1D = D1./D;  
45 D2D = D2./D;  
  
47 psi_t = zeros(size(t));  
    for k = 1:N  
49     if (k == 1)  
        psi_t = psi_t + D1D(1);  
51     else  
        psi_t = psi_t + D1D(k)*(cos((k - 1)*t) + sin((k - 1)*t)) + D2D(k  
    ↪ )*(cos((k - 1)*t) - sin((k - 1)*t));  
53     end  
    end  
55 phi_t = (3/4)*psi_t + (1/4)*(phi_t + (1/(2*pi))*trapz(t, cos(phi_t)  
    ↪ - cos(psi_t))).*(cos(t) + sin(t));  
end
```